JOSEPH PÉRÈS

Contribution à l'étude des jets fluides

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 57-66.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__57_0>

Contribution à l'étude des jets fluides;

Par Joseph PÉRÈS.

---

1. Dans son Mémoire fondamental sur la question [1], M. Volterra subdivise en deux le problème de la détermination des jets fluides :

a. Recherche du potentiel des vitesses V sur la surface libre σ [laquelle est connue et a l'équation $\rho_3 = \rho_0$ (constante) en coordonnées curvilignes orthogonales ρ_1, ρ_2, ρ_3, l'élément linéaire de l'espace est $ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + H_3^2 d\rho_3^2$]. Ce potentiel V prend sur σ des valeurs $V_0(\rho_1, \rho_2)$ vérifiant l'équation

$$\nabla V_0 = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_2}\right)^2 = 2P - h, \tag{1}$$

où P, qui dépend des forces de masse agissant sur le liquide, est fonction connue de $\rho_1 \rho_2$ sur σ. Les *lignes de courant* correspondantes sont identiques aux *trajectoires* d'un point M, de masse unité, mobile sans frottement sur la surface σ, supposée réalisée comme surface rigide, et sous l'action de forces dont la fonction de forces serait P. Ces lignes de courant sont donc connues dans les cas, assez nombreux, où l'on connaît les trajectoires.

b. Recherche de V en dehors de σ. — C'est une fonction harmonique qui, sur σ, prend des valeurs connues (V_0) ainsi que sa dérivée normale (laquelle est nulle). On a donc un problème du type de Cauchy

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 9e série, t. XI, 1932, p. 1. Nous suivrons ici les notations de ce Mémoire, auquel le lecteur est prié de se reporter pour la démonstration des résultats rappelés dans le no 1.

pour l'équation de Laplace et l'on sait qu'un tel problème présente des difficultés spéciales mises en évidence par M. Hadamard. On les évitera en se bornant au cas des données analytiques : on sait alors que la solution existe et l'on pourra, comme l'indique M. Volterra, la définir par un développement en série

$$(2)\quad V = V_0(\rho_1, \rho_2) + \frac{\rho^2}{2!} V_2(\rho_1, \rho_2) + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} V_n(\rho_1, \rho_2) + \ldots \qquad (\rho = \rho_3 - \rho_0),$$

où les coefficients V_n s'obtiennent de proche en proche.

2. Vu l'identité, rappelée en *a* précédent, entre les mouvements des particules fluides sur σ et les trajectoires de M, on peut se demander quelle est la réaction de σ sur M.

La réponse à cette question dépend essentiellement de la façon dont on prolongera, en dehors de σ, la fonction des forces P, laquelle n'est connue, de prime abord, que sur σ.

Mais l'équation

$$(3)\qquad \begin{aligned} \nabla V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \\ &= \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right)^2 + \frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right)^2 = 2P + h \end{aligned}$$

donne, dès que V est connue, la seule façon naturelle de prolonger P en dehors de σ. Il est à peu près intuitif que, avec cette définition de P, la réaction en question sera nulle : *le mouvement d'une particule liquide sur σ est le même que celui d'un point libre, de masse unité, lancé avec la vitesse convenable et soumis à la fonction des forces* P.

La vérification peut se faire par le calcul suivant : dans le mouvement de M sur σ ($\rho_3 = \rho_0 =$ const.) la troisième équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \rho_3'} - \frac{\partial T}{\partial \rho_3} = \frac{\partial P}{\partial \rho_3} + \lambda$$

définit la réaction, laquelle est proportionnelle au multiplicateur λ. On a donc

$$\lambda = -\frac{\partial P}{\partial \rho_3} - H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} \rho_1'^2 - H_2 \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} \rho_2'^2.$$

et, enfin, en remplaçant les β_j par leurs valeurs $\left(\dfrac{1}{H_j^2}\dfrac{\partial V_0}{\partial \rho_j}\right)$,

$$Z = -\frac{\partial P}{\partial \rho_3} - \frac{1}{H_1^3}\frac{\partial H_1}{\partial \rho_3}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_1}\right)^2 - \frac{1}{H_2^3}\frac{\partial H_2}{\partial \rho_3}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_2}\right)^2.$$

D'ailleurs la dérivation de (3) donne

$$\frac{\partial P}{\partial \rho_3} = \sum_{j=1}^{j=3}\frac{1}{H_j^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_j\,\partial \rho_3}\frac{\partial V}{\partial \rho_j} - \sum_{j=1}^{j=3}\frac{1}{H_j^3}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_j}\right)^2\frac{\partial H_j}{\partial \rho_3},$$

et, parce que sur σ [d'après (2)],

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1\,\partial \rho_3} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2\,\partial \rho_3} = 0,$$

il reste simplement

$$\frac{\partial P}{\partial \rho_3} = -\frac{1}{H_1^3}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_1}\right)^2\frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} - \frac{1}{H_2^3}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_2}\right)^2\frac{\partial H_2}{\partial \rho_3}.$$

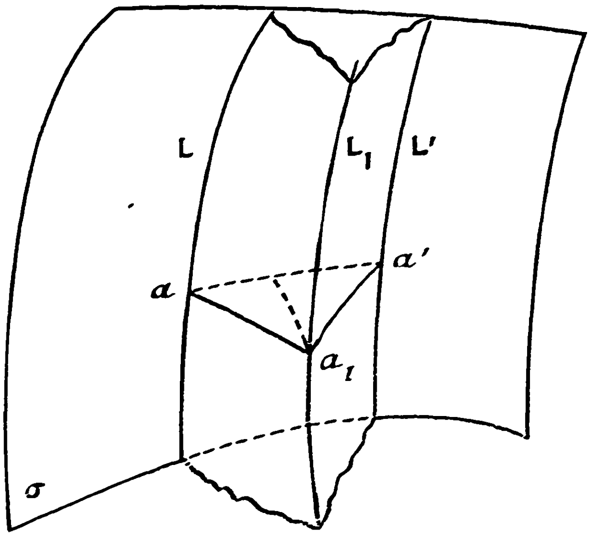
Z est donc nul, donc aussi la réaction.

3. Dans le Mémoire déjà cité (Chap. VI), M. Volterra développe la détermination approchée d'un jet très mince en se plaçant dans le cas qu'il caractérise comme cas *symétrique* (σ est alors surface de révolution), cas dans lequel le problème *a* est résolu. Nous examinerons ici le cas général d'un jet très mince lorsque la surface libre σ est quelconque.

Bien entendu nous supposons que, cette surface libre σ étant *donnée*, on connaisse sur elle les lignes de courant (problème *a* précédent). Un jet fluide très mince sera compris entre σ et une frontière rigide Σ, lieu de lignes de courant et très voisine de σ. Il s'agit de définir Σ et, à cet effet, nous chercherons à obtenir en fonction de $\rho_1\rho_2$ la longueur infiniment petite δn qu'il faut porter sur la normale au point $\rho_1\rho_2$ de σ pour passer au point *correspondant* de Σ.

Les données sont supposées analytiques, afin qu'il n'y ait pas de doute sur l'existence du jet. Nous admettrons de plus que les dérivées de δn par rapport à ρ_1 et ρ_2 sont aussi infiniment petites. Cela revient à dire que σ et Σ ont des plans tangents très voisins aux points correspondants. C'est là une restriction pratiquement peu importante, et que d'ailleurs nous pourrons lever à la fin.

4. Soient L une ligne de courant tracée sur σ, L′ et L_1 deux lignes de courant très voisines, la première tracée sur σ, la seconde sur Σ. Considérons un tube de courant infiniment délié formant un prisme trian-



gulaire dont les arêtes seraient L, L′, L_1. Une section droite $aa'a_1$ forme un triangle dont la base $\delta\theta_n (= aa')$ est la distance de L à L′ mesurée normalement à L et dont la hauteur est $\delta\nu$, distance à σ du point a_1 de L_1. La vitesse correspondante du fluide est $\sqrt{2P+h}$; la condition de conservation du flux donne alors

$$\delta\nu\,\delta\theta_n\sqrt{2P+h} = \text{const.} \tag{4}$$

tout le long de la ligne L.

Cette seule condition suffit à définir la frontière rigide Σ très voisine de σ. Tout d'abord, à cause de la restriction imposée aux plans tangents de σ et Σ, on peut confondre $\delta\nu$ avec δn (longueur à porter sur la normale en a à σ pour passer au point correspondant de Σ); donc

$$\delta n\,\delta\theta_n\sqrt{2P+h} = \text{const.} \tag{4'}$$

D'autre part $\delta\theta_0$ est connu, puisque l'on connaît sur σ les lignes de courant.

3. Précisons ce dernier point. Sur σ nous connaissons les lignes de courant dont les trajectoires orthogonales sont

$$V_0(\varphi_1, \varphi_2) = \text{const.}$$

Les lignes de courant elles-mêmes sont définies par l'équation différentielle

$$H_1^2\, d\varphi_1 \frac{\partial V_0}{\partial \varphi_2} - H_2^2\, d\varphi_2 \frac{\partial V_0}{\partial \varphi_1} = 0.$$

Soit λ un facteur intégrant (¹); les lignes de courant seront données par

$$W_0(\varphi_1, \varphi_2) = \text{const.}$$

avec

$$(5)\qquad \frac{\partial W_0}{\partial \varphi_1} = \lambda H_1^2 \frac{\partial V_0}{\partial \varphi_2}, \qquad \frac{\partial W_0}{\partial \varphi_2} = -\lambda H_2^2 \frac{\partial V_0}{\partial \varphi_1}.$$

Le segment normal $\delta\theta_0$ allant à la ligne L à la ligne voisine L′ sera alors proportionnel (comme il est bien connu) à

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta W_0}}$$

ou, d'après les relations (5), à

$$\frac{1}{\lambda H_1 H_2 \sqrt{\Delta V_0}} = \frac{1}{\lambda H_1 H_2 \sqrt{2P - h}}.$$

Finalement nous aurons, d'après (4′),

$$(6)\qquad \delta n = \frac{\delta c \sqrt{\Delta W_0}}{\sqrt{2P - h}}$$

ou bien encore

$$(6')\qquad \delta n = \lambda H_1 H_2\, \delta c,$$

formules dans lesquelles δc est infiniment petit et *constant* tout le long

(¹) Il y a, dans le choix de λ, donc aussi de W_0, un arbitraire évident et bien connu, qui, naturellement, n'influe pas sur la suite.

d'une ligne de courant L de σ. Si, pour un instant, on prend pour coordonnées sur σ les valeurs de V_0 et W_0, δc est fonction uniquement de W_0 et à chaque fonction arbitraire très petite $\delta c(W_0)$ correspondra une frontière rigide d'un jet du type demandé, la distance normale entre σ et Σ étant donnée par (6) ou (6').

Il y a évidemment une seule surface Σ passant par une courbe Γ très voisine de σ (et distincte d'une ligne de courant). On pourra l'obtenir analytiquement en définissant, d'abord, par une relation

$$V_0 = f(W_0)$$

la courbe correspondante de σ, puis en se donnant, en fonction de W_0, la distance δn pour les divers points de Γ [1]. La valeur de l'arbitraire $\delta c(W_0)$ en résulte immédiatement.

6. Portons notre attention sur les lignes de courant qui appartiennent à Σ. Elles vérifient les équations différentielles

$$(7) \qquad \frac{H_1^2\, d\rho_1}{\dfrac{\partial V}{\partial \rho_1}} = \frac{H_2^2\, d\rho_2}{\dfrac{\partial V}{\partial \rho_2}} = \frac{H_3^2\, d\rho_3}{\dfrac{\partial V}{\partial \rho_3}},$$

où V est le potentiel des vitesses donné par la série (2). Sachant déjà que ces lignes sont sur Σ nous pouvons nous borner aux deux premiers rapports qui définiront la relation entre ρ_1 et ρ_2, c'est-à-dire, en vertu de la correspondance entre les points de σ et de Σ, l'image des lignes de courant en question sur σ. D'après (2), et en se bornant toujours aux termes principaux, on a

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_1} = \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \rho_2} = \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2}.$$

D'autre part, les valeurs de H_1 et H_2 contenues dans les (7) concernent le point de coordonnées ρ_1, ρ_2 et $\rho_3 \equiv \rho_0 + \dfrac{\delta n}{H_3}$, de sorte que

---

[1] Cette fonction $\delta n(W_0)$ doit être, à cause de la restriction de la fin du n° **3**, infiniment petite *ainsi que sa dérivée*, ce qui revient à dire que la tangente en un point de Γ fait toujours un angle infiniment petit avec le plan tangent au point correspondant de σ.

nous aurons à remplacer H_1^2, H_2^2 respectivement par

$$H_1^2 - 2H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} \frac{\delta n}{H_3}, \qquad H_2^2 - 2H_2 \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} \frac{\delta n}{H_3},$$

où H_1, H_2, H_3 sont pris sur σ (pour $\rho_3 = \rho_0$).

Dans ces conditions, l'équation différentielle qui définit les lignes de courant de Σ s'écrit

$$\frac{\partial V_0}{\partial \rho_2} d\rho_1 \left(H_1^2 - 2 \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} \delta n \right) = \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} d\rho_2 \left(H_2^2 - 2 \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} \delta n \right).$$

et, en multipliant par λ et remplaçant δn par sa valeur (6'),

$$(8) \qquad dW_0 - 2\delta c(W_0) \frac{H_1 H_2}{H_3} \lambda^2 \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} H_1 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2} d\rho_1 - \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} H_2 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} d\rho_2 \right\} = 0.$$

L'intégration de cette équation différentielle se ramène à une quadrature, car dans le deuxième terme, infiniment petit, W_0 peut être considéré comme une constante. L'équation prendra donc la forme

$$(8') \qquad dW_0 - 2\delta c(W_0) F(W_0, V_0) dV_0 = 0.$$

d'où, pour définir les lignes de courant sur Σ, l'équation

$$W_0 - 2\delta c(W_0) \int F(W_0, V_0) dV_0 = \text{const.}$$

(au lieu de $W_0 = \text{const.}$ sur σ).

7. Le terme en $F(W_0, V_0) dV_0$ peut se mettre sous une forme assez élégante. On y éliminera $d\rho_1$ et $d\rho_2$ à partir de

$$dV_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2} d\rho_2$$

et

$$0 = H_1^2 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2} d\rho_1 - H_2^2 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} d\rho_2$$

(puisque dW_0 peut être pris nul). Il vient alors

$$\left\{ \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} H_1 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2} d\rho_1 - \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} H_2 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} d\rho_2 \right\} = \frac{\frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2}}{\nabla V_0} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} \right) dV_0.$$

Or, en introduisant les rayons de courbure principaux de σ, R_1 et R_2, on sait que

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} = H_3\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right);$$

d'autre part ε désignant l'angle de la ligne de courant sur σ (W_0=const.) avec la ligne ρ_2 constant,

$$\frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} = H_1\sqrt{\nabla V_0}\cos\varepsilon, \qquad \frac{\partial V_0}{\partial \rho_2} = H_2\sqrt{\nabla V_0}\sin\varepsilon.$$

L'équation différentielle (8') s'écrit donc

$$dW_0 - 2\delta r(W_0)H_1^2H_2^2\lambda^2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\, dV_0 = 0,$$

où enfin, grâce à (6') et en notant que

$$\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

est la torsion géodésique $\frac{1}{T_g}$ de la ligne de courant tracée sur σ, on aboutit, pour définir les lignes de courant sur Σ, à

$$(8'') \qquad dW_0 - 2\frac{(\delta n)^2}{\delta r}\frac{1}{T_g}dV_0 = 0$$

ou

$$(8''') \qquad W_0 - 2\int\frac{(\delta n)^2}{\delta r}\frac{1}{T_g}dV_0 = \text{const.},$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne de courant (W_0 constant) de σ.

8. Notons incidemment que les formules précédentes (6) et (8''') définissent les lignes de courant très voisines de celles qui appartiennent à σ. Toute ligne de ce genre (telle que L_1) peut en effet être considérée comme appartenant à une Σ convenablement choisie, laquelle vérifie la condition de voisinage des plans tangents posée à la fin du n° 5 [1].

[1] Il suffit de choisir convenablement la courbe Γ correspondante, en lui faisant remplir la condition de la note à la fin du n° 5.

Il y a intérêt, de ce point de vue, à mettre les formules précédentes sous une forme un peu différente.

Soit M un point quelconque de la ligne de courant L tracée sur σ. On peut passer à la ligne L_1 infiniment voisine en composant une variation $\delta\nu$ normale à σ et une variation $\delta\theta$ normale à L dans le plan tangent de σ. Tout revient donc à définir $\delta\nu$ et $\delta\theta$ en fonction de la position de M.

Il convient de noter que, dans le cas d'une L' infiniment voisine de L, mais située sur σ, $\delta\nu$ est identiquement nul et que $\delta\theta$ se réduit à $\delta\theta_0$ qui est connu (à une fonction arbitraire de W_0 près). Revenant au cas général de L_1, l'équation (6) (où nous rétablissons $\delta\nu$) s'écrira

$$(6'') \qquad \delta\nu = \frac{\text{const.}}{\theta_0\sqrt{2P+h}} = \sqrt{\frac{\nabla W_0}{2P+h}}\,\delta c,$$

et nous définira $\delta\nu$. Enfin $\delta\theta$ sera donnée par (8'').

En effet la ligne L est définie par $W_0 = h$ (h étant constante), la ligne infiniment voisine L' par $W_0 = h + \delta h$ (δh étant également constant). Sur L_1 (ou plus exactement sur l'image de cette ligne sur σ), W_0 prend des valeurs $h + \delta W_0$ et, portant dans (8''), il reste

$$d(\delta W_0) + 2\frac{(\delta\nu)^2}{\delta c}\frac{1}{T_g}dV_0 = 0,$$

d'où, puisque

$$\frac{\partial W_0}{\partial\theta} = \frac{\partial h}{\partial\theta_0} = \sqrt{\nabla W_0},$$

$$\delta h\, d\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\right) + 2\frac{(\partial\nu)^2}{\partial c}\frac{1}{T_g}dV_0 = 0$$

ou bien

$$(8^{\text{IV}}) \qquad \partial\theta = -2\,\partial\theta_0\int\frac{(\partial\nu)^2}{\partial h\,\partial c}\frac{1}{T_g}dV_0,$$

l'intégrale étant prise par rapport à la variable V_0 qui fixe la position du point M sur L.

9. Les considérations qui précèdent permettent de se rendre compte du caractère tout à fait accessoire de l'hypothèse introduite, à la fin du n° **3**, sur le voisinage des plans tangents à Σ et σ.

Les équations précédentes (6'') et (8^{IV}) définissent, sans aucune restriction, les lignes de courant infiniment voisines de celles qui sont tracées sur σ. Toute Σ sera obtenue comme lieu de celles de ces lignes qui rencontrent une courbe Γ donnée quelconque, très voisine de σ. Peu importe que la tangente à la courbe Γ soit ou non très voisine du plan tangent à σ. Cela n'intervient que dans l'interprétation de la signification de $\delta\nu$.

Dans le premier cas, $\delta\nu$ est un infiniment petit équivalent à δn et représente donc la longueur à porter sur la normale à σ au point de coordonnées $\rho_1\rho_2$ pour passer au point correspondant de Σ. Dans le second cas il n'y a plus équivalence entre $\delta\nu$ et δn et il faut préciser que $\delta\nu$ est à porter, toujours normalement à σ, au point déduit du point $\rho_1\rho_2$ par la variation $\delta\theta$ (ce dernier point ne pouvant plus être confondu avec le point $\rho_1\rho_2$).

10. Observons en terminant qu'il eût été naturellement possible de traiter les questions précédentes en partant des équations aux variations des lignes de courant et en tenant compte de la valeur de V_2 en fonction de V_0. La marche que nous avons suivie évite d'assez longs calculs.

Le lecteur vérifiera sans peine l'accord de notre formule donnant δn avec celle qu'a obtenu M. Volterra pour le cas d'un jet symétrique.

Un autre cas particulier notable, qu'il suffit de signaler ici, car son examen ne présente aucune difficulté, est celui où $\frac{1}{T_g}$ est nul.