JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL ALEXANDROFF

Sur la notion de dimension des ensembles fermés

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 283-298.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__283_0>

Sur la notion de dimension des ensembles fermés;

PAR PAUL ALEXANDROFF

(Moscou).

(**Extrait d'une lettre à M. Fréchet.**)

---

1. Les notions fondamentales dont nous aurons besoin sont celles de *cycles* et *d'homologie*: elles sont introduites par Poincaré dans ses Mémoires classiques sur l'*Analysis situs* (*Journ. Éc. Pol.*, 1895, et *Rend. Palermo*, 1899)(¹). L'idée intuitive de cycle est donnée dans le cas le plus simple par une courbe polygonale fermée ou par une surface polyédrale fermée; il s'agit dans la notion générale de cycle des généralisations de cette idée intuitive pour le cas d'un nombre quelconque de dimensions; *il est toutefois essentiel de remarquer que la notion de cycle n-dimensionnel ne présuppose aucune notion générale de dimension :* elle appartient entièrement à l'*Analysis situs* combinatoire, où la dimension apparaît tout simplement comme le nombre de sommets de certaines figures que l'on appelle *tétraédroïdes* ou *simplexes* et qui servent de « briques » ou de « cellules » pour édifier les figures dont l'étude forme l'objet de l'*Analysis situs* classique. Les définitions qui suivent élucideront ces considérations un peu trop vagues.

2. Soient donnés, dans l'espace euclidien à n dimensions que nous

---

(¹) Le lecteur désirant faire une étude de la Topologie combinatoire consultera, outre les Mémoires de Poincaré, surtout les Traités américains de M. Veblen (*Analysis situs*) et de M. Lefschetz (*Topology*); on trouvera dans le livre de M. Lefschetz une bibliographie bien complète. *Voir* aussi le petit livre de l'auteur *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, qui vient de paraître chez M. Springer (Berlin, 1932).

désignerons toujours par E^n, un certain nombre $k+1$ de points différents,

$$(1) \qquad a_0, a_1, \ldots, a_k.$$

En concentrant dans ces points des masses arbitraires (non négatives),

$$m_0, m_1, \ldots, m_k,$$

on obtient un certain point $p(m_0, m_1, \ldots, m_k)$ comme centre de gravité de ces masses; en variant de toutes les façons possibles les masses

$$m_0, m_1, \ldots, m_k,$$

placés dans les points (1), on obtient un certain ensemble de points, qui est appelé le *simplexe* (ou le *tétraédroïde*) *aux sommets* $a_0, a_1, \ldots, a_k$; on démontre aisément que c'est un ensemble de points fermé et convexe et que de plus c'est *le plus petit parmi tous les ensembles fermés et convexes contenant les points donnés* (1).

Cette dernière propriété peut servir de définition d'un simplexe :

Le simplexe aux sommets (1) *est le plus petit ensemble fermé et convexe contenant les points* (1). *Le nombre de sommets du simplexe moins un s'appelle la dimension du simplexe.*

C'est ainsi que le simplexe aux sommets (1) est un simplexe à k dimensions.

3. Un simplexe aux sommets $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ sera désigné par

$$(2) \qquad |a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k|,$$

quelquefois aussi par $|x^k|$.

Si les sommets (1) n'appartiennent à aucun hyperplan à $k-1$ dimensions, le simplexe est dit *non dégénéré*, autrement *il dégénère.*

Un simplexe non dégénéré à une dimension est évidemment un segment de droite, tandis qu'un simplexe (non dégénéré) à deux dimensions est un triangle, celui à trois dimensions est un tétraèdre, etc.; la dénomination « tétraédroïde » (employée d'ailleurs par M. Hadamard) se trouve donc bien justifiée.

Dans ce qui suit, la « dégénération éventuelle » d'un simplexe n'affectera en rien nos raisonnements.

4. VOICI LE POINT ESSENTIEL. — *Un simplexe est entièrement défini par ses sommets*, de façon qu'on se trouve, en *Analysis situs* combinatoire, devant la possibilité d'*identifier un simplexe donné avec le système de ses sommets*. Cette remarque est d'une importance tout à fait capitale pour tout ce qui suit. Elle nous suggère, en effet, la définition fondamentale suivante :

Définition I. — Soit donc un ensemble M d'éléments quelconques appelés *sommets*. Nous supposons de plus que certains sous-ensembles finis de M sont choisis *a priori* et appelés les *simplexes*; si $k+1$ est le nombre de sommets formant un simplexe, le nombre k est dit *sa dimension* (¹). L'ensemble M s'appelle dans les conditions un champ de sommets.

Le cas le plus important est celui où M est un espace (D) « espace distancié » au sens de M. Fréchet.

Un simplexe à k dimensions de l'espace M est par définition un ensemble *quelconque* de $k+1$ points de cet espace. Si le diamètre de cet ensemble fini est inférieur au nombre positif ε (c'est-à-dire la distance maximale entre deux sommets quelconques du simplexe est inférieure à ε), le simplexe est dit un ε-simplexe. Un simplexe étant un ensemble fini de points de M, on appelle tout sous-ensemble de cet ensemble une *face* du simplexe donné; un simplexe à n dimensions a évidemment

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}$$

faces à r dimensions. Les plus importantes parmi les faces (d'un simplexe à n dimensions) sont celles à $n-1$ dimensions.

5. *Définition II.* — Donner à un simplexe

$$|x^n| = |a_0, a_1, \ldots, a_n|$$

une *orientation* veut dire *choisir un certain ordre* dans lequel ses sommets sont considérés. Un *simplexe orienté* à n dimensions n'est donc autre chose qu'un système de $n+1$ points [de l'espace (D) donné]

(¹) Il est supposé que tout sous-ensemble de l'ensemble fini, qui est un simplexe, est lui aussi un simplexe.

considéré avec un certain ordre de succession de ces points. On définit, cependant, comme identiques deux ordres provenant l'un de l'autre par une permutation *paire; chaque simplexe ne possède donc que deux orientations;* l'une d'entre elles est choisie comme l'orientation *positive* du simplexe en question. Si

$$|x^n| = |a_0, a_1, \ldots, a_n|$$

est le simplexe donné, on désigne par x^n et $-x^n$ les deux simplexes orientés auquel $|x^n|$ donne naissance et l'on écrit par exemple $x^n = (a_0, a_1, \ldots, a^n)$.

6. Cela posé, on parvient à la notion fondamentale de l'*Analysis situs* combinatoire, celle du *complexe*. Cette notion suppose que nous possédons, outre le champ des sommets que nous avons désigné par M, un *champ des coefficients*, c'est-à-dire un ensemble quelconque de grandeurs qui seront attribuées aux simplexes (du champ de sommets choisi) comme coefficients. Les plus importants champs de coefficients sont :

1° L'ensemble J_0 de tous les nombres entiers;

2° L'ensemble J_m des *résidus* (des nombres entiers) d'après le *module m* $(m = 2, 3, 4, \ldots)$;

3° L'ensemble R des nombres rationnels.

Définition fondamentale. — Un système fini de simplexes orientés (du champ des sommets donné), chacun considéré avec un certain coefficient (tiré du champ des coefficients choisi), s'appelle un *complexe algébrique* (des deux champs donnés), ou simplement un *complexe*.

Remarque importante. — Nous ne considérons que des complexes algébriques *homogènes*, c'est-à-dire formés de simplexes ayant tous le même nombre de dimensions.

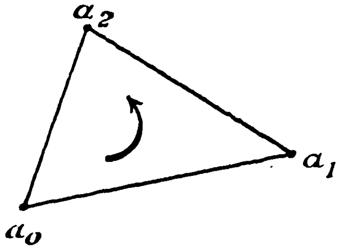
Évidemment on peut dire aussi :

Un complexe algébrique à n dimensions est une forme linéaire

$$C^n = \sum_{(i)} t^i x_i^n,$$

dont les variables x^n sont les simplexes orientés (du champ des sommets donné) et dont les coefficients sont les éléments du champ des coefficients choisi.

7. *Frontière d'un simplexe et d'un complexe.* — C'est là une autre notion fondamentale, également due à Poincaré. Considérons d'abord un triangle orienté, c'est-à-dire le simplexe orienté $x^2 = (a_0, a_1, a_2)$, l'orientation étant donnée par cet ordre de succession des sommets a_0, a_1, a_2. Il est alors conforme à l'usage ordinaire, de considérer



comme frontière de ce *triangle orienté* le système de ses côtés orientés comme il suit :

$$(a_0, a_1); \quad (a_1, a_2); \quad (a_2, a_0).$$

En remarquant que $(a_2, a_0) = -(a_0, a_2)$, on peut dire que la frontière du triangle orienté

$$x^2 = (a_0, a_1, a_2)$$

est le complexe algébrique formé de simplexes orientés (a_1, a_2), (a_0, a_2) et (a_0, a_1) considérés respectivement avec les coefficients $+1$, -1, $+1$. On a donc, en désignant la frontière de x_2 par $F_r(x^2)$,

$$\mathrm{Fr}(x^2) = (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1).$$

C'est cette même formule qui, écrite pour $n+1$ sommets, nous donne la frontière d'un simplexe orienté

$$x^n = (a_0, a_1, \ldots, a_n) :$$

on entend par sa frontière le *complexe algébrique* à $n-1$ dimensions suivant :

$$\mathrm{Fr}(x^n) = \sum_i (-1)^i (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n). \tag{3}$$

Le lecteur qui examinerait le cas d'un simplexe à trois dimensions (c'est-à-dire d'un tétraèdre ordinaire) s'apercevra combien la définition donnée par la formule (3) est élémentaire et naturelle.

Remarque importante. — Si le champ de coefficients choisi est J_m, on entend sous -1 le résidu de ce nombre par rapport au module m de sorte que la formule (3) est parfaitement applicable dans ce cas. Dans le cas particulier où le module choisi est $m = 2$, on a, par rapport à ce module, $+1 = -1$, de sorte que dans la « Topologie module 2 » la notion d'orientation se trouve éliminée; c'est pourquoi tous les théorèmes et toutes les démonstrations deviennent extrêmement simples quand on les considère « module 2 ».

La frontière d'un simplexe orienté étant définie, la définition de *la frontière d'un complexe algébrique arbitraire* ne présente plus aucune difficulté : la frontière d'un complexe algébrique est par définition la somme algébrique des frontières de ses simplexes (considérés avec les coefficients qui leur sont attribués). En d'autres mots : si le complexe algébrique donné est

$$C^n = \sum_{(i)} t^i x_i^n,$$

on définit comme sa frontière le complexe algébrique à $n-1$ dimensions suivant :

$$\mathrm{Fr}(C^n) = \Sigma t^i \,\mathrm{Fr}(x_i^n). \tag{4}$$

où, bien entendu, $\mathrm{Fr}(x_i^n)$ est donnée par la formule (3).

8. Il arrive souvent que la $\mathrm{Fr}(C^n)$ calculée d'après la formule (4) est identiquement nulle [c'est-à-dire que la forme linéaire obtenue en substituant pour les $\mathrm{Fr}(x_i^n)$ leurs valeurs données par (2) a tous ses cofficients nuls]. Dans ce cas, le complexe algébrique C^n s'appelle *un cycle* (*à n dimensions*) (¹).

Tout cela s'applique à un champ de sommets et un champ de coefficients quelconque (si le champ de coefficients choisi est par

(¹) On prouve sans peine que la frontière d'un complexe algébrique arbitraire est toujours un cycle.

exemple J_m, une forme linéaire identiquement nulle est, bien entendu, une forme dont les coefficients sont égaux à zéros mod m, ou, ce qui revient au même, des entiers divisibles par m).

Remarque. — Si le *champ de sommets donné* est formé par les points de l'espace euclidien E^n, on peut substituer à un simplexe quelconque $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ le simplexe « géométrique » défini par les sommets $a_0, a_1, \ldots, a_k$ (comme nous l'avons fait au début de cette exposition) : on parlera alors de *complexes algébriques polyédraux* (donc en particulier des *cycles polyédraux*.

9. Notre champ de sommets sera maintenant un espace (D) compact que nous désignons par F. Le cas le plus important est d'ailleurs celui où F est un ensemble fermé et borné situé dans un espace euclidien E^n quelconque.

Les simplexes de F étant des sous-ensembles finis de F, la notion de *complexes algébriques de* F (par rapport à un champ de coefficients choisi) est définie sans ambiguïté. Si tous les simplexes d'un complexe donné $C^n = \sum_i t^i x_i^n$ sont des ε-simplexes de F (*voir* n° 4), C^n est dit un ε-complexe de F. On peut donc en particulier parler des *ε-cycles de* F.

Définition III. — Une suite

$$(5) \qquad Z^n = (z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^n, \ldots),$$

où z_k^n est un ε_k-cycle de F avec $\lim \varepsilon_k = 0$, s'appelle *un vrai cycle à n dimensions de* F.

Les cas particuliers suivants de la notion du vrai cycle sont extrêmement importants :

1° Tous les cycles z_k^n sont des *cycles ordinaires* (c'est-à-dire des cycles par rapport à l'ensemble J_0 de tous les nombres entiers, choisi comme champs de coefficients); (5) est dit alors un vrai cycle *ordinaire*.

2° Tous les cycles z_k^n sont cycles « module m », c'est-à-dire cycles considérés par rapport à J_m choisi comme champ de coefficients; dans ce cas, (5) est dit *vrai cycle module m*, de F.

3° Le cycle z_k^n est un cycle mod m_k, *m_k dépendant*, en général, *de k*. Dans ce cas (5) est appelé *vrai cycle de* F *d'après un module variable*.

10. *Remarque très importante.* — (5) étant défini comme un vrai cycle de F, il se peut qu'il est en même temps un vrai cycle d'un sous-ensemble F' de F : en effet, si F' contient les sommets de tous les z_k^n appartenant à la suite (5), le cycle (5) est évidemment un vrai cycle d'un tel ensemble F'.

Tout sous-ensemble F' *tel que* (5) *peut être considéré comme vrai cycle de* F' *s'appelle un ensemble associé au vrai cycle* (5).

Soit donné un vrai cycle (5) de F; supposons qu'on peut trouver pour tout ε'_k-complexe C_k^{n+1} de F ayant pour sa frontière le cycle z_k^n et cela d'une façon que ε'_k tende vers zéro quand k augmente indéfiniment. Dans ce cas nous dirons que le vrai cycle (5) est *homologue à zéro* dans F,

$$Z^n \sim 0 \qquad (\text{dans F}).$$

Bien entendu, le complexe C_k^{n+1} doit être pris par rapport au même champ des coefficients que le cycle z_k^n; donc C_k^{n+1} est un complexe module m, si Z^n est un vrai cycle module m; dans le cas du module variable, C_k^{n+1} est un complexe d'après le module m_k (par rapport auquel le cycle z_k^n est envisagé), ce module variant avec k. *Dans le cas « ordinaire », quand Z^n est un cycle « aux coefficients entiers », il est cependant préférable de considérer, dans la définition d'homologie, des complexes* C^{n+1} *aux coefficients rationnels*; ou de supposer (ce qui revient au même) qu'un cycle C_k^{n+1} (aux coefficients entiers) admet pour sa frontière non nécessairement le cycle z_k^n, mais un cycle de la forme $t_k z_k^n$, où t_k est un nombre entier convenablement choisi (en d'autres mots, c'est *l'homologie « avec division »* au sens de Poincaré qui doit être envisagée).

11. *Définition IV.* — Un vrai cycle de F s'appelle *essentiel*, s'il existe pour lui au moins un ensemble associé dans lequel il n'est pas homologue à zéro.

Soient par exemple F l'ensemble de tous les points du triangle $a_0 a_1 a_2$ de notre figure, F' l'ensemble de tous les points de la frontière de F (au sens élémentaire). Si nous désignons par z_1 la frontière du triangle *orienté* $(a_0 a_1 a_2)$, telle qu'elle était définie au n° 7, et par

$$z_2, z_3, \ldots$$

des subdivisions successives du cycle z_1 (c'est-à-dire du polygone orienté $a_0 a_1 a_2 a_0$), la suite

$$(6) \qquad z_1, z_2, \ldots$$

forme évidemment un cycle de F, qui est ~ 0 dans F, *mais n'est pas* ~ 0 dans F'; (6) est donc un cycle essentiel de F.

12. Les définitions précédentes permettent de faire une étude approfondie des espaces (D) compacts au point de vue de l'*Analysis situs* classique; elles permettent en particulier d'édifier une théorie générale de la dimension, dans laquelle la plus étroite connection avec les méthodes d'*Analysis situs* combinatoire est respectée de manière que cette théorie apparaît comme une simple application desdites méthodes au domaine général des espaces abstraits.

Voici la définition sur laquelle repose cette théorie :

Définition de dimension. — On appelle la dimension de F *le plus grand nombre r tel qu'il existe dans* F *un vrai cercle r — 1 dimensionnel et essentiel qui cependant est homologue à zéro dans* F.

13. On voit de suite que cette définition embrasse en réalité une infinité de définitions différentes : on obtient, en effet, des définitions différentes selon qu'on entend sous *vrai cycle* un vrai cycle ordinaire, un vrai cycle module m ($m = 2, 3, \ldots$) ou bien un vrai cycle d'après un module variable. On obtient par conséquent :

1° La dimension basée sur la considération des cycles ordinaires; nous l'appellerons (pour des raisons qui deviendront claires dans un moment) *dimension sans torsion* et la désignerons par $\Delta_0(F)$;

2° La dimension module m, $\Delta_m(F)$;

3° La dimension à module variable, $\Delta_\omega(F)$.

Les fonctions d'ensemble ainsi obtenues sont d'ailleurs différentes : M. Pontrjagin [1] a en effet réussi à construire pour tout m un ensemble

---

[1] *Comptes rendus*, t. **190**, 1930, p. 1102, et **191**, 1930, p. 475.

fermé situé dans l'espace à 4 dimensions pour lequel $\Delta_m(F) = 2$ tandis que pour tout nombre m' premier avec m,

$$\Delta_{m'}(F) = 1:$$

il existe aussi des ensembles F pour lesquels $\Delta_0(F)$ est différent de $\Delta_\omega(F)$ et de tous les $\Delta_m(F)$. *Pour tous les polyèdres à un nombre quelconque de dimensions toutes nos définitions donnent cependant le même résultat, d'ailleurs conforme avec le nombre de dimensions du* polyèdre au sens élémentaire.

On a enfin le suivant :

Premier théorème fondamental. — *Pour tout ensemble fermé situé dans un espace euclidien à un nombre arbitraire de dimensions, la dimension au sens de Poincaré-Brouwer-Urysohn-Menger coïncide avec la dimension à module variable.*

14. Les fonctions d'ensemble que nous venons d'introduire comme dimensions étant, d'après le résultat cité de M. Pontrjagin, différentes, c'est seulement par *une suite infinie* de nombres entiers

$$(7) \qquad \Delta_\omega(F), \quad \Delta_0(F), \quad \Delta_2(F), \quad \ldots, \quad \Delta_m(F), \quad \ldots$$

qu'on peut espérer de caractériser la dimension d'un ensemble fermé: c'est d'ailleurs une question non résolue, si les dimensions différentes que nous avons introduites sont les seules à envisager: cette question ne peut être traitée, d'ailleurs, que par la voie axiomatique.

Quoi qu'il en soit, nous dirons pour le moment actuel que deux ensembles F_1 et F_2 appartiennent au même *type dimensionnel*, si chacune des fonctions (7) prend pour F_1 la même valeur que pour F_2. Il est alors facile à voir que *l'ensemble de types de dimensions différentes a la puissance du continu*. Comme il peut bien arriver qu'on a, par exemple,

$$\Delta_2(F_1) = 1, \qquad \Delta_3(F_1) = 2 \qquad \text{et en même temps } \Delta_3(F_2) = 1, \qquad \Delta_2(F_2) = 2,$$

on voit qu'il est impossible d'ordonner tous les types de dimension « d'après leur grandeur » : on aura toujours des types de dimensions *incomparables*,

Cela conduit d'une manière inévitable au problème suivant :

Quelles sont les relations entre les types de dimension que nous venons d'introduire et ceux de M. Fréchet ?

Les types de dimensions introduits, il y a un quart de siècle, par M. Fréchet, présentent maintenant, en effet, un intérêt tout à fait nouveau, puisqu'on voit que dans toute théorie qui voudra tenir compte de divers caractères présentés par la structure dimensionnelle des ensembles, on aura nécessairement affaire aux types de dimensions incomparables.

15. Chacune des définitions de dimension que nous avons proposées conduit à une « théorie de dimension ». Toutes ces théories se développent d'ailleurs d'une manière parallèle; on a, par exemple, dans chacune d'elles les théorèmes suivants :

I. Un ensemble fermé de dimension n ne peut pas être représenté comme somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés dont la dimension est inférieure à n.

II. Il existe pour tout ensemble fermé F un nombre positif $\varepsilon = \varepsilon(F)$ tel qu'il est impossible de transformer F, par une déformation continue déplaçant chaque point de F de moins de ε, en un ensemble dont la dimension est inférieure à celle de F lui-même.

III. Tout ensemble fermé de dimension n contient une *variété cantorienne* à n dimensions. (On entend, par variété cantorienne à n dimensions, un continu n-dimensionnel qui reste connexe après la suppression d'un ensemble fermé quelconque de ses points, sous la condition que cet ensemble a une dimension $n - 2$ au plus.)

Remarque. — Dans chacun de ces théorèmes, le mot « dimension » peut être compris dans le sens d'une quelconque de définitions que nous avons données.

16. On croyait, il y a quelques ans, que les théorèmes précédents expriment des propriétés particulières à la dimension au sens de Poincaré-Brouwer-Urysohn-Menger. On voit maintenant que ces propriétés appartiennent toutes à une infinité de fonctions d'ensemble, fonctions, qui méritent d'être appelées « dimensions ».

17. Il y a une hypothèse en Topologie qu'il est naturel de nommer *hypothèse du Produit*. Rappelons d'abord qu'on appelle « produit » des deux espaces X et Y (dans lesquels les voisinages sont définis), l'espace $W = X \times Y$ dont les points w sont par définition les couples de points (x, y) appartenant respectivement à X et à Y; quant aux voisinages, on les définit dans W de la façon suivante : un voisinage arbitraire d'un point $w_0 = (x_0, y_0)$ est constitué de tous les points $w = (x, y)$, x et y appartenant aux voisinages arbitraires $V(x)$ et $V(y_0)$ des points x_0 et y_0 dans leurs espaces respectifs. C'est là une notion qui remonte, en réalité, jusqu'à Descartes : puisque la façon dont le plan est envisagé en géométrie analytique est précisément celle de le considérer comme produit de deux droites. Il est à remarquer que, X et Y étant deux espaces (D), il en est de même de leur produit $X \times Y$: il suffit de définir comme distance $\rho(w_1, w_2)$ entre deux points $w_1 = (x_1, y_1)$ et $w_2 = (x_2, y_2)$ de $W = X \times Y$ le nombre positif $\sqrt{[\rho(x_1, x_2)]^2 + [\rho(y_1, y_2)]^2}$, $\rho(x_1, x_2)$ et $\rho(y_1, y_2)$ désignant les distances entre x_1 et x_2 entre y_1 et y_2 dans leurs espaces respectifs; cette définition de distance est bien entendu conforme avec la définition de voisinage précédemment adoptée. On démontre facilement que le produit de deux espaces compacts est lui aussi compact.

Cela posé, « l'hypothèse du Produit » est celle-ci :

La dimension de $X \times Y$ est égale à la somme des dimensions de X et de Y.

Or, cette hypothèse se trouve vérifiée si l'on entend par dimension la dimension dite sans torsion [c'est-à-dire $\Delta_0(F)$] *ou bien la dimension module m, m étant un nombre premier.*

L'hypothèse du Produit ne se trouve pas réalisée pour la dimension au sens de Brouwer-Urysohn : les exemples de M. Pontrjagin montrent en effet qu'il existe dans l'espace euclidien à quatre dimensions deux ensembles fermés et bornés possédant tous les deux la dimension (au sens de Brouwer-Urysohn) égale à 2, tandis que leur produit a la dimension 3.

18. Je passe maintenant au théorème qui est peut-être le plus important dans toute cette théorie.

Soit J^n l'intérieur d'une sphère S^{n-1} dans l'espace E^n. Considérons un ensemble fermé F quelconque situé dans E^n et ayant des points communs avec J^n; considérons enfin un *cycle polyédral* z (*voir* n° **8**, *Remarque*) situé dans J^n et n'ayant avec F aucun point commun. Nous dirons que z est *enlacé avec* F *dans* J^n, si, quel que soit le complexe C situé dans J et ayant le cycle z pour sa frontière, les simplexes constituant C ont nécessairement des points communs avec F.

Cette définition s'applique aussi bien dans le cas « module m » que dans le cas des cycles et de complexes dits « ordinaires ». On parlera donc des cycles enlacés « module m », ou bien des *cycles simplement enlacés*.

Remarque très importante. — Soit z un cycle simplement enlacé avec F dans J^n; aucun complexe C situé dans J^n et étranger à F ne possède le cycle z pour sa frontière, *le complexe* C *étant supposé*, bien entendu, *ordinaire*, c'est-à-dire *ayant des coefficients entiers*. Mais il peut fort bien arriver qu'il existe dans J^n un complexe C aux coefficients rationnels étranger à F et ayant z pour sa frontière; ou, ce qui est la même chose, il est possible qu'un certain complexe C aux coefficients entiers situé dans J^n et étranger à F a pour frontière, non le cycle z, mais le cycle tz, où t est un entier positif convenablement choisi. En d'autres mots encore : il se peut que z, n'étant pas ~ 0 dans la partie de J^n étrangère à F, est, dans cette même région, ~ 0 *avec division* (au sens de Poincaré). Dans ce cas, évidemment, ladite région de l'espace présente ce qu'on appelle une *torsion* (correspondant au nombre de dimensions du cycle z envisagé).

On est donc conduit à introduire, à côté de l'enlacement simple, une autre notion d'enlacement, qui soit *plus forte* et que nous appellerons *enlacement sans torsion* : nous dirons notamment que le cycle z (supposé toujours situé dans J^n et étranger à F) est, dans J^n, *enlacé avec* F *sans torsion*, si, quel que soit l'entier positif t, tout complexe C situé dans J^n et ayant tz pour sa frontière, possède nécessairement des points communs avec F.

19. On a alors le résultat suivant :

SECOND THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Soit* F *un ensemble fermé situé* *dans E^n. Pour que la dimension brouwerienne de F soit égale à r, il faut et il suffit qu'il existe un cycle (ordinaire) à $n-r-1$ dimensions simplement enlacé avec F dans l'intérieur J^n d'une sphère convenablement choisis; et qu'en même temps, aucun cycle à $n-r-2$ dimensions au plus ne soit enlacé avec F.*

Si, dans ce même énoncé, on considère l'enlacement sans torsion au lieu d'enlacement simple, on obtient une condition nécessaire pour que la dimension sans torsion soit égale à r.

La dimension module m est enfin caractérisée par la condition obtenue en supposant que les cycles en question sont enlacés avec F (module m).

On s'aperçoit facilement que, si un cycle à zéro dimensions est enlacé avec F dans J^n (dans n'importe quel sens), c'est que F décompose le domaine connexe J^n en plusieurs domaines sans points communs. Il en résulte :

Corollaire I. — *Pour que l'ensemble F (situé dans E^n) possède la dimension $n-1$ (dans n'importe quel sens), il faut et il suffit que cet ensemble décompose (coupe) un certain domaine connexe de cet E^n.*

Corollaire II. — *Un ensemble F, situé dans R^n et possédant la dimension $n-1$ dans le sens d'une quelconque de nos définitions, possède la même dimension dans tous les autres sens envisagés ici.*

On prouve aisément, d'autre part, qu'un résultat analogue au corollaire II subsiste encore pour les ensembles à zéro dimensions et pour les sous-ensembles n-dimensionnels du E^n [quant à ce dernier cas, on démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble F, situé dans E^n, ait la dimension n (dans n'importe quel sens), est qu'il contient des points intérieurs]. Il s'ensuit :

Corollaire III. — *Pour tous les ensembles fermés de l'espace tridimensionnel, toutes les définitions précédentes de dimension sont équivalentes entre elles.*

Le second théorème fondamental nous explique la vraie raison pour l'impossibilité d'avoir *une seule* « parfaite » définition de dimension; cette raison consiste dans l'existence des coefficients de torsion, qui semblent prédestinés à causer des ennuis aux topologues [1]; si le monde était créé sans ces inopportuns coefficients, la dimension brouwerienne serait identique avec celle dite « sans torsion » et toutes les considérations, impliquant des modules différents, seraient disparues aussi; on ne pourrait donc écrire, dans ce cas imaginaire, qu'un seul livre sur la théorie de la dimension, tandis que maintenant, le danger est grand qu'il y en aura une infinité !

20. Mais la dimension brouwerienne possède toujours des propriétés qui lui sont particulières et dont certaines sont extrêmement intuitives; cette définition de la dimension attira donc toujours, et même de préférence, l'attention des géomètres. L'une des plus importantes parmi lesdites propriétés est celle-ci :

Pour que la dimension de F soit au plus égale à r, il faut et il suffit qu'on puisse déformer continûment l'ensemble F en un polyèdre à r dimensions au plus, et cela de façon que tout point de F soit déplacé, au cours de ladite déformation, aussi peu que l'on veut.

Une autre propriété importante de la dimension brouwerienne exige une remarque préliminaire.

Soit donnée une représentation continue f d'un ensemble fermé F sur un cube Q à un nombre quelconque de dimensions; soit F' l'ensemble de tous les points de F auxquels correspondent, en vertu de la représentation f, des points de la frontière de Q. Considérons une *modification continue de* f, c'est-à-dire une famille de représentations continues f_t de F sur Q dépendant d'une façon continue d'un paramètre t, $0 \leq t \leq 1$, avec $f_0 = f$. Parmi toutes les modifications continues de f, nous ne considérons comme *permises* que celles qui laissent f invariable dans tous les points de F' [c'est-à-dire qui vérifient, pour toute valeur du paramètre t et pour tout point x de F', la condition $f_t(x) = f(x)$]. Nous dirons que f est une *représentation essentielle* (de F sur Q), si, quelle que soit la représentation f_1 obtenue par une modification *permise* de f, le cube Q tout entier est couvert par l'image de F : $f_1 F = Q$; dans le cas contraire f est dite *non essen-*

---

[1] On se souvient, en effet, que Poincaré n'a découvert les coefficients de torsion que dans son second Mémoire et qu'il y a dû reprendre par conséquent les matières déjà traitées dans son premier Mémoire.

tielle (dans ce cas, il est évidemment possible de parvenir par une modification permise de f à une représentation f_1 de f, qui fait correspondre à chaque point de F un point *de la frontière de* Q). On a alors le théorème suivant :

Pour que la dimension de F (au sens de M. Brouwer) *soit au moins égale à r, il faut et il suffit qu'il soit possible de représenter* F *d'une façon essentielle sur un cube r-dimensionnel.*

21. On peut enfin modifier, dans le cas de la dimension brouwerienne, le second théorème fondamental de façon à le rendre indépendant de toute notion de l'*Analysis situs* combinatoire.

Soit de nouveau J^n l'intérieur d'une sphère $n-1$ dimensionnelle de l'espace E^n; considérons dans E^n un ensemble fermé F quelconque et un polyèdre P situé dans J^n et étranger à F. Nous désignons comme *permise* toute déformation continue *simultanée* de F et de P vérifiant les conditions suivantes :

1° Elle laisse invariables tous les points de F situés à l'extérieur de la sphère S^{n-1} ou sur cette sphère même;

2° Au cours de cette déformation, F et P restent toujours sans points communs.

Cela posé, nous dirons que F et P sont *enchaînés* dans J^n, s'il est impossible de réduire, par une déformation permise de F et P, le polyèdre P en un seul point.

On a alors le théorème suivant :

Pour que la dimension de l'ensemble fermé F *situé dans* E^n *soit égale à r, il faut et il suffit qu'il existe un polyèdre à* $n-r-1$ *dimensions enchaîné avec* F *dans l'intérieur* J^n *d'une certaine sphère et qu'en même temps aucun polyèdre à* $n-r-2$ *dimensions au plus ne soit enchaîné avec* F.

Le lecteur trouvera des démonstrations détaillées des résultats ci-dessus mentionnés (et de quelques autres) dans mon Mémoire *Dimensions theorie* (*Mathematische Annalen*, t. 106, 1932, p. 161-238). On y trouvera aussi plusieurs problèmes se rapportant à ce sujet et qui ne sont pas résolus encore.