JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DELENS

Métrique vectorielle et géométrie des sphères

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 209-253.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__209_0>

Métrique vectorielle et géométrie des sphères;

PAR PAUL DELENS.

Introduction.

Ce travail a pour but l'étude de la géométrie des sphères; celles-ci forment, comme l'on sait, un système linéaire à cinq unités, isomorphe d'un espace vectoriel à cinq dimensions pourvu d'une métrique. Le calcul géométrique que nous utilisons reposant à la fois sur les méthodes de Grassmann et le calcul tensoriel ([1]), un exposé préliminaire nous a semblé utile, où nous avons envisagé le cas général d'un espace à N dimensions : c'est l'objet de la première partie de ce Mémoire. La seconde partie est une application limitée à la géométrie des sphères, où nous avons développé et complété deux des Notes que nous avons publiées sur ce sujet, en 1928-1929 ([2]).

I. Dans l'exposé classique de l'introduction d'une métrique dans un espace vectoriel, nous avons mis en parallèle le calcul tensoriel opérant sur les coordonnées et les combinaisons directes des éléments

([1]) Sur ces matières, *cf.* E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928); A. LOTZE, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, III, 8; CH. CAILLER, *Introduction géométrique à la mécanique rationnelle* (Genève-Paris, 1924); A. N. WHITEHEAD, *A treatise on universal algebra* (Cambridge, 1898), et la *Thèse* de l'auteur (Paris, 1927).

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 187, 1928, p. 1107; t. 188, 1929, p. 28 et 126; *Voir* également t. 188, 1929, p. 292 et 600; t. 190, 1930, p. 347.

géométriques : vecteurs, homographies, etc. La définition du produit intérieur et des systèmes de repère réciproques introduit trois tenseurs fondamentaux; nous avons formulé les équations de définition du groupe de la métrique et indiqué les opérations conduisant aux repères normaux.

Nous avons ensuite identifié les tenseurs alternés, ou torseurs, aux formes extérieures de Grassmann; alors que, selon le plan moderne, les opérations intérieures se définissent en premier, il était nécessaire de faire rentrer dans notre analyse les opérations définies pas Grassmann, en suivant l'ordre inverse. Nous sommes resté assez proche des formations de Grassmann pour pouvoir faire plein usage de la dualité; l'introduction du tenseur dualistique qui définit très simplement cette opération nous a permis de restituer son vrai rôle au produit extérieur de N vecteurs, multiple de ce tenseur. Les notations adoptées permettent au lecteur de revenir à volonté au calcul tensoriel, tout en débarrassant les formules d'indices souvent inutiles qui risquent d'obscurcir les opérations géométriques.

II. Dans la géométrie (anallagmatique) des sphères [1], l'intervention d'un premier repère précise la séparation des domaines dans lesquels on peut opérer : domaine complexe et domaine réel, ou encore domaine mi-réel, avec des équations à coefficients réels.

Les combinaisons utiles des sphères et des opérateurs nous conduisent rapidement à l'expression des relations simples et des formations invariantes entre les divers types d'éléments géométriques qui entrent en jeu. Nous introduisons directement dans le calcul les produits et puissances des opérations sphériques et des symboles des opérations infinitésimales, qui se présentent sous forme de torseurs.

---

[1] En nous en tenant aux Ouvrages et Mémoires récents sur ce sujet, citons J. L. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere* (Oxford, 1916); W. Blaschke, G. Thomsen, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, III : *Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln* (Berlin, 1929); E. Vessiot, *Journal de Math.*, 9e série, t. 2, 1923, p. 99; A. Bloch, *Ibid.*, 9e série, t. 3, 1924, p. 51; J. Hadamard, *Nouvelles Annales de Math.*, 6e série, t. 2, p. 257, 289 et 314, et les articles de MM. J. Hadamard, P. Robert, B. Gambier à *L'Enseignement scientifique*, t. 1, 2, 3, 1928-1929.

Nous signalons, entre autres, la formule (65) du n° **22** comme particulièrement utile.

La théorie des groupes à un paramètre d'opérations sphériques est basée sur l'équation caractéristique du symbole infinitésimal; quand ce symbole est un cercle, on obtient facilement les opérations finies correspondantes. Quand le symbole est un torseur, la classification est plus difficile; nous donnons la forme générale de l'équation principale d'un torseur, avec la signification des invariants, puis formons complètement les divers types possibles d'équations caractéristiques. Il y a finalement sept types distincts d'opérations sphériques, deux de ceux-ci dépendant d'équations caractéristiques de même forme convenant soit à un cercle propre, soit à un parataxe (nous désignons par ce nom un torseur paratactique). Nous terminons alors l'étude des opérations sphériques, en nous arrêtant quelque peu à l'opération paratactique, avec la congruence des cercles trajectoires et les représentations qui s'y rattachent.

Enfin, nous insistons sur la composition des opérations sphériques au moyen des opérations isotropes et sur le rôle que peuvent jouer ces opérations et les cercles isotropes dans la constitution de la géométrie des sphères.

I. — MÉTRIQUE VECTORIELLE A N DIMENSIONS.

Produits intérieurs et tenseurs fondamentaux.

1. Soit un système de repère constitué par N vecteurs e_i, unités du premier ordre; dans le système, les vecteurs

$$x = \Sigma \xi^i e_i, \qquad y = \Sigma \eta^j e_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N),$$

ont les coordonnées contrevariantes ξ^i, η^j; la sommation Σ s'applique aux indices muets, et nous respectons les règles usuelles du jeu des indices.

Nous postulons, entre deux vecteurs, une multiplication symétrique, de symbole $|$, donnant le produit *intérieur* scalaire

$$(1)\qquad x \mid y = \Sigma \xi^i \eta^j \mathrm{U}_{ij}, \qquad \mathrm{U}_{ij} = \mathrm{U}_{ji},$$
$$e_i \mid e_j = \mathrm{U}_{ij}.$$

Nombres et vecteurs sont les tenseurs d'ordres zéro et un; un tenseur d'ordre deux, constitué avec les produits sans liaison (dyades) $e_i e_j$,

$$\mathcal{L} = \Sigma \mathrm{L}^{ij} e_i e_j.$$

définit, par multiplication intérieure à liaison simple une transformation linéaire de vecteurs, ou homographie, d'après

$$(2)\qquad x' = x \mid \mathcal{L} = \Sigma \mathrm{L}^{ij}(x \mid e_i) e_j, \qquad \xi'^j = \Sigma \xi^k \mathrm{U}_{ki} \mathrm{L}^{ij}.$$

Le tenseur conjugué de $\mathcal{L}$ définit une nouvelle transformation

$$\mathbf{K}\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} = \Sigma \mathrm{L}^{ji} e_i e_j, \qquad \tilde{\mathrm{L}}^{ij} = \mathrm{L}^{ji},$$
$$(3)\qquad x \mid \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \mid x.$$

La composition des opérations définies par les tenseurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ introduit, par liaison simple, l'homographie produit $\mathcal{P}$,

$$x' = x \mid \mathcal{L}, \qquad x'' = x' \mid \mathcal{M} = x \mid \mathcal{L} \mid \mathcal{M},$$
$$(4)\qquad \mathcal{P} = \mathcal{L} \mid \mathcal{M}.$$

On peut en général sous-entendre le symbole $|$ de multiplication, *pour une liaison simple*, entre vecteur et homographie, et par suite entre homographies; nous écrirons donc $x\mathcal{L}$, $\mathcal{L}x$, $\mathcal{L}\mathcal{M}$; des points ou virgules serviront au besoin à séparer les facteurs d'autres produits.

Des tenseurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ d'ordres α, β, rapportés au système e_i, sont composés linéairement avec des produits sans liaison, d'ordre α ou β, des vecteurs de base du système (unités d'ordre α ou β). Soit $\alpha \leqq \beta$; la répétition de la multiplication intérieure définit entre les tenseurs une multiplication à liaison ν-uple ($\nu \leqq \alpha$), de symbole $\overset{\nu}{|}$ ($\overset{1}{|}$ pour $|$, $\overset{2}{|}$ ou $\vdots$, $\overset{3}{|}$ ou $\vdots$, ...), donnant le produit $\mathbf{A} \overset{\nu}{|} \mathbf{B}$ d'après le schéma suivant entre termes monomes

$$(5)\qquad a_1 a_2 \ldots a_\alpha \overset{\nu}{|} b_1 b_2 \ldots b_\beta$$
$$= (a_\alpha \mid b_1)(a_{\alpha-1} \mid b_2) \ldots (a_{\alpha-\nu+1} \mid b_\nu) a_1 a_2 \ldots a_{\alpha-\nu} b_{\nu+1} \ldots b_\beta:$$

le produit $\mathbf{A} \overset{\nu}{|} \mathbf{B}$ est un tenseur d'ordre $\alpha + \beta - 2\nu$, généralement distinct du produit $\mathbf{B} \overset{\nu}{|} \mathbf{A}$ de même ordre; pour $\nu = \alpha$, ces produits sont à liaison complète : on peut alors abréger le symbole en $\dagger$.

2. Posons dans la formule (1),

$$\Sigma \xi^i \mathrm{U}_{ij} = \xi_j. \tag{6}$$

$$x \,|\, y = \Sigma \xi_j \eta^j, \qquad x \,|\, e_j = \xi_j; \tag{7}$$

les ξ_j sont les coordonnées covariantes de x; posons de même

$$\xi^i = x \,|\, e^i. \tag{8}$$

d'où, après report dans (6) des expressions de ξ^i et ξ_j,

$$\Sigma x \,|\, e^i \mathrm{U}_{ij} = x \,|\, e_j, \qquad \Sigma e^i \mathrm{U}_{ij} = e_j. \tag{9}$$

Si le déterminant des U_{ij} est différent de zéro, les vecteurs e^i ainsi introduits forment le *système réciproque* du système e_j, avec les relations

$$e^i \,|\, e_j = \mathrm{U}^i_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Les coordonnées d'un tenseur d'ordre quelconque sont contrevariantes, covariantes, ou mixtes, selon qu'on le rapporte aux termes monomes de son ordre formés par les e_j, ou les e^i, ou des combinaisons des deux systèmes.

Les formules précédentes mettent en évidence *trois tenseurs fondamentaux* du deuxième ordre, symétriques, non dégénérés, *définis par le repère initial et les coefficients* U_{ij},

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U} = \Sigma \mathrm{U}_{ij} e^i e^j = \Sigma e_j e^j = \Sigma \mathrm{U}^{ji} e_j e_i, \\ \mathcal{R}' = \Sigma e^j e^j = \Sigma \mathrm{U}^{ji} e_i e^j, \qquad \mathcal{R} = \Sigma \mathrm{U}_{ij} e^i e_j = \Sigma e_j e_j, \end{array} \right. \tag{10}$$

$$e_j \mathcal{R}' = e^j, \qquad e^j \mathcal{R} = e_j, \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R}^{-1}, \qquad \mathcal{R}\mathcal{R}' = \mathfrak{U};$$

$\mathcal{R}'$ définit la transformation du système e_j en son réciproque, $\mathcal{R}$ est l'homographie inverse, et $\mathfrak{U}$, *tenseur unité* ou *absolu*, représente pour les vecteurs la transformation identique; ces tenseurs échangent en partie leurs coordonnées des diverses espèces.

3. Le produit intérieur de deux vecteurs peut maintenant s'écrire

$$x \,|\, y = x \,|\, y\mathfrak{U} = xy \,|\, \mathfrak{U}, \tag{11}$$

mais il n'a été défini qu'à partir du repère e_j : il convient de montrer qu'il est invariant pour les transformations linéaires $\mathcal{G}$ d'un groupe fondamental G, effectuées sur les vecteurs de base e_j. Nous aurons, en surmontant d'un trait les éléments transformés par $\mathcal{G}$,

$$\bar{e}_j = e_j\mathcal{G}, \qquad \bar{\mathfrak{U}} = \Sigma U^{ji}\bar{e}_j\bar{e}_i = \Sigma U^{ji}(e_j\mathcal{G})(e_i\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{G}}\mathfrak{U}\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{G}.$$

La condition de conservation du produit intérieur

$$\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U} = \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{G}, \qquad \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{-1}, \qquad \mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}^{-1}, \tag{12}$$

est visiblement l'équation de définition d'un groupe de transformations linéaires (congruentes), à $N^2 - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ paramètres : une homographie de ce groupe coïncide avec sa contragrédiente. De la notion de groupe résulte que le produit intérieur des vecteurs est aussi conservé par les opérations de G effectuées sur les vecteurs en jeu, et non plus sur le repère.

4. La forme $\mathfrak{U} = \Sigma e_j e^j$ montre que l'on conserve aussi $\mathfrak{U}$ en effectuant sur les deux séries d'unités e_j, e^j des substitutions contragrédientes

$$\bar{e}_j = e_j\mathfrak{C}, \qquad \bar{e}^j = e^j\mathfrak{C}', \qquad \tilde{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}' = \mathfrak{U}, \tag{13}$$

conduisant ainsi à de nouveaux systèmes réciproques.

Un intérêt particulier s'attache aux repères normaux : un *système normal* est formé de vecteurs unitaires et orthogonaux, et coïncide avec son réciproque. Soient ${}^sf$ les vecteurs d'un système normal, ${}_s\varphi^j$ ou ${}^s\varphi_j$ leurs coordonnées (notations de R. Weitzenböck, nouvelle théorie d'Einstein) :

$$\begin{gathered} {}^sf = e_s\mathcal{F} = e^s\mathcal{F}', \qquad \tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}' = \mathfrak{U}, \\ \mathcal{F}\mathcal{F}'^{-1} = \mathcal{R}', \qquad \mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{R}' \end{gathered} \tag{14}$$

d'après (13); d'où pour les coordonnées,

$$\begin{gathered} {}^s\varphi_j = {}^sf \,|\, e_j = e_s\mathcal{F} \,|\, e_j = e^s\mathcal{F}' \,|\, e_j = F_{sj} = F'^s{}_j, \\ {}_s\varphi^j = {}^sf \,|\, e^j = e^s\mathcal{F}' \,|\, e^j = e_s\mathcal{F} \,|\, e_i = F'^{si} = F_s{}^i, \\ \mathcal{F} = \Sigma F_{sj}e^se^j = \Sigma F_s{}^j e^s e_i, \qquad \mathcal{F}' = \Sigma F'^{si}e_se_i = \Sigma F'^s{}_j e_s e^j, \end{gathered}$$

et d'après la nouvelle forme de $\mathfrak{U}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{U}=\Sigma\,{}^if\,{}^if, \\ U_{ij}=e_i\mathfrak{U}e_j=\Sigma\,{}^s\varphi_i\,{}^s\varphi_j, \qquad U^{ij}=\Sigma\,{}_s\varphi^i\,{}_s\varphi^j. \end{array}\right. \tag{15}$$

Inversement, les relations précédentes permettent, étant donnés deux systèmes *arbitraires* de vecteurs, e_i et ${}^if$, ou le système e_i et les coefficients ${}_s\varphi^i$, de former les coefficients U_{ij} de sorte que le second système puisse être considéré comme normal pour la multiplication intérieure ainsi définie.

Formes extérieures et tenseur dualistique.

5. Un tenseur du deuxième ordre auto-conjugué est symétrique; un tenseur du deuxième ordre opposé à son conjugué est alterné (anti-symétrique, symétrique gauche); nous dirons *torseur* pour tenseur alterné. Un torseur du deuxième ordre sera constitué avec des termes

$$[a_ia_j]=a_ia_j-a_ja_i$$

et nous identifierons *le produit extérieur* de deux vecteurs a_i, a_j avec l'expression précédente, les torseurs avec les formes extérieures de Grassmann, ceci d'abord pour le second ordre. Nous poserons en général

$$[a_ia_j\ldots a_s]=\sum_p(a_i,a_j,\ldots,a_s)-\sum_i(a_i,a_j,\ldots,a_s) \tag{16}$$

$\sum_p$ et $\sum_i$ étant les sommes des termes obtenus par les permutations respectivement paires et impaires effectuées sur $a_ia_j\ldots a_s$. L'identification des expressions (16) avec les produits extérieurs de Grassmann, dont elles possèdent les propriétés, donne ainsi des torseurs jusqu'à l'ordre N inclus. Un torseur d'ordre ν ayant

$$\begin{bmatrix} N \\ \nu \end{bmatrix}=\frac{N(N-1)\ldots(N-\nu+1)}{\nu!}$$

composantes, les torseurs d'ordre N dépendent d'une seule unité, donc sont des quantités scalaires.

Les produits extérieurs donnent lieu aux *formules de distribution*

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&[a_ia_ja_k] = a_i[a_ja_k] + a_j[a_ka_i] + a_k[a_ia_j] = [a_ja_k]a_i + \text{cycl.} \\
&[a_ia_ja_ka_l] = a_i[a_ja_ka_l] - a_j[a_ka_la_i] + a_k[a_la_ia_j] - a_l[a_ia_ja_k] \\
&\qquad = ([a_ia_j][a_ka_l] + [a_ka_l][a_ia_j]) + \text{cycl.} = \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (^1),
\end{aligned}\right.
$$

l'abréviation *cycl.* indiquant des termes obtenus à partir des précédents par permutation circulaire.

Des constructions semblables conduisent à des produits symétriques ou algébriques de vecteurs et aux tenseurs symétriques.

$$
(18)\qquad \nu!\,\widehat{a_ia_j\dots a_s} = \sum_p (a_i, a_j, \dots, a_s) + \sum_i (a_i, a_j, \dots, a_s).
$$

définissant le produit symétrique $\widehat{a_ia_j\dots a_s}$ de ν vecteurs; un tenseur symétrique d'ordre ν dépend de

$$
\binom{N}{\nu} = \frac{N(N+1)\dots(N+\nu-1)}{\nu!}
$$

unités.

Les produits symétriques comportent les formules de distribution

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&3\,\widehat{a_ia_ja_k} = a_i\widehat{a_ja_k} + \text{cycl.} = \widehat{a_ja_k}a_i + \text{cycl.}, \\
&4\,\widehat{a_ia_ja_ka_l} = a_i\widehat{a_ja_ka_l} + \text{cycl.} = \dots
\end{aligned}\right.
$$

Les parties alternée et symétrique d'un tenseur sont irréductibles; en outre, si une multiplication à liaisons intérieures porte sur les parties respectivement symétrique et alternée de deux tenseurs, le produit est nul.

6. Dans les produits intérieurs définis au n° **1**, formule (5), les termes liés s'associent symétriquement à partir du symbole d'opération; pour distribuer autrement ces liaisons, avec le même type de multiplication, il faut remplacer un des tenseurs par un isomère, obtenu en

---

(1) Un produit extérieur se développe donc comme un déterminant dont toutes les lignes seraient identiques, mais pour lequel on tiendrait compte de l'ordre des facteurs dans les termes.

soumettant à une même permutation tous les monomes du premier. Le calcul tensoriel usuel, qui repose sur les coordonnées, possède plus de souplesse à cause du rôle des indices; ceux-ci, indices de numération ou de rang, deviennent indices de sommation (indices muets) et de liaison (saturation). Pour les tenseurs géométriques que nous employons on peut, sans recourir aux coordonnées, utiliser une notation analogue et définir un produit de tenseurs **A** et **B** par

$$\mathbf{A}_{\mathrm{E}\alpha.\beta..\mathrm{H}}^{..\mathrm{F}.\mathrm{G}\gamma.}\mathbf{B}_{\mathrm{M}...\mathrm{N}\gamma\mathrm{Q}}^{.\beta\mathrm{P}\alpha...} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{E}\alpha\mathrm{F}\beta\mathrm{G}\gamma\mathrm{H}}\mathbf{B}_{\mathrm{M}\underline{\beta}\mathrm{P}\underline{\alpha}\mathrm{N}\underline{\gamma}\mathrm{Q}}.$$

par exemple, E, F, ..., N, Q représentant des groupes d'indices, α, β, γ les indices muets, symboles de liaisons intérieures; dans la seconde forme, nous n'avons pas précisé le mode de variance, inutile ici, et avons employé la dernière notation d'Einstein pour indiquer l'élèvement ou l'abaissement des indices; la convention de sommation, avec suppression de Σ, dans le calcul tensoriel, conduit exactement aux mêmes schémas (les oppositions de variances disparaissent avec les coordonnées dans les repères normaux). Nous pouvons ainsi écrire, par exemple

$$x \,|\, y = x_\alpha y^\alpha, \qquad x\,\mathfrak{L} = x_\alpha \mathfrak{L}^{\alpha}{}_{\beta}, \qquad \mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{L}^{\alpha}{}_{\beta}\mathfrak{M}^{\beta}{}_{\gamma}. \qquad \mathfrak{L} \,|\, \mathfrak{M} = \mathfrak{L}^{\alpha}{}_{\beta}\mathfrak{M}^{\beta}{}_{\alpha}.$$

Nous définirons cependant une multiplication nouvelle, s'appliquant surtout aux torseurs, pour le cas où les liaisons s'effectueront toujours à partir de la gauche pour chaque tenseur, et définie sur les monomes par

$$(20) \qquad \nu!\, a_1 a_2 \ldots a_\alpha \underset{\nu}{|}\, b_1 b_2 \ldots b_\beta = (a_1 | b_1) \ldots (a_\nu | b_\nu)\, a_{\nu+1} \ldots a_\alpha b_{\nu+1} \ldots b_\beta.$$

Pour ce produit *normal* à liaison ν-uple, de symbole $\underset{\nu}{|}$, on a dans le cas de liaison complète ($\nu = \alpha \leqq \beta$) : $\mathbf{A} \underset{\nu}{|} \mathbf{B} = \mathbf{B} \underset{\nu}{|} \mathbf{A}$, et nous abrégerons alors le symbole en $\downarrow$. Dans le cas $\nu = \alpha = \beta$, pour les *torseurs* Φ, Ψ

$$(21) \qquad \nu!\, \Phi \underset{\nu}{|} \Psi = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \Phi \,\updownarrow\, \Psi;$$

$\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$ est le nombre de transpositions nécessaires pour renverser l'ordre des termes d'un produit de ν vecteurs; la parité de ce nombre étant celle de la partie entière de $\frac{\nu}{2}$, on a *dans ce cas* les relations symboliques

$$\Big|_1^1 = 1, \qquad \Big|_2^2 = -\frac{1}{2!}\Big|, \qquad \Big|_3^3 = -\frac{1}{3!}\Big|, \qquad \Big|_4^4 = \frac{1}{4!}\Big|, \qquad \Big|_5^5 = \frac{1}{5!}\Big|, \qquad \ldots, \quad (^1).$$

la période des changements de signe étant 2.

On retrouve ainsi, pour le produit normal complet de deux ν-vecteurs $\Gamma = [c_1 c_2 \ldots c_\nu]$, $\Delta = [d_1 d_2 \ldots d_\nu]$, ou la norme d'un ν-vecteur, les formules

$$(22) \qquad \begin{cases} \Gamma \downarrow \Delta = \text{déterminant } c_i | d_j. \\ \Gamma^2 = \Gamma \downarrow \Gamma = \text{déterminant } c_i | c_j. \end{cases}$$

Soient en particulier $u_i = u^i$ les vecteurs d'un système normal

$$\mathrm{U}^2 = [u_i u_j \ldots u_s]^2 = 1.$$

7. Une homographie $\mathcal{L}$ transformant en $\bar{a}_i$ des vecteurs a_i, sa puissance *relative* d'ordre ν, $\mathcal{L}^{<\nu>}$, est le tenseur, d'ordre $2\nu \leqq 2\mathrm{N}$, qui transforme en $[\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu]$ le produit $[a_1, a_2 \ldots a_\nu]$, et annule tout produit symétrique; le produit normal étant employé, ceci revient à dire, en complétant au besoin jusqu'à N le nombre des vecteurs a_i linéairement indépendants

$$(23) \qquad \mathcal{L} = \Sigma a^i \bar{a}_i, \qquad \mathcal{L}^{<\nu>} = \Sigma [a^i a^j \ldots a^s] [\bar{a}_i \bar{a}_j \ldots \bar{a}_s].$$

La définition précédente entraîne celle des produits *relatifs* $< \mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N} \ldots >$ d'homographies, dont nous enfermons les facteurs dans une parenthèse anguleuse.

Pour un N-vecteur, on aura

$$[\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\mathrm{N}] = [a_1 a_2 \ldots a_\mathrm{N}] \downarrow \mathcal{L}^{<\mathrm{N}>} = \mathrm{D}[a_1 a_2 \ldots a_\mathrm{N}].$$
$$\mathrm{D} = \mathrm{I}_\mathrm{N}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{<\mathrm{N}>},$$

D étant un nombre, l'invariant d'ordre N ou déterminant de $\mathcal{L}$, pour lequel nous utiliserons la dernière notation; une homographie $\mathcal{G}$ du

(1) Le produit normal correspond, dans le calcul tensoriel, à des sommations effectuées non plus sur des indices indépendants, mais sur des combinaisons d'indices : E. Cartan (*loc. cit.*), p. 7; Ch. Cailler (*loc. cit.*), p. 72.

groupe G donne

$$[\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_N]^2 = [a_1 a_2 \dots a_N]^2, \qquad \mathcal{G}^{\langle N \rangle}_{*} = \pm 1$$

ce qui conduit à distinguer le groupe G_+ des opérations directes, à déterminant 1. Nous appellerons aussi directes les homographies à déterminant positif, directs les repères déduits par une homographie directe d'un premier repère fixant l'orientation positive.

8. Le N-vecteur unité d'un système normal direct

$$(24) \qquad [u_1 u_2 \dots u_N] = 1^*$$

sera dit *tenseur dualistique* ou *unité duale* (¹); ce torseur joue un rôle primodial : invariant par les transformations $\mathcal{G}_+$, il est susceptible des décompositions amorcées en (17); il dégage en quelque sorte les parties alternées des tenseurs qu'il transforme par multiplication. Enfin, il fournit de la manière la plus simple les torseurs dualistiques de ceux qu'on lui soumet.

Soit en effet $\Pi = [u_i u_j \dots u_s]$ une unité extérieure d'ordre ν; on aura d'après (17),

$$(25) \qquad \begin{cases} \Pi \vee 1^* = \Pi'. & [\Pi \Pi'] = 1^*. & \Pi^2 = \Pi'^2 = 1. \\ \Pi' \vee 1^* = \Pi''. & [\Pi' \Pi''] = 1^*. & \Pi'' = (-1)^{\nu N - \nu^2} \Pi. \end{cases}$$

Π' est le produit extérieur dualislique, ou *dual*, de Π; cette définition coïncide avec celle du complément de Grassmann (ou supplément). De même, le dual d'un torseur $\Phi = \Sigma \varphi^\alpha \Pi_\alpha$ sera

$$(26) \qquad \begin{cases} \Phi' = \Phi \vee 1^* = \Sigma \varphi^\alpha \Pi'_\alpha \qquad \left(\alpha = 1, 2, \dots, \begin{bmatrix} N \\ \nu \end{bmatrix}\right), \\ [\Phi \Phi'] = \Sigma (\varphi^\alpha)^2 1^* = \Phi^2 1^* = \Phi'^2 1^* \end{cases}$$

Revenons aux produits extérieurs; on ne peut pas toujours, dans un ν-vecteur $\Gamma = [a_i a_j \dots a_s]$, placer ν vecteurs appartenant à un

---

(¹) L'identification de l'unité duale avec l'unité, la définition de Grassmann du produit intérieur, sont logiques quand on s'en tient aux opérations de G_+ et aux formes extérieures : de même, c'est dans un espace vectoriel et pour les opérations de G que l'on peut considérer les produits intérieurs complets comme des nombres.

repère normal; les ν-vecteurs à norme nulle, partiellement ou totalement isotropes, font exception. Mais on pourra toujours compléter ν vecteurs de Γ pour former un repère quelconque. Or pour un tel repère

$$[e_1 e_2 \ldots e_N] = \lambda\, 1^*. \qquad [e_1 e_2 \ldots e_N]^2 = \text{déterminant } U_{ij} = \lambda^2 \neq 0,$$

$$1^* = \frac{1}{\lambda}[e_1 e_2 \ldots e_N] = \lambda [e^1 e^2 \ldots e^N]; \tag{27}$$

posons donc $a_i = e_1$, $a_j = e_2, \ldots a_s = e_\nu$, donc $\Gamma = [e_1\, e_2 \ldots e_\nu]$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma' &= \Gamma \downarrow_\nu 1^* = \lambda[e^{\nu+1} \ldots e^N], \\ [\Gamma\Gamma'] &= \Gamma^2\, 1^* = \Gamma'^2\, 1^* \quad \text{d'après (26)}. \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Le (N-ν)- vecteur Γ', dual du ν-vecteur Γ, est totalement orthogonal à celui-ci; les normes de Γ et Γ' sont égales, l'orientation de N-vecteur $[\Gamma\Gamma']$ positive *ou nulle.* Dans le dernier cas, où Γ et Γ' sont isotropes, et où la condition d'orientation tombe, les propriétés énoncées ci-dessus *ne suffisent plus* à déterminer Γ', que donne toujours cependant le calcul direct $\Gamma \downarrow 1^*$.

9. Soient deux torseurs Φ et Ψ, de degrés ν et ρ; supposons $\nu + \rho = \sigma \leqq N$

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi' \downarrow_\nu \Phi = \Phi \downarrow_\nu \Psi' = \Phi \downarrow_\nu (\Psi \downarrow_\nu 1^*) = [\Psi\Phi] \downarrow_\nu 1^* = [\Psi\Phi]' = (-1)^{\nu\rho}[\Phi\Psi]' \\ \Phi' \downarrow_\nu \Psi = \Psi \downarrow \Phi' = [\Phi\Psi]' = (-1)^{\nu\rho}[\Psi\Phi]'. \end{aligned} \right. \tag{29}$$

Comme Ψ est le dual de $(-1)^{\rho(N-\rho)}\Psi'$, ceci donne pour $\nu + N - \rho \leqq N$ ou $\nu \leqq \rho$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi \downarrow_\nu \Psi = \Psi \downarrow_\nu \Phi = (-1)^{\rho N-\rho}[\Psi'\Phi]' = (-1)^{\sigma N-\rho}[\Phi\Psi']'. \\ [\Phi\Psi'] = (-1)^{\sigma\nu}(\Phi \downarrow_\nu \Psi)'. \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Nous avons jusqu'ici représenté le dual d'un torseur en accentuant le symbole de ce dernier, et continuerons à le faire quand l'ordre du torseur ne sera pas précisé. Mais il est souvent commode de représenter les torseurs par des lettres d'un type indiquant leur ordre; nous affecterons alors aux torseurs d'ordre ν et $N - \nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, N$) des lettres d'un même type, complétées au besoin par un astérisque, de la façon suivante : les torseurs d'ordre $\nu \leqq \frac{N}{2}$, directement introduits, n'auront pas d'astérisque; leurs duals et les torseurs d'ordre

$\nu \geqq \frac{N}{2}$ auront un astérisque supérieur; pour les duals de ces derniers, qui appartiennent à la première catégorie, on abaissera ou supprimera l'astérisque (avec changement de signe, au besoin). Nous aurons ainsi les torseurs

$$\alpha \text{ ou } A,\quad b,\quad \mathcal{C},\quad \ldots,\quad \Phi,\quad \ldots,\quad \Psi^*,\quad \ldots,\quad \mathcal{K}^*,\quad h^*,\quad \lambda^* \text{ ou } L^*,$$

d'ordres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad \nu,\quad \ldots N-\nu,\quad \ldots,\quad N-2,\quad N-1,\quad N,$$

avec

$$\Psi^* \cdot 1^* = \Psi_* = \pm\Psi,\qquad \mathcal{K}^* \cdot 1^* = \mathcal{K},\qquad h^* \cdot 1^* = (-1)^{N-1} h,\qquad \lambda^* \cdot 1^* = \lambda.$$

Nous étendrons ces conventions aux tenseurs de tous ordres et à leurs duals; ainsi au n° 7 nous avons écrit $\mathfrak{L}^{<N>}_*$.

Dans un repère normal, on a pour l'unité duale

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{l} 1^* = \Sigma u_i u_i^* = \Sigma U_\alpha U_\alpha^* \qquad \left(\alpha = 1, 2, \ldots, \begin{bmatrix} N \\ \nu \end{bmatrix}\right); \\ 1^* \cdot 1^* = 1,\qquad 1^*_\nu\, 1^* = \mathfrak{U}^{<N-\nu>},\qquad 1^* 1^* = \mathfrak{U}^{<N>} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N-1). \end{array} \right.$$

En revenant à un repère arbitraire e_i, avec $[e_1 e_2 \ldots e_N] = \lambda$, on aura

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{l} 1^* = \mathfrak{U} \cdot 1^* = \Sigma I_{ij} e^i e^{j*} = \Sigma e_j e^{j*} = \Sigma I^{ij} e_i e_j^*, \\ \qquad [e_i e^{i*}] = [e^i e_j^*] = 1^*, \\ e^{i*} = (-1)^{(i-1)(N-1)} \frac{1}{\lambda} [e_{i+1} \ldots e_N e_1 \ldots e_{i-1}], \\ e_j^* = (-1)^{(j-1)(N-1)} \lambda [e^{j+1} \ldots e^N e^1 \ldots e^{j-1}]. \end{array} \right.$$

10. Le produit extérieur utilisé jusqu'ici, et défini à partir des vecteurs de base, était *progressif*; pour le produit *régressif*, le crochet enfermant les facteurs recevra l'indice R; le crochet avec l'indice G indiquera un produit mixte ou *général* de Grassmann. Ces indices permettront des abréviations de symboles à l'intérieur des crochets.

Pour le produit régressif, nous prendrons les définitions de Grassmann, soit pour deux torseurs Φ et Ψ^*, d'ordres ν et ρ, avec $\nu + \rho = \sigma > N$

$$(33)\qquad [\Phi\Psi^*]_R = [\Phi^* \Psi^{**}],\qquad [\Phi\Psi^*]_R = (-1)^{\sigma N - \sigma} [\Phi^* \Psi^{**}]^*.$$

La dualité définie par 1^* peut être utilisée pour former les expressions des transformations corrélatives de vecteurs

$$(34) \quad \begin{cases} y^* = x \mid \Lambda = x\,\mathcal{L} \mid 1^*, \qquad \mathcal{L} = \Sigma L^{ij} e_i e_j, \qquad \Lambda = \Sigma L^{ij} e_i e_j^*, \\ y^* = \Sigma L^{ij} \xi_i e_j^*. \end{cases}$$

Pour les corrélations comme pour les homographies, on définit les puissances et produits relatifs; à remarquer que toutes les puissances relatives du tenseur dualistique sont identiques à celui-ci.

Nous ne compléterons pas, pour le cas général, les relations introduites par la dualité entre produits de diverses sortes, nous contentant de le faire quand ce sera utile, pour $N = 5$, dans les applications qui suivront.

Nous laissons aussi pour ces applications l'étude des sous-groupes continus d'opérations G_{+1}, à un paramètre principalement, et la détermination des symboles des transformations infinitésimales attachées à ces groupes, comme les relations qui les intéressent.

Nous n'avons pas non plus, dans les numéros précédents, distingué les éléments réels des éléments imaginaires; bien que traitant, pour $N = 5$, un système vectoriel particulier, les précisions que nous donnerons alors seront pour ce sujet comme pour d'autres, des indications suffisantes pour une généralisation facile.

II. — GÉOMÉTRIE DES SPHÈRES.

Éléments et coordonnées, opérations, invariants.

11. Soit dans l'espace euclidien un trièdre de coordonnée trirectangle; prenons pour sphères de base u_i d'un repère normal les trois plans de coordonnées et les deux sphères ayant pour centre l'origine, pour rayons 1 et $i = \sqrt{-1}$; les coordonnées σ_i d'une sphère s, de centre (A, B, C), de rayon R, seront

$$(35) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \mu A, \qquad \sigma_2 = \mu B, \qquad \sigma_3 = \mu C, \\ \sigma_4 = \dfrac{\mu}{2}(1 + R^2 - A^2 - B^2 - C^2), \qquad \sigma_5 = \dfrac{\mu}{2i}(1 - R^2 + A^2 + B^2 + C^2). \end{cases}$$

L'espace linéaire des sphères sera conçu comme espace vectoriel métrique à 5 dimensions en définissant le produit intérieur de deux sphères ou la norme d'une sphère par

$$(36)\quad \left\{ \begin{array}{l} s \mid s' = \Sigma \sigma_i \sigma'_i = -\dfrac{\mu\mu'}{2}(D^2 - R^2 - R'^2), \qquad D^2 = S(A - A')^2, \\ \qquad\qquad s^2 = \Sigma(\sigma_i)^2 = \mu^2 R^2. \end{array} \right.$$

Les transformations $\mathcal{G}$ du groupe G conservant l'absolu

$$\mathfrak{U} = \Sigma(u_i)^2, \qquad \mathcal{G}\widetilde{\mathcal{G}} = \mathfrak{U},$$

conservent, nous l'avons vu, les produits intérieurs et normes de sphères, qui sont les invariants (G) élémentaires. Mais la géométrie ne distingue pas les sphères s et ρs de même position, ρ étant un coefficient arbitraire; nous indiquerons l'identité géométrique de position par le symbole $=_p$, soit $\rho s =_p s$. Les invariants (G) sont modifiés par des changements arbitraires des coefficients ρ affectant les sphères en jeu, aussi les invariants de la géométrie (anallagmatique ou conforme) des sphères sont les fonctions des invariants (G) homogènes et de degré zéro par rapport aux symboles des sphères figurant dans leur expression, tandis que les invariants (G) doivent être considérés comme semi-invariants de cette géométrie. La même remarque est à faire pour les comitants (G) et les comitants géométriques. Les invariants et comitants géométriques seront indiqués par la notation (γ).

Les sphères (dans lesquelles rentrent accidentellement les plans) comprennent la classe des sphères-points p_0, ou cônes isotropes, que nous appellerons simplement *points*, caractérisés par une norme nulle $p_0^2 = 0$. Les autres sphères peuvent êtres normées par modification du coefficient ρ et acquérir une forme unitaire (supposée aux sphères u_i du repère); aux deux représentants unitaires $\pm s$, $s^2 = 1$, d'une sphère propre peuvent être attachées les deux orientations possibles pour la sphère. Une sphère unitaire, de symbole $s : \sqrt{s^2}$, étant homogène de degré zéro en s, est apte à entrer dans la constitution des invariants ou comitants (γ).

L'étude de la géométrie des sphères par les opérations de G, ou *opérations sphériques*, les invariants et comitants (G), l'équivalence (G) ne sont qu'un premier pas vers les problèmes analogues (γ), mais le reste est facile à traiter.

12. Pour distinguer les sphères réelles des sphères complexes, il est naturel de substituer d'abord au repère primitif un autre repère, pseudo-normal, tel que les coordonnées d'une sphère réelle puissent y être toutes des nombres réels; posons pour cela

$$\dot{u}_4 = i u_5 = -\dot{u}^5, \qquad \dot{\sigma}^5 = -i\sigma_4 = -\dot{\sigma}_4.$$

Avec un coefficient ρ (ou μ) convenable, une sphère réelle aura alors des coordonnées réelles et une norme positive, un point réel des coordonnées réelles. De même les homographies réelles, celles de G en particulier, auront dans le nouveau repère des coordonnées réelles, etc.

Appelons imaginaire (pur) un nombre complexe sans partie réelle, sphère imaginaire une sphère de centre réel, de rayon imaginaire : ainsi la sphère u_5, ou $\dot{u}_5$, est imaginaire. On sera souvent amené à opérer non dans le domaine réel, mais dans le domaine *mi-réel* (mi-imaginaire), où les éléments imaginaires précédents sont admis à côté des éléments réels.

Revenons au repère normal primitif; on pourra définir les sphères réelles comme susceptibles de formes s avec $s^2 > 0$, σ_α réel ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), σ_5 imaginaire; les sphères imaginaires, par les conditions $s^2 < 0$, σ_α réel, σ_5 imaginaire, ou $s^2 > 0$, σ_α imaginaire, σ_5 réel. De même pour les points réels, on aura $s^2 = 0$ et à volonté σ_α réel, σ_5 imaginaire, ou l'inverse.

Les coordonnées étant des produits intérieurs de sphères, il résulte de ces conventions que le produit intérieur de deux sphères sera un nombre réel ou imaginaire selon la nature de ces sphères et le choix fait pour leurs normes et coordonnées.

13. Pour les invariants (G) d'un ensemble de sphères, la propriété suivante est importante : *deux ensembles de 5 sphères linéairement indépendantes, e_i et $\bar{e}_i$, dont les produits intérieurs et normes sont respectivement égaux, sont équivalents* (G). Considérons en effet l'homographie

$$(37) \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \bar{e}_i \\ e_i \end{pmatrix} = \Sigma e^i \bar{e}_i, \qquad \tilde{\mathcal{L}} = \Sigma \bar{e}_i e^i, \qquad \mathcal{L}\tilde{\mathcal{L}} = \Sigma e^j (\bar{e}_i \,|\, \bar{e}_j) e^i.$$

et d'autre part le tenseur unité

$$\mathfrak{U} = \Sigma U_{ij} e^i e^j = \Sigma (e_i | e_j) e^j;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{L}$ soit une opération $\mathcal{G}$ est

$$(38) \qquad \mathcal{L}\widetilde{\mathcal{L}} = \mathfrak{U} \quad \text{ou} \quad \bar{e}_i | \bar{e}_j = e_i | e_j.$$

La proposition précédente s'étend aux ensembles de moins de cinq sphères linéairement indépendantes, en complétant ces systèmes. Pour des ensembles d'un nombre quelconque de sphères, le système complet d'invariants (G) est formé des invariants des sphères linéairement indépendantes et des coordonnées des autres sphères par rapport à celles-ci, coordonnées qui s'expriment d'ailleurs par des produits intérieurs et normes.

14. Soit un système de quatre points e_1, e_2, e_3, e_4 *de position générale*, c'est-à-dire non situés sur un même cône isotrope

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = 0 \qquad [e_1 e_2 e_3 e_4]^2 \neq 0,$$

système que nous complèterons par la sphère e_5 de ces points, qui en est linéairement indépendante d'après la restriction indiquée, car

$$e_5^* = \lambda [e_1 e_2 e_3 e_4], \qquad e_5^2 = [e_5 e_5^*]_* = \lambda [e_1 e_2 e_3 e_4 e_5]_* \neq 0.$$

Une transformation $\mathcal{G}$ transforme le système e_i en $\bar{e}_i$ équivalent (G); soit réciproquement un second système $\bar{e}_i$ analogue au premier et tel que les invariants (G) des groupes de quatre points soient les mêmes : pour que la transformation $\left(\frac{\bar{e}_i}{e_i}\right)$ soit une opération $\mathcal{G}$, il restera seulement à satisfaire à la condition

$$\bar{e}_5^2 = e_5^2, \qquad \bar{e}_5^* = \pm \lambda [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{e}_4]$$

qui détermine alors deux transformations $\mathcal{G}$ à déterminants opposés; donc : *deux groupes de quatre points, de position générale, équivalents* (G), *déterminent deux opérations sphériques, l'une directe, l'autre indirecte, capables de transformer le premier groupe en le second.*

Inversement, toute transformation $\mathcal{G}$ peut être ainsi définie; le résultat précédent était facile à établir géométriquement par des inversions successives.

Les six invariants (G) de quatre points donnant deux invariants (γ) distincts, ces deux invariants bien connus peuvent remplacer les invariants (G) dans l'énoncé ci-dessus ([1]). On retrouve ainsi que le groupe des opérations sphériques est à $3 \times 4 - 2 = 10$ paramètres.

15. L'équivalence (G) de deux systèmes de sphères se traduisant par des égalités du type $I_\alpha = \overline{I}_\alpha$ entre invariants (G) calculés pour les deux systèmes, on en déduit comme nous l'avons dit les conditions d'équivalence (γ), traduites par des conditions $J_\beta = \overline{J}_\beta$ entre invariants (γ). On doit remarquer que les deux systèmes de conditions (G) et (γ) ne sont pas algébriquement équivalents. Pour deux systèmes de ν sphères a_i et $\overline{a}_i$, les conditions (G) sont en effet de la forme

$$I_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = I_\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_\nu); \tag{39}$$

on les remplace ensuite par les conditions

$$I_\alpha(\rho_1 a_1, \rho_2 a_2, \ldots, \rho_\nu a_\nu) = I_\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_\nu), \tag{40}$$

pour former les conditions (γ)

$$J_\beta(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = J_\beta(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_\nu), \tag{41}$$

par élimination des coefficients ρ_i; l'équivalence algébrique exige que l'on complète les conditions (41) par d'autres équations contenant les paramètres ρ_i et qu'on peut supposer sous la forme

$$\rho_i = F_i(a_j, \overline{a}_k). \tag{42}$$

Aussi, dans le domaine réel, MM. Blaschke et Thomsen ont montré qu'on doit compléter les invariants (γ) par des *signinvariants*, c'est-à-dire les conditions d'équivalence (γ) par des conditions de signes, ce qui est naturel d'après les conditions imposées aux normes

---

[1] Sous une forme plus expressive, on peut encore dire que les birapports *quaternions* des deux groupes de quatre points doivent être congruents; *cf.* P. Delens, *L'Enseignement mathématique*, t. 12, 1922, p. 146.

et coordonnées. On aurait des conditions de même espèce dans le domaine mi-réel.

En outre, dans le domaine réel ou mi-réel, les conditions d'équivalence (G) de deux systèmes de sphères suffisent-elles pour affirmer que les transformations $\mathcal{G}$ déterminées par ces systèmes appartiennent au domaine considéré? Or, dans l'exemple du n° **13**, nous avons obtenu

$$(43) \qquad \mathcal{G} = \mathfrak{C} = \Sigma e^i \bar{e}_i = \Sigma G_{ji} e^j e^i, \qquad G_{ij} = \bar{e}_i \,|\, e_j,$$

donc on voit que l'on retrouve les conditions imposées au n° **12** aux produits intérieurs des éléments des domaines en cause.

16. On sait que les opérations sphériques élémentaires sont les inversions par rapport aux sphères. Pour une sphère s unitaire, nous définirons l'inversion par

$$(44) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S} = 2s^2 - \mathfrak{U}, & s^2 = 1, \\ \bar{x} = x\mathfrak{S} = 2x \,|\, s.s - x, & \mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{U}; \end{cases}$$

la sphère s est donc conservée, tandis qu'une sphère orthogonale change de signe : l'inversion est une opération $\mathcal{G}$ involutive et indirecte; ceci a lieu aussi bien pour une sphère imaginaire, ou même complexe, que pour une sphère réelle. Remarquons aussi qu'on aurait pu choisir $(-\mathfrak{S})$ pour symbole de l'inversion.

Les inversions définies par deux sphères orthogonales étant permutables, considérons les inversions $\mathfrak{U}_i$ (positives et négative) définies par les sphères u_i (réelles et imaginaire). Les produits d'opérations donnent pour les fonctions symétriques élémentaires S_α de ces inversions

$$S_1 = S_4 = -3\mathfrak{U}, \qquad S_2 = S_3 = 2\mathfrak{U}, \qquad S_5 = \mathfrak{U},$$

et l'on retrouve ainsi l'équation principale des $\mathfrak{U}_i$

$$(45) \quad \mathfrak{U}_i^5 + 3\mathfrak{U}_i^4 + 2\mathfrak{U}_i^3 - 2\mathfrak{U}_i^2 - 3\mathfrak{U}_i - \mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_i + \mathfrak{U})^4(\mathfrak{U}_i - \mathfrak{U}) = 0,$$

tandis que l'équation caractéristique est

$$(46) \qquad \mathfrak{U}_i^2 - \mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_i + \mathfrak{U})(\mathfrak{U}_i - \mathfrak{U}) = 0.$$

17. Nous ne nous engagerons pas dans la recherche des systèmes complets d'invariants (G) ou (γ) des tenseurs; notons seulement que deux sphères e_i, e_j ont trois invariants (G) : U_{ii}, U_{jj}, U_{ij}, et un invariant (γ); la dyade $\varpi = e_i e_j$ a seulement deux invariants (G), à savoir

$$\mathbf{I}_1 \varpi = \varpi \mathbin{\vdots} \mathfrak{U} = U_{ij}, \qquad \varpi \mathbin{\vdots} \widetilde{\varpi} = U_{ii} U_{jj};$$

et un invariant (γ); ces invariants sont aussi ceux du produit symétrique $\widehat{e_i e_j}$, tandis que le produit extérieur $[e_i e_j]$ n'a plus qu'un invariant (G).

L'invariant linéaire d'un produit d'homographies est conservé quand on permute celles-ci sans modifier leur ordre cyclique; soit en effet le produit $\mathcal{P} = \mathcal{L}' \mathcal{L}'' \mathcal{L}''' \ldots \mathcal{M}' \mathcal{M}'' \ldots$; posons $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \mathcal{L}'' \mathcal{L}''' \ldots$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \mathcal{M}'' \ldots$:

$$\mathcal{P} \mathbin{\vdots} \mathfrak{U} = \mathbf{I}_1 \mathcal{P} = \mathbf{I}_1 (\mathcal{L} \mathcal{M}) = \mathcal{L} \mathbin{\vdots} \mathcal{M} = \mathcal{M} \mathbin{\vdots} \mathcal{L} = \mathbf{I}_1 (\mathcal{M} \mathcal{L}).$$

$$(47) \qquad \mathbf{I}_1 (\mathcal{L}' \mathcal{L}'' \mathcal{L}''' \ldots \mathcal{M}' \mathcal{M}'') = \mathbf{I}_1 (\mathcal{M}' \mathcal{M}'' \ldots \mathcal{L}' \mathcal{L}'' \mathcal{L}''' \ldots).$$

Utilisant surtout les tenseurs du deuxième ordre, c'est eux que désignera dans la suite, quand l'ordre ne sera pas précisé, le mot tenseurs.

Une décomposition importante est celle d'un tenseur $\mathcal{L}$ en ses parties symétrique et alternée

$$\mathcal{L} = \mathbf{S}\mathcal{L} + \mathbf{A}\mathcal{L}, \qquad \mathbf{S}\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \widetilde{\mathcal{L}}), \qquad \mathbf{A}\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}}):$$

pour un torseur $\mathcal{T}$, on a

$$\widetilde{\mathcal{T}} = -\mathcal{T}, \qquad \mathbf{K}\mathcal{T}^2 = \widetilde{\mathcal{T}}^2 = \mathcal{T}^2,$$

donc la carré d'un torseur est symétrique; les deux parties d'un tenseur se déduiront par suite des torseurs, dont le plus simple est le cercle, produit extérieur de deux sphères; aussi nous allons établir quelques relations entre sphères et torseurs, et aussi leurs duals.

De même qu'une sphère s définit le complexe linéaire des sphères orthogonales et un lieu de points, d'équations

$$s \mathbin{\vdots} x = 0, \qquad s \mathbin{\vdots} m = 0, \qquad m^2 = 0,$$

un tenseur $\mathcal{L}$ définit un complexe quadratique et une cyclide, d'équations

$$\mathcal{L} \mathbin{\vdots} s^2 = \mathbf{S}\mathcal{L} \mathbin{\vdots} s^2 = 0, \qquad \mathcal{L} \mathbin{\vdots} m^2 = \mathbf{S}\mathcal{L} \mathbin{\vdots} m^2 = 0, \qquad m^2 = 0;$$

la cyclide est la même pour tous les complexes *homoponctuels* $\mathcal{L} + \lambda\mathfrak{U}$, et le complexe lui-même ne dépendait que de la partie symétrique de $\mathcal{L}$.

Relations entre sphères, cercles et torseurs.

18. Nous classerons les grandeurs alternées *simples*, produits extérieurs de sphères, d'après la nature des repères orthogonaux partiels qu'on y peut placer, ou d'après leur degré d'isotropie, qui ne peut dépasser deux. Nous avons déjà distingué les sphères propres s ou s_1, les points p ou p_0.

Un cercle $\mathcal{C} = [cc']$, torseur simple, représente un faisceau linéaire de sphères; son carré extérieur $[\mathcal{C}\mathcal{C}] = \mathcal{C}^{(2)}$ est nul. L'équation aux points du faisceau, ou foyers du cercle ([1]), détermine trois types de cercles selon qu'elle a deux racines, une racine double, ou une infinité de racines.

$$(48)\qquad \mathcal{C} = [f\bar{f}],\qquad f^2 = \bar{f}^2 = 0,\qquad \mathcal{C}^2 \neq 0,$$

$$(49)\qquad \mathcal{C}_0 = [mc],\qquad m^2 = m \mid c = 0,\qquad \mathcal{C}_0^2 = 0,\qquad \mathcal{C}_0^2 \neq 0.$$

$$(50)\qquad \mathcal{C}_{00} = [mn],\qquad m^2 = m \mid n = n^2 = 0,\qquad \mathcal{C}_{00}^2 = 0.$$

Le cercle $\mathcal{C}$, réel ou imaginaire (ou complexe), est *propre* et susceptible d'une forme unitaire: $\mathcal{C}_1^2 = 1$, ou plutôt des formes $\pm\mathcal{C}_1$ unitaires; en choisissant pour sphères c, c' deux sphères unitaires et orthogonales du faisceau, on aura

$$(51)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \mathcal{C}_1 = [cc'], & c^2 = c'^2 = 1, & c \mid c' = 0, & \mathcal{C}_1^2 = 1, \\ f = \dfrac{c + \iota c'}{\sqrt{2}}, & \bar{f} = \dfrac{c - \iota c'}{\sqrt{2}}, & \iota = \sqrt{-1}, & \\ \mathcal{C}_1 = \iota[f\bar{f}], & f \mid \bar{f} = 1, & & \end{array}\right.$$

et pour son carré

$$(52)\qquad \mathcal{C}_1^2 = -(c^2 + c'^2) = -2\widehat{f\bar{f}}.$$

La forme $\mathcal{C}_1$ convient pour un cercle réel; pour un cercle imaginaire, où la sphère c' serait imaginaire, les foyers étant réels, on pourrait employer la forme $\pm\iota\mathcal{C}_1$, de norme -1.

([1]) On doit considérer comme foyers d'une droite les plans isotropes passant par cette droite.

$\mathcal{C}_0$, simplement isotrope, est un cercle-point, les sphères du faisceau étant toutes tangentes en m; on peut prendre $c^2 = 1$, et pour le carré l'on a

$$\mathcal{C}_0^2 = - m^2. \tag{53}$$

$\mathcal{C}_{00}$ est un cercle (ou droite) isotrope, toutes les sphères du faisceau se réduisant aux points d'une droite isotrope.

19. Un cercle dual $\mathcal{D}^* = [ee'e'']$ représente un réseau linéaire de sphères et est aussi produit extérieur d'une sphère et d'un cercle; grandeur simple, son carré extérieur $[\mathcal{D}^*\mathcal{D}^*]_{\text{E}}$ est nul. Aux trois types de cercles considérés correspondent trois types de cercles duals; pour $\mathcal{C}_1^* = [dd'd'']$, les sphères d, d', d'' complètent le repère normal commencé avec c, c'. Pour un cercle-point dual de $\mathcal{C}_0 \underset{\text{P}}{=} [mc]$, soit

$$\mathcal{C}_0^* \underset{\text{P}}{=} [m\,dd']$$

les sphères c, d, d' peuvent entrer dans un repère normal, et m est un de leurs points communs; soit $\overline{m}$ l'autre et supposons, ce qui est possible,

$$[m\overline{m}c\,dd'] = 1^*. \qquad m\,|\,\overline{m} = 1;$$

on peut alors prendre exactement

$$\mathcal{C}_0 = [mc]. \qquad \mathcal{C}_0^* = [m\,dd'].$$

Un cercle isotrope dual $\mathcal{C}_{00}^* = [mnd]$ sera défini par deux points m, n d'une droite isotrope, et une sphère d ayant cette droite pour génératrice, et qu'on peut supposer unitaire.

Les sphères duales $r^* = [ss's''s''']$, hyperfaisceaux de sphères, appartiennent à deux types; si la sphère r est propre, il en est de même de r^*; si r est un point, soit m, r^* est un point dual, par exemple $-[mcdd']$ avec le repère précédent.

Une sphère duale est encore produit extérieur d'une sphère et d'un cercle dual, ou de deux cercles.

Un nombre dual $\lambda^* = [aa'a''a'''a^{\text{IV}}]$ représente l'ensemble, ou hyperréseau, des sphères de l'espace; les sphères qui figurent dans son expression sont nécessairement propres si elles forment un repère orthogonal. Un nombre dual est produit extérieur de deux éléments duals : sphères ou cercles.

Les torseurs d'ordre deux ou trois ne sont généralement pas simples, mais un torseur [dual] général est réductible à la somme de deux cercles [duals] avec un arbitraire que nous préciserons.

20. Les produits extérieurs et normaux des éléments précédents fournissent en particulier des éléments des mêmes espèces, que nous allons étudier.

Avec des sphères r, s (et leurs duales r^*, s^*) on obtient

$$(54) \qquad r \mid s = r^* \mid s^* = [rs^*]_*, \qquad [rs^*] = [r^* s^*]_R$$

$r \mid s = 0$, $[rs] = 0$ sont respectivement les conditions d'orthogonalité et d'incidence de deux sphères.

Les autres produits intéressants se ramènent aux précédents ou à leurs duals; ainsi

$$(55) \qquad r \mid s^* = -[rs]^*.$$

Pour établir les relations de ce genre, on dispose des relations générales des nos **8**, **9**, **10**, où l'on bénéficie de $\Phi'' = \Phi$. Il arrive aussi qu'on a reconnu, par la géométrie, la décomposition en facteurs, l'ordre des produits, que deux produits ont même position; il ne reste alors qu'à fixer un coefficient numérique indépendant des facteurs, et cela peut se faire avec un exemple choisi dans un repère avantageux, normal de préférence; ainsi

$$r = u_1, \qquad s = u_2, \qquad r^* = [u_2 u_3 u_4 u_5], \qquad s^* = [u_3 u_4 u_5 u_1],$$
$$r \mid s^* = u_1 \mid [u_3 u_4 u_5 u_1] = -[u_3 u_4 u_5] = -[u_1 u_2]^* = -[rs]^*,$$

tandis que pour $(54)_1$, il suffit de vérifier $r^2 = r^{*2}$, de façon à éviter les produits nuls.

Pour les produits où interviennent des torseurs, on établit les relations avec des cercles différents; des combinaisons linéaires donnent ensuite les formules générales des produits, toujours distributifs.

Avec des cercles $\mathcal{C} = [cc']$, $\mathcal{D}$, etc., on formera

$$(56) \qquad s\mathcal{C} = s \mid \mathcal{C} = s \mid c . c' - s \mid c' . c, \qquad [s\mathcal{C}] = [scc'];$$

$s\mathcal{C}$ est la sphère du faisceau $\mathcal{C}$, orthogonale à s; $[s\mathcal{C}]$ est le cercle dual, *axial* à $\mathcal{C}$ et orthogonal à s; $s\mathcal{C}=0$, $[s\mathcal{C}]=0$ sont les conditions d'orthogonalité ou d'incidence de s et $\mathcal{C}$. Puis

$$(57)\qquad s\mid\mathcal{C}^*=[s\mathcal{C}]_*=s^*\downarrow\mathcal{C},\qquad [s\mathcal{C}^*]=-(s\mathcal{C})^*.$$

L'invariant (G) entre sphère et cercle

$$(58)\qquad (s\mathcal{C})^2=-s^2\uparrow\mathcal{C}^2$$

est, pour un point s_0, proportionnel à la *puissance réduite* de M. A. Bloch; si l'on pose $\mathfrak{S}_0=[s_0a]$, $\mathfrak{S}_0^2=-s_0^2$, cet invariant apparaît aussi comme invariant $\mathfrak{S}_0^2\uparrow\mathcal{C}^2$ de deux cercles.

21. Les cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ donnent l'invariant $\mathcal{C}\downarrow\mathcal{D}$ et la sphère duale $[\mathcal{C}\mathcal{D}]$; $\mathcal{C}\downarrow\mathcal{D}=0$ traduit que les cercles sont *en involution* : il passe par chacun d'eux une sphère orthogonale à l'autre; $[\mathcal{C}\mathcal{D}]=0$ est la relation d'incidence, exprimant que les cercles sont cosphériques ou bisécants. On vérifiera les relations

$$(59)\qquad \mathcal{C}\downarrow\mathcal{D}^*=[\mathcal{C}\mathcal{D}]_*,\qquad [\mathcal{C}\mathcal{D}^*]=(\mathcal{C}\downarrow\mathcal{D})^*=(\mathcal{C}^*\downarrow\mathcal{D}^*)^*.$$

Pour des torseurs $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Z}$, certaines des interprétations précédentes peuvent manquer; $s\mathfrak{T}s=s^2\uparrow\mathfrak{T}=0$ subsistant, la sphère $s\mathfrak{T}$ reste orthogonale à s, et l'est aussi à la sphère principale $\mathfrak{T}^{[2]}{}_*$ du torseur; $[s\mathfrak{T}]$ est un torseur dual. La relation $s\mathfrak{T}=0$ est vérifiée seulement, comme nous le verrons, pour $s=\mathfrak{T}^{[2]}{}_*$, et la relation $[s\mathfrak{T}]=0$ est impossible. Pour deux torseurs, les produits $\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}$ et $[\mathfrak{T}\mathfrak{Z}]$ sont susceptibles de s'annuler : nous parlerons encore d'involution et d'incidence.

Pour des tenseurs $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, la formation alternée, *combinant* des tenseurs

$$(60)\qquad \{\mathcal{L}\mathcal{M}\}=\mathcal{L}\mathcal{M}-\mathcal{M}\mathcal{L}=-\{\mathcal{M}\mathcal{L}\},$$

analogue à la *parenthèse* de S. Lie, est très importante; nous l'indiquerons par une *accolade* et la désignerons par ce nom. Pour deux torseurs

$$\mathbf{K}\{\mathfrak{T}\mathfrak{Z}\}=\{\mathfrak{Z}\mathfrak{T}\}=-\{\mathfrak{T}\mathfrak{Z}\},$$

donc l'accolade est un nouveau torseur; il en est de même de l'accolade de deux tenseurs symétriques; $\{\mathfrak{T}\mathfrak{Z}\}=0$, et plus généralement $\{\mathcal{L}\mathcal{M}\}=0$, indique que les deux facteurs sont *permutables*. La relation

$$\mathfrak{T}\mathfrak{Z}=0, \qquad \mathfrak{Z}\mathfrak{T}=\mathbf{K}(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})=0, \tag{61}$$

appliquée à deux cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, exprime que ceux-ci sont totalement orthogonaux : toute sphère passant par l'un est orthogonale à l'autre; nous disons alors que les cercles sont *axiaux* (conjugués, en bi-involution).

22. Des décompositions et regroupements de termes donnent

$$s \mid [s'\mathfrak{T}]=s \mid s'.\mathfrak{T}+[s(s'\mathfrak{T})], \tag{62}$$

d'où pour l'accolade de deux cercles les formes

$$\{\mathcal{C}\mathcal{D}\}=[c(c'\mathcal{D})]-[c'(c\mathcal{D})]=c\mid[c'\mathcal{D})]-c'\mid[c\mathcal{D}], \tag{63}$$

soit deux expressions différentes comme somme de deux cercles.

En partant de cercles, on obtient pour les torseurs les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{T}\downarrow[s\mathfrak{Z}]=\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}.s+s\mathfrak{T}\mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{T}\downarrow[s\mathfrak{Z}]-\mathfrak{Z}\downarrow[s\mathfrak{T}]=s\mid\{\mathfrak{T}\mathfrak{Z}\}, \end{array}\right. \tag{64}$$

$$\mathfrak{T}\downarrow[\mathfrak{Z}\mathfrak{W}]=\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}.\mathfrak{W}+\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{W}.\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}\mathfrak{T}\mathfrak{W}+\mathfrak{W}\mathfrak{T}\mathfrak{Z}, \tag{65}$$

$$[\mathfrak{S}\mathfrak{T}]\downarrow[\mathfrak{Z}\mathfrak{W}]=\mathfrak{S}\downarrow\mathfrak{Z}.\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{W}+\mathfrak{S}\downarrow\mathfrak{W}.\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}-\mathbf{I}_1\mathfrak{S}\mathfrak{Z}\mathfrak{T}\mathfrak{W}, \tag{66}$$

la relation (65) étant fondamentale pour les applications.

En partant d'une dyade, puis passant à un tenseur $\mathcal{M}$, on trouve pour transformé de ce tenseur par une homographie $\mathcal{L}$ la forme $\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{M}\mathcal{L}$ (qui ne se confond avec $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{L}$ que si $\mathcal{L}$ est une opération $\mathcal{G}$). Dans le cas de torseurs

$$\tilde{\mathfrak{Z}}\mathfrak{T}\mathfrak{Z}=-\mathfrak{Z}\mathfrak{T}\mathfrak{Z}=\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}^{<2>}; \tag{67}$$

or, en faisant $\mathfrak{W}=\mathfrak{Z}$ dans (65) on obtient

$$\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}^{[2]}=2\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}.\mathfrak{Z}+2\mathfrak{Z}\mathfrak{T}\mathfrak{Z}=2(\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}.\mathfrak{Z}-\mathfrak{T}\downarrow\mathfrak{Z}^{<2>}),$$

donc entre les tenseurs du quatrième ordre $\mathfrak{Z}.\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{<2>}$, $\mathfrak{Z}^{[2]}$ existe la relation

$$\mathfrak{Z}^{[2]}=2(\mathfrak{Z}.\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}^{<2>}) \tag{68}$$

et par l'opération polaire on en tire

$$[\mathfrak{Z}\mathfrak{W}] = \mathfrak{Z}.\mathfrak{W} + \mathfrak{W}.\mathfrak{Z} - 2 < \mathfrak{Z}\mathfrak{W} >, \tag{69}$$

relation équivalente à (65).

E. Müller [1] a établi la relation générale

$$[\mathfrak{Z}\mathfrak{T}.\mathfrak{W}]_G + [\mathfrak{T}\mathfrak{W}.\mathfrak{Z}]_G + [\mathfrak{W}\mathfrak{Z}.\mathfrak{T}]_G = 0, \tag{70}$$

où $[\mathfrak{Z}\mathfrak{T}.\mathfrak{W}]_G$ est une abréviation de $[[\mathfrak{Z}\mathfrak{T}]\mathfrak{W}]_B$; nous poserons encore

$$[\mathfrak{Z}\mathfrak{T}] = \bar{w}', \qquad [\mathfrak{T}\mathfrak{W}] = \bar{z}', \qquad [\mathfrak{W}\mathfrak{Z}] = \bar{t}',$$

donc

$$[\bar{t}'\mathfrak{T}]_B + [\bar{z}'\mathfrak{Z}]_B + [\bar{w}'\mathfrak{W}]_B = 0.$$

Or

$$[\bar{t}'\mathfrak{T}]_B = [\bar{t}\mathfrak{T}'], = -\bar{t}\mathfrak{T},$$

d'après (57_2); finalement

$$\bar{t}\mathfrak{T} + \bar{z}'\mathfrak{Z} + \bar{w}'\mathfrak{W} = 0. \tag{71}$$

Pour $\mathfrak{W} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^2{}_* = \bar{t}$, on obtient

$$\bar{t}\mathfrak{T} = 0.$$

soit la propriété annoncée (n° **21**) de la sphère principale $\bar{t}$ du torseur $\mathfrak{T}$. D'autre part, dans (71), figurent trois sphères d'un faisceau linéaire, ayant en commun un cercle; si les torseurs se réduisent à des cercles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on obtient ainsi le cercle incident aux trois cercles considérés, sous les formes

$$[(\bar{a}\mathcal{A})(\bar{b}\mathcal{B})] = [(\bar{b}\mathcal{B})(\bar{c}\mathcal{C})] = [(\bar{c}\mathcal{C})(\bar{a}\mathcal{A})]. \tag{72}$$

23. La condition de permutabilité de deux cercles distincts, $|\mathcal{C}\mathcal{D}| = 0$, entraîne dans certains cas la condition d'axialité $\mathcal{C}\mathcal{D} = 0$; pour les différents types de cercles, on a en effet une des relations

$$\mathcal{C}_{\mathrm{I}}^3 + \mathcal{C}_{\mathrm{I}} = 0, \qquad \mathcal{C}_{\mathrm{II}}^3 = 0, \qquad \mathcal{C}_{\mathrm{III}}^2 = 0,$$

---

[1] *Beiträge zur Grassmann' schen Ausdehnungslehre* (*Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. in Wien*, t. **118**, 1909, p. 1058).

les deux premières rentrant dans une conséquence de (65)

$$\mathcal{C}^3 + \mathcal{C}^2\mathcal{C} = 0, \tag{73}$$

une autre conséquence étant les formules de réduction du type

$$\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{C} + \mathcal{C} \downarrow \mathcal{D}.\mathcal{C} = 0. \tag{74}$$

Supposons d'abord que $\mathcal{C}$ soit un cercle propre $\mathcal{C}_1$; de la condition $\mathcal{C}_1\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{C}_1$ on tire par multiplication à gauche par $\mathcal{C}_1^2$

$$\mathcal{C}_1^2\mathcal{C}_1\mathcal{D} = \mathcal{C}_1\mathcal{D} = \mathcal{C}_1 \downarrow \mathcal{D}.\mathcal{C}_1^2.$$

Si $\mathcal{D}$ est aussi cercle propre, une relation analogue entraîne $\mathcal{C}_1 \downarrow \mathcal{D}_1 = 0$, puis $\mathcal{C}_1\mathcal{D}_1 = 0$.

Si $\mathcal{D}$ est un cercle point $\mathcal{D}_0$, la seconde relation donne $\mathcal{C}_1 \downarrow \mathcal{D}_0 . \mathcal{D}_0^2 = 0$ d'où encore $\mathcal{C}_1 \downarrow \mathcal{D}_0 = 0$, puis $\mathcal{C}_1\mathcal{D}_0 = 0$.

Si $\mathcal{D}$ est cercle isotrope, en multipliant à droite par $\mathcal{D}_{00}$, on obtient encore $\mathcal{C}_1 \downarrow \mathcal{D}_{00} = 0$, puis $\mathcal{C}_1\mathcal{D}_{00} = 0$; mais cette condition ne peut être réalisée.

Dans les cas où aucun des cercles n'est propre, on voit de même qu'on obtient seulement la condition d'involution $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{D} = 0$; prenons alors les cercles sous les formes $\mathcal{C} = [cc']$, $\mathcal{D} = [dd']$, avec

$$c \mid d = c \mid d' = d \mid c' = 0,$$
$$\mathcal{C}\mathcal{D} = -cc' \mid d'd, \qquad \mathcal{D}\mathcal{C} = -dd' \mid c'c,$$

donc la condition d'échange donne $c' \mid d' = 0$, condition d'axialité, ou $c \underset{p}{=} d$; dans ce dernier cas, les cercles sont cosphériques. L'examen des trois cas restants et des réciproques donne les conclusions suivantes :

Deux cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont échangeables aux conditions ci-dessous :

1° Systèmes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{D}$: un des cercles au moins est propre, l'autre n'est pas isotrope, et les deux cercles sont axiaux; 2° autres systèmes : les cercles ont un point commun; l'axialité n'est pas nécessaire, et ne peut exister pour deux cercles isotropes.

24. Les relations que nous avons établies permettent d'aborder la théorie des équations principale et caractéristique des torseurs.

Soit d'abord une homographie $\mathcal{L}$; les éléments a_i principaux ou latents, dont la position est conservée par $\mathcal{L}$, satisfont à une relation

$$a_i \mathcal{L} = \rho_i a_i = \rho_i a_i \mathfrak{U};$$

l'homographie $\mathcal{L} - \rho_i \mathfrak{U}$ ayant un déterminant nul, on obtient l'équation aux multiplicateurs principaux (racines latentes).

$$(75) \qquad \varphi(\rho) = (\rho\mathfrak{U} - \mathcal{L})^{\langle 5\rangle} = \Sigma(-1)^{5-\nu} I_\nu \rho^\nu = 0,$$

$$I_\nu = I_\nu(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} 5 \\ \nu \end{bmatrix} < \mathcal{L}^{\langle\nu\rangle} \mathfrak{U}^{\langle 5-\nu\rangle} >, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 5).$$

$\mathcal{L}$ satisfait toujours à l'équation *principale* (¹)

$$(76) \qquad \varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^5 - I_1 \mathcal{L}^4 + I_2 \mathcal{L}^3 - I_3 \mathcal{L}^2 + I_4 \mathcal{L} - I_5 \mathfrak{U} = 0.$$

qu'on peut d'ailleurs, dans le cas général, obtenir indépendamment des éléments principaux, par le développement du produit extérieur

$$[e_1 . e_1 \mathcal{L} . e_1 \mathcal{L}^2 . e_1 \mathcal{L}^3 . e_1 \mathcal{L}^4 . e_1 \mathcal{L}^5] = 0.$$

avec $e_2 = e_1 \mathcal{L}$, $e_3 = e_2 \mathcal{L} = e_1 \mathcal{L}^2, \ldots, e_6 = e_5 \mathcal{L} = e_1 \mathcal{L}^5$, et dont on peut inversement déduire l'équation $\varphi(\rho) = 0$.

Mais $\mathcal{L}$ peut aussi satisfaire à des équations de degré inférieur à cinq; nous appelons équation *caractéristique* ou *réduite* $\psi(\mathcal{L}) = 0$ l'équation de degré minimum $\mu \leqq 5$ à laquelle satisfait une homographie $\mathcal{L}$ particulière, le polynome ψ étant un diviseur de φ; des éléments *de positions particulières* sont aussi annulés par des polynomes $\chi(\mathcal{L})$ diviseurs de $\psi(\mathcal{L})$, donc de degré moindre. Nous appellerons aussi caractéristique l'équation numérique $\psi(\rho) = 0$.

25. Considérons maintenant un torseur $\mathcal{H}$; les invariants I_ν de degrés impairs, identiques à ceux calculés pour le torseur conjugué, sont nuls, d'où

$$(77) \qquad \varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^5 + I_2 \mathcal{H}^3 + I_4 \mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{H}^2 - \rho_1^2 \mathfrak{U})(\mathcal{H}^2 - \rho_2^2 \mathfrak{U}) = 0;$$

$\varphi(\rho) = 0$ a donc ses racines deux à deux opposées et un nombre

(¹) Contrairement à notre convention générale, les mêmes lettres φ, ψ, χ, Ψ seront employées, ici et dans la suite, comme symboles de fonctions soit numériques, soit géométriques.

impair de racines nulles ; $\mathcal{H}$ annule au moins une sphère. En outre,

$$(78)\qquad a_i^2 \uparrow \mathcal{H} = \rho_i a_i^2 = 0, \qquad 2\widehat{a_i a_j} \uparrow \mathcal{H} = (\rho_i + \rho_j) a_i \mid a_j = 0,$$

donc : aux multiplicateurs ρ_i différents de zéro correspondent des points ; à des multiplicateurs ρ_i et ρ_j non opposés, des éléments orthogonaux ; aux éléments latents non orthogonaux, ou non ponctuels, correspondent des multiplicateurs opposés, ou nuls.

Les conclusions : racines deux à deux opposées, au moins une racine nulle, s'appliquent à l'équation $\psi(\rho) = 0$, la dernière tenant au fait que toute sphère annulée par $\mathfrak{G}$ l'étant aussi par $\psi(\mathfrak{G})$, ce polynome doit être privé de terme en $\mathfrak{U}$. Les seuls types *possibles* pour l'équation caractéristique sont au nombre de neuf, soit

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{c} \rho^2 = 0, \qquad \rho^3 = 0, \qquad \rho(\rho^2 - \rho_i^2) = 0, \qquad \rho^4 = 0, \qquad \rho^2(\rho^2 + \rho_i^2) = 0, \\ \rho^5 = 0, \qquad \rho^3(\rho^2 - \rho_i^2) = 0, \\ \rho(\rho^2 - \rho_i^2)^2 = 0, \qquad \rho(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho^2 - \rho_2^2) = 0. \end{array}\right.$$

Les coefficients I_2, I_4 sont des invariants (G), seul le rapport $\frac{I_2^2}{I_4}$ ou son inverse est un invariant (γ) ; on pourra aussi distinguer le cas $I_2 = 0$.

26. Nous allons former l'équation principale $\varphi(\mathcal{H}) = 0$ et interpréter ses coefficients ; nous poserons pour cela

$$(80)\qquad \mathcal{H}^{\underline{2}} = \mathrm{H}, \qquad \mathcal{H}^{\cdot 2} = 2h^*, \qquad h^{*\underline{2}} = h^{\underline{2}} = \eta$$

et appliquerons l'équation (65) au torseur $\mathcal{H}$, d'où

$$(81)\qquad \begin{array}{c} \mathcal{H}' = \mathcal{H} \downarrow h^* = \mathrm{H}\,\mathcal{H} + \mathcal{H}^3 \qquad \{\mathcal{H}\mathcal{H}'\} = 0, \\ \mathcal{H} \downarrow \mathcal{H}' = 2\eta = \mathrm{H}^2 + \mathcal{H} \downarrow \mathcal{H}^3 \end{array}$$

$$(82)\qquad \mathrm{K} = \mathcal{H} \uparrow \mathcal{H}^3 = -\frac{1}{2}\mathcal{H} \uparrow \mathcal{H}^3 = -\frac{1}{2}\mathbf{I}_1 \mathcal{H}^4 = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^2 \uparrow \mathcal{H}^2,$$

$$(83)\qquad 2\eta = \mathrm{H}^2 + \mathrm{K}.$$

L'équation (65) appliquée à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ donne

$$(84)\qquad \begin{array}{c} \mathcal{H}'' = \mathcal{H}' \downarrow h^* = \mathcal{H} \downarrow \mathcal{H}' . \mathcal{H} + \mathcal{H}'\mathcal{H}^2, \\ \mathcal{H}'' = 2\eta\,\mathcal{H} + \mathrm{H}\,\mathcal{H}^3 + \mathcal{H}^5, \end{array}$$

mais h, sphère principale de $\mathcal{H}$, est aussi principale pour $\mathcal{H}^3$, $\mathcal{H}'$, etc., et les opérations $\mathcal{H} \downarrow h^*$, $\mathcal{H}' \downarrow h^*$ sont analogues à une dualité effectuée dans l'hyperfaisceau des sphères orthogonales à h; que h soit une sphère propre ou un point, on peut placer dans h^* un repère *orthogonal* à 4 unités, avec

$$\mathcal{H} = \Sigma H^{ij}[e_i e_j], \qquad h^* = \Sigma H^{ij} H^{kl}[e_1 e_2 e_3 e_4] = \lambda[e_1 e_2 e_3 e_4],$$

ijkl étant une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4,

$$\mathcal{H}' = \lambda \Sigma H^{ij}[e_i e_j]^2 [e_k e_l], \qquad \mathcal{H}'' = \lambda^2 \Sigma H^{ij}[e_i e_j]^2 [e_k e_l]^2 [e_i e_j],$$

donc finalement $\mathcal{H}'' = \eta_1 \mathcal{H}$, dans tous les cas; l'équation (84) devient

$$\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^5 + H\,\mathcal{H}^3 + \eta_1 \mathcal{H} = 0, \tag{85}$$

où l'on remarque que $H = I_2(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2} I_1 \mathcal{H}^2$; cette équation est bien l'équation principale pour $\mathcal{H}$ qui, dans le cas général, satisfait à une seule équation du cinquième degré; elle reste valable dans tous les cas, même si $\mathcal{H}$ est un cercle, $h = 0$.

Groupes à un paramètre d'opérations sphériques.

27. L'opération infinitésimale d'un groupe à un paramètre τ de transformations $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\tau)$, nécessairement directes pour comprendre $\mathcal{U} = \mathcal{G}^0 = \mathcal{G}(\tau_0)$, a pour symbole $\mathcal{H}$ défini par

$$e = e^0 \mathcal{G}, \qquad \delta e = e^0 \delta\mathcal{G} = e\,\mathcal{G}^{-1} \delta\mathcal{G},$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^{-1} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G}'. \tag{86}$$

L'équation de définition $\mathcal{G}\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{U}$ donne par dérivation

$$\mathcal{H} + \widetilde{\mathcal{H}} = 0,$$

donc $\mathcal{H}$ est un torseur; réciproquement tout torseur $\mathcal{H}$ engendre le groupe à un paramètre d'opérations sphériques

$$\mathcal{G}(\tau) = e^{\tau\mathcal{H}} = \mathcal{U} + \tau\mathcal{H} + \frac{\tau^2}{2!}\mathcal{H}^2 + \ldots + \frac{\tau^\alpha}{\alpha!}\mathcal{H}^\alpha + \ldots,$$

le paramètre τ étant choisi pour donner $\mathcal{G}(0) = \mathcal{U}$. Mais $\mathcal{H}$ satisfaisant à une équation caractéristique $\psi(\mathcal{H}) = 0$, et $\tau\mathcal{H}$ à $\tau^\mu\psi(\mathcal{H}) = 0$, on peut écrire

$$(87) \qquad \mathcal{G}(\tau) = e^{\tau\mathcal{H}} \quad [\mathrm{mod}\,\psi(\mathcal{H})],$$

soit un polynome en $\mathcal{H}$ de degré $\mu - 1 \leqq 4$; le tenseur $\lambda\mathcal{H}$ engendre le même groupe d'opérations que $\mathcal{H}$.

En indiquant par des accents les dérivées par rapport à τ, on forme l'équation différentielle linéaire, de degré minimum μ, déterminant $\mathcal{G}$ par intégration

$$(88) \qquad \begin{gathered} \mathcal{G}' = \mathcal{G}\mathcal{H}, \qquad \mathcal{G}'' = \mathcal{G}'\mathcal{H} = \mathcal{G}\mathcal{H}^2, \qquad \mathcal{G}''' = \mathcal{G}\mathcal{H}^3, \qquad \ldots, \\ \Psi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}\psi(\mathcal{H}). \end{gathered}$$

L'équation $\Psi(\mathcal{G}) = 0$ se déduit de $\psi(\mathcal{H}) = 0$ en remplaçant une puissance $\mathcal{H}^\alpha$ par $\mathcal{G}^{(\alpha)}$, dérivée d'ordre α, et $\mathcal{G}$ ne peut satisfaire à une équation différentielle de degré inférieur à μ, puisque pour $\mathcal{G}^0 = \mathfrak{U}$, on a $\Psi(\mathfrak{U}) = \psi(\mathcal{H})$. L'équation $\psi(\rho) = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle $\Psi(\mathcal{G}) = 0$.

28. Soit e un élément variable, transformé par les opérations $\mathcal{G}(\tau)$ du groupe de l'élément initial e^0; l'équation paramétrique d'une série d'éléments est

$$(89) \qquad e = e^0\mathcal{G}(\tau) = e^0 e^{\tau\mathcal{H}} \quad [\mathrm{mod}\,\psi(\mathcal{H})]$$

et l'équation différentielle de l'ensemble de ces séries est donnée par

$$(90) \qquad \begin{gathered} e' = e^0\mathcal{G}', \qquad e'' = e^0\mathcal{G}'', \qquad \ldots, \\ \Psi(e) = e^0\Psi(\mathcal{G}) = 0. \end{gathered}$$

Dans l'intégration des équations $\Psi(\mathcal{G}) = 0$, $\Psi(e) = 0$, on devra tenir compte des conditions initiales : $\mathcal{G}^0 = \mathfrak{U}$, $\mathcal{G}'^0 = \mathcal{H}$, $\mathcal{G}''^0 = \mathcal{H}^2$, ...; $e'^0 = e^0\mathcal{H}$, $e''^0 = e^0\mathcal{H}^2$, ..., etc.

Le degré $\mu \leqq 5$ de l'équation (90) est relatif à un élément initial e^0 arbitraire; des sous-ensembles de trajectoires issus d'éléments particuliers peuvent satisfaire à des équations de degré inférieur. Mais l'ensemble complet dépend linéairement de μ sphères constantes, introduites par intégration. Si le degré μ descend aux valeurs 4, 3, 2, toutes les séries sont comprises dans des variétés linéaires à 4, 3, 2 unités ; en particulier toutes les trajectoires de points *seraient alors* sphériques, circulaires, isotropes.

On peut rechercher de même les séries décrites par d'autres éléments : cercles, torseurs, cyclides, etc. ; ainsi, pour les torseurs $\mathcal{T}$, le symbole de la transformation infinitésimale serait $2 < \mathcal{U}\mathcal{H} >$.

29. L'équation caractéristique d'un cercle $\mathcal{C}$ est au plus du troisième degré, car nous avons obtenu la relation (73)

$$\mathcal{C}^3 + \mathcal{C}^2 . \mathcal{C} = 0$$

et les formules (49) et (51) donnent effectivement les équations du troisième degré

$$\mathcal{C}_1^3 + \mathcal{C}_1 = 0, \qquad \mathcal{C}_0^3 = 0, \tag{91}$$

mais pour un cercle isotrope $\mathcal{C}_{00}$, l'équation s'abaisse au deuxième degré, soit $\mathcal{C}_{00}^2 = 0$. L'intégration des équations $\mathcal{G}'' = 0$ et $e'' = 0$ donne alors

$$\mathcal{C}_{00}^{\tau} = \mathcal{G}(\tau) = \mathcal{U} + \tau\mathcal{C}_{00}, \qquad e = e^0\mathcal{C}_{00}^{\tau} = e^0 + \tau e^0\mathcal{C}_{00}; \tag{92}$$

les sphères e forment ici le faisceau linéaire appartenant au cercle $\mathcal{D} = [e^0(e^0\mathcal{C}_{00})]$, et l'on a

$$\mathcal{D}^2 = -e^{02}(e^0\mathcal{C}_{00})^2, \qquad \mathcal{D}\mathcal{C}_{00} = -(e^0\mathcal{C}_{00})^2. \qquad \{\mathcal{D}\mathcal{C}_{00}\} = 0. \tag{93}$$

Pour des points e^0, les trajectoires sont les droites isotropes s'appuyant sur $\mathcal{C}_{00}$ (à l'exclusion de $\mathcal{C}_{00}$ même), $\mathcal{D}$ étant du type $\mathcal{D}_{00}$; pour des sphères propres e^0, $\mathcal{D}$ est du type $\mathcal{D}_0$, un cercle-point $\mathcal{D}_0$ ayant en commun avec $\mathcal{C}_{00}$ le point $e^0\mathcal{C}_{00}$ (si cet élément n'est pas nul).

Remarquons que l'opérateur $\mathcal{C}_{00}^{\tau}$ rentre dans la catégorie des homographies *gauches*, de forme $\nu\mathcal{U} + \zeta\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ étant un torseur.

30. Pour les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_0$, on obtient de même par intégration

$$\mathcal{C}_1^{\tau} = \mathcal{U} + \sin\tau . \mathcal{C}_1 + (1 - \cos\tau)\mathcal{C}_1^2, \qquad e = e^0\mathcal{C}_1^{\tau}, \tag{94}$$

$$\mathcal{C}_0^{\tau} = \mathcal{U} + \tau\mathcal{C}_0 + \frac{\tau^2}{2}\mathcal{C}_0^2, \qquad e = e^0\mathcal{C}_0^{\tau}. \tag{95}$$

les séries décrites par e sont tracées dans les réseaux linéaires ou cercles duals $[e^0(e^0\mathcal{C})(e^0\mathcal{C}^2)]$ ou $[e^0(e^0\mathcal{C})(e^1\mathcal{C})]$ en posant $e^0\mathcal{C}=e^1$; or

$$[(e^0\mathcal{C})(e^1\mathcal{C})]=[e^0e^1]\vee\mathcal{C}^{<2>}=[e^0e^1]\vee\mathcal{C}.\mathcal{C}\qquad \text{d'après (68)},$$

$$[e^0e^1]\vee\mathcal{C}=-\frac{1}{2}(e^0.e^0\mathcal{C}-e^0\mathcal{C}.e^0)\wedge\mathcal{C}=-(e^0)^2\wedge\mathcal{C}^2=(e^0\mathcal{C})^2.$$

$$(96)\qquad [e^0(e^0\mathcal{C})(e^0\mathcal{C}^2)]=(e^0\mathcal{C})^2[e^0\mathcal{C}].$$

Les séries précédentes sont en général quadratiques $\left[\text{tang}\frac{\tau}{2}\right.$ étant pris pour variables dans $\left.(94)\right]$, et les sphères e enveloppent des cyclides de Dupin de cercles principaux $\mathcal{C}$ et $[e^0\mathcal{C}]$, les trajectoires des points étant réduites aux cercles $[e^0\mathcal{C}]$ axiaux à $\mathcal{C}$; à côté des sphères e^0 orthogonales à $\mathcal{C}$, qui sont conservées, les sphères qui passent par un foyer, c'est-à-dire satisfont à $(e^0\mathcal{C})^2=0$, engendrent des séries dégénérées faciles à étudier.

Une opération sphérique $\mathcal{G}$ du type $\mathcal{C}_1^\tau$ ou $\mathcal{C}_0^\tau$ peut être conçue, pour une valeur de τ, comme produit de deux inversions; en effet,

$$(97)\qquad (2s^2-\mathfrak{U})(2s'^2-\mathfrak{U})=\mathfrak{U}+2s\,|\,s'[ss']+2[ss']^2,\qquad s^2=s'^2=1$$

et cette expression s'identifie à (94) ou (95) en posant

$$[ss']=\sin\frac{\tau}{2}.\mathcal{C}_1,\qquad s\,|\,s'=\cos\frac{\tau}{2}\qquad\text{ou}\qquad [ss']=\frac{\tau}{2}\mathcal{C}_0,\qquad s\,|\,s'=1.$$

Les opérations $\mathcal{C}_1^\tau$ et $\mathcal{C}_0^\tau$, produits de deux inversions par rapport à des sphères sécantes sous l'angle $\frac{\tau}{2}$ (avec des orientations convenables), ou tangentes, sont dites *simples*; $\mathcal{C}_{00}^\tau$ n'a pas de propriété semblable.

L'opération $\mathcal{C}_0^\tau$ est une *élation*; pour $\mathcal{C}_1^\tau$, dans le cas d'un paramètre τ réel, on a affaire à une *rotation* (sphérique) proprement dite, et pour τ imaginaire, à une *homothétie* (sphérique). Dans ce dernier cas, on peut substituer les exponentielles aux fonctions circulaires en remplaçant $\mathcal{C}_1$ par le cercle $\pm i\mathcal{C}_1$, de norme -1.

31. Pour l'étude des équations caractéristiques des torseurs $\mathcal{H}$ généraux, nous utiliserons la décomposition de $\mathcal{H}$ en somme de deux cercles :

$$(98)\qquad \mathcal{H}=\mathcal{A}+\mathcal{B},\qquad \mathcal{H}-\mathcal{A}=\mathcal{B}.$$

donc $\mathfrak{A}$ devra satisfaire à la relation

$$(99)\qquad (\mathcal{H} - \mathfrak{A})^2 = 2(h^* - [\mathcal{H}\mathfrak{A}]) = 0.$$

Or $[\mathcal{H}\mathfrak{A}]_* \,|\, \mathfrak{A} = 0$ d'après (71), soit $h\mathfrak{A} = 0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{A}$ doit être orthogonal à la sphère principale du torseur; si $[\mathcal{H}\mathfrak{A}] \neq 0$, $\mathfrak{A}$, affecté d'un coefficient convenable, peut satisfaire à (99); $\mathcal{B}$ répond aux mêmes conditions que $\mathfrak{A}$.

Les calculs portant sur $\mathcal{H}$ sont très simplifiés si le torseur peut être somme de deux cercles axiaux $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors

$$\mathcal{H} = \mathcal{C} + \mathcal{C}', \qquad \mathcal{H}^2 = \mathcal{C}^2 + \mathcal{C}'^2 = -(C\mathcal{C} + C'\mathcal{C}'), \qquad C = \mathcal{C}^2, \qquad C' = \mathcal{C}'^2,$$
$$(100)\qquad C\mathcal{H} + \mathcal{H}^2 = (C - C')\mathcal{C}', \qquad C'\mathcal{H} + \mathcal{H}^2 = (C' - C)\mathcal{C},$$

donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ seront à rechercher dans les cercles du faisceau $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^2$. En gardant les formules et notations du n° **26**, mais écrivant $\overline{\mathcal{H}}$ au lieu de $\mathcal{H}'$, on voit que ce faisceau coïncide avec $\mathcal{H}, \overline{\mathcal{H}}$ (¹); dans $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{C}} + \overline{\mathcal{C}}'$, les cercles $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \,,\, h^*$ et $\overline{\mathcal{C}}' = \mathcal{C}' \,,\, h^*$ sont d'ailleurs respectivement les cercles axiaux à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Si le faisceau indiqué contient un cercle $\mathfrak{X}$, on aura

$$(101)\qquad \mathfrak{X} = \mathcal{H}^2 + \lambda\mathcal{H}, \qquad \mathcal{H}^{2\,2} + 2\lambda[\mathcal{H}\mathcal{H}^2] + \lambda^2 h^* = 0;$$

les sphères $[\mathcal{H}\mathcal{H}^2]$ et $\mathcal{H}^{2\,2}$ sont des multiples de h^*, soit $z h^*$ et ζh^*, et l'on calcule z et ζ en formant $\mathcal{H} \,,\, [\mathcal{H}\mathcal{H}^2]$ et $\mathcal{H} \,,\, \mathcal{H}^{2\,2}$, et tenant compte de l'équation principale (85),

$$z\mathcal{H} = -H\mathcal{H}^2 - (K - 2\eta)\mathcal{H}, \qquad \zeta\overline{\mathcal{H}} = 2(K - H^2 - \eta)\mathcal{H} + 2H\mathcal{H};$$

d'autre part, $\overline{\mathcal{H}} = H\mathcal{H} + \mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \,,\, h^* = [h\mathcal{H}]_*$ ne peut être nul pour un torseur général, et l'on obtient $z = -H$, $\zeta = 2\eta$,

$$(102)\qquad [\mathcal{H}\mathcal{H}^2] = -Hh^*, \qquad \mathcal{H}^{2\,2} = 2\eta h^*.$$

Finalement, puisque $h^* \neq 0$, λ est déterminé par

$$(103)\qquad \lambda^2 - H\lambda + \eta = 0.$$

(¹) *Cf.* à ce sujet A.-N. Whitehead (*loc. cit.*), p. 286. — J.-L. Coolidge (*loc. cit.*), p. 459.

dont les racines λ_1, λ_2 ou $\frac{H \pm R}{2}$, avec $R^2 = H^2 - 4\eta_1$, donnent en général deux cercles $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ distincts ou confondus. D'après (85), on a

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}' = (\mathcal{H}^3 + \lambda_1 \mathcal{H})(\mathcal{H}^3 + \lambda_2 \mathcal{H}) = \mathcal{H}^6 + H\mathcal{H}^4 + \eta_1 \mathcal{H}^2 = 0:$$

donc : *si les cercles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ sont distincts, ils sont axiaux; s'il n'y a qu'un cercle $\mathfrak{X}$, il est isotrope.*

Le carré d'une solution $\mathfrak{X}_i$ est

$$\mathfrak{X}_i^2 = R\mathcal{H}^4 + \lambda_j \mathcal{H}^2 \qquad (i, j = 1, 2).$$

d'où

$$\mathfrak{X}^2 = \lambda_2 R^2, \qquad \mathfrak{X}'^2 = \lambda_1 R^2.$$

32. On revient à la forme (98) de $\mathcal{H}$ et aux équations (100), en posant

$$\mathcal{C} = \xi_1 \mathfrak{X}, \qquad \mathcal{C}' = \xi_2 \mathfrak{X}', \qquad C = \lambda_2 R^2 \xi_1^2, \qquad C' = \lambda_1 R^2 \xi_2^2,$$

si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de forme $\xi_i(\mathcal{H}^3 + \lambda_i \mathcal{H})$, peuvent satisfaire à la condition (99); ceci a lieu simultanément pour

$$(104) \quad \xi_1(\lambda_1 - \lambda_2) = \xi_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 1, \qquad \pm \xi_i R = 1, \qquad C = \lambda_2, \qquad C' = \lambda_1.$$

Le cas $R = 0$ montre que le cercle isotrope $\mathfrak{X}$ ne peut avoir un cercle pour complément par rapport à $\mathcal{H}$; nous chercherons plus loin une forme canonique pour ce cas. Mais les équations (100) comportent aussi un cas d'indétermination $C = C'$ qu'il convient de reprendre. Dans le cas où le torseur $\mathcal{H}$ est somme de deux cercles axiaux de même norme C, cercles propres, par conséquent, d'après l'étude du n° **24**, le torseur $\mathcal{H}^3 + C\mathcal{H}$ est identiquement nul; il y a donc une valeur $\lambda = C$ annulant identiquement le torseur $\mathcal{H}^3 + \lambda\mathcal{H}$, et une seule puisque $\mathcal{H} \neq 0$; cette valeur satisfait encore à (103), donc

$$\lambda = C = \frac{H}{2}, \qquad R^2 = H^2 - 4\eta_1 = 0.$$

Cherchons en général s'il existe dans le faisceau $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^3$ un torseur $\mathcal{K} = \mathcal{H}^3 + \chi\mathcal{H}$ incident à $\mathcal{H}$, donc

$$|\mathcal{H}\mathcal{K}| = |\mathcal{H}(\mathcal{H}^3 + \chi\mathcal{H})| = 0, \qquad \chi = \frac{H}{2}.$$

Le torseur $\mathcal{K} = \mathcal{H}^3 + \frac{H}{2}\mathcal{H}$ se réduit à un cercle isotrope s'il est aussi incident à $\mathcal{H}^2$, d'où $R = 0$, mais disparaît identiquement dans le dernier cas envisagé, tandis que dans le cas où l'équation (103) a deux racines distinctes,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\mathfrak{X} + \mathfrak{X}') = \frac{\pm R}{2}(\mathcal{C} - \mathcal{C}').$$

33. Nous appellerons torseur paratactique, ou plus brièvement *parataxe*, à cause des relations d'un tel torseur avec la théorie des cercles paratactiques, un torseur $\mathcal{H}$ pour lequel $\mathcal{K}$ s'évanouit; l'équation caractéristique d'un parataxe est donc

$$(105) \qquad \mathcal{H}^2 - \frac{H}{2}\mathcal{H} = 0, \qquad H \neq 0, \quad \eta_1 = \frac{H^2}{4} \neq 0.$$

Le cas de deux racines distinctes à l'équation (103) donne les équations caractéristiques

$$(106) \quad \mathcal{H}^3 + H\mathcal{H}^2 + \eta_1\mathcal{H} = 0, \qquad H \neq 0, \; \eta_1 \neq 0, \; R \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad H = 0,$$

$$(107) \qquad \mathcal{H}^3 + H\mathcal{H}^2 = 0, \qquad H \neq 0, \qquad \eta_1 = 0,$$

tandis que dans le cas d'une racine double pour (103), et $\mathcal{K} \neq 0$, on a

$$(108) \qquad \mathcal{H}^3 - H\mathcal{H}^2 + \frac{H^2}{4}\mathcal{H} = 0, \qquad H \neq 0, \qquad R = 0,$$

l'équation caractéristique, dans ces trois cas, se confondant avec l'équation principale.

On obtient les équations précédentes en utilisant la forme canonique qui convient à chacun des cas; réciproquement, à chacun des types (105) à (108) de l'équation caractéristique $\psi(\rho) = 0$ correspond une forme remarquable, obtenue à partir des éléments latents, qui montre qu'alors le torseur est capable d'une des formes canoniques que nous allons rappeler; ainsi, tout parataxe a la forme $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$ avec $C = C'$, $\mathcal{C}\mathcal{C}' = 0$.

Dans le cas où l'équation (103) a une racine double, et $\mathcal{K} \neq 0$, montrons qu'on peut associer au cercle isotrope $\lambda\mathcal{K} = \mathcal{C}_{00}$ un parataxe $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{C}_{00} + \mathcal{L}$; il convient d'abord de montrer qu'il n'existe aucun torseur $\mathcal{H}$ avec $H = 0$, $\eta_1 = 0$; en effet, on aurait alors nécessairement $\mathcal{H} = \underset{P}{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_0}$, et le cercle propre $\mathfrak{A}_1$ et le cercle-point $\mathfrak{B}_0$ seraient en involution, d'où $H \neq 0$.

Revenant au cas envisagé, on aura

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} - \mathcal{C}_{00} = -\lambda\mathcal{H}^3 + \left(1 - \frac{\lambda H}{2}\right)\mathcal{H}, \qquad \mid \mathcal{C}_{00}\mathcal{H} \mid = 0,$$

$$\mathcal{L}^3 = \mathcal{H}^3 - 3\mathcal{H}^2\mathcal{C}_{00} = \left(1 + \frac{3\lambda H}{2}\right)\mathcal{H}^3 + \frac{3\lambda H^2}{4}\mathcal{H}.$$

On vérifie que $\mathcal{C}_{00} \mid \mathcal{H} = 0$, donc $\mathcal{L}^2 = L = H$; si $\mathcal{L}$ satisfait à l'équation (105), on aura $\lambda = -\frac{1}{H}$, d'où

$$(109) \qquad \mathcal{H} = \mathcal{L} - \frac{1}{H}\left(\mathcal{H}^3 + \frac{H}{2}\mathcal{H}\right), \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{H}\mathcal{H}^3 + \frac{3}{2}\mathcal{H},$$

et aussi

$$\mid \mathcal{L}\mathcal{H} \mid = 0, \qquad [\mathcal{L}\mathcal{H}] = 2h'. \qquad \mid \mathcal{L}\mathcal{C}_{00} \mid = 0. \qquad [\mathcal{L}\mathcal{C}_{00}] = 0.$$

34. *Des neuf types possibles pour l'équation caractéristique d'un cercle ou torseur, indiqués au n°* **25**, *six seulement existent, donc :* il n'y a pas d'équation caractéristique du quatrième degré, ni de la forme $\rho^5 = 0$; par contre, le troisième type $\rho(\rho^2 - \rho_1^2) = 0$ peut convenir soit à un cercle, soit à un paralaxe.

L'impossibilité de l'équation $\rho^5 = 0$ résulte d'une remarque précédente : il n'existe pas de torseur (non circulaire) dont tous les invariants sont nuls. Quant à une équation du quatrième degré, elle entraînerait, pour toutes les positions d'une sphère e déduite d'une sphère initiale e^0 par les opérations d'un groupe à un paramètre, l'existence d'une sphère s orthogonale : une telle sphère s, orthogonale à e^0 arbitraire, devrait être conservée par le groupe, donc annulée par le torseur $\mathcal{H}$, ce qui est impossible.

Aux équations caractéristiques (105) à (108), nous attacherons les formes réduites suivantes :

$$(105)' \qquad \mathcal{H}_2^3 + \mathcal{H}_2 = 0. \quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}'_1, \quad H = 2, \quad \eta = 1,$$

$$(106)' \quad \mathcal{H}_{11}^5 + H\mathcal{H}_{11}^3 + \mathcal{H}_{11} = 0, \quad \mathcal{H}_{11} = \lambda\mathcal{C}_1 + \lambda'\mathcal{C}'_1. \quad H = \lambda^2 + \lambda'^2, \quad \eta = \lambda^2\lambda'^2 = 1,$$

$$(107)' \qquad \mathcal{H}_{01}^5 + \mathcal{H}_{01}^3 = 0. \quad \mathcal{H}_{01} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1, \quad H = 1, \quad \eta = 0,$$

$$(108)' \quad \mathcal{H}_{02}^5 + 2\mathcal{H}_{02}^3 + \mathcal{H}_{02} = 0, \quad \mathcal{H}_{02} = \mathcal{C}_{00} + \mathcal{L}_2, \quad H = L = 2, \quad \eta = 1.$$

Opérations sphériques générales et paratactiques.

35. Pour l'étude des groupes à un paramètre d'opérations sphériques correspondant aux différents torseurs $\mathcal{H}$, commençons par le type (106)$'$. En introduisant les deux angles $\theta = \lambda\tau$, $\theta' = \lambda'\tau$, $\lambda\lambda' = 1$, on obtient par intégration,

$$(110) \qquad \mathcal{H}_{11}^{(\theta,\theta')} = \mathcal{G}^{(\tau)} = \mathcal{C}_1^{(\theta)}\mathcal{C}_1'^{(\theta')} = \mathcal{C}_1^{(\theta)} + \mathcal{C}_1'^{(\theta')} - \mathcal{U}, \qquad \mathcal{C}_1\mathcal{C}_1' = 0.$$

$\mathcal{C}_1^{(\theta)}$ et $\mathcal{C}_1^{(\theta')}$ étant donnés par la formule (94). Or, les formules (110) s'appliquent encore au cas du parataxe $\mathcal{H}_2$ de (105)$'$ avec $\theta = \theta' = \tau$, donc

$$(111) \qquad \mathcal{H}_2^{(\tau)} = \mathcal{U} + \sin\tau\,\mathcal{H}_2 + (1 - \cos\tau)\mathcal{H}_2^2,$$

forme entièrement analogue à (94).

Pour un torseur du type (107)$'$, les formules (110) sont encore valables sous la forme

$$(112) \qquad \mathcal{H}_{01}^{(\tau)} = \mathcal{C}_0^{(\tau)}\mathcal{C}_1^{(\tau)} = \mathcal{C}_0^{(\tau)} + \mathcal{C}_1^{(\tau)} - \mathcal{U}, \qquad \mathcal{C}_0\mathcal{C}_1 = 0.$$

$\mathcal{C}_0^{(\tau)}$ étant donné par (95).

Enfin, pour un torseur du type (108)$'$, on a encore

$$(113) \qquad \mathcal{H}_{002}^{(\tau)} = \mathcal{C}_{00}^{(\tau)}\mathcal{L}_2^{(\tau)} = \mathcal{L}_2^{(\tau)} + \tau\mathcal{C}_{00}(\sin\tau.\mathcal{L}_2 + \cos\tau.\mathcal{U}).$$

$\mathcal{C}_{00}^{(\tau)}$ étant donné par (92), $\mathcal{L}_0^{(\tau)}$ par (111); ceci à cause des relations

$$(114) \qquad \{\mathcal{C}_{00}\mathcal{L}_2\} = 0, \qquad \mathcal{C}_{00}(\mathcal{U} + \mathcal{L}_2^2) = 0.$$

Considérons le produit de deux transpositions de cercles $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$,

$$\mathcal{A}_1^{(\pi)} = \mathcal{U} + 2\mathcal{A}_1^2, \qquad \mathcal{B}_1^{(\pi)} = \mathcal{U} + 2\mathcal{B}_1^2,$$

$$(115) \qquad \mathcal{A}_1^{(\pi)}\mathcal{B}_1^{(\pi)} = \mathcal{U} + \{\mathcal{A}_1^2, \mathcal{B}_1^2\} + 2\mathcal{A}_1^2 + 2\mathcal{B}_1^2 + \mathcal{A}_1^2\mathcal{B}_1^2 + \mathcal{B}_1^2\mathcal{A}_1^2.$$

en séparant le terme $\mathcal{U}$ et la partie alternée $\{\mathcal{A}_1^2, \mathcal{B}_1^2\}$; en posant

$$\mathcal{A}_1 = [aa'], \qquad \mathcal{B}_1 = [bb'], \qquad \sin\omega.\mathcal{C}_1 = [ab], \qquad \sin\omega'.\mathcal{C}_1' = [a'b'].$$

$$a\,|\,b' = a'\,|\,b = 0, \qquad a\,|\,b = \cos\omega, \qquad a'\,|\,b' = \cos\omega', \qquad \theta = 2\omega, \qquad \theta' = 2\omega',$$

$$\mathcal{A}_1^{(\pi)}\mathcal{B}_1^{(\pi)} = \mathcal{U} + \sin\theta.\mathcal{C}_1 + \sin\theta'.\mathcal{C}_1' + (1 - \cos\theta)\mathcal{C}_1^2 + (1 - \cos\theta')\mathcal{C}_1'^2,$$

on retrouve la forme (110); l'opération générale $\mathcal{H}_{11}^{(\theta,\theta')}$ est donc le produit de deux transpositions autour de cercles dont $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'_1$ sont les cercles perpendiculaires communs, ω et ω' les angles élémentaires; toute opération sphérique conservant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'_1$ change $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$ en un couple de cercles analogue. La décomposition précédente s'applique encore à l'opération paractactique, avec l'indétermination des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_1$ perpendiculaires communs aux cycles paratactiques $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$. Des modifications faciles, que nous n'étudierons pas ici, dans le cas de configurations particulières de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$, permettent d'obtenir les autres opérations sphériques ainsi décomposables.

36. Nous revenons à l'opération paratactique (111) à cause des importantes propriétés géométriques qui s'y rattachent; nous remplacerons ici $\mathcal{H}_2$ par $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}$, donc

$$\mathfrak{T}^{(\tau)} = \mathfrak{U} + \sin\tau . \mathfrak{T} + (1 - \cos\tau)\mathfrak{T}^2 \tag{111'}$$

est l'opération paratactique d'angle τ, le parataxe $\mathfrak{T}$ satisfaisant à

$$\mathfrak{T}^3 + \mathfrak{T} = 0, \qquad \mathfrak{T}_2 = \mathrm{P} = 2, \qquad \mathfrak{T}^{2|} = 2p^{*}, \qquad p^2 = \varpi = 1. \tag{116}$$

En utilisant pour $\mathfrak{T}$ une décomposition en deux cercles axiaux, on trouve aussitôt

$$\mathfrak{T}^2 = -\mathfrak{U} + p^2, \qquad \mathfrak{T}^{(\pi)} = \mathfrak{U} + 2\mathfrak{T}^2 = 2p^2 - \mathfrak{U}, \tag{117}$$

donc l'opération involutive, d'angle π, est l'inversion par rapport à la sphère principale p (sphère imaginaire si les deux cercles axiaux sont réels).

Une opération $\mathfrak{T}^{(\tau)}$ continue fait correspondre à une sphère e^0 la série

$$e = e^0 + \sin\tau . e^0\mathfrak{T} + (1 - \cos\tau)e^0\mathfrak{T}^2 \tag{118}$$

du réseau linéaire ou cercle dual

$$[e^0(e^0\mathfrak{T})(e^0\mathfrak{T}^2)] = (e^0|p)[e^0(e^0\mathfrak{T})p].$$

Tandis que p est conservé par $\mathfrak{T}^{(\tau)}$, il y a dégénérescence en un faisceau linéaire pour une sphère orthogonale à p, en une trajectoire isotrope pour un point de p. Supposons désormais $e_0|p \neq 0$, et posons

$$e^0 = n + (e^0|p)p, \qquad \mathfrak{X}^{*} = [e^0(e^0\mathfrak{T})p] = [n(n\mathfrak{T})p], \qquad \mathfrak{X}' = [n(n\mathfrak{T})]. \tag{119}$$

On a alors, d'après (57) et (65),

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' \downarrow p^* = \frac{1}{2}\mathfrak{X}' \downarrow \mathfrak{T}^{[2]} = \mathfrak{X}' \downarrow \mathfrak{T}.\mathfrak{T} + \mathfrak{T}\mathfrak{X}'\mathfrak{T},$$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{X}'\mathfrak{T} = -[(n\mathfrak{T})(n\mathfrak{T}^2)] = [(n\mathfrak{T})n] - (n \mid p)[(n\mathfrak{T})p] = -\mathfrak{X}',$$

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' \downarrow \mathfrak{T}.\mathfrak{T} - \mathfrak{X}'. \tag{120}$$

Les cercles $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$, orthogonaux à p, sont axiaux, et il s'ensuit

$$\mathfrak{X} \downarrow \mathfrak{T} = \mathfrak{X}' \downarrow \mathfrak{T}, \qquad \mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}'^2 = (\mathfrak{X} \downarrow \mathfrak{T})^2.$$

Nous avons réalisé la décomposition du parataxe $\mathfrak{T}$ (à un facteur près), en somme de deux cercles axiaux, l'un d'eux étant une trajectoire issue d'un point arbitraire, par exemple. Pour continuer l'étude de ces cercles trajectoires, qui sont des cercles de la congruence *paratactique* définie par $\mathfrak{T}$, on peut partir d'une première décomposition de $\mathfrak{T}$,

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 = [aa'], \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 = [bb'],$$

les sphères a, a', b, b' étant unitaires et orthogonales. Avec

$$e^0 = n + \gamma p, \qquad n = \alpha a + \alpha' a' + \beta b + \beta' b', \tag{121}$$

en introduisant les parataxes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ et les coordonnées T, X, Y, Z,

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{T} = [aa' + bb'], & \mathfrak{Q} = [aa' - bb'], \\ \mathfrak{R} = [ab' - a'b], & \mathfrak{S} = [ab + a'b'], \end{array}\right. \tag{122}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{T} = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2, & \mathrm{X} = -\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2, \\ \mathrm{Y} = -2(\alpha\beta + \alpha'\beta'), & \mathrm{Z} = 2(\alpha\beta' - \alpha'\beta), \end{array}\right. \tag{123}$$

on obtient, d'après (120),

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X} = \frac{1}{2}(\mathrm{T}\mathfrak{T} + \mathrm{X}\mathfrak{Q} + \mathrm{Y}\mathfrak{R} + \mathrm{Z}\mathfrak{S}), \\ \mathfrak{X}^{[2]} = -\frac{1}{2}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - \mathrm{T}^2)p^* = 0, \end{array}\right. \tag{124}$$

et pour un cercle $\mathfrak{X}_1$ unitaire,

$$n^2 = \mathrm{T}^2 = 1, \qquad \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - 1 = 0. \tag{124'}$$

37. Les parataxes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{S}$ satisfont aux relations

$$\mathfrak{Q}^{[2]} = \mathcal{R}^{[2]} = \mathfrak{S}^{[2]} = -\mathfrak{P}^{[2]}, \qquad [\mathfrak{P}\mathfrak{Q}] = \ldots = [\mathfrak{Q}\mathcal{R}] = \ldots = 0, \tag{125}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{Q}^2 = \mathcal{R}^2 = \mathfrak{S}^2 = \mathfrak{P}^2 = \mathfrak{Q}\mathcal{R}\mathfrak{S}, \qquad \mathfrak{Q}\mathcal{R} = -\mathcal{R}\mathfrak{Q} = \mathfrak{S}, \qquad \ldots \\ \qquad\qquad \{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\} = \{\mathfrak{P}\mathcal{R}\} = \{\mathfrak{P}\mathfrak{S}\} = 0, \end{array}\right. \tag{126}$$

$\mathfrak{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{S}$ sont dits *de même espèce, et d'espèce contraire à* $\mathfrak{P}$ avec qui ils sont permutables; nous dirons aussi, à cause des relations $(126)_2$, que $\mathfrak{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{S}$ sont *transmutables* entre eux.

Les formules (124) ou (124)' constituent la base analytique de la représentation sphérique des cercles de la congruence paratactique; l'analogie des formules (126) avec celles des quaternions laisse prévoir les propriétés de la représentation, faciles à démontrer par cette voie; il sera parfois préférable d'introduire les parataxes moitiés des précédents, donnant

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{P}_1 + \mathrm{X}\,\mathfrak{Q}_1 + \mathrm{Y}\,\mathcal{R}_1 + \mathrm{Z}\,\mathfrak{S}_1. \qquad \{\mathfrak{Q}_1\mathcal{R}_1\} = \mathfrak{S}_1, \qquad \ldots.$$

Soit un second cycle trajectoire $\mathfrak{Y}_1$, de coordonnées absolues X', Y', Z'; on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}_1 \downarrow \mathfrak{Y}_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{XX}' + \mathrm{YY}' + \mathrm{ZZ}') = \cos^2\omega, \\ \qquad\qquad \mathrm{XX}' + \mathrm{YY}' + \mathrm{ZZ}' = \cos 2\omega, \end{array}\right. \tag{127}$$

et l'on arrive à l'expression suivante du parataxe en fonction de $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$,

$$\mathfrak{P} = 2\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_1 + \frac{1}{2\sin^2\omega}\{(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{Y}_1)\{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1\}\}. \tag{128}$$

Si la formule (124) permet la représentation sphérique des cercles $\mathfrak{X}$ de la congruence, permutables à $\mathfrak{P}$, elle fournit de même une représentation *spatiale* des torseurs $\mathfrak{Z}$ composés linéairement avec $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire avec les cercles précédents, donc aussi permutables à $\mathfrak{P}$; les parataxes en $\mathfrak{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{S}$ sont représentés par les points à l'infini, ou les vecteurs (non isotropes). En outre, les formules (123) montrent que les coordonnées homogènes X, Y, Z, T sont des coordonnées *cyclidiques*, coordonnées qui, d'après (118) et (119), sont les mêmes pour tous les points d'un cercle $\mathfrak{X}$, ou les sphères orthogonales, sauf la sphère principale p.

38. On prolonge la représentation d'après les formules

$$(129) \qquad \mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\mathfrak{T}^2 + X\mathfrak{T}\mathfrak{Q} + Y\mathfrak{T}\mathfrak{R} + Z\mathfrak{T}\mathfrak{S})$$

et de même,

$$(130) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_1^{\pi} = \frac{1}{2}(\mathfrak{T}^{\pi} + \mathfrak{U} + 2X\mathfrak{T}\mathfrak{Q} + 2Y\mathfrak{T}\mathfrak{R} + 2Z\mathfrak{T}\mathfrak{S}). \\ \mathfrak{X}_1^{\tau} = \frac{1}{2}[\mathfrak{T}^{\tau} + \mathfrak{U} + X(\lambda\mathfrak{Q} + \mu\mathfrak{T}\mathfrak{Q}) + \text{cycl.}] \\ \qquad (\lambda = \sin\tau,\ \mu = 1 - \cos\tau). \end{cases}$$

Par suite, les transformées d'une sphère s par les opérations $\mathfrak{X}_1^{\tau}$ d'un même angle τ autour des cercles $\mathfrak{X}_1$ de la congruence sont orthogonales à une même sphère, à savoir sous forme duale

$$|s(\mathfrak{T}^{\tau} + \mathfrak{U}).s(\lambda\mathfrak{Q} + \mu\mathfrak{T}\mathfrak{Q}).s(\lambda\mathfrak{R} + \mu\mathfrak{T}\mathfrak{R}).s(\lambda\mathfrak{S} + \mu\mathfrak{T}\mathfrak{S})|.$$

Considérons d'abord les opérations involutives $\tau = \pi$; on obtient alors la sphère $(s|p)[p.s\mathfrak{T}\mathfrak{Q}.s\mathfrak{T}\mathfrak{R}.s\mathfrak{T}\mathfrak{S}]$, et en supposant $s|p \neq 0$, on reconnaît la forme duale de $s' = s\mathfrak{T}$, sphère orthogonale à p. En effet,

$$s\mathfrak{T}p = 0, \qquad (s\mathfrak{T})|(s\mathfrak{T}\mathfrak{Q}) = s\mathfrak{T}^2\mathfrak{Q}s = -s\mathfrak{Q}s = 0, \qquad \ldots.$$

De même, dans le cas général, en prenant la sphère transformée sous la forme

$$\bar{s} = \xi s + \eta s\mathfrak{T} + \zeta p,$$

on obtient sans peine

$$(131) \qquad \bar{s} = s|p\left(\cos\frac{\tau}{2}\cdot s + \sin\frac{\tau}{2}\cdot s\mathfrak{T}\right) - \cos\frac{\tau}{2}\cdot s^2 p,$$

ce qui, pour un point, $s^2 = 0$, correspond à un résultat de M. Hadamard.

39. A côté de la décomposition d'un parataxe $\mathfrak{T}$ en somme de deux cercles axiaux, une autre décomposition est de grande importance : c'est la décomposition du parataxe en somme de deux droites isotropes sans point commun.

Soient, en effet, deux cercles isotropes

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{00} = [mm'], \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{00} = [nn'],$$

d'où

$$\mathcal{X} = \mathcal{M} + \mathcal{N}, \qquad \mathcal{X}^2 = \mathcal{M}\mathcal{N} + \mathcal{N}\mathcal{M}, \qquad \mathrm{H} = \mathcal{X}^2 = 2\mathcal{M} \mid \mathcal{N},$$

$$\mathcal{X}^3 = \mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{M} + \mathcal{N}\mathcal{M}\mathcal{N} = -(\mathcal{M} \mid \mathcal{N}).\mathcal{X} = -\frac{\mathrm{H}}{2}\mathcal{X},$$

en tenant compte de (65); nous avons donc obtenu l'équation caractéristique (105) d'un parataxe, et pour $\mathcal{M} \mid \mathcal{N} = 1$, on aura la forme réduite (105)'.

On passe facilement d'une des décompositions à l'autre, et cela éclaire le degré d'arbitraire de ces décompositions; on peut, en effet, faire glisser m et m' d'une part, n et n' d'autre part sur leurs supports isotropes, tout en conservant les produits extérieurs $[mm']$ et $[nn']$; par contre, le choix de m et m' fixera, à un facteur près, celui de n et n' si l'on s'impose les conditions

$$m \mid n' = m' \mid n = 0,$$

c'est-à-dire si l'on appuie sur les droites isotropes $[mm']$ et $[nn']$ les droites isotropes sécantes $[mn']$ et $[m'n]$ de la même sphère $[mm'nn']$. On passera, par l'identité algébrique

$$2[mm' - nn'] = [(m + n')(m' - n) + (m - n')(m' + n)]$$

avec

$$f =_p m + n', \qquad \bar{f} =_p m' - n, \qquad g =_p m - n', \qquad \bar{g} =_p m' + n,$$

$$f \mid g = \bar{f} \mid \bar{g} = 0, \qquad f \mid \bar{g} = \bar{f} \mid g = m \mid m' + n \mid n' = 0,$$

à un système de deux cercles axiaux $[f\bar{f}]$ et $[g\bar{g}]$ définis par leurs foyers. Grâce au jeu des coefficients, on retrouve ainsi simultanément ∞^2 décompositions d'un parataxe soit en cercles axiaux, soit en cercles isotropes.

40. Désignons par $\mathcal{Q}$ le parataxe précédent, et considérons aussi la différence des cercles isotropes qui sera de même un parataxe $\mathcal{R}$; on aura aussi

$$|\mathcal{M}\mathcal{N}| = \frac{1}{4}|(\mathcal{Q} + \mathcal{R})(\mathcal{Q} - \mathcal{R})| = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}\mathcal{R} =_p \mathcal{S},$$

donc le système des parataxes de même sphère principale et de même espèce du n° **36**, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ est fourni par la somme, la différence et l'accolade de deux cercles isotropes. Il en résulte d'intéressantes conséquences pour la composition des opérations sphériques.

Considérons d'abord le cas de deux cercles isotropes cosphériques

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{00} = [mn], \qquad \mathcal{J} = \mathcal{J}_{00} = [mp];$$

la somme ou la différence $\mathcal{I} \pm \mathcal{J}$ est ici un cercle-point, tandis que $\{\mathcal{I}\mathcal{J}\} = 0$.

Soit alors le produit de deux opérations isotropes à cercles cosphériques

$$\mathcal{I}^{\sigma}\mathcal{J}^{\tau} = (\mathcal{U} + \sigma\mathcal{I})(\mathcal{U} + \tau\mathcal{J}) = \mathcal{U} + \sigma\mathcal{I} + \tau\mathcal{J} + \frac{\sigma\tau}{2}(\mathcal{I}\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{I})$$

La partie alternée $\sigma\mathcal{I} + \tau\mathcal{J} = \rho\mathcal{C}_0$ est un cercle-point, d'où

$$(132) \qquad \mathcal{I}^{\sigma}\mathcal{J}^{\tau} = \mathcal{U} + \rho\mathcal{C}_0 + \frac{\rho^2}{2}\mathcal{C}_0^2 = \mathcal{C}_0^{\rho}.$$

Le produit de deux opérations isotropes sécantes est une élation.

Revenons à deux opérations isotropes à cercles $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ non cosphériques

$$\mathcal{M}^{\sigma}\mathcal{N}^{\tau} = \mathcal{U} + \sigma\mathcal{M} + \tau\mathcal{N} + \frac{\sigma\tau}{2}\{\mathcal{M}\mathcal{N}\} + \frac{\sigma\tau}{2}(\mathcal{M}\mathcal{N} + \mathcal{N}\mathcal{M}).$$

La partie alternée est ici un parataxe qui dépend linéairement de $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$; posons

$$\sigma\mathcal{M} + \tau\mathcal{N} + \frac{\sigma\tau}{2}\{\mathcal{M}\mathcal{N}\} = \sin\theta . \mathcal{H}_2.$$

$$(133) \qquad \mathcal{M}^{\sigma}\mathcal{N}^{\tau} = \mathcal{U} + \sin\theta . \mathcal{H}_2 + (1 - \cos\theta)\mathcal{H}_2^2 = \mathcal{H}_2^{\theta}.$$

Le produit de deux opérations isotropes non sécantes est une opération paratactique.

On sait d'ailleurs, depuis les travaux de M. Bloch, que la composition des opérations paratactiques engendre les opérations sphériques générales, tandis que nous avons décomposé [formule (113)] l'opération $\mathcal{H}_{02}^{\sigma\tau}$ en produit d'une opération isotrope et d'une opération paratactique. Il résulte des énoncés précédents qu'il est possible et sans doute avantageux de baser la théorie des opérations sphériques sur la composition des opérations isotropes; comme nous l'avons établi au n° **29**, ces opérations transforment chaque point par glissement isotrope, chaque sphère par élation.

D'autre part, les cercles et torseurs s'expriment linéairement au moyen de cercles isotropes, tandis que sous forme duale l'on obtient les sphères comme produits extérieurs de tels cercles. On pourrait donc aussi construire toute la géométrie sphérique, objets comme opérateurs, à partir des seuls cercles isotropes; ce nouveau point de vue serait sans doute intéressant.

NOTE (ajoutée à la correction des épreuves). — Depuis la rédaction de ce Mémoire (février 1930). de nouveaux résultats relatifs à la géométrie des sphères, des cycles et de la parataxie, ont été publiés. Citons :

B. GAMBIER, *Comptes rendus*. t. **190**, 1930, p. 157 et 564; t. **191**, 1930, p. 1044; *Journal de Math.*, 9e série. t. **9**, 1930, p. 179-199; *Recueil math. de Moscou*, t. **36**, 1929, p. 189-201 : *Bull. des Sciences math.*, 2e série. t. **55**, p. 75-96.

A. LABROUSSE. *Journ. de Math.*, 9e série, t. **10**, 1931, p. 307-334.

P. ROBERT, *Journal de Math.*, 9e série, t. **9**, 1930, p. 201-206; *l'Enseignement scientifique*, t. **5**, 1932. p. 140-144 et 177-181.

P. DELENS. *Comptes rendus*, t. **190**, 1930, p. 1043; t. **191**, 1930, p. 191, 640 et 816; *l'Enseignement scientifique*, t. **4**, 1930, p. 65-78; t. **4**, 1931, p. 196-200; t. **5**, 1931, p. 72-74.

M. Robert poursuit par voie synthétique ses recherches sur la nouvelle géométrie *cyclique* : M. Hadamard nous ayant signalé l'intérêt de cette géométrie, nous en avons posé les bases analytiques.