JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 457-480.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__457_0>

Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini ;

Par Georges VALIRON.

Le premier but de ce Mémoire est de démontrer une proposition qui généralise un théorème que j'ai énoncé dans les *Comptes rendus* [1]. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un certain angle; il est loisible de supposer que cet angle contient l'origine. Nous considérerons $f(z)$ dans des angles intérieurs à celui-ci et ayant leur sommet à l'origine, et nous désignerons par $r_n(x, \mathrm{A})$ le module du $n^{\text{ième}}$ zéro non nul de $f(z) - x$ situé dans un tel angle A (on suppose les zéros en question rangés par ordre de modules non décroissants, si $x = \infty$ on considère les pôles). Je démontrerai la proposition suivante :

I. *ρ étant supérieur à $\frac{1}{2}$, supposons qu'il existe un petit angle* A *pour lequel la série*

$$\sum \frac{1}{r_n(a, \mathrm{A})^\rho} \tag{1}$$

diverge. Dans tout angle B *d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ contenant* A *à son intérieur au sens strict, existe au moins une direction* D *telle que, pour*

---

[1] *C. R. Acad. Sci.*, t. **187**, 1928, p. 803-805. L'extension donnée ci-dessous dans la proposition I est l'une de celles que je signalais à la fin de la première partie de cette Note.

tout angle Δ de bissectrice D, la série

$$\sum \frac{1}{r_n(x, \Delta)^\rho} \tag{2}$$

diverge pour tous les x sauf au plus pour deux valeurs indépendantes de Δ.

Lorsque $\rho \leqq \frac{1}{2}$, la proposition s'applique pourvu que $f(z)$ soit méromorphe en tout point à distance finie extérieur à un cercle $|z| > R$.

Je dirai qu'une direction telle que D est une *direction de Borel d'ordre ρ divergent*; cette notion précise pour les fonctions auxquelles elle s'applique, la notion de direction de Borel d'ordre ρ que j'avais introduite précédemment ([1]). La démonstration du théorème I, plus simple que celle que j'avais esquissée dans la Note citée et qui a été développée par Miss Collier dans sa Thèse ([2]), repose sur l'application des deux propositions suivantes :

A. Moyennant l'hypothèse de l'énoncé I, toutes les séries

$$\sum \frac{1}{r_n(x, B)^\rho} \tag{3}$$

divergent sauf au plus pour deux valeurs de x, pourvu que l'angle B d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ contienne strictement A à son intérieur ([3]).

B. Si la fonction $f(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z - z_0| < R$ et si pour trois valeurs de x dont les distances sphériques deux à deux sont au moins égales à d le nombre des points où $f(z) = x$ est au plus égal à N, le nombre des points du cercle $|z - z_0| < \frac{1}{2}R$ en lesquels $f(z) = x$ est au plus égal à

$$AN + B \log \frac{1}{d} + C \log \frac{1}{\delta},$$

([1]) *Acta mathematica*, t. 52, 1928, p. 67-92.

([2]) *Thèse* pour le Doctorat de l'Université de Strasbourg, 1930.

([3]) *Voir* G. Valiron, *Acta mathematica*, t. 47, 1925, p. 117-142 (en particulier théorème V).

sauf au plus pour des x dont la représentation sphérique appartient à un cercle de rayon δ. A, B, C sont des constantes numériques (¹).

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction entière, la position des directions de Borel d'ordre ρ divergent est liée dans une certaine mesure à celle des *directions d'ordre apparent ρ divergent*. J'appellerai ainsi une direction $\varphi = \arg z = \text{const.}$ pour laquelle l'intégrale

$$L(\varphi) = \int_1^\infty r^{-\rho-1} \overset{+}{\log} |f(r e^{i\varphi})| \, dr$$

est divergente. La seconde partie du Mémoire est consacrée à l'étude de ces directions et à la démonstration des propositions suivantes dans lesquelles $M(r, f)$ désigne le maximum de $|f(re^{i\varphi})|$ pour r fixe.

II. *Une fonction entière de la classe divergente* (²) *de l'ordre ρ, $\rho > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire telle que*

$$\int^\infty r^{-\rho-1} \log M(r, f)\, dr \tag{1}$$

diverge, possède au moins deux directions de Borel d'ordre ρ divergent.

III. *Si une fonction entière de la classe divergente de l'ordre ρ supérieur à 1 ne possède que deux directions de Borel d'ordre ρ divergent, l'angle de ces directions est $\frac{\pi}{\rho}$.*

Dans les angles où les intégrales $L(\varphi)$ divergent, on peut comparer les valeurs de ces intégrales, prises de 1 à r, à une fonction croissante de r. J'indique dans une troisième partie quelques résultats relatifs à cette comparaison.

(¹) *Voir* H. MILLOUX, *Acta mathematica*, t. 52, 1928, p. 189-255 (en particulier théorème I, p. 202). L'introduction du rayon $\frac{1}{20}$ n'a rien d'essentiel (*voir*, par exemple, ma Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 186, 1928, p. 935-936).

(²) J'ai introduit cette distinction des fonctions entières d'ordre ρ en deux classes, suivant que (1) converge ou diverge, dans mon Mémoire *Sur les fonctions entières d'ordre fini* (*Bull. Sciences math.*, t. 45, 1921, p. 258-270). Les dénominations « classe divergente » et « classe convergente » que j'utilise ici sont dues à M. R. Nevanlinna.

I.

1. Considérons l'angle B de l'énoncé I et un angle B′ intérieur à B, de même bissectrice que B, d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ et contenant toujours l'angle A. Le théorème A s'applique à B′. Marquons dans B′ les quadrilatères curvilignes $Q_p (p = 1, 2, \ldots)$ définis par

$$2^p \leqq |z| \leqq 2^{p+1}.$$

L'entier s étant donné, nous subdivisons Q_p en s^2 quadrilatères plus petits en divisant B′ en s angles égaux et en traçant les circonférences

$$|z| = 2^{p+\frac{\lambda}{s}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Nous introduirons pour chaque quadrilatère Q_p^j ainsi obtenu le plus petit cercle γ_p^j le contenant à son intérieur (au sens large), et le cercle concentrique Γ_p^j de rayon double. En prenant s assez grand, les cercles Γ_p^j sont tous contenus dans B, et les cercles γ_p^j couvrent la portion de B′ pour laquelle $|z| > 2$. Pour chaque cercle Γ_p^j nous considérons tous les systèmes de trois points x_1, x_2, x_3 dont les distances sphériques sont au moins égales à 2^{-p}, et nous appelons N_p le minimum du nombre des zéros du produit

$$[f(z) - x_1][f(z) - x_2][f(z) - x_3]$$

pour l'ensemble de ces systèmes. D'après le théorème B, le nombre des zéros de $f(z) - x$ dans γ_p^j est au plus égal à

$$AN_p^j + 2pC' \log 2,$$

sauf au plus pour des x dont la représentation sphérique appartient à un cercle η_p^j de rayon 2^{-p}. Il existe une infinité de nombres x représentés à l'extérieur de tous les cercles η_p^j correspondant à $p > P$, puisque la série formée par leurs rayons a une somme égale à $s^2 2^{-P}$; pour ces x la série

$$\sum_{p>P,\, r_n>2} \frac{1}{r_n(x, B')^\rho}$$

a une somme moindre que

$$A\sum_{p}^{\infty} 2^{-p\rho} N'_p + 2s^2 C' \log 2 \sum_{p}^{\infty} p\, 2^{-p}.$$

Par suite, en vertu du théorème A, la série

$$\sum N'_p 2^{-p\rho}$$

diverge. *A fortiori*, si $N_{p,s}$ désigne le plus grand des N^j_p correspondant à une même valeur p, la série

$$(5)\qquad \sum 2^{-(p+1)\rho} N_{p,s}$$

diverge. *Au nombre* $N_{p,s}$ *correspond un cercle* $\Gamma_{p,s}$ *dans lequel l'équation* $f(z) = x$ *admet* $N_{p,s}$ *solutions au moins pour tous les* x *sauf au plus pour ceux représentés dans deux cercles de rayon* 2^{-p} *de la sphère.*

La série (5) étant divergente pour chaque s fixe, il est loisible d'y remplacer s par un nombre s_p non décroissant et tendant vers l'infini sans que la série cesse d'être divergente. On prendra $s_p = s$ pour $P \leqq p < P_1$, P_1 étant tel que

$$\sum_{P}^{P_1-1} 2^{-(p+1)\rho} N_{p,s} \geqq 1,$$

puis $s_p = 2s$ pour $P_1 \leqq p < P_2$, P_2 étant choisi pour que

$$\sum_{P_1}^{P_2-1} 2^{-(p+1)\rho} N_{p,2s} \geqq 1,$$

et ainsi de suite. Enfin, en supprimant les cercles Γ_{p,s_p} d'indice p pair, on arrive à l'énoncé suivant :

IV. *Il existe une suite de cercles* C_n *appartenant à l'angle* B, C_n *ayant pour équation*

$$|z - z(n)| < \varepsilon(n)\,|z(n)|$$

avec

$$|z(n+1)| > 2|z(n)|, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0$$

tels que, dans C_n, $f(z) = x$ admet $N(n)$ solutions pour tous les x sauf au plus ceux qui sont représentés sur la sphère dans deux cercles $\pi(n)$, $\pi'(n)$ de rayon $2^{-\frac{1}{2}n}$, la série

$$\sum N(n)\,|z(n)|^{-\rho} \tag{6}$$

étant divergente.

On retrouve ainsi, dans le cas plus général ici examiné, la proposition que j'avais énoncée dans ma Note citée des *Comptes rendus*, en supposant la fonction $f(z)$ méromorphe en tout point à distance finie et de la classe divergente de son ordre.

2. A partir de la proposition IV, on peut raisonner de la façon suivante.

Soit E l'ensemble limite des arguments $\varphi(n)$ des $z(n)$. C'est un ensemble fermé. Soit ω un point de E. Deux cas sont possibles :

1° Dans tout angle de bissectrice ω, la série extraite de (6), en se bornant à prendre les termes correspondant aux $z(n)$ appartenant à cet angle, est divergente ;

2° Il existe un angle $|\varphi - \omega| < k(\omega)$ pour lequel la série extraite de (6) est convergente.

Montrons qu'il existe au moins un point ω de la première sorte. Supposons que tous les points de E soient de la seconde sorte. Entourons chacun d'eux ω de l'intervalle correspondant $|\varphi - \omega| < k(\omega)$. E peut être couvert par un nombre fini de ces intervalles d'après le théorème de Borel-Lebesgue, et les angles correspondants contiennent tous les points $z(n)$ sauf un nombre fini d'entre eux. Il s'ensuivrait que la série (6) convergerait.

Soit alors ω un point de la première sorte. En opérant comme on l'a fait à la fin du n° 1, on voit que *l'on peut extraire de la suite des cercles C_n une nouvelle suite, pour laquelle les arguments des $z(n)$ convergent vers ω, la série (6) restreinte aux termes correspondant à ces cercles étant encore divergente.*

Considérons cette nouvelle suite $C'(n) = C'(n, \omega)$. Désignons par $N(n, x)$ le nombre des racines de $f(z) = x$ appartenant à $C'(n)$.

Supposons que pour une valeur α de x, la série

$$\sum N(n, \alpha)\,|z(n)|^{-\rho} \tag{7}$$

soit convergente. Les valeurs de n pour lesquelles le point représentatif de α est extérieur aux cercles $\pi(n)$ et $\pi'(n)$ correspondants, forment une suite pour laquelle la série

$$\sum N(n)\,|z(n)|^{-\rho}$$

converge, puisque, pour ces n, $N(n, \alpha) \geq N(n)$. Il est donc loisible de supprimer dans la suite $C'(n)$ les cercles correspondant à ces n, sans que la série (6) correspondant à la suite restreinte $C''(n)$ cesse de diverger. De même, si pour un second membre β, la série

$$\sum N(n, \beta)\,|z(n)|^{-\rho}$$

relative à $C''(n)$ était convergente, on pourrait encore supprimer tous les $C''(n)$ pour lesquels le point représentatif n'appartient pas à $\pi(n)$ ou à $\pi'(n)$ sans que la série (6) relative à la nouvelle suite cesse de diverger. Ces deux opérations faites, tout autre point γ est extérieur à $\pi(n)$ et à $\pi'(n)$ dès que l'indice n est assez grand puisque les rayons de ces cercles tendent vers zéro, et que l'un contient α et l'autre β; $N(n, \gamma)$ sera donc supérieur à $N(n)$. Par suite, la série (7) relative aux $C'(n)$ diverge pour toutes les valeurs α sauf deux au plus; pour les α non exceptionnels, la série

$$\sum \frac{1}{r_n(\alpha)^{\rho}},$$

formée avec les modules des solutions de $f(z) = x$ qui appartiennent aux $C'(n)$, est divergente. Comme les $C'(n)$ finissent par appartenir à un angle quelconque dont la bissectrice admet ω pour argument, le théorème I est démontré.

Le cas des fonctions méromorphes aux points à distance finie extérieurs à un cercle et d'ordre positif inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$, se ramène à celui des fonctions justiciables du théorème I par une transformation (z, Z^h).

3. Il est manifeste que les généralisations que j'avais signalées autrefois ([1]) et qui ont été développées par Miss Collier dans sa Thèse, peuvent être faites ici. Par exemple, l'énoncé I reste valable, si l'on introduit au lieu des séries qui y figurent les séries de la forme

$$\sum \{ U[r_n(x, B)] \}^{-1},$$

où

$$U(x) = x^{\rho(x)}$$

la fonction $\rho(x)$ jouissant des propriétés de l'ordre précisé.

Signalons une propriété générale de l'ensemble des directions de Borel d'ordre ρ divergent. *L'ensemble* $E(\overset{+}{\rho})$ *des valeurs* $\varphi = \arg z$ *correspondant à ces directions est un ensemble parfait.* Car, si φ_0 est une direction de l'ensemble complémentaire E', il existe un angle A admettant cette direction pour bissectrice dans lequel la série (1) converge pour trois valeurs a au moins; toute direction appartenant à A fait encore partie de E'. E' est un ensemble d'intervalles, E est parfait. Cette propriété appartient également à l'ensemble $E(\rho)$ des valeurs φ correspondant aux directions de Borel d'ordre ρ (sans spécification de la divergence) définies dans mon Mémoire cité des *Acta mathematica*, t. 52. La démonstration est la même. On sait aussi que l'ensemble $E(J)$ des φ fournissant une direction de Julia, c'est-à-dire une direction pour laquelle la famille $f(ze^{i\varphi}2^n)$ n'est pas normale pour tous les z réels positifs, est un ensemble parfait. Il en est de même de l'ensemble $E(P)$ correspondant aux directions de Picard ([2]), car ici encore le complémentaire est un ensemble d'intervalles. On a évidemment

$$E(\overset{+}{\rho}) \leqq E(\rho) \leqq E(J) \leqq E(P)$$

le premier ensemble n'existant d'ailleurs que pour les fonctions satisfaisant à la condition énoncée dans le théorème I.

Les ensembles correspondant aux directions d'ordre ρ précisé,

---

([1]) *Voir* le n° 7 du Mémoire cité dans la Note précédente.

([2]) Pour la définition de ces directions, *voir* mon Mémoire du *Journal de mathématiques*, t. 7, 1928, p. 113-136.

simples ou de classe divergente, sont aussi des ensembles parfaits; on le voit de la même façon.

II.

4. Considérons une fonction entière d'ordre fini ρ. Si k est un nombre supérieur à ρ, l'intégrale

$$\int_1^\infty r^{-k-1} \log M(r, f)\, dr$$

converge, donc aussi toutes les intégrales

$$J(\varphi, k) = \int_1^\infty r^{-k-1} \overset{+}{\log} |f(r e^{i\varphi})|\, dr, \tag{8}$$

où $\overset{+}{u}$ désigne u si $u > 0$, et 0 dans le cas contraire. On sait aussi que

$$\int_1^\infty r^{-k-1} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(r e^{i\varphi})} \right| dr$$

est convergente (¹) de sorte que

$$J'(\varphi) = \int_1^\infty r^{-k-1} \log |f(r e^{i\varphi})|\, dr \tag{9}$$

converge absolument. La formule de Poisson-Jensen-Nevanlinna montre d'autre part que

$$|\arg f(z)| < r^{\rho+\varepsilon} \tag{10}$$

si petit que soit ε, pourvu que $r > r(\varepsilon)$ et qu'il s'agisse de l'argument obtenu en partant de l'origine avec l'argument réduit et en suivant le segment $(0, z)$.

Considérons un secteur

$$\varphi_0 \leqq \arg z = \varphi \leqq \varphi_1 \leqq \varphi_0 + 2\pi,$$
$$1 \leqq r = |z| \leqq R.$$

(¹) *Voir* le n° 5 de mon Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 46, 1922, p. 432-445 et les travaux de M. Nevanlinna (en particulier la Section III du Chapitre II de son Livre de la Collection Borel).

Il contient certains zéros $a_n = r_n e^{i\omega_n}$ de $f(z)$. Nous supposerons d'abord qu'il n'y a pas de zéros sur le contour du secteur. Nous joindrons le zéro a_n appartenant au secteur, au contour, au moyen du segment

$$\varphi = \varphi_n, \qquad r_n \leqq r \leqq R.$$

Dans le secteur privé de ces segments, $\log f(z)$ est holomorphe ainsi que z^{-k-1}. Nous prenons pour $\log f(z)$ la branche dont l'argument est réduit à l'origine, prolongée le long de $(0, e^{i\varphi_0})$ puis prolongée dans le domaine, et pour z^{-k} la branche dont l'argument est $-k\varphi_0$ sur $\varphi = \varphi_0$. Le théorème de Cauchy donne alors

$$\mathrm{I}(\varphi_1, \mathrm{R})\, e^{-ik\varphi_1} - \mathrm{I}(\varphi_0, \mathrm{R})\, e^{-ik\varphi_0} = \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{2i\pi}{k}\sum\left[\frac{1}{a_n^k} - \frac{e^{-ik\omega_n}}{\mathrm{R}^k}\right]$$

avec

$$\mathrm{I}(\varphi, \mathrm{R}) = \int_1^{\mathrm{R}} r^{-k-1} \log f(r e^{i\varphi})\, dr,$$

le Σ porte sur les zéros intérieurs au contour, zéros dont le nombre est au plus égal à $\mathrm{R}^{\rho+\varepsilon}$; σ_1 et σ_2 désignent respectivement les intégrales de $z^{-k-1} \log f(z)$ prises sur l'arc $r = 1$, $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ et sur l'ensemble des arcs déterminés sur $r = \mathrm{R}$, $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ par les points $\mathrm{R}e^{i\omega_n}$. σ_1 est fixe; dans σ_2, $|\log f(z)|$ est au plus égal à $2\mathrm{R}^{\rho+\varepsilon}$ puisque l'argument de $f(z)$ vérifie la condition (10). Comme il est loisible de supposer $\rho + \varepsilon < k$, on aura, en faisant croître R indéfiniment et en désignant par $\mathrm{I}(\varphi)$ la limite de $\mathrm{I}(\varphi, \mathrm{R})$,

$$\mathrm{I}(\varphi_1)\, e^{-ik\varphi_1} - \mathrm{I}(\varphi_0)\, e^{-ik\varphi_0} = \sigma_1 - \frac{2i\pi}{k}\sum a_n^{-k}.$$

En multipliant les deux membres par $e^{ik\varphi_1}$ et en égalant les parties réelles, on obtient

$$(11) \qquad \begin{aligned} \mathrm{J}'(\varphi_1) = {} & \cos k(\varphi_1 - \varphi_0)\, \mathrm{J}'(\varphi_0) - \sin k(\varphi_1 - \varphi_0)\, \mathrm{J}''(\varphi_0) \\ & + \frac{2\pi}{k}\sum \frac{\sin k(\varphi_1 - \omega_n)}{r_n^k} + d, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{J}''(\varphi_0) = \int_1^{\infty} r^{-k-1} \arg f(r e^{i\varphi_0})\, dr,$$

et où d désigne un nombre qui reste borné quels que soient φ_0 et φ_1.

De la même façon, si $\varphi_2 < \varphi_0$

$$J'(\varphi_2) = \cos k(\varphi_2 - \varphi_0)\,J'(\varphi_0) + \sin k(\varphi_0 - \varphi_2)\,J''(\varphi_0) - \frac{2\pi}{k}\sum \frac{\sin k(\varphi_2 - \omega_n)}{r_n^k} + d', \tag{12}$$

le Σ portant ici sur les zéros appartenant à l'angle $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$. En éliminant $J''(\varphi_0)$ entre (11) et (12), on obtient

$$\begin{aligned} J'(\varphi_0)\sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k}\sum \frac{\delta_n}{r_n^k} \\ = J'(\varphi_1)\sin k(\varphi_0 - \varphi_2) + J'(\varphi_2)\sin k(\varphi_1 - \varphi_0) + C(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2). \end{aligned} \tag{13}$$

$C(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est uniformément borné; δ_n est égal à

$$\sin k(\varphi_1 - \omega_n)\sin k(\varphi_0 - \varphi_2)$$

si $\varphi_0 \leqq \omega_n \leqq \varphi_1$, à $\sin k(\omega_n - \varphi_2)\sin k(\varphi_1 - \varphi_0)$ si $\varphi_2 \leqq \omega_n \leqq \varphi_0$ et à o pour les autres ω_n. La restriction d'après laquelle φ_1, φ_0, φ_2 étaient distincts des ω_n a été supprimée ici, car dans ces cas la formule reste valable, on le voit par un passage à la limite. La quantité $C(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ serait nulle si les intégrales étaient prises de o à ∞ ce qui serait possible si l'on avait

$$f(z) = 1 + c_\lambda z^\lambda + \ldots \qquad (\lambda > k).$$

Nous utiliserons l'égalité (13) *en y supposant* $\varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{k}$, *alors les* δ_n *et les trois sinus qui y figurent sont positifs.*

5. Nous appliquerons l'égalité (13) aux fonctions

$$f(z) - x, \qquad x = e^{i\tau}$$

et nous intégrerons entre o et 2π après avoir multiplié par $d\tau$. En égard à la convergence uniforme de

$$\int_1^\infty r^{-k-1}\left|\log|f(z) - x|\right| dr$$

qui résulte de la formule de Poisson-Jensen-Nevanlinna ([1]), on aura

$$\int_0^{2\pi} d\tau \int_1^\infty r^{-k-1}\log|f(z) - x|\,dr = \int_1^\infty r^{-k-1}\,dr\int_0^{2\pi}\log|f(z) - x|\,d\tau,$$

([1]) *Voir* l'Ouvrage cité de M. Nevanlinna.

d'autre part, d'après la formule de Jensen

$$\int_0^{2\pi} \log|f(z) - e^{i\tau}|\,d\tau = 2\pi \overset{+}{\log} f(z),$$

ce qui conduit à l'égalité

$$(14)\qquad \begin{aligned} &J(\varphi_0, k)\sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k}\sum\overline{\left[\frac{\delta_n(x)}{r_n(x)^k}\right]} \\ &\qquad = J(\varphi_1, k)\sin k(\varphi_0 - \varphi_2) + J(\varphi_2, k)\sin k(\varphi_1 - \varphi_0) + D, \end{aligned}$$

D étant une constante finie, $r_n(x)$, $\delta_n(x)$ désignant respectivement les modules des zéros de $f(z) - x$ et la quantité δ_n attachée à ces zéros et $\overline{w(x)}$ étant la moyenne des nombres $w(x)$, $x = e^{i\tau}$. Cette moyenne de quantités toutes positives étant positive, on déduit de (14) ce premier résultat

V. *k étant supérieur à l'ordre ρ de $f(z)$ et φ_0, φ_1, φ_2 étant trois nombres tels que $\varphi_2 < \varphi_0 < \varphi_1$, $\varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{k}$, on a l'inégalité*

$$(15)\qquad \begin{aligned} &J(\varphi_0, k)\sin k(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\qquad < J(\varphi_1, k)\sin k(\varphi_0 - \varphi_2) + J(\varphi_2, k)\sin k(\varphi_1 - \varphi_0) + O(1). \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement que :

VI. *ρ étant l'ordre de la fonction entière $f(z)$, si l'intégrale*

$$(16)\qquad L(\varphi) = \int^{\infty} r^{-\rho-1} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|\,dr$$

est finie pour deux valeurs φ_1, φ_2, telles que $0 < \varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\rho}$, elle est finie pour toute valeur φ comprise entre φ_1 et φ_2; elle est même uniformément bornée dans cet intervalle.

On en déduit ce corollaire qui complète un de mes résultats antérieurs (¹) et qui est à rapprocher d'un théorème connu de M. Lindelöf :

VII. *Les directions d'ordre apparent ρ divergent [c'est-à-dire pour lesquelles* (16) *diverge] forment des angles (ouverts ou fermés à l'une ou*

(¹) *Opuscula mathematica A. Wiman dedicata*, 1930, p. 11.

aux deux extrémités), l'ouverture de chacun de ces angles étant au moins égale à $\frac{\pi}{\rho}$.

On sait que la divergence de (16) pour une valeur φ entraîne celle de l'intégrale obtenue en y remplaçant $\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|$ par sa moyenne $m(r, f)$ et inversement. D'une façon plus précise, *si* E *est un ensemble mesurable de valeurs* φ, *de mesure* $m(\mathrm{E})$ *positive pour chacune desquelles* (16) *diverge, et si l'on pose*

$$\mu(r, f) = \frac{1}{m(\mathrm{E})}\int_{\mathrm{E}} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

l'intégrale

$$(17)\qquad \int^{\infty} r^{-\rho-1}\mu(r, f)\,dr$$

est divergente. Sinon, on aurait quel que soit r,

$$\int_1^{r} r^{-\rho-1}\mu(r, f)\,dr = \frac{1}{m(\mathrm{E})}\int_{\mathrm{E}} d\varphi \int_1^{r} r^{-\rho-1}\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,dr < \mathrm{K},$$

donc pour chaque entier q

$$\int_1^{q} r^{-\rho-1}\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,dr < 2\mathrm{K}$$

sur un ensemble E_q appartenant à E et de mesure $\frac{1}{2}m(\mathrm{E})$ au moins. Comme $\mathrm{E}_{q+1} \leqq \mathrm{E}_q$ l'ensemble E′ commun aux E_q aurait une mesure au moins égale à $\frac{1}{2}m(\mathrm{E})$ et en tout point de ce sous-ensemble E′ de E, $\mathrm{L}(\varphi)$ serait borné contrairement à l'hypothèse.

Il est manifeste que la divergence de (17) entraîne celle de (16) pour certains φ.

6. Considérons une fonction entière $f(z)$ de la classe divergente de l'ordre ρ, $\rho > \frac{1}{2}$. La proposition VII s'applique. Considérons un angle B d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ contenant à son intérieur une direction φ pour laquelle $\mathrm{L}(\varphi)$ diverge. D'après un théorème de

M. Nevanlina [1], la série (3) diverge sauf au plus pour deux valeurs de x, on peut donc trouver un angle A appartenant à B au sens large auquel on pourra appliquer le théorème I. On obtient ainsi cette proposition :

VIII. *Si un angle B d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, contient strictemement à son intérieur une direction d'ordre apparent ρ divergent, il contient aussi une direction de Borel d'ordre divergent.*

Si Δ est une direction de Borel d'ordre ρ divergent, il existe des angles B d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, laissant Δ à leur extérieur; en appliquant la proposition VIII à un tel angle, on trouve une seconde direction de Borel d'ordre ρ divergent, ce qui démontre le théorème II de l'Introduction.

Le nombre des directions de Borel d'ordre ρ divergent, peut effectivement se réduire à deux; cela a lieu pour les fonctions de Mittag-Leffler ou de M. Lindelöf. Lorsque cette circonstance se présente pour une fonction d'ordre supérieur à 1, les deux directions en question font un angle à $\frac{\pi}{\rho}$. Car, si l'angle aigu de ces directions, Δ, Δ' était différent de $\frac{\pi}{\rho}$, il existerait d'après VII une direction d'ordre apparent ρ divergent distincte de Δ et Δ' et qu'on pourrait recouvrir d'un angle d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ ne contenant ni Δ ni Δ'; le théorème VIII appliqué à cet angle fournirait une troisième direction d'ordre ρ divergent. Le théorème III de l'Introduction est ainsi démontré. On remarquera en outre que *toute direction comprise dans l'angle aigu de Δ, Δ' est une direction d'ordre apparent ρ divergent.*

Une autre conséquence immédiate de VIII est celle-ci qui ne peut être précisée comme le montrent les exemples les plus simples et la remarque précédente :

IX. *Si D est une direction d'ordre apparent ρ divergent, il existe une*

---

[1] *Untersuchungen über den Picards'chen Satz* (*Acta Soc. sc. Fennicæ*. t. 50, n° 6, 1924. en particulier n° 18).

direction de Borel d'ordre ρ divergent, faisant avec D *un angle au plus égal à* $\frac{\pi}{\rho}$.

7. Considérons deux directions D, D′ sur lesquelles L(φ) converge et faisant un angle Θ inférieur à $\frac{\pi}{\rho}$. Appliquons d'abord l'égalité (14) en prenant pour φ_1 et φ_2 les arguments de ces directions et

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Nous aurons *a fortiori*,

$$\frac{2\pi}{k}\sum\left[\frac{\sin k\left[\frac{1}{2}\Theta - |\omega_n(x) - \varphi_0|\right]}{r_n(x)^k}\right] < J(\varphi_1, k) + J(\varphi_2, k) + O(1);$$

donc aussi

$$\frac{1}{k}\sin\frac{1}{4}k\Theta\int_0^{2\pi}\sum\frac{1}{r_n(x, \Gamma)^k}\,d\tau < J(\varphi_1, k) + J(\varphi_2, k) + O(1),$$

Γ désignant l'angle $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\Theta}{4}$. Ainsi, pour $k > \rho$, on a uniformément

$$\int_0^{2\pi}\sum r_n(e^{i\tau}, \Gamma)^{-k}\,d\tau < D'',$$

D″ étant fini. Cette inégalité a lieu *a fortiori* si l'on se borne à prendre dans la série les termes pour lesquels

$$\sum_1^m r_n(e^{i\tau}, \Gamma)^{-\rho} < G,$$

G étant fini arbitraire et l'on peut alors faire tendre k vers ρ. Il s'ensuit que, l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue, on a

$$\int_0^{2\pi}\sum^{\infty} r_n(e^{i\tau}, \Gamma)^{-\rho}\,d\tau \leqq D''.$$

Les valeurs de τ pour lesquelles la série

$$(18)\qquad \sum r_n(e^{i\tau}, \Gamma)^{-\rho}$$

diverge forment au plus un ensemble de mesure nulle. On en déduit cette conséquence :

X. *Les directions de Borel d'ordre ρ divergent appartiennent aux angles formés par les directions d'ordre apparent ρ divergent définis dans le théorème VII ou aux droites limitant ces angles.*

Le cas e^z montre qu'une droite limitant les angles en question peut être droite de Borel d'ordre ρ divergent sans être direction d'ordre apparent ρ divergent.

8. On pourrait généraliser les propositions qui viennent d'être données dans le sens indiqué au n° **3**; il y aurait lieu d'autre part de les étendre à certaines fonctions holomorphes dans un angle. On est, d'autre part, conduit à poser de nouvelles questions. Si un angle Γ' complémentaire des angles du théorème VII est d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, dans tout angle Γ complètement intérieur les séries

$$\sum r_n(x, \Gamma)^{-\rho} \tag{19}$$

convergent quel que soit x. Sinon les propositions I et X conduiraient à une contradiction. Mais si l'angle complémentaire Γ' a son ouverture inférieure à $\frac{\pi}{\rho}$, la série (19) peut diverger pour certains x, Γ étant intérieur à Γ'. Cette circonstance se présente pour $x = 0$ lorsque $f(z)$ a ses zéros régulièrement disposés sur une demi-droite et est d'ordre compris entre $p + \frac{1}{2}$ et $p + 1$ (p entier). En remplaçant l'intégration simple faite au n° **3** par une intégration double, on voit que (19) *converge sauf au plus pour les x appartenant à un ensemble de mesure superficielle nulle* (les x étant toujours représentés sur la sphère). Quelles sont exactement les propriétés d'un tel ensemble exceptionnel E? Une question analogue, mais vraisemblablement plus simple à résoudre se pose pour l'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z) - x$ dans un angle d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{\rho}$ dans lequel l'ordre apparent est inférieur à ρ. Il est probable que cet exposant ne peut être égal à ρ

que pour des x exceptionnels. Peut-il exister plusieurs x exceptionnels?

9. Comparons les directions d'ordre apparent ρ divergent pour une fonction et pour sa dérivée, on a

$$\overset{+}{\log}|f'(z)| \leqq \overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \overset{+}{\log} f(z). \tag{20}$$

D'autre part, la décomposition de $f(z)$ en facteurs donne

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < r^{\rho+\varepsilon} + \sum \frac{1}{|r - r_n|},$$

la sommation étant étendue aux zéros dont le module r_n est compris entre $\frac{r}{2}$ et $2r$. Par suite, le nombre de ces zéros étant inférieur à $r^{\rho+\varepsilon}$,

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < 2(\rho + \varepsilon)\log r + \sum \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{r - r_n}\right|$$

et

$$\int_r^{2r} \overset{+}{\log}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| dr = O(\log r).$$

Cette inégalité jointe à (20) montre que, quel que soit $k > \rho$ et pourvu que l'intégrale du second membre ait un sens, on a

$$\int^{\infty} r^{-k-1}\overset{+}{\log}|f'(re^{i\varphi})|\,dr < \int^{\infty} r^{-k-1}\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,dr + O(1). \tag{21}$$

Convenons de dire *qu'une direction* $\varphi =$ const. *pour laquelle* $L(\varphi)$ *converge est une direction d'ordre apparent* ρ *convergent* (en réalité une telle direction est soit d'ordre ρ, soit d'ordre inférieur à ρ). On voit que :

Toute direction d'ordre apparent ρ convergent pour $f(z)$ est aussi d'ordre apparent ρ convergent pour $f'(z)$.

Pour la réciproque, nous démontrerons une proposition moins précise en nous appuyant sur ce lemme :

XI. *Si $f(z)$ est l'ordre apparent ρ convergent dans un angle* Γ', *c'est-à-dire pour toutes les directions de cet angle et si*, Γ *étant un angle* *complètement intérieur à Γ', on désigne par $M(r, f, \Gamma)$ le maximum de $f(z)$ pour les φ appartenant à Γ et pour $|z| < r$, l'intégrale*

$$\int^{\infty} r^{-\rho-1} \log M(r, f, \Gamma)\, dr$$

converge.

Tout d'abord nous savons (théorème VI) que l'intégrale $L(\varphi)$ est uniformément bornée dans Γ'' intérieur à Γ' et contenant Γ. L'intégrale

$$\int r^{-\rho-1} \mu(r, \varphi)\, dr, \qquad \mu(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f[r(e^{i\varphi} + u\, e^{i\tau})]|\, d\tau$$

est donc aussi uniformément bornée si la direction φ appartient à Γ et si u est assez petit. Or, d'après une inégalité connue, $\mu(r, \varphi)$ est supérieur au tiers du maximum de $\overset{+}{\log}|f(z)|$ pour $|z - e^{i\varphi} r| < \frac{1}{2} ur$, l'intégrale

$$\int r^{-\rho-1} K(r)\, dr$$

est donc encore bornée, $K(r)$ étant le maximum de $\overset{+}{\log}|f(z)|$ dans la portion de Γ appartenant à la couronne

$$r\left(1 - \frac{u}{2}\right) < |z| < r\left(1 + \frac{u}{2}\right).$$

En posant $1 + \frac{u}{2} = b$, la série

$$\sum K(b^n)\, b^{-n\rho}$$

converge, donc aussi

$$\sum b^{-n\rho}[K(b) + K(b^2) + \ldots + K(b^n)],$$

ce qui démontre le lemme.

Appliquons le lemme XI à $f'(z)$. Comme en un point de l'angle Γ,

$$|f(re^{i\varphi})| < |f(e^{i\varphi})| + (r - 1)\, M(r, f', \Gamma),$$

l'intégrale $L(\varphi)$ relative à $f(z)$ sera aussi bornée. *La fonction $f(z)$ est d'ordre apparent ρ convergent sur toute droite $\varphi =$* const., *intérieure* *à un angle sur chaque direction duquel la dérivée $f'(z)$ est d'ordre apparent ρ convergent.*

Il s'ensuit que :

XII. *Les angles formés par les directions d'ordre apparent ρ divergent sont les mêmes pour une fonction d'ordre ρ et pour sa dérivée, en outre si une droite limitant l'un de ces angles est direction d'ordre ρ convergent pour $f(z)$, il en est de même pour la dérivée.*

III.

10. Plaçons-nous dans un angle où les intégrales $L(\varphi)$ sont divergentes. On peut se proposer de comparer la façon dont

$$L(r, \varphi) = \int_1^r r^{-\rho-1} \overline{\log} |f(re^{i\varphi})| \, dr$$

tend vers l'infini sur les diverses directions appartenant à l'angle. Il est probable que les intervalles de valeurs r pour lesquelles $\overline{\log}|f(re^{i\varphi})| = 0$ jouissent de propriétés telles que l'on a des propositions très générales relatives au comportement de $L(r, \varphi)$. Je me bornerai ici à examiner des cas particuliers d'ailleurs assez généraux.

Je supposerai d'abord que *$f(z)$ est une fonction du type minimum ou du type moyen de l'ordre ρ*; le rapport de $\log M(r, f)$ à r^ρ reste borné. Dans ces conditions, la formule de Poisson-Jensen-Nevanlinna montre que l'inégalité (10) peut être remplacée par

$$|\arg f(z)| < D r^\rho,$$

D étant fixe, et d'après la formule de Jensen, on a aussi

$$\int_0^{2\pi} \overline{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi < D' r^\rho.$$

On peut alors appliquer la méthode des nos 4 et 5 en prenant $k = \rho$ et en laissant R fini. L'intégrale σ_2 est uniformément bornée et l'inégalité (15) est remplacée par

$$\begin{aligned}(22) \qquad & \sin \rho(\varphi_1 - \varphi_2) \, L(r, \varphi_0) \\ & < \sin \rho(\varphi_0 - \varphi_2) \, L(r, \varphi_1) + \sin \rho(\varphi_1 - \varphi_0) \, L(r, \varphi_2) + O(1)\end{aligned}$$

valable pour

$$\rho(\varphi_1-\varphi_2)<\pi, \qquad \varphi_2<\varphi_0<\varphi_1.$$

Donnons-nous une fonction $V(r)$ indéfiniment croissante mais au plus égale à la fonction $\log r$ obtenue en remplaçant dans $L(r, \varphi)$ $\overset{+}{\log}|f(re^{i}\varphi)|$ par r^ρ. Posons

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{L(r, \varphi)}{V(r)}.$$

L'inégalité (22) donne de suite la proposition suivante :

XIII. *Si* $\varphi_2<\varphi<\varphi_1$ *et* $\varphi_1-\varphi_2<\frac{\pi}{\rho}$ *la valeur de* $h(\varphi)$ *au point* φ *est au plus égale à la valeur en ce point de la fonction*

$$H(\varphi)=D\cos\rho\varphi+D'\sin\rho\varphi \tag{23}$$

les constantes D *et* D′ *étant déterminées par les conditions* $H(\varphi_1)=h(\varphi_1)$ *et* $H(\varphi_2)=h(\varphi_2)$.

La fonction $h(\varphi)$ possède donc les propriétés de la fonction portant le même nom étudiée par MM. Lindelöf et Phragmén dans un Mémoire classique ([1]). Toutefois, dans le cas actuel, $h(\varphi)$ est essentiellement positive.

On peut caractériser une fonction périodique, de période 2π, bornée, $h(\varphi)$, jouissant de la propriété qui a été énoncée dans la proposition XIII en disant que c'est *une fonction sous-trigonométrique d'ordre* ρ.

Il est manifeste que si $h(\varphi_1)=h(\varphi_2)=0$, $0<\rho(\varphi_1-\varphi_2)<\pi$, $h(\varphi)$ est nulle dans tout l'intervalle (φ_1, φ_2). Si $h(\varphi)$ n'est pas toujours positif, les valeurs de φ pour lesquelles $h(\varphi)$ est positif forment des intervalles de longueur $\frac{\pi}{\rho}$ au moins.

Supposons $h(\varphi)$ partout finie, donc bornée en vertu de l'inégalité (22) appliquée à une suite finie de valeurs dont les distances sont inférieures à $\frac{\pi}{\rho}$; $h(\varphi)$ sera une fonction sous-trigonométrique d'ordre ρ.

([1]) *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse* (*Acta math.*, t. 31, 1908, p. 381-406).

XIV. *Une fonction sous-trigonométrique d'ordre ρ admet partout une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la dérivée à droite étant au moins égale à la dérivée à gauche.*

Pour le montrer on peut supposer $\varphi = 0$ et $\rho = 1$. Si $0 < \varphi < \varphi_1$

$$h(\varphi) \leqq \frac{h(\varphi_1)\sin\varphi + h(0)\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\sin\varphi_1};$$

donc

$$\overline{\lim_{\varphi=0}}\, \frac{h(\varphi) - h(0)}{\varphi} \leqq \frac{h(\varphi_1) - h(0)\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}.$$

Le nombre dérivé supérieur droit est donc fini pour $\varphi = 0$, soit λ sa valeur. Il existe une suite de valeurs φ_n décroissantes et tendant vers zéro pour lesquelles

$$\lim \frac{h(\varphi_n) - h(0)}{\varphi_n} = \lambda.$$

Je dis que λ est la dérivée à droite. Supposons le contraire. Il existerait une suite de nombres n et de valeurs φ'_n pour lesquelles

$$0 < \varphi'_n < \varphi_n < \varphi'_{n+1}$$

avec

$$\overline{\lim}\, \frac{h(\varphi'_n) - h(0)}{\varphi'_n} = \mu < \lambda;$$

or, d'après (22), si $u = \varphi'_{n+1} - \varphi_n$, $v = \varphi_n - \varphi'_n$, $w = \varphi'_n - \varphi'_{n+1}$,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim \frac{h(\varphi_n) - h(0)}{\varphi_n} \\ &\leqq \lim \frac{\sin u + \sin v + \sin w}{-\varphi_n \sin w} h(0) + \mu \lim \frac{\varphi'_n \sin u + \varphi'_{n+1} \sin v}{-\varphi_n \sin w} = \mu; \end{aligned}$$

ce qui conduit à une contradiction. $h(\varphi)$ a donc une dérivée à droite; de même, il y a une dérivée à gauche. Enfin, comme

$$2h(0)\cos\varphi \leqq h(\varphi) + h(-\varphi),$$

on a pour $\varphi > 0$,

$$\frac{h(\varphi) - h(0)}{\varphi} \geqq \frac{h(0) - h(-\varphi)}{\varphi} + h(0)\,\frac{2(\cos\varphi - 1)}{\varphi};$$

donc

$$\varphi'(+0) \geqq \varphi'(-0).$$

La proposition XIV qui complète les résultats de MM. Phragmén et Lindelöf est ainsi démontrée.

On peut observer, comme on l'a fait pour les fonctions convexes, que *la condition nécessaire et suffisante pour que $h(\varphi)$ supposée continue, soit sous-trigonométrique d'ordre ρ, est que l'on ait*

$$2\cos\frac{\rho}{2}(\varphi'-\varphi)\,h\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right) \leqq h(\varphi)+h(\varphi'), \tag{24}$$

pourvu que $\rho\,|\varphi'-\varphi|<\pi$.

Car cette condition qui est évidemment nécessaire entraîne lorsque φ_1 et φ_2 sont donnés $\left(\varphi_3=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\ 0<\varphi_1-\varphi_2<\frac{\pi}{\rho}\right)$ que $h(\varphi_3)$ est inférieur ou égal à la valeur $H(\varphi_3)=H(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1)$ du théorème VIII. Au point $\varphi_4=\frac{\varphi_3+\varphi_2}{2}$, $h(\varphi_4)$ sera inférieur à $H(\varphi_4, \varphi_2, \varphi_3)$ donc encore à $H(\varphi_4, \varphi_2, \varphi_1)$ car la fonction $H(\varphi, \varphi_2, \varphi_3)$ est inférieure ou égale à $H(\varphi, \varphi_2, \varphi_1)$ dans tout l'intervalle (φ_2, φ_3) puisqu'une fonction $H(\varphi)$ est déterminée par ses valeurs en deux points. Ainsi, pour tous les points obtenus en subdivisant successivement l'intervalle (φ_2, φ_1) en deux parties égales, $h(\varphi)\leqq H(\varphi, \varphi_2, \varphi_1)$ et puisque nous supposons $h(\varphi)$ continue, cette inégalité aura lieu pour tous les points de l'intervalle (φ_2, φ_1). *Il suffit d'ailleurs de supposer que* (24) *a lieu lorsque* $|\varphi-\varphi'|<\delta$, δ *étant un nombre fixe inférieur à* $\frac{\pi}{\rho}$ *pour que* (24) *soit vérifiée dans les conditions indiquées ci-dessus.* Car les inégalités

$$\begin{aligned}
2\cos\rho\delta'\,h\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right) &\leqq h(\varphi)+h(\varphi'), \qquad 0<\varphi'-\varphi=2\delta'<\frac{\pi}{\rho},\\
2\cos\rho\delta'\,h(\varphi') &\leqq h\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)+h(\varphi'+\delta'),\\
2\cos\rho\delta'\,h(\varphi) &\leqq h\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)+h(\varphi-\delta'),
\end{aligned}$$

entraînent par élimination de $h(\varphi)$ et $h(\varphi')$

$$2\cos 2\rho\delta'\,h\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\leqq h(\varphi-\delta')+h(\varphi'+\delta');$$

on peut donc doubler l'intervalle (φ, φ') et par des opérations de ce genre passer à l'inégalité (24) pour un intervalle donné de longueur moindre que $\frac{\pi}{\rho}$.

Il découle de là que si $h(\varphi)$, sous-trigonométrique d'ordre ρ, est positive dans un intervalle (φ_2, φ_1) adjacent des deux côtés à des segments sur lesquels $h(\varphi)$ est nulle, la fonction qui est égale à $h(\varphi)$ pour

$$2n\pi + \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 + 2n\pi \qquad (n \text{ entier})$$

et à zéro ailleurs est encore sous-trigonométrique d'ordre ρ. Plus généralement, *si l'on considère un intervalle* (φ_2, φ_1) *dans lequel* $h(\varphi) > m$ *tandis que* $h(\varphi_1) = h(\varphi_2) = m$, *la fonction égale à* $h(\varphi)$ *pour* $2n\pi + \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 + 2n\pi$ *et à m ailleurs est encore sous-trigonométrique d'ordre* ρ, car la fonction (23) égale à $h(\varphi_3)$ pour $\varphi = \varphi_3$, $(\varphi_3 > \varphi_2)$, et à m pour $\varphi_4 < \varphi_2$ est supérieure à m pour $\varphi_4 < \varphi \leqq \varphi_3$ et à $H(\varphi, \varphi_2, \varphi_3)$ pour $\varphi_2 \leqq \varphi < \varphi_3$; un calcul immédiat montre en effet que cette fonction est supérieure à m pour $\varphi = \varphi_2$.

Supposons qu'il existe un intervalle (φ_2, φ_1) *tel que* $h(\varphi_1) = h(\varphi_2) = m$ *et* $h(\varphi) > m$ *pour* $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ *et qu'en outre*

$$\rho(\varphi_1 - \varphi_2) < 2\pi.$$

Posons

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{\omega}{\rho},$$

et désignons par $h_1(\omega)$ la fonction de période 2π égale à $h(\varphi)$ lorsque $\frac{1}{2}\rho(\varphi_2 - \varphi_1) < \omega < \frac{1}{2}\rho(\varphi_1 - \varphi_2)$ et dans les intervalles homologues et égale à m partout ailleurs. $h_1(\omega)$ sera une fonction sous-trigonométrique d'ordre 1. Or on sait que pour qu'une fonction $h_1(\omega)$ soit sous-trigonométrique d'ordre 1, il faut et il suffit que la courbe « enveloppe » de la droite

$$x \cos\omega + y \sin\omega - h_1(\omega) = 0$$

soit convexe ([1]). Cette interprétation géométrique est possible pour

---

([1]) *Voir* W. Blaschke, *Jahresber. Deut. Math. Ver.*, t. **23**, 1914, p. 210-234 (en particulier p. 222) et H. Rademacher, *Math. Zeitsc.*, t. **13**, 1922, p. 18-27.

tous les φ (variant dans un intervalle de longueur 2π) lorsque $\rho < 1$.

11. Les résultats précédents se généralisent au cas des fonctions du type maximum de l'ordre ρ. Supposons que l'on ait

$$\log M(r, f) < W(r) r^{\rho}, \tag{25}$$

$W(r)$ étant une fonction indéfiniment croissante, d'ordre nul en r, telle que, si grand que soit le nombre fixe k, on ait à partir d'une valeur de r

$$W(kr) < 2 W(r).$$

On aura ici

$$|\arg f(z)| < D\, W(r) r^{\rho}$$

et l'inégalité (22) reste valable à condition d'y remplacer le dernier terme $O(1)$ par $O[W(r)]$. En comparant $L(r, \varphi)$ à une fonction $V(r)$ telle que

$$\lim_{r=\infty} \frac{W(r)}{V(r)} = 0, \tag{26}$$

tout ce qui a été dit ci-dessus au sujet de la fonction $h(\varphi)$ reste vrai. Il existe effectivement des fonctions pour lesquelles $h(\varphi)$ n'est pas toujours nulle, il suffit de prendre

$$V(r) \leqq \int_1^r \frac{W(r)}{r}\, dr,$$

condition compatible avec (26) puisque $W(r)$ vérifiant la condition de croissance indiquée

$$W(r) : \int_1^r \frac{W(r)}{r}\, dr$$

tend vers o avec $\frac{1}{r}$.