JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LEBEL

Réseaux conjugués attachés aux développables des normales de certaines surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 299-332.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__299_0>

Réseaux conjugués attachés aux développables des normales de certaines surfaces;

PAR J. LEBEL.

1. INTRODUCTION. — Les systèmes cycliques de Ribaucour ont donné une importance capitale, dans l'architecture des surfaces, aux réseaux conjugués de Dupin, tracés sur une surface quelconque par les développables normales à une autre surface [1]. Je me propose d'attirer l'attention sur certains réseaux dépendant d'un paramètre et caractérisés par la propriété de déterminer des *divisions semblables* sur les normales d'une même surface (S); j'appelle surfaces (Σ) les supports des réseaux en jeu.

Les surfaces (S) qui donnent lieu à cette particularité se classent en trois catégories dont les deux premières sont évidentes *a priori :*

A. *Une surface* (S) *quelconque réunie aux surfaces* (Σ) *qui lui sont parallèles.*

[1] Nous rappelons que les cercles d'un système cyclique forment une congruence orthogonale à une famille de surfaces dépendant d'un paramètre, sur lesquelles ils établissent une correspondance ponctuelle où les lignes de courbure de toutes ces surfaces se correspondent. Deux surfaces quelconques de la famille peuvent être considérées comme les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dépendant de deux paramètres. Or, pour que les lignes de courbure se correspondent sur deux pareilles nappes, et que l'on puisse en déduire un système cyclique, il faut et il suffit que les développables normales à l'une d'elles tracent un réseau conjugué sur la surface lieu des centres des sphères.

B. *Une surface moulure* (S) *quelconque*. — Le profil plan (C) qui engendre cette surface est tracé dans un plan (P) roulant sans glissement sur une développable quelconque (Γ) [(Γ) peut se réduire à une droite, à un cylindre ou à un cône]. Dans le plan (P), traçons un autre profil arbitraire (C_1) et faisons correspondre à un point quelconque M de (C) le point M_1 où la normale à (C) en M perce (C_1): marquons ensuite sur le segment MM_1 le point N tel que $\overline{MN} : \overline{MM_1} = \lambda$, où λ est fixe; le point N décrit un profil (C′), qui, dans le mouvement de (P), engendre la surface (Σ). La variation de la constante λ fournit les ∞^1 surfaces (Σ) associées à (S)[λ = o donne (S), λ = 1 donne (S_1) engendrée par (C_1)]; les réseaux sont lignes de courbure sur chaque surface (Σ).

C. *La seule solution vraiment intéressante est une surface* (S) *caractérisée par ce fait que, si elle est rapportée à ses lignes de courbure* (*u*, *v*), *les rayons de courbure principaux sont chacun le produit d'une fonction de u par une fonction de v*.

Cette propriété intrinsèque conduit, pour obtenir effectivement (S), à chercher d'abord la représentation sphérique de (S). Établissons avant tout les notations auxquelles nous nous conformerons dans tout ce qui suit.

Les rayons de courbure principaux, désignés par R_1 et R_2, ont pour inverses ρ_1 et ρ_2, et nous écrivons, pour les éléments linéaires de (S) et de la sphère,

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2, \qquad d\sigma^2 = M^2 du^2 + N^2 dv^2$$

avec

$$A = MR_1, \qquad B = NR_2.$$

Les formules de Codazzi s'écrivent sous l'une des formes

$$a = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \qquad \alpha = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{1}{R_2 - R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v},$$

$$b = \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial u}; \qquad \beta = \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{R_1 - R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

Enfin, si x, y, z sont les coordonnées d'un point de la surface, celles de la représentation sphérique sont ξ, η, ζ.

On pourra être étonné par certains signes, par exemple, dans l'application des formules d'Olinde Rodrigues; cela tient à ce que nous adoptons, comme origine du vecteur rayon de courbure, le centre de courbure et non le pied de la normale. Cette remarque s'étend à toutes les courbures.

Cela posé, pour obtenir la représentation sphérique annoncée, nous pouvons, sans restriction dans le cas qui nous occupe, choisir les variables indépendantes de manière à avoir

$$R_1 = U\,uv, \qquad R_2 = V\,uv,$$

U étant une fonction du seul argument u, et V du seul v. Les deux équations

$$\frac{dU}{dv} = 0, \qquad \frac{dV}{du} = 0,$$

jointes aux deux formules de Codazzi (deuxième forme) et à l'équation de courbure de Gauss, fournissent un système de *cinq* équations pour déterminer les *quatre* fonctions $M(u, v)$, $N(u, v)$ $U(u)$ et $V(v)$.

Supposons que l'on ait réussi à trouver une solution de ce système; on sait que, du moins en général, les cosinus directeurs $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$ s'obtiennent par intégration d'une équation de Riccati et qu'ensuite les coordonnées x, y, z du point M de (S) se déterminent par trois quadratures.

Or, la recherche des solutions *éventuelles* d'un tel système est, comme on sait, souvent pénible. Je me suis contenté de montrer la compatibilité en découvrant certaines solutions particulières, d'ailleurs remarquables, par l'introduction de diverses hypothèses particulières (¹).

Première hypothèse particulière : la surface est isothermique. On trouve la *cyclide générale de Dupin* ou la *quadrique générale*.

Deuxième hypothèse particulière : au lieu que (S) soit isothermique, nous demandons que *les divisions semblables découpées sur les diverses normales de* (S) *se projettent sur un axe fixe* (Oz pour fixer les idées), *suivant des divisions égales.* Il est alors commode de chercher direc-

---

(¹) Les surfaces de révolution donnent un autre type de solutions particulières dépendant d'*une* fonction arbitraire d'une variable.

tement le z du point M de (S) en fonction de x et y; la fonction inconnue z est solution du système des deux équations (linéaires par rapport aux dérivées d'ordre 3) :

$$
\begin{aligned}
&[(1+p^2)s - pqr]\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\\
&\qquad-[(1+p^2)t-(1+q^2)r]\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}-[pqt-(1+q^2)s]\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0.\\
&[(1+p^2)s - pqr]\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\\
&\qquad-[(1+p^2)t-(1+q^2)r]\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}-[pqt-(1+q^2)s]\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=0.
\end{aligned}
$$

Je n'ai pas non plus discuté complètement ce système, qui admet des solutions *particulières* dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable; mais j'ai mis en évidence une solution remarquable constituée par *le paraboloïde général d'axe parallèle à* Oz. Cette solution particulière rentre d'ailleurs dans les solutions isothermiques.

Dans le cas où *la surface* S *est une quadrique à centre ou un paraboloïde*, les surfaces (Σ) sont les polaires réciproques de la quadrique (S) par rapport aux diverses quadriques homofocales à (S). En terminant cette introduction, je dois remercier M. Bertrand Gambier, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, de l'intérêt qu'il a pris à mes recherches et des perfectionnements qu'il m'a suggérés pour la rédaction de ce travail. M. Gambier a remarqué que les lignes de courbure d'une surface solution de notre problème, supposée connue, s'obtiennent en termes finis, et il a bien voulu rédiger le paragraphe final où il expose ce résultat.

2. *Mise en équation du problème.* — Sur la normale en chaque point $M(x, y, z)$ d'une surface (S) rapportée à ses lignes de courbure, nous portons un segment $\overline{MN} = \lambda\rho$, λ étant une constante et ρ une fonction de u et v. L'extrémité N a pour coordonnées

$$x_1 = x + \lambda\rho\xi, \qquad y_1 = y + \lambda\rho\eta, \qquad z_1 = z + \lambda\rho\zeta.$$

Il s'agit de choisir ρ de manière que, quel que soit λ, x_1, y_1, z_1 soient solutions d'une même équation de Laplace à trois termes. La condition se traduit par une identité en λ,

$$\left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial^2(\rho\xi)}{\partial u \partial v} \quad \frac{\partial x}{\partial u} + \lambda \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial v} \right| \equiv 0.$$

Celle-ci est de la forme

$$\Theta + H\lambda + K\lambda^2 + L\lambda^3 \equiv 0,$$

et l'on a d'abord, par hypothèse,

$$\Theta = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| = 0.$$

Les lignes coordonnées sont conjuguées sur la surface S qui correspond à $\lambda = 0$.

Il reste trois conditions :

(1) $$H = 0,$$

(2) $$K = 0,$$

(3) $$L = 0$$

que nous allons interpréter.

3. *Interprétation de la condition* $L = 0$. — La condition

$$L \equiv \left| \frac{\partial^2(\rho\xi)}{\partial u \partial v} \quad \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial u} \quad \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial v} \right| = 0$$

se traduit ainsi :

Si l'on applique au point fixe O un vecteur équipollent à $\overrightarrow{MN}$, l'extrémité décrit une surface sur laquelle les lignes coordonnées forment un réseau conjugué. Les coordonnées $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$ satisfont à une même équation de Laplace :

(4) $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = a' \frac{\partial \theta}{\partial u} + b' \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

sur laquelle nous allons avoir à revenir.

Cela résulte au fond de la remarque suivante : la surface $(\Sigma)(x_1, y_1, z_1)$ s'éloigne tout entière à l'infini si λ devient infiniment grand; mais la surface homothétique $\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{y_1}{\lambda}, \frac{z_1}{\lambda}\right)$, sur laquelle le réseau (u, v) est conjugué, tend dans les mêmes conditions vers la surface $(\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta)$.

L'équation (4) a d'ailleurs une interprétation analytique simple. La surface (S) étant rapportée à un réseau conjugué, qui est même réseau de courbure, les coordonnées tangentielles homogènes satisfont à une même équation de Laplace, en général avec un terme en θ; ce dernier terme disparaît quand on divise les coordonnées tangentielles par une solution quelconque de l'équation. On voit qu'ici, en écrivant l'équation du plan tangent sous la forme

$$\rho\xi(X - x) + \rho\eta(Y - y) + \rho\zeta(Z - z) = 0,$$

les coordonnées tangentielles particulières

$$\rho\xi, \quad \rho\eta, \quad \rho\zeta, \quad -\rho(x\xi + y\eta + z\zeta)$$

satisfont à une équation de Laplace qui est précisément (4) et se trouve privée du terme en θ. Autrement dit, 1 est aussi une solution. Et comme le réseau est de courbure $\sqrt{(\rho\xi)^2 + (\rho\eta)^2 + (\rho\zeta)^2}$, c'est-à-dire ρ, est aussi solution de (4).

Rappelons, d'ailleurs, que l'équation ponctuelle de Laplace à laquelle satisfont $1, x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$ est l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\, \partial v} = a\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

où a et b sont les fonctions définies dans l'introduction.

4. *Interprétation de la condition* $H = 0$. — Nous avons

$$H = \left|\frac{\partial^2(\rho\xi)}{\partial u\, \partial v}\; \frac{\partial x}{\partial u}\; \frac{\partial x}{\partial v}\right| - \left|\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\; \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial u}\; \frac{\partial x}{\partial v}\right| + \left|\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\; \frac{\partial x}{\partial u}\; \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial v}\right|.$$

Nous pouvons éliminer les dérivées du second ordre en utilisant, pour le premier déterminant l'équation (4), et pour les deux autres les relations telles que

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{5}$$

Puis, en appliquant les formules d'Olinde Rodrigues,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = R_1\frac{\partial\xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = R_2\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

nous voyons facilement que les trois déterminants sont les produits de

$$\left| \xi \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right|$$

par les facteurs respectifs

$$a' \frac{\partial \rho}{\partial u} + b' \frac{\partial \rho}{\partial v}, \quad -a \frac{\partial \rho}{\partial u}, \quad -b \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Le facteur commun n'étant pas nul, sauf dans le cas d'une développable isotrope que nous écartons, il reste

$$(1') \qquad (a' - a) \frac{\partial \rho}{\partial u} + (b' - b) \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Nous pouvons présenter ce résultat sous une forme différente, car si nous développons notre premier déterminant partiel sans tenir compte de (4), et en utilisant seulement les relations concernant la sphère,

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial x}{\partial v},$$

nous le trouvons égal à

$$\left| \xi \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}.$$

L'équation (1') prend alors la forme équivalente

$$(1'') \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Ainsi, ρ *est solution de l'équation ponctuelle de Laplace relative aux lignes de courbure de la surface* (S).

Ceci peut encore s'obtenir en remarquant que, ρ étant solution de l'équation (4), l'équation (1') entraîne

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = a' \frac{\partial \rho}{\partial u} + b' \frac{\partial \rho}{\partial v} = a \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

5. *Interprétation de la condition* $K = 0$. — Nous avons enfin

$$K = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial u} \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial v} \right| + \left| \frac{\partial^2(\rho\xi)}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial v} \right| + \left| \frac{\partial^2(\rho\xi)}{\partial u \partial v} \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right|.$$

On reconnaît que les trois déterminants sont les produits de $\left| \xi \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right|$

par les facteurs

$$-\rho\left(aR_1\frac{\partial\rho}{\partial u} + bR_2\frac{\partial\rho}{\partial v}\right),\quad a'R_1\rho\frac{\partial\rho}{\partial u},\quad b'R_2\rho\frac{\partial\rho}{\partial v},$$

et l'on a la dernière condition

$$(7)\qquad (a'-a)R_1\frac{\partial\rho}{\partial u} + (b'-b)R_2\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

Rapprochons les équations (1') et (7). Elles sont homogènes et du premier degré en $(a'-a)\frac{\partial\rho}{\partial u}$ et $(b'-b)\frac{\partial\rho}{\partial v}$; il y a donc deux cas à distinguer, suivant que leur déterminant $R_1 - R_2$ est nul ou non :

A. $R_1 = R_2$. — *La surface* (S) *est une sphère;* nous étudierons directement ce cas, et nous verrons que (S) *se comporte simplement comme une surface moulure conique* (second type de l'introduction).

B. $R_1 \neq R_2$. — On a donc

$$(a'-a)\frac{\partial\rho}{\partial u} = 0,\qquad (b'-b)\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0,$$

et il y a, par suite, quatre sous-cas B_1, B_2, B_3, B_4 à examiner :

B_1. $$\frac{\partial\rho}{\partial u} = 0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

C'est le cas *d'une surface* (S) *quelconque jointe aux surfaces* (Σ) *parallèles à* (S) (premier type de l'introduction); il n'y a rien à ajouter à ce cas élémentaire.

B_2. $$a'-a = 0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

Nous allons voir que c'est le cas de la surface moulure quelconque.

B_3. $$b'-b = 0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial u} = 0.$$

Par simple échange de u et v, ce cas est le même que B_2.

B_4. (S) $$a' = a,\qquad b' = b.$$

C'est le *troisième type de l'introduction*, que l'on doit considérer comme le seul type vraiment intéressant.

Nous allons étudier successivement ces divers cas.

6. *Étude de la sphère et de la surface moulure générale.* — Commençons par le cas de la sphère, qu'il est naturel d'étudier directement. Si l'on prend le centre comme origine, et le rayon comme unité de longueur ξ, η, ζ ne diffèrent pas de x, y, z, (ce qui justifie la forme adoptée dans ce travail pour les formules d'Olinde Rodrigues), et les coordonnées du réseau (Σ) sont

$$x_1 = (1 + \lambda\rho)x, \qquad y_1 = (1 + \lambda\rho)y, \qquad z_1 = (1 + \lambda\rho)z.$$

Comme elles sont proportionnelles à x, y, z, qui satisfont à une même équation de Laplace, elles sont aussi, dans tous les cas, solutions d'une autre équation analogue mais contenant en général *quatre* termes. Pour que l'on ait un réseau conjugué sur (Σ), il faut et il suffit que la seconde équation perde son dernier terme, c'est-à-dire que la première admette la solution $\frac{1}{1+\lambda\rho}$. Ceci conduit immédiatement à l'équation

$$(1 + \lambda\rho)\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} - a\frac{\partial \rho}{\partial u} - b\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) - 2\lambda\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Elle doit être vérifiée quel que soit λ; donc le terme indépendant montre (résultat déjà trouvé plus haut) que ρ est solution de l'équation de Laplace du réseau (x, y, z). Mais il reste

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

En échangeant au besoin les noms de u et v, nous pouvons, sans restreindre, supposer $\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$. Le réseau sphérique donne alors

$$a = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial v} = 0.$$

M ne dépend que de u et peut, par un changement éventuel de cette variable, être réduit à 1. Les courbes $v = \text{const.}$ sont géodésiques sur la sphère. D'autre part, l'équation de courbure

$$\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} + N = 0$$

permet de prendre, par un choix convenable de la variable v,

$$\Lambda = \sin(u - \alpha) \qquad \text{d'où} \qquad d\sigma^2 = du^2 + \sin^2(u - \alpha)\, dv^2,$$

α étant une fonction *arbitraire* de v. La sphère est engendrée par un grand cercle ($v = \text{const.}$) dont le plan roule sans glisser sur un cône (Γ) ayant son sommet au centre de la sphère. Ce grand cercle joue le rôle du profil (C) de l'introduction, et le choix de la fonction $\rho(u)$ donne le second profil (C_1).

Prenons maintenant le cas B_2. On a $a' - a = 0$ et $\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0$. La seconde hypothèse donne encore, comme précédemment, en faisant intervenir l'équation de Laplace : $a = 0$, et par suite $a' = 0$, et l'on a toujours pour la sphère

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2(u - \alpha)\, dv^2.$$

De plus, pour (S), $\frac{\partial\Lambda}{\partial v} = 0$, de sorte que les courbes (v) sont géodésiques planes à la fois sur la sphère et sur la surface (S) (dans des plans parallèles). *La surface* (S) *est donc une surface moulure générale.*

7. *Récapitulation du cas fondamental* B_1. *Caractère des rayons de courbure principaux.* — Les égalités

$$(8) \qquad a' - a = 0, \qquad b' - b = 0$$

montrent que l'équation de Laplace est la même pour (S) et toutes les surfaces (Σ). Ce fait et l'existence de la solution ρ entraînant une équivalence avec nos conditions primitives $H = 0$, $K = 0$, $L = 0$, nous pouvons donner l'énoncé suivant :

Les surfaces du type B_1 *sont caractérisées par la condition que les huit quantités*

$$1, \quad x, \quad y, \quad z, \quad x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho\xi, \quad \rho\eta, \quad \rho\zeta$$

soient solutions d'une même équation de Laplace, qui est l'équation à la fois ponctuelle et tangentielle relative à ce réseau.

En effet, la solution 1 montre que le terme en θ manque ; $x^2 + y^2 + z^2$ entraîne que le réseau soit de courbure ; mais alors ceci entraîne encore que ρ soit nouvelle solution ; de plus $\rho(x\xi + y\eta + z\zeta)$ est nouvelle solution, car c'est la quatrième coordonnée homogène du plan tangent, $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$ étant les trois premières.

Nous avons ainsi un moyen de former les conditions nécessaires et suffisantes : *l'équation de Laplace ponctuelle et l'équation de Laplace tangentielle relative au réseau de courbure doivent avoir les mêmes invariants.* La voie que nous allons suivre est pratiquement équivalente.

Développons la condition

$$\frac{\partial^2(\rho\xi)}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial(\rho\xi)}{\partial u} + b\frac{\partial(\rho\xi)}{\partial v}$$

en éliminant toujours les dérivées secondes. Nous obtenons, tous calculs effectués,

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \alpha - a\right)\frac{\partial\xi}{\partial u} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \beta - b\right)\frac{\partial\xi}{\partial v} = 0.$$

On aurait des équations analogues avec η et ζ. Tout se réduit forcément aux deux relations distinctes

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v} = a - \alpha = \frac{1}{R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u} = b - \beta = \frac{1}{R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u},$$

d'où l'on déduit, U et V étant fonctions respectives du seul argument u ou v,

$$R_1 = U\rho, \qquad R_2 = V\rho, \qquad \frac{R_1}{U} = \frac{R_2}{V}.$$

Il faut, avant tout, que la surface (S) possède ce premier caractère : *le rapport* $R_1 : R_2$ *est le quotient d'une fonction de u par une fonction de v.* Les fonctions U et V ne sont connues qu'à un facteur constant près, sans influence sur le rôle que doit jouer la fonction ρ valeur commune de $R_1 : U$ ou $R_2 : V$. On a, par exemple, en donnant à v une valeur particulière v_0, sans intégration, la valeur de U

$$U = \frac{R_1}{R_2}V = \frac{R_1(u, v_0)}{R_2(u, v_0)}\cdot V(v_0),$$

$V(v_0)$ pouvant prendre une valeur arbitraire. On en déduit ensuite V et ρ.

Il nous reste à exprimer que ρ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\frac{\partial\rho}{\partial v}.$$

Or nous avons successivement

$$\alpha = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{1}{R_2 - R_1}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{U}{V-U}\cdot\frac{1}{R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{U}{V-U}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v},$$

$$\beta = \frac{V}{U-V}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$$a = \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{V}{V-U}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v},$$

$$b = \frac{U}{U-V}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = a\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Il faut que ρ soit à son tour le produit d'une fonction de u par une fonction de v. Soit

$$\rho = U_1 V_1 \quad (^1).$$

Supposons cette condition remplie ; il en résulte

$$(9) \qquad R_1 = U U_1 V_1, \qquad R_2 = V U_1 V_1,$$

de sorte que les expressions de R_1 et R_2 sont elles aussi de la même forme que celle de ρ. Or cette dernière condition est suffisante, car elle permet de donner à R_1 et R_2 les formes (9). On calcule U et V comme précédemment, et les autres facteurs donnent bien lieu à une fonction ρ de la forme indiquée. En résumé, nous aboutissons à la condition *nécessaire et suffisante :*

Les surfaces (S) *qui conduisent aux réseaux de Dupin possédant le caractère en question sont celles pour lesquelles chacun des deux rayons de courbure principaux est le produit d'une fonction de u par une fonction de v, u et v étant les paramètres des lignes de courbure.*

---

(1) La fonction V_1 s'obtient comme plus haut en écrivant $\frac{\rho(u, v)}{\rho(u, v_0)} = \frac{V_1(v)}{V_1(v_0)}$; on choisit arbitrairement la constante $V_1(v_0)$ et $V_1(v)$ en résulte; on a ensuite $U_1 = \frac{\rho(u, v)}{V_1(v)}$.

8. *Généralités sur les surfaces* (S). — Abordons, en suivant la marche annoncée dans l'introduction, le problème de la représentation sphérique des surfaces (S).

Avec la notation adoptée pour les rayons de courbure principaux, nous avons d'abord les deux formules de Codazzi

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{U}{V-U}\cdot\frac{V'_1}{V_1}, \qquad \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{V}{U-V}\cdot\frac{U'_1}{U_1},$$

que nous pouvons simplifier dans le cas général, en supposant que U_1 et V_1 soient réellement variables. Car rien n'empêche alors de leur faire jouer les rôles de u et v, de sorte que

$$R_1 = U uv, \qquad R_2 = V uv.$$

En introduisant ensuite l'équation de Gauss, nous assujettissons les *quatre* fonctions inconnues M, N, U, V à satisfaire aux *cinq* équations

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial M}{\partial v} = \dfrac{U}{(V-U)v}, \qquad \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial N}{\partial u} = \dfrac{V}{(U-V)u}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{N}\dfrac{\partial M}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial u}\right) + MN = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial v} = 0, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

La suite nous prouvera que ce système est compatible. On peut, d'ailleurs, éliminer si l'on veut U et V, tout au moins pour faire la discussion, en écrivant les deux premières équations sous la forme équivalente

$$\frac{v}{M}\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{u}{N}\frac{\partial N}{\partial u} = -1, \qquad \frac{N}{M}\,\frac{\dfrac{\partial M}{\partial v}}{\dfrac{\partial N}{\partial u}} = -\frac{Uu}{Vv},$$

de sorte que l'on peut se borner à *deux* inconnues M, N liées par *trois* équations

$$(E_1)\quad \begin{cases} \dfrac{v}{M}\dfrac{\partial M}{\partial v} + \dfrac{u}{N}\dfrac{\partial N}{\partial u} = -1, \qquad \dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\dfrac{N}{M}\,\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial v}}{\dfrac{\partial N}{\partial u}}\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{N}\dfrac{\partial M}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial u}\right) + MN = 0. \end{cases}$$

Mais le progrès est plus apparent que réel, car on passe de (E_1) à (E) en *intégrant* deux fois la seconde équation de (E_1).

Il nous faut prévoir le cas où l'une des fonctions U_1 ou V_1 (mais non les deux), V_1 par exemple, se réduirait à une constante ; on a alors

$$V'_1 = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial v} = 0,$$

et les courbes $v = \text{const.}$ sont géodésiques sur (S) et sur sa représentation sphérique. On peut donc réduire M à l'unité et écrire

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2(u-\alpha)\, dv^2,$$

α étant une fonction de v, qui peut d'ailleurs se réduire à une constante. On a donc

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial u} = \cot(u-\alpha) = \frac{V}{U-V}\cdot\frac{U'_1}{U_1}.$$

Résolvons cette équation en V :

$$V = \frac{UU_1}{U_1 + U'_1 \operatorname{tang}(u-\alpha)}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à u, on a

$$\frac{U'}{U} + \frac{U'_1}{U_1} - \frac{U''_1 \operatorname{tang}(u-\alpha) + U'_1[1 + \operatorname{tang}^2(u-\alpha)]}{U_1 + U'_1 \operatorname{tang}(u-\alpha)} = 0.$$

Cette dernière équation, résolue comme équation du second degré en $\operatorname{tang}(u-\alpha)$ (car on a $U'_1 \neq 0$), montre que $\operatorname{tang}(u-\alpha)$, ou $u-\alpha$, ou α, ne dépend que de u. Or α ne dépend déjà que de v, donc est une constante, que l'on peut sans restreindre supposer nulle. Alors

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2 ;$$

le système (u, v) est donc formé sur la sphère des méridiens ($v = \text{const.}$) et des parallèles ($u = \text{const.}$).

L'équation trouvée pour V,

$$V = \frac{UU_1}{U_1 + U'_1 \operatorname{tang} u},$$

montre que V est une constante, que l'on peut sans restriction supposer égale à 1 ; on a donc

$$R_1 = UU_1, \qquad R_2 = U_1, \qquad U = 1 + \frac{U'_1}{U_1}\tang u,$$
$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$
$$ds^2 = U^2 U_1^2\, du^2 + U_1^2 \sin^2 u\, dv^2$$

et la comparaison de ces équations montre que la surface S est de révolution ; la surface Σ_1 obtenue pour $\lambda = 1$ se réduit à l'axe de révolution de la surface S et la surface Σ obtenue pour λ quelconque est de révolution.

Cette solution particulière est en tout cas intéressante pour prouver que la solution générale du problème, solution du troisième type de l'introduction, dépend au moins d'*une* fonction arbitraire d'une variable (on remplace en effet UU_1 par $U_1 + U'_1 \tang u$ pour avoir la forme la mieux appropriée à la recherche présente, et la fonction U_1 est complètement arbitraire).

Mais le lecteur remarquera qu'une surface S de révolution, qui vient de jouer ici comme solution du type B_1, peut jouer comme solution du type B_2, en l'associant à une surface Σ_1 de révolution *quelconque* de même axe que S (dans la famille d'un paramètre de surfaces Σ obtenues pour le couple S, Σ_1, aucune ne se réduirait à l'axe de révolution de S).

9. *Première recherche de solutions particulières. Surfaces isothermiques.* — Cherchons s'il peut exister des surfaces (S) isothermiques. La relation de Weingarten ou des invariants égaux

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}$$

se traduit directement au moyen des éléments que nous possédons ; elle devient

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U-V}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{V-U}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)$$

ou

$$(U^2 - V^2)\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u\,\partial v} - \left(VU'\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v} - UV'\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right) = 0.$$

Le premier terme étant supposé nul, il nous reste

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}}{\frac{U'}{U}} = \frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}}{\frac{V'}{V}} = n.$$

n étant forcément une constante, puisque le premier nombre ne dépend pas de v, ni le second de u. On a donc, à un facteur constant près,

$$\rho = U^n V^n,$$

d'où

$$R_1 = U^{n+1} V^n, \qquad R_2 = U^n V^{n+1},$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v} = a = \frac{nV'}{V-U}, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u} = b = \frac{nU'}{U-V},$$

$$A = (U-V)^n U_1, \qquad B = (U-V)^n V_1,$$

U_1 étant une fonction de u, et V_1 une fonction de v. Donc

$$ds^2 = (U-V)^{2n}(U_1^2\, du^2 + V_1^2\, dv^2).$$

J'ai démontré, dans ma Thèse de doctorat que, pour un réseau de lignes de courbure, n peut prendre les seules valeurs $\pm\frac{1}{2}$ et ± 1. Mais pour $n = -\frac{1}{2}$ et $n = 1$, les rayons de courbure principaux n'ont pas la forme requise. Au contraire, cette condition est remplie avec $n = \frac{1}{2}$ pour les *quadriques*, et avec $n = -1$ pour la *cyclide de Dupin* (¹). Telles sont les *deux solutions* que comporte la question.

En particulier, dans le second cas

$$R_1 = \frac{1}{V}, \qquad R_2 = \frac{1}{U}, \qquad \rho = R_1 R_2.$$

Le segment ρ à porter sur toutes les normales de la cyclide est inversement proportionnel à la courbure totale.

Nous reviendrons spécialement sur le cas des quadriques.

10. *Recherche d'un autre type de solutions particulières.* — Nous allons reprendre le problème primitif dans une hypothèse spéciale qui

(¹) Pour les quadriques $\frac{R_1^3}{R_2} = U^4$, $\frac{R_2^3}{R_1} = V^4$ de sorte que l'on a en termes finis les équations des lignes de courbure de chaque système. De même pour les cyclides de Dupin. Ces résultats particuliers seront rattachés à une raison générale.

donnera lieu à des interprétations simples. Nous particularisons ainsi la question :

Trouver une surface (S) *telle que, si l'on porte sur chaque normale un segment dont la projection sur un axe fixe soit constante, l'extrémité décrive toujours un réseau de Dupin, quelle que soit cette constante.*

La projection étant supposée faite sur Oz, nous considérons la cote z d'un point M de la surface (S) comme une fonction de x et y admettant les dérivées p, q, r, s, t pour le premier et le second ordre. Si nous posons

$$U = (1+p^2)s - pqr, \qquad V = (1+p^2)t - (1+q^2)r,$$
$$W = -(1+q^2)s + pqt,$$

les projections des lignes de courbure sur xOy sont définies par l'équation différentielle

$$U\,dx^2 + V\,dx\,dy + W\,dy^2 = 0. \tag{10}$$

Nous remarquons d'abord l'identité

$$Wr - Vs + Ut = 0, \tag{11}$$

qui s'explique facilement. Elle exprime simplement que les deux familles de lignes de courbure sont conjuguées, car les tangentes à celles qui passent par un point donné forment un faisceau harmonique avec les deux asymptotes de l'indicatrice, cette propriété étant conservée dans la projection sur xOy.

En différentiant par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient d'autres identités auxquelles on peut donner les formes

$$W\frac{\partial r}{\partial x} - V\frac{\partial s}{\partial x} + U\frac{\partial t}{\partial x} = -r\frac{\partial W}{\partial x} + s\frac{\partial V}{\partial x} - t\frac{\partial U}{\partial x} = H,$$
$$W\frac{\partial r}{\partial y} - V\frac{\partial s}{\partial y} + U\frac{\partial t}{\partial y} = -r\frac{\partial W}{\partial y} + s\frac{\partial V}{\partial y} - t\frac{\partial U}{\partial y} = K.$$

Introduisons les paramètres u et v des lignes de courbure. L'équation différentielle (10) donne lieu aux égalités suivantes :

$$\frac{U}{W} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}}, \qquad -\frac{V}{W} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}},$$

d'où

$$(12)\qquad \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{W} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{V} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}{U} = k,$$

k étant un certain facteur.

Cela posé, considérons sur la normale en M à (S) le point N, dont les coordonnées sont :

$$x_1 = x + \lambda p, \qquad y_1 = y + \lambda q, \qquad z_1 = z - \lambda.$$

Ces formules sont un cas particulier de celles données au paragraphe **2** et obtenues en écrivant $\rho\zeta = -1$; donc, d'après ce qui précède :

La surface générale (autre qu'une surface moulure) solution du nouveau problème est caractérisée par la condition strictement nécessaire et suffisante qui suit :

$$1, \quad x, \quad y, \quad z, \quad x^2+y^2+z^2, \quad p, \quad q$$

sont solutions d'une même équation de Laplace qui est l'équation à la fois ponctuelle et tangentielle relative à ce réseau.

Comme plus haut, $\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{\zeta}$ et $px+qy-z$ sont de nouvelles solutions.

Si l'on tient compte des résultats trouvés plus haut,

$$R_1 = UU_1V_1, \qquad R_2 = VU_1V_1, \qquad \rho = U_1V_1,$$

on voit que l'on a, pour le cas actuel, les conditions intrinsèques nécessaires et suffisantes

$$R_1\zeta = -U, \qquad R_2\zeta = -V, \qquad \zeta = \frac{-1}{U_1V_1}.$$

Il est intéressant de retrouver tous ces résultats directement [1];

---

[1] Signalons dès maintenant que, pour une surface quelconque, $R_1\zeta$ et $R_2\zeta$ ou $\frac{R_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ et $\frac{R_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ s'obtiennent algébriquement; donc, les lignes de courbure de nos surfaces actuelles s'obtiennent, *en termes finis*, en égalant à une constante arbitraire σ la valeur de $R_1\zeta$ ou $R_2\zeta$. L'équation rationnelle du

d'ailleurs, la méthode que nous allons suivre nous permettra de découvrir des solutions particulières. Ici, la recherche directe de z en fonction de x et y s'impose en raison du rôle particulier de l'axe Oz.

Le point N a pour coordonnées

$$x_1 = x + \lambda p, \qquad y_1 = y + \lambda q, \qquad z_1 = z - \lambda,$$

λ étant une constante. Nous voulons que, quelle que soit cette constante, u et v soient les paramètres de deux familles de courbes conjuguées tracées sur la surface (Σ) engendrée par N. On doit avoir l'identité en λ :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \lambda \dfrac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \lambda \dfrac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial q}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} + \lambda \dfrac{\partial p}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} + \lambda \dfrac{\partial q}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant est du deuxième degré en λ, et le terme indépendant de λ est nul pour la raison déjà signalée dans le problème initial. On obtient alors deux conditions en annulant les coefficients

---

second degré, qui a pour racines $R_1\zeta$ et $R_2\zeta$, est

$$[1 + p^2 - r\sigma][1 + q^2 - t\sigma] - (pq - s\sigma)^2 = 0.$$

Cette équation est l'équation en termes finis des lignes de courbure de l'un ou l'autre système quand on donne à σ une valeur constante. D'autre part, si $A_1(x, y)\,dx + B_1(x, y)\,dy = 0$ est l'équation différentielle des lignes de courbure $u =$ const., et $A_2\,dx + B_2\,dy = 0$ celle des lignes $v =$ const., il est clair que

$$B_1 \frac{\partial}{\partial x}(R_1\zeta) - A_1 \frac{\partial}{\partial y}(R_1\zeta) = 0, \qquad B_2 \frac{\partial}{\partial x}(R_2\zeta) - A_2 \frac{\partial}{\partial y}(R_2\zeta) = 0$$

sont les deux équations aux dérivées partielles d'ordre 3 que doit vérifier z. Par addition et soustraction, on les rend rationnelles; il est évident qu'elles contiennent linéairement les dérivées partielles d'ordre 3. Nous verrons plus loin le résultat analogue pour les surfaces générales des paragraphes **7** et **8**.

de λ et λ^2 :

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière de ces conditions exprime que, *sur la surface auxiliaire décrite par le point de coordonnées p, q, z, les lignes qui correspondent aux lignes de courbure de (S) sont conjuguées.* Ainsi p, q et z vérifient une même équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = a'\frac{\partial \theta}{\partial u} + b'\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Nous allons encore montrer qu'elle ne diffère pas de celle qui est relative aux lignes de courbure de (S), et que l'on a

$$a' = a, \qquad b' = b.$$

D'abord, comme z est une solution commune à ces deux équations,

$$(15)\qquad (a' - a)\frac{\partial z}{\partial u} + (b' - b)\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Nous allons ensuite transformer la relation (13) en remarquant que

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}.$$

La dernière équation résulte de ce que, les lignes coordonnées de (S) étant conjuguées, le vecteur $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)$ est situé dans le plan tangent. Ces relations nous permettent de réunir en un seul les deux déterminants de l'équation (13) et de lui donner la forme

$$(13')\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & p\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}+q\dfrac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & p\dfrac{\partial p}{\partial u}+q\dfrac{\partial q}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & p\dfrac{\partial p}{\partial v}+q\dfrac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchons alors de la première ligne les deux autres multipliées par a et b; elle devient

$$0,\quad 0,\quad (a'-a)\left(p\frac{\partial p}{\partial u}+q\frac{\partial q}{\partial u}\right)+(b'-b)\left(p\frac{\partial p}{\partial v}+q\frac{\partial q}{\partial v}\right).$$

En divisant par $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$, on a donc la condition

$$(13'')\qquad (a'-a)\left(p\frac{\partial p}{\partial u}+q\frac{\partial q}{\partial u}\right)+(b'-b)\left(p\frac{\partial p}{\partial v}+q\frac{\partial q}{\partial v}\right)=0.$$

Cette équation (13″), réunie avec (15), donne deux hypothèses :

$$(A)\qquad \frac{p\dfrac{\partial p}{\partial u}+q\dfrac{\partial q}{\partial u}}{\dfrac{\partial z}{\partial u}} = \frac{p\dfrac{\partial p}{\partial v}+q\dfrac{\partial q}{\partial v}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}}.$$

Cette équation entraîne

$$F(p^2+q^2, z)=0.$$

La surface (S) est alors *surface moulure cylindrique :* on fait rouler sans glissement un plan (P) sur un cylindre quelconque (Γ), de génératrices parallèles à Oz; on trace dans (P) un profil plan (C) arbitraire, et sur la normale en M à (C), on porte un segment $\overline{MM_1}$ égal à $\dfrac{\lambda}{\cos\gamma}$, où γ est l'angle, avec Oz, de la normale en M à (C). Le point M engendre le profil (C_1), et ce dernier, dans le mouvement de (P), engendre la surface (Σ).

(B). La solution vraiment intéressante s'obtient en supposant (S) non surface moulure, et par suite,

$$a'=a,\qquad b'=b.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface (S), *autre qu'une surface moulure, soit solution de notre second problème est donc que*

$$1,\quad x,\quad y,\quad z,\quad x^2+y^2+z^2,\quad p,\quad q$$

satisfassent à une même équation de Laplace (c'est bien le résultat prévu au début de ce paragraphe).

On peut donner d'autres traductions de nos deux conditions. Pour revenir complètement aux variables x, y, nous avons encore les relations

$$\frac{\partial p}{\partial u}=r\frac{\partial x}{\partial u}+s\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial p}{\partial v}=r\frac{\partial x}{\partial v}+s\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial q}{\partial u}=s\frac{\partial x}{\partial u}+t\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial q}{\partial v}=s\frac{\partial x}{\partial v}+t\frac{\partial y}{\partial v},$$

d'où résultent les deux suivantes :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}=r\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+s\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}-h\mathrm{H},\qquad \frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v}=s\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+t\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}-h\mathrm{K}.$$

Si l'on substitue dans l'équation (13'), elle donne

$$p\mathrm{H}+q\mathrm{K}=0.$$

Puis (14) devient

$$\mathrm{H}\frac{\mathrm{D}(q,z)}{\mathrm{D}(u,v)}-\mathrm{K}\frac{\mathrm{D}(p,z)}{\mathrm{D}(u,v)}=0\qquad\text{ou}\qquad (qs-pt)\mathrm{H}-(qr-ps)\mathrm{K}=0.$$

Nous avons donc un système homogène en H et K ayant pour déterminant

$$-p(qr-ps)-q(qs-pt)=-p(ps+qt)+q(pr+qs)=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{D}(p^2+q^2,z)}{\mathrm{D}(x,y)}.$$

Le cas des surfaces moulures étant encore écarté, nous n'avons que la solution

$$\mathrm{H}=0,\qquad \mathrm{K}=0.$$

Remarquons que ces nouvelles formes des deux conditions équivalent encore aux égalités

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}=r\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+s\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v},\qquad \frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v}=s\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+t\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}.$$

Par rapprochement avec les expressions de $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial v}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$ et $\frac{\partial q}{\partial v}$, on est conduit aux équations

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 q}{\partial u\,dv} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

exprimant que l'équation de Laplace qui admet les solutions x, y, z admet aussi les solutions p et q, ce qui explique un résultat antérieur.

Elle est également satisfaite par les coordonnées x_1, y_1, z_1 du réseau (Σ), qui sont des combinaisons linéaires de x, y, z, p et q. Nous retrouvons bien les résultats du cas général.

Interprétons enfin les relations

$$H = W\frac{\partial r}{\partial x} - V\frac{\partial s}{\partial x} + U\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \qquad K = W\frac{\partial r}{\partial y} - V\frac{\partial s}{\partial y} + U\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Elles expriment que les tangentes aux lignes représentées par les équations différentielles

$$\frac{\partial r}{\partial x}dx^2 + 2\frac{\partial s}{\partial x}\partial x\,dy + \frac{\partial t}{\partial x}dy^2 = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial y}dx^2 + 2\frac{\partial s}{\partial y}dx\,dy + \frac{\partial t}{\partial y}dy^2 = 0$$

sont conjuguées harmoniques par rapport à celles des lignes de courbure de (S), c'est-à-dire symétriques par rapport aux directions principales. Comme x et y sont les variables indépendantes, ces deux équations peuvent s'écrire

$$d^2 p = 0, \qquad d^2 q = 0$$

et rappellent celle des lignes asymptotiques $d^2 z = 0$.

Les solutions de ce dernier problème, forcément plus restreintes que celles du cas général, peuvent aussi être caractérisées par des éléments intrinsèques.

Entre les cosinus directeurs ξ, η, ζ de la normale à (S) et les dérivées p et q, nous avons les relations

$$\xi + p\zeta = 0, \qquad \eta + q\zeta = 0,$$

dont la première donne successivement

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + \zeta \frac{\partial p}{\partial u} + p \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} + \zeta \frac{\partial p}{\partial v} + p \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \zeta \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Éliminons les dérivées secondes au moyen des équations de Laplace correspondantes, puis les dérivées premières de ξ avec les relations du premier ordre; nous obtenons :

$$-\alpha\left(\zeta \frac{\partial p}{\partial u} + p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right) - \beta\left(\zeta \frac{\partial p}{\partial v} + p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) + \xi\left(a \frac{\partial p}{\partial u} - b \frac{\partial p}{\partial v}\right)$$
$$+ p\left(\alpha \frac{\partial \xi}{\partial u} - \beta \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

$$\left[(\alpha - a)\xi - \frac{\partial \xi}{\partial v}\right]\frac{\partial p}{\partial u} + \left[(b - \beta)\xi - \frac{\partial \xi}{\partial u}\right]\frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\frac{\partial p}{\partial u} - \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)\frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Nous pouvons procéder de même pour η: nous avons finalement le système

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\log(R_1\zeta) - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log(R_2\zeta) = 0,$$
$$\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\log(R_1\zeta) - \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log(R_2\zeta) = 0.$$

En écartant le cas des surfaces développables, on a, avec $\frac{D(p, q)}{D(u, v)} \neq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial v}\log(R_1\zeta) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\log(R_2\zeta) = 0.$$

Or $R_1\zeta$ et $R_2\zeta$ sont les projections sur Oz des rayons de courbure principaux de (S). La première est indépendante de v, et la seconde de u, et ces conditions entraînent les réciproques.

Ainsi, *le long d'une ligne de courbure* (u), *la projection de* R_1 *sur* Oz *est constante, tandis que celle de* R_2 *est constante le long d'une ligne* (v). Nous retrouvons les conclusions données plus haut.

Posons alors $R_1\zeta = U$, $R_2\zeta = V$, U ne dépendant que de u, et V de v. Les formules de Codazzi qui lient R_1 et R_2 à M et N donnent ici

$$\alpha = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{U}{U - V}\cdot\frac{1}{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial v}, \qquad \beta = \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{V}{V - U}\cdot\frac{1}{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial u},$$

d'où

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v} = \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial u} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial v} = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2\log\zeta}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

On voit donc que ζ est le produit d'une fonction de u et d'une fonction de v. Nous avons ainsi retrouvé directement toutes les conclusions données, au début de ce paragraphe, comme application, à ce cas particulier, des résultats trouvés pour le cas général.

Enfin remarquons que les deux équations $H = 0$, $K = 0$ peuvent se synthétiser dans l'identité suivante

$$\begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ dr & ds & dt \end{vmatrix} \equiv 0.$$

qui doit être satisfaite quels que soient dx et dy. La discussion complète du système formé par les *deux* équations aux dérivées partielles du troisième ordre par rapport à l'unique inconnue z présente des difficultés sérieuses; signalons seulement quelques solutions particulières :

1° On peut supposer proportionnelles les deux premières lignes du déterminant. On obtient donc pour surfaces (S) la *sphère;* mais il faut caractériser le système orthogonal tracé sur cette sphère. Nous avons vu que, le rayon étant pris pour unité.

$$x,\; y,\; z,\; x^2+y^2+z^2 \text{ ou } 1,\; p \text{ ou } -\frac{x}{z},\; q \text{ ou } -\frac{y}{z}$$

sont six solutions d'une même équation de Laplace. En divisant les quatre premières par $-z$, on trouve que

$$-\frac{x}{z},\quad -\frac{y}{z},\quad -1,\quad -\frac{1}{z}$$

sont solutions d'une même équation de Laplace *qui coïncide avec la première.* Or exprimer que z et $\frac{1}{z}$ sont solutions de la même équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial\theta}{\partial u} - b\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

entraîne $\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$. Si l'on prend $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$, cela indique que les courbes $u = \text{const.}$ sont les parallèles horizontaux de la sphère, les courbes

$v =$ const. les méridiens. La sphère rentre donc dans les deux types distincts obtenus ici; elle se trouve en effet jouer comme surface de révolution, c'est-à-dire comme surface moulure cylindrique. La surface (Σ) est de révolution et a pour méridienne la courbe

$$x_1 = \sin\theta - \lambda \tang\theta, \qquad z_1 = \cos\theta - \lambda;$$

l'équation de la méridienne est

$$(z_1 + \lambda)^2 (x_1^2 + z_1^2) = z_1^2.$$

2° On peut attribuer à r, s, t des valeurs constantes qui annulent dr, ds, dt. C'est le cas d'un *paraboloïde* dont l'axe serait parallèle à Oz. (On peut remarquer, dans le cas actuel, une solution encore plus spéciale, évidente *a priori*, à savoir le paraboloïde de révolution d'axe Oz, une surface Σ se réduisant évidemment à l'axe Oz.)

3° On peut rendre proportionnelles les deux dernières lignes du déterminant

$$\frac{dr}{r} = \frac{ds}{s} = \frac{dt}{t}.$$

Cela entraîne que les quantités r, s, t soient proportionnelles à des constantes a, b, c. Si l'expression $ac - b^2$ n'est pas nulle, on voit par une intégration aisée que l'on retombe sur le paraboloïde à axe vertical.

Si $ac - b^2 = 0$, on trouve un *cylindre quelconque* comme surface (S); la surface (Σ) est un cylindre de génératrices parallèles à celles du premier, obtenu en portant sur chaque normale à (S) un segment égal à $\frac{\lambda}{\cos\gamma}$.

4° La proportionnalité des lignes extrêmes conduit à écrire les équations

$$\frac{\alpha}{1+p^2} = \frac{\beta}{pq} = \frac{\gamma}{1+q^2}, \qquad \frac{\beta}{1+p^2} = \frac{\gamma}{pq} = \frac{\delta}{1+q^2},$$

en désignant, pour abréger, par α, β, γ, δ les dérivées $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. En divisant membre à membre celles où figurent β et γ, on a

$$\frac{1+p^2}{pq} = \frac{pq}{1+q^2} \qquad \text{ou} \qquad 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Cette égalité conviendrait à une développable isotrope, mais elle n'est pas unique. Elle permet d'écrire la première équation du système

$$\frac{\alpha}{-q^2} = \frac{\beta}{pq} \qquad \text{ou} \qquad p\alpha + q\beta = 0.$$

Or la relation entre p et q, différentiée deux fois par rapport à x donne successivement

$$pr - qs = 0, \qquad (p\alpha + q\beta) - (r^2 - s^2) = 0.$$

Donc

$$\frac{r}{q} = \frac{s}{-p}, \qquad r^2 + s^2 = 0.$$

L'élimination de r et s donne alors

$$p^2 - q^2 = 0.$$

résultat incompatible avec le premier. On n'a ici aucune solution.

Remarquons que la solution, assez banale, formée d'un cylindre, dépend d'une fonction arbitraire d'une variable. Cela prouve que la solution *générale* du système $H = 0$, $K = 0$ dépend au moins d'une fonction arbitraire d'une variable.

11. *Étude du paraboloïde.* — Considérons donc le paraboloïde d'axe Oz :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

a et b étant des constantes quelconques. Nous avons

$$p = \frac{x}{a}, \qquad q = \frac{y}{b}, \qquad r = \frac{1}{a}, \qquad s = 0, \qquad t = \frac{1}{b}.$$

Les coordonnées de N,

$$x_1 = (a + \lambda)\frac{x}{a}, \qquad y_1 = (b + \lambda)\frac{y}{b}, \qquad z_1 = z - \lambda,$$

donnent lieu à la relation

$$\frac{a x_1^2}{(a + \lambda)^2} + \frac{b y_1^2}{(b + \lambda)^2} - 2(z_1 + \lambda) = 0.$$

Le réseau (Σ) décrit par N est donc tracé sur un second paraboloïde admettant les mêmes plans principaux que le proposé (S), qui correspond d'ailleurs à $\lambda = 0$. Avec les coordonnées courantes X, Y, Z, le plan tangent en N a pour équation

$$\frac{ax_1 X}{(a+\lambda)^2} + \frac{by_1 Y}{(b+\lambda)^2} - (Z + z_1 + 2\lambda) = 0,$$

ou, en remplaçant x_1, y_1, z_1 par leur valeur,

$$\frac{xX}{a+\lambda} + \frac{yY}{b+\lambda} - (Z + z - \lambda) = 0.$$

On reconnait le plan polaire de $M(x, y, z)$ par rapport au paraboloïde

$$\frac{X^2}{a+\lambda} + \frac{Y^2}{b+\lambda} - (2z - \lambda) = 0$$

homofocal à (S). Donc :

Tous les réseaux (Σ) *correspondant aux diverses valeurs de* λ *sont tracés sur les paraboloïdes polaires réciproques de* (S) *par rapport aux paraboloïdes qui lui sont homofocaux.*

12. *Quadriques générales.* — Ces propriétés du paraboloïde s'étendent directement aux quadriques à centre, en revenant au problème général, et en faisant abstraction de la projection sur Oz.

Sur la normale au point $M(x, y, z)$ d'une quadrique à centre (S), qui sera par exemple l'ellipsoïde (S),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

nous portons le segment $\overrightarrow{MN}$ dont les projections sont $\lambda\frac{x}{a^2}$, $\lambda\frac{y}{b^2}$, $\lambda\frac{z}{c^2}$. Le point N a pour coordonnées

$$x_1 = (a^2 + \lambda)\frac{x}{a^2}, \qquad y_1 = (b^2 + \lambda)\frac{y}{b^2}, \qquad z_1 = (c^2 + \lambda)\frac{z}{c^2},$$

et décrit la surface (Σ) représentée par

$$\frac{a^2 x_1^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2 y_1^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2 z_1^2}{(c^2+\lambda)^2} - 1 = 0.$$

Le plan tangent en N à cette surface a pour équation

$$\frac{a^2 x_1 X}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2 y_1 Y}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2 z_1 Z}{(c^2+\lambda)^2} - 1 = 0$$

ou

$$\frac{xX}{a^2+\lambda} + \frac{yY}{b^2+\lambda} + \frac{zZ}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$$

On reconnaît le plan polaire de M par rapport à la quadrique

$$\frac{X^2}{a^2+\lambda} + \frac{Y^2}{b^2+\lambda} + \frac{Z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$$

homofocale à (S). Donc (Σ) *est la polaire réciproque de* (S) *par rapport à une quadrique homofocale.*

Les coordonnées de (Σ) ne différant de celles de (S) que par des facteurs constants, l'équation de Laplace est la même pour ces deux surfaces, donc la seconde est aussi rapportée à des lignes conjuguées. Enfin (S) étant isothermique, les invariants sont égaux.

13. *Systèmes cycliques.* — Nous terminons ces considérations en mettant en évidence les systèmes cycliques qu'elles nous permettent de constituer en partant d'une quadrique quelconque, et en effectuant de simples opérations algébriques. Remarquons notamment que la seconde nappe de l'enveloppe de la sphère de centre N qui touche la quadrique en M est une surface algébrique dépendant d'un paramètre, dont les lignes de courbure correspondent à celles de cette quadrique, et se trouveront déterminées sans qu'il soit nécessaire d'effectuer aucune intégration. De même les autres surfaces donnent comme seconde nappe de l'enveloppe de la sphère de centre N une surface dont les lignes de courbure s'obtiennent en termes finis.

14. *Lignes de courbure des surfaces étudiées dans ce travail* (¹). — Supposons connue une surface S solution du problème actuel (j'entends du type B_4); il est intéressant de montrer que les lignes de courbure de cette surface s'obtiennent en termes finis et que la coordonnée z d'un point $M(x, y, z)$ de S satisfait à deux équations aux dérivées partielles d'ordre 4 quand on prend x et y pour variables indépendantes (dans le cas des surfaces solutions du problème particulier

(¹) Ce paragraphe a été rédigé par M. Bertrand Gambier.

correspondant à des divisions semblables se projetant sur Oz suivant des divisions égales, z satisfait de plus à trois équations aux dérivées partielles d'ordre 3 et le résultat de M. Lebel prouve que les équations ainsi obtenues se réduisent finalement à deux équations d'ordre 3).

Les équations différentielles des lignes de courbure sont, pour une surface quelconque,

$$A_1\,dx + B_1\,dy = 0, \tag{1}$$

$$A_2\,dx + B_2\,dy = 0, \tag{2}$$

où A_1, B_1, A_2, B_2 sont des fonctions rationnelles de x, y, z, p, q, r, s, t et d'un certain radical du second degré portant sur les dérivées; le passage A_1, B_1 à A_2 B_2 s'obtient en changeant de signe la détermination du radical. Sans m'astreindre à respecter scrupuleusement les notations des paragraphes qui précédent, remarquons que $u =$ const., $v =$ const., étant les équations en termes finis des lignes de courbure, on connaît à priori *une* et même *deux* fonctions de la forme $U + V$. En effet R_1 étant le rayon principal correspondant aux lignes $u =$ const., on a trouvé que $\log R_1$ est de la forme $U + V$; il en est de même pour $\log R_2$ (et dans le cas spécial des divisions projetées sur Oz suivant des divisions semblables, il en est de même de $\log\zeta$).

Soit donc cette fonction *connue* $F(x, y) \equiv U + V$. On a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &A_1\,dx + B_1\,dy = \lambda\,du, & dx &= \frac{\lambda B_2\,du - \mu B_1\,dv}{A_1 B_2 - A_2 B_1},\\ &A_2\,dx + B_2\,dy = \mu\,dv, & dy &= \frac{-\lambda A_2\,du + \mu A_1\,dv}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dU}{du} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\lambda\left(B_2\dfrac{\partial F}{\partial x} - A_2\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)}{A_1 B_2 - A_2 B_1},\\ &dU = \frac{B_2\dfrac{\partial F}{\partial x} - A_2\dfrac{\partial F}{\partial y}}{A_1 B_2 - A_2 B_1}(A_1\,dx + B_1\,dy), \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dV}{dv} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\mu\left(-B_1\dfrac{\partial F}{\partial x} + A_1\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)}{A_1 B_2 - A_2 B_1},\\ &dV = \frac{-B_1\dfrac{\partial F}{\partial x} + A_1\dfrac{\partial F}{\partial y}}{A_1 B_2 - A_2 B_1}(A_2\,dx + B_2\,dy). \end{aligned}\right.$$

Le résultat est établi, nous avons trouvé un facteur intégrant pour chaque expression $A_1\,dx + B_1\,dy$, $A_2\,dx + B_2\,dy$.

La différentielle $dU = P\,dx + Q\,dy$ donne la condition nécessaire $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$; la différentielle $dV = P'\,dx + Q'\,dy$ donne de même $\frac{\partial P'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial x} \equiv 0$; mais il est clair que ces deux relations se réduisent à une seule, car $dU + dV \equiv dF$. Par raison de symétrie, il est donc naturel d'exprimer que $dU - dV$ est une différentielle totale exacte; on trouve

$$(6)\qquad dU - dV = \frac{\left\{\begin{array}{l}\left[(A_1B_2 + A_2B_1)\dfrac{\partial F}{\partial x} - 2A_1A_2\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]dx \\ \quad + \left[2B_1B_2\dfrac{\partial F}{\partial x} - (A_1B_2 + A_2B_1)\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]dy\end{array}\right\}}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

de sorte que, par une quadrature, nous trouverons une nouvelle fonction $G(x, y)$ qui est égale à $U - V$. Cette forme prouve que si c'était $G(x, y)$ qui fût connue à priori, le calcul analogue fait sur G (au lieu de F) donnerait par une quadrature $\pm(U + V)$ de sorte que F et G sont deux fonctions réciproques (1).

Dans le cas actuel, envisageons une surface assujettie à la seule condition que R_1 (rayon de courbure principal le long de la courbe où u varie seul, v restant constant) soit égal au produit d'une fonction de u par une fonction de v; $\log R_1$ est de la forme annoncée : *donc les lignes de courbure des deux systèmes s'obtiennent par une quadrature;* R_1 contient x, y, z, p, q, r, s, t, donc la condition qui exprime que

(1) Si même

$$A_1\,dx + B_1\,dy = 0, \qquad A_2\,dx + B_2\,dy = 0,$$

sont les deux facteurs de décomposition d'une forme quadratique différentielle

$$\alpha\,dx^2 + 2\beta\,dx\,dy + \gamma\,dy^2 = 0:$$

on voit que l'on a

$$dU - dV = \frac{\left(\beta\dfrac{\partial F}{\partial x} - \alpha\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)dx + \left(\gamma\dfrac{\partial F}{\partial x} - \alpha\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)dy}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}},$$

de sorte que l'équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par F est obtenue aussitôt sous forme rationnelle par rapport à α, β, γ.

l'expression $dU + dV$ (relative à la fonction $\log R_1 = (U + V)$ est une différentielle totale exacte contient les dérivées d'ordre 4 de z par rapport à x et y. Une surface qui vérifie cette équation d'ordre 4 a donc ses lignes de courbure obtenues par quadratures dès que la surface est elle-même connue.

Si l'on suppose de plus que $\log R_2$ est aussi somme d'une fonction de u et d'une fonction de v, nous avons une seconde équation aux dérivées partielles d'ordre 4 pour la surface; les résultats de M. Lebel prouvent que ces deux équations sont compatibles avec une solution générale dépendant d'au moins deux fonctions arbitraires d'une variable; mais alors, puisque, pour une telle surface connue, on a *deux* facteurs intégrants pour chaque système de lignes de courbure, *on a en termes finis les équations des lignes de courbure de chaque système*, en égalant à une constante le rapport des deux facteurs intégrants. Ici en écrivant $F_1 = \log R_1 = U_1 + V_1$, $F_2 = \log R_2 = U_2 + V_2$, on voit que les lignes de courbure $u =$ const. ont pour équation finie, avec une constante arbitraire C,

$$(7) \qquad B_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - C\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) - A_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - C\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = 0.$$

les lignes de courbure $v =$ const. ont pour équation avec une constante arbitraire C'

$$(8) \qquad B_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - C'\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) - A_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - C'\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = 0.$$

les équations différentielles des lignes de courbure étant respectivement

$$(9) \qquad A_1\,dx + B_1\,dy = 0 \qquad \text{ou} \qquad du = 0,$$

$$(10) \qquad A_2\,dx + B_2\,dy = 0 \qquad \text{ou} \qquad dv = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles provenant de $dU_2 - dV_2$ dérive de l'équation provenant de $dU_1 - dV_1$ par simple changement de signe d'un radical $\sqrt{\rho}$ portant sur les dérivées premières et secondes de z; ces deux équations peuvent s'écrire

$$(11) \qquad H + K\sqrt{\rho} = 0, \qquad H - K\sqrt{\rho} = 0.$$

où H et K contiennent rationnellement z et ses dérivées de sorte que l'ensemble des deux équations équivaut au système rationnel (¹)

$$(11') \qquad H = 0, \qquad K = 0.$$

Bien entendu ce qui précède suppose les deux fonctions U, V égales chacune à une fonction effective, non réduite à une constante. Si $V \equiv 0$, on connaît simplement une intégrale première de $A_1\,dx + B_1\,dy = 0$, équation qui est donc immédiatement intégrée en termes finis, sans que l'on ait de renseignement sur l'intégration de $A_2\,dx + B_2\,dy$. J'ai indiqué, plus haut, en note, les résultats concernant les surfaces dont les divisions semblables portées par les normales donnent des divisions égales par projection sur Oz. Nous avons vu que la considération de $R_1\zeta$ et $R_2\zeta$ donne immédiatement les lignes de courbure et deux équations aux dérivées partielles d'ordre 3 pour caractériser les surfaces. A ce propos remarquons que l'équation

$$(1 + p^2 - r\sigma)(1 + q^2 - t\sigma) - (pq - s\sigma)^2 = 0$$

étant écrite pour abréger

$$(12) \qquad A + 2B\sigma + C\sigma^2 = 0,$$

l'équation différentielle des lignes de courbure peut s'écrire

$$(13) \qquad dA + 2\sigma\,dB + \sigma^2\,dC = 0,$$

en tirant σ de (12), ou par élimination de σ,

$$(14) \qquad (A\,dC - C\,dA)^2 - 4(A\,dB - B\,dA)(B\,dC - C\,dB) = 0.$$

En remplaçant dA par $\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy$, dB, ..., dC, ... et identi-

---

(¹) Des considérations analogues permettent d'avoir en termes finis l'équation *rationnelle* des lignes de courbure de l'un ou l'autre système; il suffit encore d'écrire l'équation (7) sous la forme

$$\lambda + \mu\sqrt{\rho} - C(\lambda_1 + \mu_1\sqrt{\rho}) = 0,$$

et l'on a

$$(\lambda - C\lambda_1)^2 - \rho(\mu - C\mu_1)^2 = 0$$

pour équation rationnelle cherchée.

fiant (14) avec l'équation écrite par M. Lebel sous la forme

$$U\,dx^2 + V\,dx\,dy + W\,dy^2 = 0,$$

on a un nouveau moyen d'obtenir *rationnellement* les deux équations aux dérivées partielles d'ordre 3 que vérifie la fonction z. Ici on peut remarquer que les fonctions $\log R_1$, $\log R_2$ sont encore de la forme $U_1 + V_1$ ou $U_2 + V_2$ de sorte que les deux équations d'ordre 4 obtenues précédemment subsistent. On peut remarquer que

$$\log\zeta = -\frac{1}{2}\log(1 + p^2 + q^2)$$

est une nouvelle expression de la forme $U + V$ de sorte que l'on a, par le procédé déjà expliqué, une nouvelle équation d'ordre 3 vérifiée par z; ces trois équations d'ordre 3 et ces deux équations d'ordre 4 se réduisent bien entendu à deux équations distinctes d'ordre 3.

On voit que le résultat obtenu ici dépasse de beaucoup celui qui lui a donné naissance. Si l'on a une équation unique $A_1\,dx + B_1\,dy = 0$, au lieu de chercher directement un facteur intégrant de cette expression (ce qui conduit à une équation linéaire aux dérivées partielles du *premier ordre*) on peut donc choisir deux fonctions auxiliaires A_2, B_2, *arbitraires*, puis chercher la fonction F qui a été utilisée ici; pour un choix arbitraire de A_2, B_2, la fonction F est donnée par une équation linéaire aux dérivées partielles du *second ordre;* si l'ordre est plus élevé que pour la recherche du simple facteur intégrant, on a l'avantage dans certains cas de disposer d'une fonction arbitraire $\frac{B_2}{A_2}$ dans la recherche de cette fonction F.

Il est clair aussi que la méthode s'appliquerait à n équations aux différentielles totales, *complètement intégrables chacune*, et *indépendantes les unes des autres*

$$\begin{aligned}
&A_1(x_1 x_2 \ldots x_n)\,dx_1 + A_2(x_1 x_2 \ldots x_n)\,dx_2 + \ldots + A_n(x_1, \ldots x_n)\,dx_n \equiv \lambda_1\,dU_1 = 0,\\
&B_1(x_1 x_2 \ldots x_n)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \equiv \lambda_2\,dU_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&L_1(x_1 \ldots x_n)\;dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \equiv \lambda_n\,dU_n = 0.
\end{aligned}$$

Il suffit de connaître une fonction $F(x_1 \ldots x_n)$ de la forme

$$f_1(U_1) + \ldots + f_n(U_n).$$