JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Conditions pour la validité des théorèmes relatifs à la courbure des lignes tracées sur une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 131-141.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__131_0>

Conditions pour la validité des théorèmes relatifs à la courbure des lignes tracées sur une surface;

PAR GEORGES **BOULIGAND**.

---

1. Les lois régissant la courbure des lignes tracées sur une surface sont établies d'ordinaire en partant de l'équation qui représente cette surface aux environs d'un de ses points. Le problème geométrique est traité comme une application de l'analyse, ce qui masque la causalité : les notations vectorielles donnent à la question un caractère intrinsèque, mais sans éliminer les hypothèses de commodité, concernant la dérivabilité de certaines fonctions. Nous nous proposons ici de traiter la question directement, en évitant toute supposition accessoire [1].

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, considérons un continu dont le paratingent est partout réduit à un plan unique (dont la loi de répartition sera nécessairement continue, en vertu de la semi-continuité supérieure d'inclusion du paratingent); nous dirons que ce continu est une *variété proprement superficielle*, si les environs de chacun de ses points, projetés sur le plan paratingent en ce point,

---

[1] J'ai exposé les principes directeurs communs à toutes les recherches de ce genre au début de mon travail *sur quelques points de méthodologie géométrique* (*Revue générale des Sciences*, 31 janvier, 30 juin, 15 novembre 1930). Ces principes ont inspiré les Thèses de M. Georges DURAND, *Sur une généralisation des surfaces convexes* (4e fasc., année 1931 du présent Journal) et de M. Gaston RABATÉ, *Sur les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe* (*Annales de Toulouse*, 1931).

recouvrent les environs du même point dans ce plan. Les surfaces obtenues de la sorte possèdent un plan tangent continu (celui du paratingent) et admettant autour de chaque point une représentation

$$z = f(x, y),$$

la fonction f ayant des dérivées premières continues par rapport à l'ensemble (x, y) ([1]).

2. Pour achever l'énoncé de nos hypothèses, nous allons définir le *contingent de courbure normale*. En un point A de la surface, menons la normale AZ, et considérons la demi-circonférence de diamètre AP porté par AZ, astreinte à passer par un point M de la surface distinct de A. Soit C_ε l'ensemble des demi-circonférences de cette famille (F) pour les points M de la surface distants de AZ d'au plus ε. A chaque suite $\{\varepsilon_n\}$ décroissante évanescente, correspond une suite $\{C_{\varepsilon_n}\}$ telle que

$$C_{\varepsilon_1} \supset C_{\varepsilon_2} \supset \ldots \supset C_{\varepsilon_{n-1}} \supset C_{\varepsilon_n} \supset \ldots$$

Définissons encore UNE *distance* pour deux demi-circonférences quelconques de la famille (F). Devant *écarter l'annulation éventuelle* du diamètre, nous ferons une inversion de pôle A et de puissance 2; chaque demi-circonférence se transforme en une demi-droite *à distance finie* perpendiculaire à AZ, qui sera repérée par sa trace sur le cylindre circulaire de rayon 1 et d'axe AZ. Après quoi, chaque élément de (F) est figuré par un point du cylindre et il est naturel de définir la distance de deux éléments de (F) par la formule

$$d^2 = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)^2 + \theta^2,$$

R′, R″ désignant leurs rayons et θ l'angle géométrique de leurs demi-plans.

A quelles conditions une demi-circonférence γ de (F) appartient-elle au contingent de courbure normale, au point A de notre surface ?

([1]) Pour la définition et la semi-continuité supérieure d'inclusion du paratingent, aussi bien que pour l'application de cette notion à la sélection de classes étendues de surfaces, voir le Chapitre XI de mon Ouvrage *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* (Paris, Vuibert, 1932).

Soit d_n la borne inférieure des distances de γ aux demi-circonférences de C_{ε_n}. La suite $\{d_n\}$, non décroissante, ne peut tendre vers zéro que si tous ses termes sont nuls : dans ce cas et dans ce cas seulement, γ appartient au contingent annoncé. Le choix de la suite $\{\varepsilon_n\}$ est sans influence (pourvu qu'elle soit décroissante évanescente) : et en effet, ce résultat est évident pour le produit infini des fermetures

$$\overline{C}_{\varepsilon_1}, \quad \overline{C}_{\varepsilon_2}, \quad \ldots, \quad \overline{C}_{\varepsilon_n}, \quad \ldots,$$

identique au contingent étudié. Cela montre aussi que ce contingent est fermé. Nous faisons l'hypothèse que *tous les rayons y sont au moins égaux à une longueur* R_0 *préalablement fixée.*

Ajoutons que le contingent considéré joue le rôle d'ensemble d'accumulation et d'ensemble limite pour l'une de nos suites $\{C_{\varepsilon_n}\}$ au sens de Janiszewski (Thèse, Paris, 1911). Sur le cylindre circulaire de rayon 1, d'axe AZ, chaque C_{ε_n} est figuré par un ensemble ponctuel borné et bien enchaîné. Les $\overline{C}_{\varepsilon_n}$ sont représentés sur ce cylindre par des continus bornés emboîtés K_n dont le produit infini est encore un continu K.

Le contingent de courbure normal est donc, relativement aux éléments de (F), et moyennant l'hypothèse $R \geqq R_0$, un continu. Même conclusion pour la partie de ce contingent non extérieure à un dièdre d'arête AZ.

3. Ajoutons encore cette hypothèse : *chaque demi-plan issu de* AZ *contient un demi-cercle* γ *et un seul du contingent de courbure normale.* Lorsque M tend vers A sur le demi-arc section de la surface par notre demi-plan, le demi-cercle γ_M de la famille (F) qui passe en M tend vers γ. Voici un lemme important :

Dans l'ensemble des demi-plans passant par AZ, *la dernière hypothèse formulée implique la convergence uniforme de* γ_M *vers* γ.

Avant d'établir cette proposition, il est commode de l'interpréter au moyen de la figuration sur le cylindre d'axe AZ et de rayon 1. L'hypothèse signifie que le continu K possède un seul point sur chaque génératrice du cylindre, point dont la cote ζ sera une fonction continue $c(\omega)$ dont le produit par la cote du centre du demi-cercle de notre contingent, dans le demi-plan considéré, est l'unité. Par l'hypothèse, cette courbe K, définie sur le cylindre par une équation

$$\zeta = c(\omega)$$

est l'ensemble d'accumulation des continus emboités K_n. Notre lemme signifie que la présence, sur chaque génératrice du cylindre, d'un point unique de l'ensemble d'accumulation des K_n implique la convergence uniforme des K_n vers K, c'est-à-dire le fait qu'à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier p tel que $n > p$ entraîne pour la cote d'un point de K_n, d'angle polaire ω, le fait d'être comprise, quel que soit ω, entre $c(\omega) - \varepsilon$ et $c(\omega) + \varepsilon$.

Ce qu'il faut donc prouver, c'est la convergence uniforme des K_n vers K. Si elle n'avait pas lieu, nous savons qu'il y aurait au moins une génératrice de convergence non uniforme, sur laquelle tout un segment ferait partie de l'ensemble d'accumulation, donc ce segment ferait également partie de K, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le lemme d'uniformité que nous avions énoncé est donc établi.

4. Il n'est pas superflu de rassembler nos hypothèses, avant de poursuivre cette étude. Nous considérons une variété proprement superficielle, au sens du n° **1**, et dont le contingent de courbure normale, en un certain point A, ne contient aucun rayon $< R_0$, et ne contient qu'un seul demi-cercle par demi-plan normal. L'inverse $c(\omega)$ de la cote du centre de ce demi-cercle est une fonction continue et périodique de période 2π donnant en A, la loi de distribution des courbures normales. L'hypothèse que la cote d'un point de K

$$c(\omega) = \lim \frac{2Z}{\overline{AM}^2} = \lim \frac{2Z}{X^2 + Y^2}$$

est une fonction univoquement déterminée, entraîne, nous l'avons vu, que chacune des limites ci-dessus, prises pour ω constant, est atteinte uniformément dans tout le champ de variation de ω. Nous avons donc pour la surface, au point A, par rapport au trièdre trirectangle AXYZ, une représentation analytique de la forme

$$(1) \qquad 2Z = \varphi_2(X, Y) + (X^2 + Y^2)\,\varepsilon(X, Y),$$

où φ_2 est la fonction homogène et du second degré

$$\varphi_2 = (X^2 + Y^2)\,c(\omega)$$

et où $\varepsilon(x, y)$ est une fonction continue par rapport à l'ensemble (x, y) et s'annulant à l'origine. C'est le lemme d'uniformité précédent qui détermine cette dernière conclusion sur $\varepsilon(X, Y)$.

Elle n'aurait pas été valable si nous nous étions bornés à considérer séparément les sections de la surface par des demi-plans normaux, en admettant pour chacune d'elles l'existence d'un cercle de courbure, de rayon non nul. Il en est bien ainsi pour les sections normales de la surface

$$(2) \qquad 2Z = \varphi_2(X, Y) + (X^2 + Y^2)\frac{X^2 Y}{X^4 + Y^2}$$

et cependant, d'après nos hypothèses, cette dernière se trouve exclue du champ de nos recherches.

3. Cela posé, étudions d'abord le cas où nos hypothèses sur le contingent de courbure normale ne sont réalisées qu'en un point isolé A de la surface. En un tel point, nous allons utiliser la représentation analytique (1). Menons par A une demi-tangente AΔ telle que le demi-cercle de courbure normal correspondant ait son rayon fini, c'est-à-dire telle que $\varphi_2(X, Y)$ ne s'annule pas sur AΔ. Nous allons prouver que le théorème de Meusnier est vrai pour AΔ, au sens suivant :

Le contingent circulaire relatif au point A *et à la demi-droite* AΔ *comprend les sections, par les plans contenant* AΔ, *de la sphère ayant pour grand cercle le cercle* (complété) *de courbure normale relatif à* AΔ. Cette sphère sera dite : SPHÈRE DE MEUSNIER.

Il serait d'ailleurs préférable de considérer ici le contingent circulaire comme formé de demi-cercles : dans l'énoncé précédent, on supposerait qu'on mène par A le plan perpendiculaire à AΔ et qu'on supprime tout ce qui n'est pas, relativement à ce plan, du même côté que AΔ. Au lieu de cercles balayant la totalité d'une sphère, on aurait ainsi des demi-cercles balayant la totalité d'un hémisphère.

Cela ne modifie pas essentiellement le résultat annoncé dont la démonstration est très simple : dans le plan tangent AXY, confondons la direction AX, jusqu'à présent indéterminée, avec AΔ; cherchons les conditions dans lesquelles un demi-cercle tangent en A à AΔ et passant par un point M de la surface infiniment voisin de A tend vers un demi-cercle de rayon non nul situé dans le plan

$$Z = Y \operatorname{tang}\theta.$$

Soit N la projection de M sur AΔ. Le rayon du cercle variable est

$$\frac{\overline{AM}^2}{2MN} = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2\sqrt{Y^2 + Z^2}}.$$

Nous voulons que MN soit un infiniment petit du second ordre par rapport à AM ou encore que $\sqrt{Y^2 + Z^2}$ soit du second ordre par rapport à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$; il faut donc que Y soit du second ordre (ou d'un ordre supérieur) par rapport à X. Dans ces conditions, nous avons à chercher la limite de

$$\frac{X^2}{2\sqrt{Y^2 + Z^2}},$$

où Z, par suite de la non annulation de la courbure normale relative à AΔ est un infiniment petit équivalent à

$$\frac{1}{2}\varphi_2(X, 0) = aX^2.$$

Nous demandons d'ailleurs à ce que le rapport de Y à Z tende vers tangθ, ce qui achève de déterminer la partie principale de Y. Finalement tout se passe, pour la recherche du contingent circulaire relatif à AΔ, comme si la surface définie par l'équation (1) était remplacée par le cylindre parabolique $Z = aX^2$ pour lequel le théorème de Meusnier est vrai. Donc il reste vrai pour la surface définie par l'équation (1), pour laquelle la loi de répartition de la courbure dans l'ensemble des sections normales est fournie par une fonction continue $c(\omega)$ quelconque. Le théorème de Meusnier est donc valable dans des conditions plus générales que le théorème d'Euler.

Qu'arriverait-il maintenant si l'on avait $a = 0$, c'est-à-dire si

$\varphi_2(X, Y)$ s'annulait le long de $A\Delta$? Supposons encore que Y soit un infiniment petit équivalent à $Z \cot \theta$; en même temps que Z, la coordonnée Y sera un infiniment petit relativement à X, et même relativement à X^2, si bien que dans chaque plan passant par $A\Delta$ (sauf peut-être dans XAY et XAZ) le contingent circulaire ne possédera qu'un seul cercle de rayon infini. Dans le plan XAY, on pourra trouver des cercles de rayon quelconque appartenant à ce contingent (Z étant dès lors infiniment petit par rapport à Y). Enfin, dans le plan XAZ, nous aurons à chercher la limite de $\frac{X}{Z}$, laquelle est infinie, ce qui donne encore un cercle de rayon infini. Finalement, le contingent circulaire relatif à AX est donc ici le plan XAY, lequel joue le rôle de sphère de rayon infini. En le substituant à la sphère de Meusnier, on peut considérer que le théorème de Meusnier reste vérifié à la limite.

6. Nos hypothèses sur le contingent de courbure normale ont porté sur un seul point A de la surface. Elles déterminent une conclusion concernant le contingent circulaire (ou hémicirculaire) de la surface pour A et $A\Delta$. Soit, sur la surface, un demi-arc AL de courbe tangent, en A à $A\Delta$, projeté sur le plan tangent en A suivant le demi-arc Al dont le contingent circulaire pour A et $A\Delta$ se réduit à un cercle unique. Il en sera de même du contingent circulaire de AL pour A et $A\Delta$. Ce contingent est en effet inclus dans l'intersection du contingent circulaire de la surface et de celui du cylindre projetant AL: en prolongeant la section droite de ce dernier, au delà de A, tangentiellement à la demi-droite opposée à $A\Delta$, par un arc du cercle de courbure en A, nous aurons une surface vérifiant en A nos hypothèses de validité du théorème de Meusnier: donc nous pouvons mener une sphère, tangente en A au plan mené par $A\Delta$ normalement à la surface étudiée, sphère qui sera décrite en totalité par les cercles du contingent circulaire de notre cylindre. Finalement, nous serons donc amenés à prendre l'intersection de la sphère de Meusnier du cylindre, obtenue à l'instant, et de celle de notre surface, pour A et $A\Delta$. Étant orthogonales en A, ces sphères ont en commun un cercle de rayon non nul, qui constitue le contingent circulaire (nécessairement non vide) de AL pour A et $A\Delta$. Quant au contingent d'osculation de AL, pour A et $A\Delta$, il se réduit au demi-plan de ce cercle.

Réciproquement, si le contingent d'osculation de la surface pour A et $A\Delta$, est réduit à un seul demi-plan, le contingent circulaire correspondant sera-lui-même réduit à un cercle unique, déterminé par l'intersection du plan en question et de la sphère de Meusnier.

Il est d'ailleurs facile de voir que ces propriétés ne seraient pas valables pour une surface dont les sections normales, envisagées séparément, sont astreintes, sans plus, à posséder une courbure à l'origine; notamment, le théorème de Meusnier est-il en défaut pour la surface définie par l'équation (2) écrite à la fin du n° 4.

7. Nous allons maintenant chercher ce qui arrive quand les hypothèses rappelées au début du n° 5 sont satisfaites sur toute une région de la surface. D'une manière plus précise, supposons qu'il existe une fonction $\gamma(M, M\Delta)$ d'un point M de cette région et d'une demi-tangente $M\Delta$ issue de ce point, fonction qui soit continue par rapport à l'ensemble du point M et $M\Delta$; par hypothèse, cette fonction représente en M la courbure du demi-arc issue de M et contenu dans le demi-plan normal en M déterminé par $M\Delta$.

Soit O un point appartenant, ainsi que ses environs sur la surface, à la région où sont vérifiées nos hypothèses. Rapportons la surface au trièdre trirectangle $Oxyz$, dont l'arête Oz soit la normale en ce point. Restons à proximité de O, de manière à sauvegarder la biunivocité de la correspondance entre un point M de la surface et sa projection sur le plan xOy. Toute courbe de courbure continue tracée dans la portion utile de ce plan est la projection d'une courbe $\mathcal{C}$ de la surface dont le demi-arc postérieur en chaque point admet, d'après ce qui précède, un demi-plan osculateur et un cercle de courbure variant continument : *en vertu de cette continuité, ces éléments conservent leurs rôles respectifs pour le côté antérieur de la courbe au point considéré.* En effet, appelons K le centre du cercle de courbure en M relativement au demi-arc MN postérieur à M: alors $\overrightarrow{MK}$ est une grandeur géométrique fonction continue de l'arc s de cette courbe; retenons-en les composantes exprimées au moyen de s; en partant de l'équation géométrique

$$\frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} = \frac{\overrightarrow{MK}}{\overline{MK}^2},$$

nous pouvons retrouver la courbe $\mathcal{C}$: en confondant s avec le temps, il suffit d'imaginer qu'on parte d'un point de cette courbe avec une vitesse initiale portée par la demi-tangente postérieure et égale à l'unité. En intégrant chaque composante du second membre, deux fois de suite d'après le processus de Riemann, on parvient aux coordonnées $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ d'un point de $\mathcal{C}$ exprimées en fonction de l'arc s. D'après ce mode d'obtention, la courbe $\mathcal{C}$ admet en chaque point et sans distinction de côté, un cercle de courbure, identique à celui que nous savions jouer ce rôle, mais *au titre postérieur* seulement. Le résultat annoncé est donc démontré.

8. Ce résultat préliminaire établi, considérons la fonction $f(x, y)$ qui exprime la cote d'un point M de la surface suffisamment voisin de l'origine. Toute fonction composée de la forme

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\sin\alpha)$$

admet une dérivée seconde continue par rapport à t : en effet, les deux quantités substituées à x, y sous le symbole f sont les coordonnées du point courant d'une certaine droite du plan xOy; le plan parallèle à Oz mené par cette droite coupe la surface suivant une courbe ayant une courbure continue, d'où résultent bien l'existence et la continuité de $\varphi''(t)$. Cette continuité s'exerce d'ailleurs uniformément par rapport à l'ensemble de la variable et des paramètres x_0, y_0, α dont dépend $\varphi(t)$ et cela en vertu des propriétés de $\gamma(M, M\Delta)$. Par suite f''_{x^2} et f''_{y^2} existent et sont continues, dans la partie utile du plan xOy, aux environs de l'origine. Nous allons montrer qu'il en est de même de la dérivée f''_{xy}.

Pour le voir, plaçons-nous au point x_0, y_0, et utilisons le fait que $\varphi(t)$ admet une dérivée seconde pour $t = 0$. La dérivée première de $\varphi(t)$ a pour expression

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = {} & \cos\alpha\, f'_x(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\sin\alpha)\\ & + \sin\alpha\, f'_y(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\sin\alpha),\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi'(\Delta t) - \varphi'(0) = A\cos\alpha + B\sin\alpha$$

avec

$$A = f'_x(x_0 + \Delta t\cos\alpha,\ y_0 + \Delta t\sin\alpha) - f'_x(x_0, y_0),$$
$$B = f'_y(x_0 + \Delta t\cos\alpha,\ y_0 + \Delta t\sin\alpha) - f'_y(x_0, y_0).$$

Or, nous pouvons écrire par exemple

$$A = f'_x(x_0 + \Delta t \cos\alpha, y_0 + \Delta t \sin\alpha) - f'_x(x_0, y_0 + \Delta t \sin\alpha)$$
$$+ f'_x(x_0, y_0 + \Delta t \sin\alpha) - f'_x(x_0, y_0).$$

Lorsque Δt tend vers zéro, le quotient de la première ligne du second membre par Δt tend vers $\cos\alpha\, f''_{x^2}(x_0, y_0)$. On peut faire pour B une remarque analogue.

Nous pouvons donc utiliser ce fait que l'expression

$$\varphi''(0) - \cos^2\alpha f''_{x_0^2} - \sin^2\alpha f''_{y_0^2},$$

laquelle existe et dépend continument de x_0, y_0, α, est la limite de

$$\cos\alpha \frac{f'_x(x_0, y_0 + \Delta t \sin\alpha) - f'_x(x_0, y_0)}{\Delta t}$$
$$+ \sin\alpha \frac{f'_y(x_0 + \Delta t \cos\alpha, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{\Delta t}.$$

Or, si l'expression

$$\lambda \cos\alpha + \mu \sin\alpha$$

possède une limite fonction continue de α, il en résulte que chacune des expressions λ et μ possède elle-même une limite qui dépend continument de α ainsi que de x_0, y_0. Dès lors, nous voyons que f''_{xy} existe et est continue. Et par suite, autour de l'origine, nous aurons pour la surface une représentation analytique de la forme

$$z = (a + \alpha) x^2 + 2(b + \beta) xy + (c + \gamma) y^2,$$

où les quantités a, b, c sont des constantes tandis que α, β, γ sont des fonctions continues de l'ensemble (x, y) tendant vers zéro avec x et y.

Ceci peut encore s'écrire

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x, y),$$

en posant

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}{x^2 + y^2},$$

il est clair que la continuité de α, β, γ et leur caractère d'infiniment petits à l'origine entraînent les mêmes propriétés pour $\varepsilon(x, y)$.

Finalement, le fait que nos hypothèses relatives au contingent de *courbure normale sont réalisées, non plus seulement en un point isolé de la surface, mais sur toute une région de cette surface, entraînent simultanément le théorème de Meusnier et le théorème d'Euler.*

En terminant, il n'est pas sans intérêt de noter que les recherches précédentes nous amènent, par voie géométrique, à résoudre des problèmes importants de calcul différentiel. C'est ainsi que, pour le cas où nos hypothèses sur le contingent de courbure normale sont vérifiées en un seul point (x_0, y_0, z_0) de la surface, nous avons obtenu le développement (1) qui, après adoption des axes $Oxyz$ (se substituant aux axes AXYZ), se transformerait dans le suivant:

$$\begin{aligned} z = f(x, y) = f(x_0, y_0) &+ (x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} \\ &+ \varphi_2(x - x_0, y - y_0) + [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\varepsilon, \end{aligned}$$

ε étant continue et tendant vers zéro avec $x - x_0, y - y_0$. Il est remarquable que la validité de ce développement dans toute une région de la surface, dans des conditions telles que φ_2 soit continue par rapport à l'ensemble $x - x_0$, $y - y_0$, x_0, y_0 entraîne pour cette fonction homogène du second degré la propriété de se réduire à un trinome

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2.$$

9. J'indique en terminant l'énoncé d'un problème qui me paraît digne d'attention. Supposons que l'on considère une surface $z = f(x, y)$ telle qu'en chaque point de celle-ci, on puisse mener deux sphères de rayon constant ρ sans point intérieur commun avec la surface. On montre aisément qu'un tel continu est une variété proprement superficielle et qu'en chaque point, son contingent de courbure normale est formé de demi-cercles dont la courbure est $< \frac{1}{\rho}$, sur toute la surface. Je demande si l'hypothèse formulée n° 3 se trouvera, de ce fait, réalisée en général à l'exclusion d'un certain ensemble exceptionnel de points) ou si, par contre, elle est entièrement indépendante des précédentes.