JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

T. LEVI-CIVITA

Sur les jets liquides

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 37-56.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__37_0>

Sur les jets liquides [1];

PAR T. LEVI-CIVITA
(Rome).

1. HISTORIQUE ET POSITION DU PROBLÈME. — L'étude expérimentale des jets liquides a été abordée depuis longtemps par des hydrauliciens et par des physiciens éminents. Il me suffira de nommer Borda, Bidone, Michelotti, Poncelet, Lesbros, Bazin d'un côté, Savart, Plateau, Magnus, Tyndall, Rayleigh de l'autre [2].

Ces savants se sont occupé surtout des jets sortant sous pression modérée en signalant l'existence de deux parties : l'une, la plus proche de l'orifice, bien continue, limpide, transparente; l'autre louche, laiteuse, avec renflements et rugosités, qui finit par se dissoudre en filets séparés et finalement en gouttelettes.

En même temps que les apparences susdites on a envisagé au point de vue qualitatif les variations de grandeur et de forme des sections, les effets de capillarité (Plateau), les très curieux phénomènes acoustiques (Savart et Rayleigh). Au point de vue quantitatif c'est surtout sur le débit et sur le coefficient de contraction qu'on a multiplié les recherches, mais on possède également quelque relevé géométrique de la veine et quelques mesures sur la répartition des vitesses et des pressions [3].

---

[1] Conférence faite en 1931 à l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris.

[2] *Voir* par exemple D. SPATARO, *Idromeccanica*, vol. I, Libro I, Milano, Hoepli, 1915, p. 307-444.

[3] *Voir* notamment H. BAZIN, *Expériences sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses à leur intérieur* (*Mém. des Sav. étrang.*, t. XXXII, n° 4, 1902).

Pour ce qui se rapporte à l'allure longitudinale du jet, dans sa partie lisse, où il est loisible de l'assimiler à un tube mince, on s'est borné, paraît-il, à rapprocher les résultats expérimentaux des mouvements paraboliques, dont seraient animées les particules constituant le jet, si l'on pouvait négliger complètement leurs actions mutuelles vis-à-vis de la pesanteur (comme il arrive, dans les circonstances ordinaires, pour la résistance de l'air).

En réalité les choses se passent de la manière suivante : tout le long du jet, sur la surface libre, la pression est rigoureusement égale à la pression atmosphérique. Partant, dès qu'on peut présumer qu'elle ne soit pas trop différente à l'intérieur de la veine, il est loisible d'adopter la schématisation simpliste que la pression garde valeur constante dans toute l'extension du jet. Alors son gradient est nul, ce qui veut dire que les actions des particules liquides les unes sur les autres (englobées justement dans le gradient de la pression) se détruisent mutuellement, et tout se passe, au point de vue du mouvement, comme s'il s'agissait de points matériels libres. Si les forces appliquées se réduisent à la pesanteur, comme il arrive ordinairement, on aura des jets paraboliques, ou en particulier verticaux.

Une telle schématisation qu'on peut appeler du *régime libre* devient insuffisante si l'hypothétique égalisation des pressions à l'intérieur de la veine ne se réalise pas. A la vérité on a constaté, pour des jets descendants et sortant sous des charges modérées (de l'ordre d'un mètre, ou, disons même, de quelques mètres, c'est-à-dire pour des pressions dépassant de quelques dixièmes la pression atmosphérique) que l'excès de pression, en aval de l'orifice, tombe rapidement, sinon exactement à zéro, certes à moins qu'un dixième (en moyenne) de sa valeur en amont.

Mais le cas de fortes pressions à l'orifice n'a pas été soumis à des contrôles quantitatifs, et l'on peut au contraire citer (même pour des pressions modérées) des observations s'accordant plutôt avec un autre régime limite que je dirai *régime linéaire :* celui des jets minces, où la pression intérieure reste en moyenne (assez près de l'orifice) sensiblement supérieure à la pression atmosphérique.

Lorsqu'il en est ainsi, l'étude, même macroscopique, de l'allure longitudinale d'un jet ne peut plus être abordée en négligeant tout bonnement l'influence de la pression. Je vais en tenir compte, en envisageant le cas des jets dont la partie lisse est assez longue par rapport aux dimensions des sections transversales, pour qu'on puisse, en première approximation, assimiler ladite portion à une ligne matérielle.

Il en résultera entre autre :

1° En régime permanent la section du jet reste constante; d'une section à l'autre la pression (moyenne) varie statiquement.

2° Dans le cas ordinaire de la pesanteur et de l'écoulement permanent, la ligne directrice du jet n'est pas une parabole mais une chaînette.

3° Ceci même au début de l'écoulement, pourvu qne les circonstances à l'orifice ne changent pas. Plus précisément le jet en formation se présente toujours comme un arc grandissant de la même courbe qui correspond à l'état de régime.

J'indiquerai au n° **12** les faits qui justifient la considération de ce nouveau cas limite à côté de l'autre (particules libres) envisagé ordinairement. La réalité est beaucoup plus complexe, et, probablement, intermédiaire entre les deux cas limites susdits, tant qu'il est loisible de négliger les phénomènes encore plus complexes provenant de la viscosité et de la capillarité.

2. Préliminaires géométriques. — La configuration géométrique d'un jet, à un instant donné quelconque t, peut être définie (comme celle d'une tige, ou poutre, ou pièce) en considérant un arc D d'une courbe quelconque qui joue le rôle de directrice.

Si l'on associe à tout point G de l'arc D une aire τ :

a. Située dans le plan normal à D,

b. De dimensions petites par rapport à la longueur de D,

c. Ayant son centre de gravité justement au point G,

le lieu J, engendré par ces aires τ, aura la forme tubulaire qui convient à un jet, comme d'ailleurs à une tige, poutre ou pièce.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que, réciproquement, étant donné un corps de forme tubulaire, il suffit d'envisager une ligne intérieure quelconque D qui en suit l'allure générale, et alors le corps peut être envisagé comme l'ensemble des points appartenant aux sections σ normales à la ligne D. On remplit de la sorte les deux conditions *a* et *b*, quelle que soit la détermination choisie pour la directrice D. Au contraire on ne peut guère prétendre *a priori* que la troisième condition *c* soit également satisfaite, c'est-à-dire que les centres de gravité des sections σ appartiennent tous à D. Mais on peut toujours choisir la directrice D de manière à vérifier aussi la condition *c*. C'est ce que j'ai démontré récemment par des considérations élémentaires [1], que je ne pourrais toutefois reproduire ici, sans sortir du cadre de ma communication.

Il nous suffit de retenir qu'un jet liquide peut toujours être envisagé, au point de vue géométrique, comme un champ caractérisé par les trois conditions *a*, *b*, *c*.

3. Cinétique. Équation de continuité. — Dès que les sections σ sont assez petites, il devient loisible de traiter le jet comme ligne matérielle, ayant pour support géométrique D (variable en général avec le temps).

Désignons par s l'arc de D (compté dans le sens du mouvement du liquide, à partir par exemple de l'orifice) et par $\sigma(s, t)$ l'aire de la section du jet, normale à D au point d'abscisse curviligne s. Le volume de la tranche du jet, comprise entre ladite section et une autre section normale infiniment voisine d'abscisse $s + ds$, est évidemment

$$\sigma\, ds$$

à des infiniment petits d'ordre supérieur près.

Il s'ensuit que, si μ désigne la densité du fluide, le produit

$$\nu = \mu\sigma \tag{3.1}$$

se présente comme densité linéaire du jet (à l'instant t, au point s de D).

Une telle tranche, d'épaisseur élémentaire ds, est assimilable à un point matériel, et peut être localisée (à des infiniment petits près) en un quelconque de ses points intérieurs : notamment au point G

[1] *Sezioni piane di un corpo e direttrici ortobariche* (*Rend. Acc. Lincei*. vol. XII, 1930, p. 535-541).

de la directrice D, d'abscisse s. Ce point (en tant que représentant la tranche élémentaire) se comporte comme un point *substantiel*. A ce titre il est animé à chaque instant d'une vitesse (scalaire) bien déterminée w, qui s'introduit de la sorte comme fonction de t et, bien entendu, du point G lui-même, ou, si l'on veut, de la position actuelle s.

Moyennant les deux fonctions $\nu(s, t)$ et $w(s, t)$ il est aisé de former *l'équation de continuité*, c'est-à-dire d'exprimer le principe de conservation de la masse sous la forme qui convient à notre cas. Considérons en effet la masse m du liquide comprise à un instant donné t entre deux sections transversales quelconques τ_1 et τ_2. s_1 et s_2 désignant leurs abscisses sur la courbe D, on a, par définition de ν,

$$m = \int_{s_1}^{s_2} \nu \, ds.$$

Lorsqu'on passe à l'instant successif $t + dt$, les extrémités s_1 et s_2 de l'arc substantiel envisagé auront, sur la nouvelle configuration de D, les abscisses $s_1 + ds_1$ et $s_2 + ds_2$, tandis que $\nu(s, t)$ subira l'accroissement $\frac{\partial \nu}{\partial t} dt$. Puisque ma masse m demeure invariable, on aura, avec signification évidente de ν_1, ν_2,

$$dt \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \nu}{\partial t} ds + \nu_2 \, ds_2 - \nu_1 \, ds_1 = 0.$$

Les dérivées $\frac{ds_2}{dt}$, $\frac{ds_1}{dt}$ représentent justement $w(s_2, t)$, $w(s_1, t)$. L'équation précédente peut donc s'écrire, en divisant par $(s_2 - s_1) dt$,

$$\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \nu}{\partial t} ds + \frac{\nu_2 w_2 - \nu_1 w_1}{s_2 - s_1} = 0.$$

Si l'arc $\widehat{s_1 s_2}$ devient infiniment petit autour d'un s donné, on en tire, en passant à la limite,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial (\nu w)}{\partial s} = 0. \tag{3.2}$$

C'est l'équation de continuité sous la forme qu'il nous faut, et qui est d'ailleurs familière en hydraulique, lorsqu'on y aborde l'étude de l'écoulement dans les tuyaux.

Pour les liquides, caractérisés par leur incompressibilité, qui revient à la conservation pendant le mouvement de la densité *cubique* μ (de toute particule matérielle), on a, en outre,

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + w\frac{\partial\mu}{\partial s} = 0, \tag{3.3}$$

et, comme, d'après (3.1), $\nu = \mu\sigma$, l'équation de continuité peut être débarrassée de ν, se réduisant à

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(w\sigma)}{\partial s} = 0. \tag{3.4}$$

Remarque. — Même sans négliger les dimensions transversales du jet, on aboutirait à la même forme (3.2) ou (3.4) de l'équation de continuité. Toutefois w représenterait alors la valeur moyenne des composantes w_0 (normales à σ, dans le sens des s croissantes) se rapportant aux différents points Q d'une section σ, c'est-à-dire

$$w = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma w_0\, d\sigma. \tag{3.5}$$

4. Résultante des pressions. — Considérons la portion $\mathcal{C}$ du jet, comprise entre deux sections quelconques σ_1 et σ_2 (d'abscisses respectives s_1 et s_2), et désignons par γ la surface tubulaire qui, avec σ_1 et σ_2, constitue le contour complet σ de $\mathcal{C}$. A tout point de ce contour associons, suivant l'usage, le verseur (vecteur unité) normal $\mathbf{n}$, dirigé vers l'intérieur du champ $\mathcal{C}$.

Soient p^* la pression au sein du liquide (dans un point et à un instant donné), p_0 (constante) la pression atmosphérique, et

$$p = p^* - p_0 \tag{4.1}$$

l'excès sur cette dernière, ou, si l'on veut, la pression comptée à partir de la pression atmosphérique.

La résultante Φ des pressions sur la portion envisagée du jet est évidemment

$$\Phi = \int_\sigma p^*\mathbf{n}\, d\sigma. \tag{4.2}$$

En raison de l'identité

$$\int_\sigma \mathbf{n}\, d\sigma = 0,$$

on peut écrire, dans la définition de Φ, $p^* - p_0$ au lieu de p^*, ce qui donne

$$\Phi = \int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma,$$

d'où, puisque $p = 0$ sur γ,

$$(4.3)\qquad \Phi = \int_{\tau_1 - \tau_2} p\mathbf{n}\, d\sigma.$$

Introduisons maintenant le verseur tangentiel

$$(4.4)\qquad \mathbf{t} = \frac{\partial G}{ds}$$

de la ligne D, au point G (à un instant fixé quelconque t). Les arcs s étant comptés dans le sens du mouvement, on supposera $s_2 > s_1$, et l'on considérera en particulier les verseurs $\mathbf{t}_2$ et $\mathbf{t}_1$ aux extrémités de $\mathfrak{T}$.

Il convient finalement d'invoquer la circonstance que notre $\mathfrak{T}$ est assimilable à une ligne matérielle ayant D pour support. On peut alors identifier, en tout point de τ_1, $\mathbf{n}_1$ avec $\mathbf{t}_1$, en tout point de τ_2, $\mathbf{n}_2$ avec $-\mathbf{t}_2$: et (4.3) se réduit à

$$\Phi = \mathbf{t}_1 \int_{\tau_1} p\, d\tau - \mathbf{t}_2 \int_{\tau_2} p\, d\tau,$$

ou plus simplement

$$(4.5)\qquad \Phi = \bar{p}_1 \tau_1 \mathbf{t}_1 - \bar{p}_2 \tau_2 \mathbf{t}_2,$$

où

$$(4.6)\qquad \bar{p} = \frac{1}{\tau} \int_\tau p\, d\tau$$

désigne la pression moyenne sur une section quelconque τ du jet. Si en particulier s_2 et s_1 sont infiniment voisines, en posant $s_1 = s$, $s_2 = s + ds$, il vient

$$(4.7)\qquad \Phi = -ds \frac{\partial}{\partial s}(\bar{p}\tau\mathbf{t}),$$

où j'ai employé le symbole de dérivation partielle pour qu'on n'oublie pas qu'on a affaire à deux variables indépendentes : s et le temps t.

Remarque. — L'expression (4.5), avec son corollaire (4.7), de la résultante des pressions a été obtenue en tenant compte des circonstances géométriques caractéristiques d'un jet, mais, il faut bien le noter, sans aucune hypothèse restrictive sur la pression, ni surtout à l'égard de ses variations sur une section transversale du jet.

5. Application a une tranche élémentaire du jet du principe du mouvement du centre de gravité. — Si $\mathbf{F}'$ désigne la force extérieure agissant sur le liquide, rapportée à l'unité de masse, une tranche élémentaire de notre jet, d'épaisseur ds, sera sollicitée par la force

$$\mathbf{F}\nu\, ds,$$

où

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\tau}\int_{\tau} \mathbf{F}'\, d\tau. \tag{5.1}$$

D'autre part, G étant un point quelconque de D (d'abscisse s, à l'instant t), notamment le centre de gravité de la tranche envisagée, sa vitesse vectorielle est par définition

$$\dot{G} = \frac{dG}{dt},$$

et son accélération

$$\ddot{G} = \frac{d^2G}{dt^2}.$$

Bien entendu le symbole $\frac{d}{dt}$ de dérivation substantielle s'explicite, pour une fonction quelconque f de s et de t, sous la forme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + w\frac{\partial f}{\partial s}. \tag{5.2}$$

Quoi qu'il en soit, $\nu\, ds$ étant la masse de la tranche, on a d'après (4.7), en égalant le produit masse $\times$ accélération du centre de gravité à la force extérieure totale agissant sur la tranche, $\mathbf{F}\nu\, ds + \Phi$, on a, d'après (4.7),

$$\nu\ddot{\mathbf{G}} = \nu\mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial s}(\bar{p}\tau\mathbf{t}). \tag{5.3}$$

6. Analogie avec le mouvement d'un fil (flexible et inextensible). — Imaginons un fil flexible et inextensible en mouvement, et soit D sa configuration à un instant donné t, s désignant comme tout à l'heure l'arc de D. Si G, $\frac{\partial G}{\partial s} = \mathbf{t}$, $\mathbf{F}$ gardent, pour le fil, la même signification qu'on leur a attribuée pour le jet, et si en outre T représente l'intensité de la tension au point G, on a l'équation du mouvement bien connue

$$\nu\ddot{G} = \nu\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial s}(T\mathbf{t}). \tag{6.1}$$

L'équation (5.3) se rapportant aux jets en diffère uniquement par la substitution de $-\bar{p}\tau$ à T, ce qui veut dire pression au lieu de tension comme effort intérieur s'exerçant sur une section générique, $\tau.\ddot{G}$ désigne, qu'il s'agisse de jet ou de fil, l'accélération du point $G(s, t)$: toutefois l'expression de cette accélération n'est pas la même dans les deux cas, s et t ayant même signification. En effet, dans le cas du jet, la dérivation substantielle s'explicite sous la forme (5.2) :

$$\frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial s}.$$

Au contraire, pour un fil inextensible, s correspond toujours au même élément matériel, et par conséquent

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

La vitesse w, *a priori* inconnue pour le jet, est identiquement nulle dans l'autre cas.

Il ne suffit donc pas de remplacer $-\bar{p}\tau$ par T pour obtenir une complète identité formelle. Ceci arrive toutefois, comme on le verra au n° **10**, pour le régime permanent.

Remarque. — L'équation dynamique (5.3) s'applique en général, même pour des jets d'épaisseur quelconque, pourvu qu'on y regarde G comme le centre de gravité de la section transversale τ.

A la vérité il est encore loisible de choisir à chaque instant (ainsi qu'on l'a dit dans la remarque à la fin du n° **3**) la directrice D de manière que ses points G soient justement les centres de gravité des sections normales τ. Mais on ne peut pas supposer en surplus (dès que l'épaisseur n'est plus infiniment petite) que la ligne D soit *substan-*

tielle, c'est-à-dire formée à tout instant par les mêmes points matériels.

Or la vitesse $\dot{G}$, et avec elle l'accélération $\ddot{G}$, qui figure dans l'équation (5.3), doivent être calculées à un instant donné t, comme si G était le centre de gravité des particules matérielles appartenant à l'instant t à la section normale correspondante τ. Lorsque l'on passe à un instant infiniment voisin $t+dt$, le centre de gravité susdit n'appartiendra plus en général à la ligne D (se rapportant à l'instant $t+dt$). D'après cela, si l'on introduit comme inconnue principale justement la représentation paramétrique $G(s, t)$ de la directrice D à tout instant t, il ne subsiste plus une relation telle que

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + w\frac{\partial G}{\partial s},$$

pas même pour une w distincte de celle qui figure dans l'équation de continuité. Le problème devient partant beaucoup plus compliqué, puisqu'on ne réussit pas à faire intervenir dans l'équation de continuité et dans l'équation dynamique les mêmes éléments moyens.

Voilà pourquoi il convient de se borner aux jets infiniment minces, c'est-à-dire assimilables à une simple ligne matérielle.

7. Relation supplémentaire définissant le régime linéaire. — Soient f une fonction des points de τ, et $\bar{f}$ sa valeur moyenne. On a par définition

$$\tau\bar{f} = \int_\tau f\,d\tau,$$

les deux membres dépendant en général de s, c'est-à-dire de la position de τ le long de D.

Lorsque l'on passe d'une valeur s à une valeur $s+ds$, on aura deux accroissements infiniment petits : l'un dû à ce que f s'accroît de $df = \frac{\partial f}{\partial s}ds$, τ restant inaltéré; l'autre dû à la variation de τ.

Le premier a la valeur

$$ds\int_\tau \frac{\partial f}{\partial s}\,d\tau.$$

Soient d'autre part σ le contour de τ correspondant à une détermination donnée de s; σ' le contour correspondant à $s+ds$, en le supposant projeté orthogonalement (et par suite en vraie grandeur, à des infiniment petits d'ordre supérieur près) sur le plan de τ; dn le déplacement normal (positif vers l'extérieur) qu'il faut attribuer à un point de σ pour rejoindre σ'. Le second accroissement peut dès lors s'exprimer sous la forme

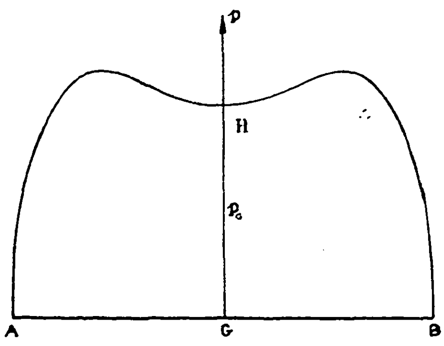
$$\int_\sigma f\,dn\,d\tau.$$

Par conséquent il s'annule pour toute fonction f s'annulant au contour. C'est ce qui arrive en particulier pour notre p et aussi pour $\frac{\partial p}{\partial s}$. On a partant l'identité

$$\frac{\partial(\bar{p}\tau)}{\partial s}=\int_\tau \frac{\partial p}{\partial s}\,d\tau \quad (^1). \tag{7.1}$$

Il ne paraît guère possible d'expliciter cette relation sous une forme utile pour notre but sans faire intervenir l'hypothèse qualitative que la pression p, tout en s'annulant sur le contour de τ, a une valeur

Fig. 1.



moyenne presque égale à sa valeur en G. C'est ce qui arrive notamment si le diagramme de p sur un diamètre AB de τ, passant par G, a (*fig.* 1) une allure presque rectangulaire AHB.

(1) J'avais déduit originairement cette relation moyennant des considérations dynamiques. M. Signorini, que je tiens à remercier publiquement, m'a fait remarquer qu'il s'agit d'une simple conséquence analytique de la circonstance que l'excès de pression p s'annule sur toute la surface libre du jet.

Nous admettrons donc qu'on ait

$$\int_\tau p\, d\tau = p_G \tau, \tag{7.3}$$

ce qui, par comparaison avec (4.6), s'écrit

$$p_G = \bar{p} \tag{7.4}$$

et en surplus que la dérivée $\frac{\partial p}{\partial s}$, envisagée elle aussi sur une section quelconque τ, se comporte de la même manière, ce qui se traduit par l'équation, analogue à (7.3),

$$\int_\tau \frac{\partial p}{\partial s}\, d\tau = \frac{\partial p_G}{\partial s}\tau. \tag{7.5}$$

En y remplaçant p_G par $\bar{p}$ on a

$$\int_\tau \frac{\partial p}{\partial s}\, d\tau = \frac{\partial \bar{p}}{\partial s}\tau, \tag{7.6}$$

ce qui permet de réduire la relation supplémentaire (7.2) à la forme très simple

$$\bar{p}\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0.$$

Comme nous supposons essentiellement que la pression moyenne à l'intérieur du jet dépasse la pression atmosphérique p_0, on doit retenir, d'après (4.1), $\bar{p} > 0$, et par suite,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0. \tag{7.7}$$

ce qui exprime que, *tout le long d'un jet, la section doit se maintenir constante (à un instant donné). Voilà* en définitive *la relation supplémentaire servant à caractériser un régime que nous appellerons régime linéaire.*

8. Système différentiel définissant le régime linéaire varié, et en particulier permanent, des jets. — L'équation supplémentaire (7.7) qu'on vient d'établir, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0, \tag{I}$$

exprime, peut-on dire, que τ ne peut dépendre que de t, le jet possédant à tout instant une épaisseur uniforme.

L'équation de continuité, valable pour les liquides homogènes sous la forme (3.4), s'écrit plus simplement, d'après (I),

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau \frac{\partial w}{\partial s} = 0.$$

L'équation du mouvement (4.3) $\left[\text{en divisant par } \nu = \mu\tau \text{ et tenant compte de } \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0\right]$ devient

$$\text{(III)} \qquad \ddot{G} = \mathbf{F} + \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial(p\mathbf{t})}{\partial s}.$$

Les éléments inconnus (fonction des deux variables s et t) qui figurent dans ces équations sont : le point G, ou, si l'on veut, ses trois coordonnées, en même temps que τ, p et w; en tout six quantités scalaires. Elles sont liées entre elles par les deux équations scalaires (I), (II), et par l'équation vectorielle (III), qui en englobe trois; en tout donc par cinq équations; mais il faut y ajouter l'identité géométrique

$$\text{(IV)} \qquad \mathbf{t}^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

ce qui porte justement à six le nombre des équations indéfinies (c'est-à-dire vérifiées pour toutes les valeurs de s et de t) qu'il y a lieu de considérer.

Le problème est partant bien posé, et il ne reste qu'à se rendre compte des conditions aux limites nécessaires et suffisantes pour déterminer univoquement une solution.

9. Discussion du système précédent au point de vue du théorème d'existence. — Si l'on remplace l'équation (IV) par sa dérivée par rapport à s,

$$\text{(IV')} \qquad \mathbf{t} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = 0,$$

le système (I), (II), (III), (IV'), que j'appellerai (S') pour abréger, n'est pas exactement équivalent au système différentiel (I)-(IV), que je dirai (S); mais peu il s'en faut. En effet (IV') entraîne

$$\mathbf{t}^2 = \chi(t) \qquad (\text{fonction du seul argument } t),$$

tandis que (IV) exige en surplus que $\chi(t)$ soit exactement l'unité.

D'après cela, si l'on parvient à reconnaître que l'intégrale générale de (S') dépend d'un certain nombre n de fonctions arbitraires de t, on pourra immédiatement en conclure que l'intégrale générale de (S) dépend de $n-1$ fonctions arbitraires de t. Or la discussion du système (S') est plus commode, puisque — on va le constater dans un instant — (S') peut être présenté sous forme résolue par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé, par rapport à s, de chacune des fonctions inconnues τ, w, G, p.

Tout d'abord il en est ainsi évidemment pour $\frac{\partial\tau}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, d'après (I) et (II).

D'autre part, puisque, d'après (4.2), $\ddot{G}$ signifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 G = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(w\frac{\partial G}{\partial s}\right) + w\frac{\partial^2 G}{\partial s\,\partial t} + w\frac{\partial}{\partial s}\left(w\frac{\partial G}{\partial s}\right),$$

tandis que, d'après (4.4),

$$\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial(\bar{p}\mathbf{t})}{\partial s} = \frac{\tau}{\mu}\bar{p}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{\tau}{\mu}\frac{\partial\bar{p}}{\partial s}\mathbf{t}.$$

l'équation vectorielle (III), en y mettant en évidence seulement les termes qui contiennent la dérivée seconde (par rapport à s) de G et les dérivées premières des autres arguments τ, w, p, s'écrit

$$\text{(III')} \qquad \left(w^2 - \frac{\tau}{\mu}\bar{p}\right)\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - \frac{\tau}{\mu}\frac{\partial\bar{p}}{\partial s}\mathbf{t} = \mathbf{K}.$$

où le vecteur $\mathbf{K}$ ne contient plus de dérivées par rapport à s de l'ordre susdit, mais seulement des dérivées d'ordre inférieur (bien entendu, par rapport à cet argument, sans se préoccuper de t).

Comme, à cause de (4.4), $\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial s}$ n'est que $\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}$, la multiplication scalaire de (III') par $\mathbf{t}$ permet, en ayant égard à (IV'), de définir la dérivée de $\bar{p}$ sous la forme

$$\text{(IV'')} \qquad \frac{\tau}{\mu}\frac{\partial\bar{p}}{\partial s} = \mathbf{K} \times \mathbf{t}.$$

après quoi (III′) s'écrit

$$\text{(III}''\text{)} \qquad \left(w^2 - \frac{\tau}{\mu} p\right)\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial s^2} = \mathbf{K} - (\mathbf{K}\times\mathbf{t})\mathbf{t}.$$

Ces deux dernières équations (III″) et (IV″) ne diffèrent pas substantiellement de (III′), (IV′), puisqu'elles en sont des combinaisons linéaires indépendantes, permettant de remonter à (III), (IV) d'une manière évidente.

Le système (I), (II), (III″), (IV″) apparaît résolu par rapport à

$$\frac{\partial \tau}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial s^2}$$

(dérivées d'ordre maximum figurant dans le système). C'est ce qu'on appelle un système *normal* dans les six inconnues τ, w, p, x, y, z (coordonnées de G) de rang (somme des ordres maximum susdits)

$$1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Dès lors le théorème classique d'existence nous apprend [1] que (sous certaines hypothèses qualitatives, largement satisfaites dans la généralité des questions qui intéressent la mécanique) on peut se donner arbitrairement pour une valeur de s, disons pour $s = 0$, les déterminations de τ, w, p; G, $\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial s}$ (c'est-à-dire de x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$), en fonction de l, pour que ces quantités, en tant que solutions de (S′), restent complètement déterminées lorsque l'on fait varier s (à partir de $s = 0$, dans un intervalle convenable).

Quelle en est la conséquence pour le système (S) définissant un jet ? La remarque que (S′) provient de (S) par particularisation d'une seule constante d'intégration par rapport à s, c'est-à-dire par le fait que

$$\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial s}\right)^2 = \mathbf{t}^2,$$

égale à $\chi(l)$ pour le système (S′), doit, dans le système (S), se

[1] Pour les détails du raisonnement on peut consulter une note de M. LAMPARIELLO dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XIV, 1931.

réduire à l'unité, montre que *la particularisation des données porte uniquement sur la circonstance* (provenant implicitement de la signification attribuée à la variable s dans le problème des jets) *que* $\frac{\partial G}{\partial s}$ *est un verseur :* sa direction pour $s = 0$ peut être choisie arbitrairement, mais la longueur est nécessairement l'unité. Donc l'arbitrariété initiale de $\frac{\partial G}{\partial s}$ équivaut à deux (et non à trois) paramètres arbitraires (fonctions de t), et *l'intégrale générale de* (S) *dépend en tout de* 8 (et non de 9) *fonctions arbitraires de* t, *et précisément des déterminations pour* $s = 0$ *et toute valeur de* t (c'est-à-dire à l'orifice, pour toute la durée de l'écoulement) *de* τ, w, p, G, $\frac{\partial G}{\partial s}$. Ces données déterminent univoquement une solution pour toute valeur de s assez petite: pratiquement dans l'intervalle qui intéresse.

Remarque. — $G(s, t)$ coïncide pour $s = 0$ (et t quelconque) avec l'orifice: $\frac{\partial G(0, t)}{\partial t}$ est donc la vitesse $\mathbf{v}'(t)$ de l'orifice: elle sera d'ailleurs nulle dans le cas ordinaire où l'orifice est fixe.

$(\dot{G})_{s=0}$ représente d'autre part la vitesse $\mathbf{v}(0, t)$ de la particule matérielle sortant de l'orifice à l'instant t. Si l'on suppose, et c'est uniquement ce cas qui nous intéresse, qu'un jet sort effectivement de l'orifice, il faut exclure que $\mathbf{v}$ coïncide avec $\mathbf{v}'$ (à tout instant). L'inégalité $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \neq 0$ doit donc être satisfaite, du moins en général, et il est partant loisible de se rapporter à des instants (on peut dire intervalles) puisqu'il s'agit de fonctions continues dans lesquelles la différence

$$\mathbf{v}(0, t) - \mathbf{v}'(t)$$

ne s'annule pas.

Ceci posé, on reconnaît aisément que, *pour déterminer univoquement un jet* (une solution des équations qui le définissent), *il suffit de se donner, pour toute la durée du phénomène, la position G et l'aire* τ *de l'orifice, la pression* $\bar{p}$ *de sortie et en outre* (toujours à l'orifice): *ou bien direction* $\mathbf{t}$ *du jet et vitesse (relative) scalaire* w; *ou bien*, ce qui est plus immédiatement accessible à l'expérience *vitesse absolue* $\mathbf{v}$ *de sortie.* En effet on a identiquement

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + w\frac{\partial G}{\partial s},$$

d'où, en posant $s = 0$,

$$\mathbf{v}(0, t) = \mathbf{v}'(t) + w\mathbf{t},$$

Puisque la différence $\mathbf{v}(0, t) - \mathbf{v}'(t)$ ne s'annule pas, cette relation détermine à la fois w et le vecteur $\mathbf{t}$. C. Q. F. D.

10. Régime permanent. — On l'obtient du cas général en supposant que les caractéristiques du phénomène dans une position quelconque ne varient pas avec le temps, c'est-à-dire que les quantités τ, $\bar{p}$, w, G dépendent uniquement de la variable s. Dans ce cas l'opérateur $\frac{d}{dt}$ se réduit, d'après (5.2), à $w\frac{\partial}{\partial s}$ que nous écrirons $w\frac{d}{ds}$, puisqu'il reste désormais l'unique variable indépendante s et il n'y a aucune raison de conserver le symbole de dérivation partielle.

Les équations (I) et (II) expriment simplement que τ et w doivent être regardées comme des constantes données d'avance (et non nulles, si l'on a affaire à de véritables jets).

La détermination de G(s) et $\bar{p}(s)$ dépend alors uniquement de l'équation (III) qui $\left(\text{en remplaçant } \ddot{G} \text{ par } w^2\frac{d^2G}{ds^2} = w^2\mathbf{t}\right)$ s'écrit

$$\frac{d}{ds}\left[\left(w^2 - \frac{\bar{p}}{\mu}\right)\mathbf{t}\right] = \mathbf{F}, \tag{10.1}$$

associée à l'identité géométrique (IV), que je récris

$$\mathbf{t}^2 = 1. \tag{10.2}$$

Pourvu que $\mathbf{F}$ *et les conditions aux limites soient indépendantes de* t, *le régime stationnaire est possible et univoquement déterminé.* C'est ce qui résulte des circonstances bien connues de l'équilibre des fils flexibles et inextensibles : introduisons en effet l'auxiliaire

$$T = w^2 - \frac{\bar{p}}{\mu} \tag{10.3}$$

qui (w^2 et μ étant des constantes positives et $\bar{p}$ une fonction également positive de s, *a priori* inconnue) se présente comme une inconnue positive (fonction de s). Le système (10.1), (10.2) définit alors l'équilibre d'un fil homogène sollicité par les forces $-\mathbf{F}$ (mêmes forces, mais renversées de sens).

On peut, partant, transporter immédiatement aux jets en régime permanent ce qu'on sait (depuis presque deux siècles) sur les courbes funiculaires. En particulier, tout (véritable) jet permanent d'un liquide pesant doit affecter la forme d'une chaînette concave vers le bas (tandis que tout fil pesant en équilibre tourne sa concavité en haut).

De même, l'existence de l'intégrale $T + U = \text{const.}$, lorsque **F** dérive d'une fonction des forces U. Il en résulte, d'après (10.3) et la circonstance que σ se maintient constante le long du jet,

$$\frac{p}{\mu} + U = \text{const.}$$

Il s'ensuit que dans le régime linéaire la pression (moyenne) p varie statiquement à l'intérieur du jet, c'est-à-dire comme si le jet était occupé par un liquide en équilibre soumis aux mêmes forces conservatives.

Mais il y a plus. Nous allons tirer du théorème d'existence une propriété fort remarquable des jets naissants, propriété prêtant aisément à un contrôle par l'expérience.

11. Formation d'un jet sous des conditions invariables a l'orifice. — Supposons que les fonctions de t se rapportant à l'orifice, qui figurent comme données initiales dans le théorème général d'existence du n° **9**, se réduisent à des constantes. Une solution Σ des équations (I)-(IV) en reste univoquement déterminée. D'autre part les mêmes constantes définissent, d'après le numéro précédent, une et une seule solution Σ' des équations $\tau = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$, (10.1), (10.2), c'est-à-dire des (I)-(IV) elles-mêmes, dans l'hypothèse de l'indépendance de t. Comme il y a une seule Σ correspondant aux données initiales susdites, cette Σ coïncide nécessairement avec Σ'. C'est comme dire que, tant que les conditions à l'orifice demeurent inaltérées, même en période de formation, le jet suit la même directrice D qu'il occupera tout entière à régime établi.

Dans le cas de la gravité on aura affaire toujours à la même chaînette.

12. Faits constatés a l'appui de la théorie précédente. — 1° Pour les veines, lancées obliquement de bas en haut, sous des angles de projection compris entre 20 et 50° (plus nettement entre 25 et 45°) « *la partie continue de la veine paraît sensiblement du même diamètre à partir d'une petite distance de l'orifice jusqu'à la partie trouble* (¹) ». Cette constance des sections est un trait caractéristique (n° **7**) du régime linéaire. D'après la schématisation ordinaire, où l'on néglige l'influence de la pression en traitant les particules comme libres, on devrait au contraire apercevoir une dilatation graduelle des sections. En effet, le mouvement étant ascendant, la vitesse des particules irait en diminuant, ce qui entraînerait nécessairement (le débit étant constant en régime permanent) une augmentation continuelle des sections.

2° *Observations de M. Ugolini.* — La circonstance suivante a été constatée, dans le laboratoire d'hydraulique de l'école des ingénieurs de Rome, par M. Ugolini, sur un grand nombre de jets, lancés obliquement vers le haut, jets dont il faisait varier la charge et l'angle de projection. *La distance horizontale* OP (*fig.* 2) *entre l'orifice et le point culminant du jet est toujours plus petite que le reste* PQ *de la portée* (longueur de la corde horizontale du jet passant par l'orifice). C'est exactement le contraire de ce qui arrive pour les trajectoires atmosphériques de la balistique.

Cette donnée de l'expérience s'accorde bien avec la présomption que dans la branche ascendante du jet (qui en comprend la partie limpide) soit dominant le régime linéaire; tandis que la branche descendante, où déjà commence à se produire la désintégration, se rapprochera plutôt du régime libre.

A la vérité, s'il en est sensiblement ainsi, la directrice du jet pourra être assimilée à une chaînette jusqu'au sommet, et à une parabole au delà.

Or, en prenant pour origine le sommet A et pour axe Ay la verticale descendante, les équations des dites courbes s'écrivent

$$ky = \mathcal{C}(kx) - 1, \tag{12.1}$$

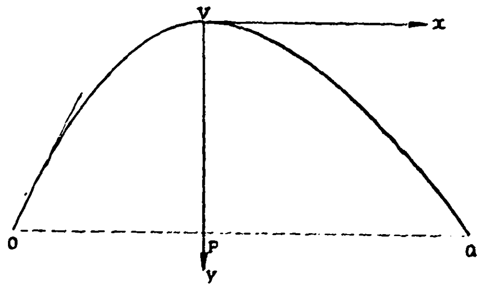
$$k'y' = \frac{1}{2}k'^2x'^2. \tag{12.2}$$

(¹) Félix SAVART, *Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi* (*Ann. de Chimie et de Physique*, t. LIII, 1833, p. 380).

où k, k' sont des constantes (positives) et $\mathcal{C}$ désigne cosinus hyperbolique.

Afin que ces deux courbes se raccordent au sommet (non seulement en direction mais aussi en courbure), il faut qu'on ait $k' = k$.

Fig. 2.



Posons dans (12.2) $x' = -x$. Comme

$$k(y - y') = \mathcal{C}(kx) - 1 - \frac{1}{2} k^2 x^2 = \frac{k^4 x^4}{4!} + \frac{k^6 x^6}{6!} + \ldots$$

est une série en x^2 à coefficients tous positifs, on voit que, *pour* $x' = -x$, y' *est toujours plus petit que* y. Il s'ensuit, puisque y' est une fonction continue de x'^2, que, pour rendre sur la branche descendante y' égale à une ordonnée donnée y de la branche ascendante, il faut que $|x'|$ soit $> |x|$.

C'est justement ce qui a été constaté par M. Ugolini à l'égard de l'ordonnée de l'orifice.

3° *Expériences de Bazin.* — Lorsque l'orifice est horizontal (même pour des charges ne dépassant pas un mètre), la vitesse (moyenne) à l'intérieur de la veine, une fois contractée, est légèrement inférieure à celle qui serait due à la hauteur (en chute libre).

C'est comme dire qu'en régime libre, pour avoir le débit réellement observé, les sections de la veine devraient être un peu plus petites, ou, si l'on veut, que la contraction graduelle de la veine reste au-dessous de celle qui aurait lieu en régime libre. L'écart de ce régime arrive donc (même dans ce cas) dans le sens du régime linéaire, où l'aire des sections reste inaltérée.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 20.