JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Cycles orthogonaux à une même sphère et configuration de Petersen-Morley

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 377-384.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__377_0>

Cycles orthogonaux à une même sphère et configuration de Petersen-Morley;

PAR BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. M. Labrousse et moi avons rédigé dans ce Journal deux Mémoires parallèles relatifs aux cycles orthogonaux à une même sphère ([1]) : j'ai montré, par une méthode purement géométrique, que chacun de ces ∞^4 cycles peut être représenté par un ensemble de deux points (a, α) marqués chacun sur un feuillet sphérique, de façon que le déplacement *arbitraire* du point a sur son feuillet, joint au déplacement *arbitraire* du point α sur son feuillet donne le total des quatre paramètres engagés et que la condition nécessaire et suffisante pour que deux cycles soient *sécants* est que la distance sphérique (aa_1) soit égale à la distance $(\alpha\alpha_1)$, (les deux feuillets ayant le même rayon). J'ai signalé dans mon Mémoire (p. 193) que c'était M. Cartan qui m'avait suggéré cette représentation; M. Cartan l'avait obtenue par des considérations analytiques de géométrie non euclidienne et mon Mémoire se termine par des extraits de deux lettres que M. Cartan m'avait écrites à ce sujet.

M. Labrousse arrive à des résultats équivalents en employant des

([1]) B. GAMBIER, *Cycles orthogonaux à une même sphère; congruences et opérations paratactiques. Applications* (*Journal de Math.*, t. IX, 1930, p. 179-199). — A. LABROUSSE, *Vecteurs complexes et cercles orthogonaux à une sphère; parataxie* (*Journal de Math.*, t. X, 1931, p. 307-334).

vecteurs imaginaires : si la sphère S orthogonale à tous les cycles est réelle, on emploie le symbole i tel que i^2+1 soit conventionnellement nul; si la sphère S est à centre réel et de rayon imaginaire pur, on emploie un symbole j tel que conventionnellement j^2-1 soit nul. Ce genre de vecteurs imaginaires a déjà été employé par divers géomètres allemands, en particulier Study.

Soit par la méthode que j'ai suivie, soit par celle de M. Labrousse, les propriétés de la parataxie se mettent aussitôt en évidence : dans la mienne, il suffit que a et a_1 soient confondus (ou diamétralement opposés) pour avoir une première espèce de parataxie, la seconde correspondant au cas où α et α_1 offrent cette configuration (au lieu de a et a_1); dans la méthode de M. Labrousse, ce sont les diviseurs $j-1$ et $j+1$ de j^2-1 qui font intervenir ces deux espèces de parataxie et l'on peut assimiler ces résultats au parallélisme de Clifford.

Quand j'étais élève à l'École Normale, M. Hadamard attirait notre attention sur ce fait qu'une méthode nouvelle a son intérêt beaucoup mieux manifesté par des problèmes posés antérieurement avant son introduction et résolus aisément par cette méthode nouvelle que par des problèmes (souvent plus ou moins artificiels) qu'elle sert à imaginer puis à résoudre. Or, on connaît depuis longtemps la belle configuration de Petersen-Morley formée par 10 droites de l'espace euclidien à trois dimensions telle que chacune d'elles rencontre à angle droit trois des autres. Personne, avant moi, n'avait songé à se demander si l'on ne pourrait obtenir *dix* cercles tels que chacun d'eux fût perpendiculaire à *trois* des autres (deux cercles sont *perpendiculaires* s'ils sont cosphériques et se coupent à angle droit), étant bien entendu que les dix cercles ne doivent pas avoir de point commun à eux tous et ne doivent pas non plus être tracés sur une même sphère. Or la représentation imaginée soit par M. Labrousse, soit par M. Cartan et moi-même, résout immédiatement la question et donne même 20 cercles réels si la sphère S est imaginaire (à équation réelle); si la sphère S est réelle, on trouve bien 10 cercles réels et 10 cercles nouveaux, *imaginaires* (mais à équations réelles); dans l'un et l'autre cas, on a dix couples de cercles *conjugués* tels que chaque couple soit perpendiculaire aux cercles de trois autres couples.

C'est d'ailleurs ce problème des vingt cercles qui m'avait conduit à soupçonner l'existence de la représentation, de sorte que M. Cartan, sur ma simple demande, me l'envoyait par retour du courrier; au fond cette configuration de vingt cercles ou de dix droites se ramène à cette propriété simple que *deux triangles conjugués par rapport à une conique sont homologiques.*

Bien entendu, la proposition de Morley-Petersen a été accueillie avec enthousiasme par tous les géomètres qui ont le culte de la beauté et de l'harmonie; et nous ne pouvions, M. Labrousse et moi, dans l'application de notre théorie au problème de Petersen-Morley (*partie accessoire de notre travail*), ne pas nous rencontrer avec les divers chercheurs qui ont imaginé soit des démonstrations nouvelles soit même une généralisation. Je crois difficile de dénombrer sans omission ni répétition tous les chercheurs qui ont retourné la proposition de Petersen-Morley, je m'en excuse ici.

Je ferai une exception pour un travail que j'ai eu l'occasion de lire : il s'agit d'un Mémoire publié en langue anglaise par M. Tadahiko Kubota, professeur au Collège Scientifique de Sendai, paru dans le Recueil *Science reports of the Tohoku Imperial University* (I, 6, 1917, p. 197-201) sous le titre : *Une application des formes binaires quadratiques à la géométrie.* C'est une démonstration analytique de la proposition de Petersen-Morley pour dix droites de l'espace non euclidien avec l'interprétation géométrique suivante en géométrie euclidienne : *étant donnée une quadrique* Q, *on peut trouver* 10 *couples de droites telles que les droites de chaque couple soient polaires réciproques par rapport à* Q *et que les droites d'un même couple soient sécantes avec les droites de trois autres couples; on peut choisir arbitrairement trois des couples.* La proposition analytique donnée par M. Kubota est la suivante : on peut trouver dix formes binaires quadratiques dont chacune est conjuguée à trois autres; or, cette proposition revient simplement à la proposition, *connue depuis plus de cent ans*, déjà citée pour deux triangles conjugués l'un de l'autre relativement à deux coniques.

M. Kubota n'aurait eu qu'un léger effort à faire pour découvrir les vingt cercles que j'ai imaginés; en effet si Q est la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

une droite arbitraire D est l'axe d'un cercle, unique, C orthogonal à S;

la droite réciproque D' est l'axe du cercle C', unique aussi, orthogonal à S et *conjugué* du premier; or un cercle C_1 dont l'axe D_1 rencontre D est cosphérique avec C; si D_1 rencontre aussi D', C_1 est cosphérique soit avec C soit avec C', et alors il leur est *perpendiculaire* à tous deux; cette propriété était d'ailleurs classique depuis longtemps et M. Labrousse en a fait un usage particulièrement heureux; en particulier, si au lieu de s'occuper de cercles cosphériques ou perpendiculaires, on considère *deux cercles* C, C_1 *tels que leurs axes* D, D_1 *soient, avec les droites réciproques* D', D'_1 *génératrices d'une même semi-quadrique*, *on découvre la parataxie*, comme M. Labrousse l'a prouvé. Il est curieux, ici, comme pour beaucoup d'autres découvertes mathématiques, de voir comment une idée si simple a pu échapper à tant d'auteurs, qui en avaient approché de bien près.

De son côté, M. Cartan, dans les lettres que j'ai reproduites et qui, primitivement, n'étaient pas destinées à être reproduites dans un journal mathématique, donne des suggestions relatives au problème de Petersen, les unes identiques au fond à celles de M. Kubota, les autres assez différentes : la partie commune n'est autre que la propriété de deux triangles conjugués l'un de l'autre relativement à une conique.

D'autre part M. Kubota veut bien me signaler aussi qu'il suffirait d'appliquer aux dix couples de droites qu'il a imaginées la transformation ponctuelle de Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III, p. 493) pour aboutir aux vingt cercles; cette transformation relève de la représentation de Poincaré de la géométrie non euclidienne et de la géométrie cayleyenne. D'ailleurs cette transformation remplace une droite Δ' par le cercle Γ orthogonal à une sphère fixe S' réelle ou non aux points où Δ perce S; ce cercle admet pour axe la droite Δ réciproque de Δ' vis-à-vis de S et l'on retrouve par une autre voie la substitution de droites à des cercles, substitution dont M. Labrousse avait tiré un parti si heureux.

2. M. Labrousse me signale une façon originale de traiter le cas de la sphère S réelle et des *dix* cercles réels. Une inversion permet de réduire S à un plan P; tout cercle γ orthogonal à P peut être représenté par les deux points c, c' où il perce P; on voit aussitôt que deux cercles γ, γ_1 sont *cosphériques* si les points c, c' et c_1, c'_1 sont sur un même cercle de P (autrement dit en supposant que c, c', c_1, c'_1 sont les affixes de nombres complexes, si le rapport anharmonique $\{c, c', c_1, c'_1\}$ est réel), et que γ et γ' sont de plus *perpendiculaires* si ce birapport est égal à -1. Or les nombres complexes d'affixe c, c', ... peuvent être regardés comme les paramètres unicursaux de points *soit de la droite complexe soit, ce qui est plus avantageux ici, de points d'une conique* Γ; nous désignerons d'ailleurs, ce qui est sans inconvénient, un point de la conique Γ et son paramètre par la même lettre; *donc les points* (c, c') *et* (c_1, c'_1) *images des cercles perpendiculaires* γ *et* γ_1 *se divisent harmoniquement, les cordes* cc' *et* $c_1c'_1$ *sont conjuguées.* On est donc ramené à trouver dix cordes de Γ telles que chacune soit conjuguée de trois autres.

Expliquons donc comment, partant d'un triangle ABC et de son triangle polaire $A'B'C'$ on trouve les dix cordes, car provisoirement on n'a que les six cordes BC, CA, AB et $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Les trois points

$$A_1 = (BC, B'C'), \qquad B_1 = (CA, C'A'), \qquad C_1 = (AB, A'B')$$

sont sur une même droite Δ qui est la septième droite, tandis que AA', BB', CC' qui concourent au pôle δ de Δ forment les trois droites complétant le total de dix. *On remarquera que les cercles de l'espace représentés chacun par une corde de* Γ *peuvent être aussi bien représentés par le pôle de la corde : on trouve alors les points* A, B, C, A', B', C', A_1, B_1, C_1 *et* δ *au nombre de dix et tels que chacun soit conjugué de trois autres, suivant le tableau*

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|ccccccc}
A & A_1 & B' & C' & A' & A_1 & B & C & A_1 & A & A' & \delta & & & & \\
B & B_1 & C' & A' & B' & B_1 & C & A & B_1 & B & B' & \delta & \delta & A_1 & B_1 & C_1 \\
C & C_1 & A' & B' & C' & C_1 & A & B & C_1 & C & C' & \delta & & & &
\end{array}$$

Mais alors, prenant un point de vue S non situé dans le plan P, on obtient, en joignant S aux dix points, dix droites concourantes telles que chacune soit conjuguée de trois autres par rapport au cône de sommet S et de directrice Γ; si ce cône est une sphère de rayon nul, on retrouve la proposition relative aux dix droites concourantes de Petersen-Morley; et en utilisant, comme l'a fait M. Pérès aux *Nouvelles Annales* (6^e série, I, 1926, p. 193-197), des vecteurs complexes convenablement choisis (symbole ε tel que $\varepsilon^2 = 0$) on passe des dix droites de Morley-Petersen *concourantes* (cercles ayant deux points communs à eux tous) à dix droites non concourantes (cercles ayant un seul point commun à eux tous) : les diverses configurations obtenues à chaque moment, après chaque modification du point de vue, se correspondent d'une façon biunivoque; il en résulte que le cas le plus compliqué (cercles sans point commun) se ramène au cas le plus simple (cercles ayant deux points communs à eux tous, ou si l'on préfère, au moyen d'une inversion, au cas de dix droites concourantes).

3. Il n'est peut-être pas superflu de démontrer *géométriquement*, par une méthode *réelle*, cette proposition qui est la clé de toute la théorie : étant donnés une conique Γ et un triangle ABC, ce triangle ABC et son triangle polaire réciproque sont homologiques.

Je distingue deux cas suivant que, parmi les six droites BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, il y en a au moins une qui ne coupe pas la conique Γ ou que toutes les six coupent Γ (si Γ est imaginaire, mais à équation réelle, le premier cas est réalisé automatiquement).

Prenons donc le premier cas; le lecteur fera lui-même les figures qui sont fort simples.

La droite $B'C'$ ne coupe pas Γ; nous faisons une perspective telle que $B'C'$ soit rejetée à l'infini, alors A est centre de l'ellipse Γ et nous passons de l'ellipse à son cercle principal par l'homographie bien connue. On a donc un cercle Γ, un triangle ABC ayant son sommet A au centre de Γ; B' est le point rejeté à l'infini sur la perpendiculaire AB' à AC et C' le point à l'infini de la droite AC' perpendiculaire à AB; les droites AA', BB', CC' sont donc les hauteurs du triangle ABC, elles concourent en l'orthocentre δ; nous pouvons montrer directement que les points $A_1 = (BC, B'C')$, $B_1 = (CA, C'A')$, $C_1 = (AB, A'B')$ sont en ligne droite; en effet le premier est le point à l'infini de BC; le triangle $A'B_1C_1$ est évidemment semblable au triangle HCB, A étant pôle d'homothétie, donc B_1C_1 est parallèle à BC, donc passe par A_1.

Passons au second cas : en renvoyant $B'C'$ à l'infini, on a cette fois une hyperbole de centre A et un triangle ABC; par une transformation homographique simple, on remplace l'hyperbole par une hyperbole équilatère ayant les mêmes axes; $B'C'$ est donc encore la droite de l'infini; le rayon AC' est symétrique de AB relativement aux asymptotes; de même AB′ et AC sont symétriques relativement aux asymptotes; on en conclut les égalités angulaires, en droites indéfinies,

$$(AB, AB') = -(AC', AC) = (AC, AC').$$

Les droites BB′ et CC′ se coupent en δ et l'on a

$$(AB, AB') = (BA, B\delta), \qquad (AC, AC') = (CA, C\delta).$$

L'égalité $(BA, B\delta) = (CA, C\delta)$ [mod π] prouve que ABδC sont sur un même cercle, mais alors BC et Aδ ont mêmes bissectrices (en direction) que AB, Cδ ou AB, AC′ et ceci prouve que Aδ passe par le pôle A′ de BC. On démontrerait par le même raisonnement que plus haut que (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′) sont en ligne droite.

4. Nous avons ainsi terminé l'exposé synthétique des divers procédés de démonstration de la proposition de Petersen-Morley pour les dix droites (concourantes ou non), pour les dix cercles ou vingt cercles et montré comment des raisonnements de géométrie élémentaire ou de géométrie euclidienne ou encore l'emploi de vecteurs imaginaires convenablement choisis permettent de ramener les divers cas à l'un d'entre eux, par exemple au plus simple, à savoir la gerbe de Petersen-Morley formée de dix droites concourantes. Ce cas de la gerbe contient donc tous les autres, à condition bien entendu d'avoir introduit la notion d'éléments imaginaires en géométrie, de sorte qu'en réalité, si l'on se borne aux éléments réels, les vingt cercles réels orthogonaux à une sphère S imaginaire, ou les dix cercles réels orthogonaux à une sphère S réelle donnent une configuration qui *généralise* la gerbe de Morley-Petersen. Il n'est pas sans intérêt de prouver par une voie directe qu'inversement les dix droites non concourantes de Morley-Petersen doivent être considérées comme une *dégénérescence* des dix cercles orthogonaux à une sphère réelle S. C'est M. Labrousse qui m'a signalé le raisonnement suivant :

Lemme. — Soient un cercle fixe Γ de centre C et O un point fixe de Γ. On considère un cercle infiniment petit ε de centre O qui coupe Γ en A et B et soit Σ le cercle orthogonal à ε en A et B. *Lorsque ε devient de rayon nul, le cercle Σ a une limite qui est le cercle Γ' homothétique de Γ par rapport à O, le rapport d'homothétie $\Gamma' : \Gamma$ étant égal à 2.*

Passons maintenant à la dégénérescence annoncée : soient trois cercles A, B, C passant, dans l'espace à trois dimensions, par un même point O et n'ayant pas d'autre point commun (à eux tous ou à deux d'entre eux); traçons une sphère ε de centre O; soient α, β, γ les cercles orthogonaux à ε aux points où A, B, C respectivement coupent ε; nous imaginons démontrée par une méthode arbitraire l'existence de dix cercles orthogonaux à ε et déduits de α, β, γ par le procédé Petersen-Morley; soit $(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \delta)$ cette configuration. Quand ε tend vers zéro, cette configuration a une limite $(A', B', C'; A'_1, B'_1, C'_1; A'_2, B'_2, C'_2; D')$ formée de dix cercles passant tous en O, les trois premiers étant homothétiques de A, B, C par rapport à O, avec le rapport $A' : A = B' : B = C' : C = 2$.

L'inversion du pôle O donne donc à partir de $(A', B', C'; A'_1, B'_1, C'_1; A'_2; B'_2; C'_2; D')$ une configuration de dix droites de Morley-Petersen non concourantes qui, elle-même transformée par homothétie (le rapport d'homothétie devenant nul), tend à son tour vers une dégénérescence plus forte, la gerbe de Morley-Petersen.

[Cette dernière dégénérescence peut donc s'obtenir à partir des dix cercles $(A', B', C'; A'_1, B'_1, C'_1; A'_2, B'_2, C'_2; D)$: par une inversion du pôle O, dont la puissance varie et tend vers zéro.]

En résumé c'est bien le théorème relatif à deux triangles polaires réciproques vis-à-vis d'une même conique qui est la clé de tout (en géométrie cayleyenne, ce théorème que les hauteurs cayleyennes d'un triangle sont concourantes).