JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE ROY

Réaction en régime permanent d'un fluide incompressible parfait sur un solide immergé

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 439-456.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__439_0>

Réaction en régime permanent d'un fluide incompressible parfait sur un solide immergé;

PAR MAURICE ROY,

Ingénieur au Corps des Mines.

---

1. *Problème envisagé et définitions.* — Considérons le système formé par un solide S immergé dans un liquide parfait (dénué de viscosité), continu et indéfini, ce système étant en repos par rapport à un trièdre trirectangle $x_0y_0z_0$ pris pour système *d'axes absolus.*

Supposons que l'on mette en mouvement le solide S et qu'on lui communique un mouvement *hélicoïdal uniforme* (défini par les vitesses linéaire $-\overline{V}_0$ et angulaire $-\overline{\omega}$ parallèles à l'axe du mouvement) par rapport aux axes absolus.

Enfin, supposons que le mouvement du fluide soit devenu *permanent par rapport au solide.*

Par convention, nous qualifierons de *singularités du mouvement absolu* du fluide toutes les parties de l'espace offert à son écoulement, réduites éventuellement à des surfaces qui se trouvent comprises entre les domaines dans lesquels ce mouvement absolu est effectivement régi par un potentiel des vitesses continu et régulier : cette dénomination englobe par suite, notamment, les surfaces de glissement, les volumes et couches de tourbillon (absolu), enfin les régions de cavitation que peut comporter l'écoulement du fluide.

Au surplus nous admettrons, d'abord, que de telles *singularités ne s'étendent pas dans le fluide au delà d'un domaine fini englobant le solide,* ce qui entraîne notamment que le mouvement absolu du fluide est régi, à l'infini, par un potentiel continu et, nécessairement, uniforme.

Nous nous proposons ici d'exprimer, sous une forme qui se relie à la géométrie des vecteurs et en ne faisant intervenir que les vitesses du fluide à la surface du solide et les singularités du mouvement absolu du fluide, la réaction (absolue) que le fluide exerce sur le solide dans les conditions envisagées.

Cette forme spéciale de l'expression de cette réaction se prête à une utilisation avantageuse dans certains problèmes. C'est ainsi, en particulier, qu'elle permet, comme nous l'avons montré ailleurs (*cf.* M. Roy, *Sur l'aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices*, Gauthier-Villars, 1928), d'établir par une voie rationnelle et au moyen d'hypothèses simplificatrices faciles à discuter une théorie des ailes et des hélices que l'on peut faire coïncider avec la théorie issue des travaux de Joukowski et de Prandtl.

Signalons d'ailleurs, pour éviter toute confusion, que l'expression de la réaction envisagée en fonction non des caractères ci-dessus spécifiés du mouvement du fluide mais de ses conditions à l'infini est déjà connue dans le cas d'un solide en mouvement hélicoïdal uniforme tel que nous l'envisageons ici. Il convient notamment de citer à ce propos les travaux de M. U. Cisotti qui, en étudiant l'extension du paradoxe de d'Alembert à ce cas général, a établi dans son beau Mémoire *Sul moto permanente di un Solido in un Fluido indefinito* (*Atti del R. Ist. Veneto di Scienze*, 1909-1910, LXIX, p. 427-445) des résultats importants et en quelque sorte définitifs, que l'on retrouvera d'ailleurs plus loin comme conséquences de l'expression que nous allons établir (¹).

2. *Équations du mouvement relatif du fluide.* — Soit xyz un trièdre trirectangle lié au solide S, l'axe x étant parallèle à l'axe absolu x_0.

(¹) Les résultats établis dans la présente note ont fait l'objet en 1925 (*Comptes rendus*, séance du 26 octobre) d'une communication de l'auteur à l'Académie des Sciences. A cette époque, nous n'avions pas l'avantage de connaître le mémoire de M. Cisotti mentionné ci-dessus, dont nous n'avons eu connaissance que tout récemment (1931). C'est pourquoi, d'ailleurs, nous avons tenu à signaler ci-dessus la priorité de cet auteur en ce qui concerne les résultats en cause et à souligner l'objet essentiel de notre travail qui se rapporte à une certaine expression de la réaction du fluide sur le solide.

Par hypothèse, le mouvement du fluide par rapport à ce système d'axes, ou mouvement relatif, est permanent.

Ce mouvement satisfait aux équations de l'hydrodynamique :

$$\overline{D}.\overline{V} = 0. \tag{1}$$

$$\overline{\varpi} = \overline{D}\left(p + \rho\frac{V^2 - \omega^2 d^2}{2}\right) + 2\rho[(\overline{\Omega} - \overline{\omega}) \times \overline{V}]. \tag{2}$$

Dans ces relations, les lettres désignent :

$\overline{D}$, l'opérateur vectoriel symbolique $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$;

$\overline{V}$, la vitesse;

$\overline{\Omega}$, le tourbillon;

$\overline{\varpi}$, la force extérieure absolue agissant sur l'unité de volume du fluide;

$\overline{d}$, le rayon-vecteur normal à l'axe du mouvement et joignant cet axe à un point du fluide;

p, la pression;

ρ, la densité du fluide.

Enfin, la notation $(\overline{a}.\overline{b})$ représente le produit géométrique (scalaire) des vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$ et la notation $(\overline{a} \times \overline{b})$ le produit vectoriel (vecteur) de ces deux vecteurs.

Par convention, nous supposons les trièdres xyz et $x_a y_a z_a$ directs (sens positif trigonométrique) et les axes x et x_a confondus avec l'axe du mouvement hélicoïdal du solide S.

Rappelons en passant que l'on a

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2}(\overline{D} \times \overline{V}).$$

Supposons désormais le fluide *soustrait à l'action de forces extérieures.* On a alors, dans tout le fluide venant de l'infini amont, où la pression est p_0 :

$$q = p + \rho\frac{V^2 - \omega^2 d^2}{2} = p_0 + \rho\frac{V_0^2}{2} = q_0. \tag{3}$$

3. *Expression de la réaction en fonction des conditions à l'infini.* — Rappelons ici, pour mémoire, cette expression.

Soient Σ une sphère de rayon très grand, ayant l'origine pour centre, et ϖ le domaine compris entre S et Σ.

En appliquant le théorème des quantités de mouvement et celui des moments cinétiques au fluide compris dans le domaine ϖ, on obtient, pour les composantes de la résultante $\overline{\mathrm{F}}$ et du moment résultant (par rapport à l'origine) G des actions absolues du fluide sur le solide et en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à Σ :

$$
(4)\quad\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{F}_x &= -\int_\Sigma [p\alpha + \rho u_a(\alpha u + \beta v + \gamma w)]\,d\sigma,\\
\mathrm{F}_y &= -\int_\Sigma [p\beta + \rho v_a(\alpha u + \beta v + \gamma w)]\,d\sigma - \int_\varpi \rho\omega w_a\,dv,\\
\mathrm{F}_z &= -\int_\Sigma [p\gamma + \rho w_a(\alpha u + \beta v + \gamma w)]\,d\sigma + \int_\varpi \rho\omega v_a\,dv,\\
\mathrm{G}_x &= -\int_\Sigma \rho(y w_a - z v_a)(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,d\sigma,\\
\mathrm{G}_y &= -\int_\Sigma \rho(z u_a - x w_a)(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,d\sigma\\
&\quad + \int_\varpi \rho[\omega(y u_a - x v_a) - \mathrm{V}_0 w_a]\,dv,\\
\mathrm{G}_z &= -\int_\Sigma \rho(x v_a - y u_a)(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,d\sigma\\
&\quad + \int_\varpi \rho[\omega(z u_a - x w_a) + \mathrm{V}_0 v_a]\,dv.
\end{aligned}
\right.
$$

4. *Obstacle fluide.* — Soit $\mathcal{V}_0$ le volume limité par la surface S du solide.

Traçons *dans le fluide*, à une distance finie et constante ε du solide S, une surface fermée S'. Cette surface enveloppe complètement et sans la toucher la surface S.

Soit $\mathcal{V}$ le domaine compris entre S et S'.

Déterminons, dans ce domaine, une distribution de vitesse $\overline{\mathrm{V}}'$, permanente et satisfaisant à l'équation de continuité

$$\overline{\mathrm{D}}.\overline{\mathrm{V}}' = 0$$

et aux conditions aux limites suivantes, savoir :

a. sur S :

$$V'_S = 0; \tag{5}$$

b. sur S′ :

$$V'_{S'} = V_{S'}. \tag{6}$$

Le problème envisagé comporte, en général, une infinité de solutions. Considérons l'une de ces solutions, arbitrairement choisie. Elle représente un courant liquide, permanent dans le domaine $\mathcal{V}$ avec repos sur la surface S et raccordement, sur S′, au courant primitif extérieur.

Imposons à ce courant la condition arbitraire

$$q' = p' + \rho\frac{V'^2 - \omega^2 d^2}{2} = q_0.$$

Pour que cette condition soit vérifiée en même temps que l'équation (2), il faut et il suffit que ce courant soit soumis à la contrainte d'une action extérieure $\overline{\varpi}$ définie par

$$\overline{\varpi} = 2\rho[(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \times \overline{V}']. \tag{7}$$

Imaginons maintenant que le volume $\mathcal{V}_0$, intérieur à S, soit rempli par du liquide de densité ρ, en repos par rapport à S. La pression sur la surface extérieure de ce *noyau fluide* a pour valeur

$$p_S = \text{const.} + \rho\frac{\omega^2 d^2}{2}.$$

Donnons à la constante arbitraire la valeur q_0 et juxtaposons à ce noyau le courant fictif $\overline{V}'$ contenu dans le domaine $\mathcal{V}$.

En chaque point de la surface commune S de ces deux masses fluides la vitesse relative est nulle et les pressions s'équilibrent. La juxtaposition effectuée ne trouble donc ni le mouvement du courant fictif $\mathcal{V}$ ni l'équilibre du noyau $\mathcal{V}_0$.

Sur la surface S′, par contre, il existe une discontinuité entre les pressions au même point $p_{S'}$ et $p'_{S'}$ du courant primitif (extérieur) et du courant fictif $\mathcal{V}$.

Cette discontinuité peut être équilibrée par une action extérieure s'exerçant sur une couche très mince du fluide au voisinage de la surface S′, action qu'on peut assimiler à une *action superficielle normale localisée sur* S′ et d'intensité

$$(8) \qquad \overline{Q}' = -\overline{n}'(p'_{S'} - p_{S'}) = -\overline{n}'(q_0 - q_{S'}),$$

$\overline{n}'$ désignant le vecteur-unité normal extérieurement à S′.

Ainsi, l'obstacle solide S et la portion du courant primif comprise dans $\mathcal{V}$ peuvent être remplacés par le noyau liquide $\mathcal{V}_0$ enveloppé par le *courant fictif ou asservi* occupant le domaine $\mathcal{V}$ et soumis, dans ce domaine, au champ des actions extérieures de volume $\overline{\varpi}$ et, sur la frontière S′, au champ des actions extérieures superficielles $\overline{Q}'$.

Dans le raisonnement qui précède, l'étendue du domaine $\mathcal{V}$ est finie, mais arbitraire. On peut la supposer infiniment petite, c'est-à-dire, à la limite, la surface S′ confondue, simultanément en tous ses points, avec la surface S.

Le solide envisagé peut alors être remplacé, à la limite, par le noyau liquidé $\mathcal{V}_0$ enveloppé par une surface ou nappe de tourbillon qui coïncide avec la surface S.

On peut appeler *intensité* de cette nappe, par analogie de celle-ci avec une nappe de courant électrique, la grandeur

$$(9) \qquad \overline{\gamma} = \overline{n} \times \overline{V}_S.$$

Les tourbillons de la nappe S sont *asservis* par la contrainte d'une action extérieure superficielle, d'intensité

$$\overline{N} = \frac{1}{2}\rho[\overline{\gamma} \times \overline{V}_S] - \overline{n}[q_0 - q_s],$$

ou, en tenant compte de (9),

$$(10) \qquad \overline{N} = -\overline{n}\left(q_0 - p_S + \rho\frac{\omega^2 d^2}{2}\right).$$

Sous cette forme on reconnaît que, à une constante près, l'action normale $\overline{N}$ est égale et opposée à la pression $(-\overline{n}p_S)$ du courant libre sur le solide S, corrigée d'un terme $\left(\overline{n}\rho\frac{\omega^2 d^2}{2}\right)$ dû à l'intervention de la force centrifuge dans le courant hélicoïdal permanent.

5. *Substitution de tourbillons aux singularités du mouvement absolu.* —

L'artifice de l'obstacle fluide permet, par l'introduction d'un courant fictif tourbillonnaire convenablement asservi, de réaliser la continuité du fluide à travers le domaine $\mathcal{V}_0$ primitivement occupé par le solide S.

Un artifice analogue permet de combler les régions de cavitation par un noyau fluide, en équibre dans le mouvement relatif et enveloppé par une nappe de tourbillon convenablement asservie. Les actions extérieures introduites forment dans ce cas, pour chaque région fermée de cavitation, un système équivalent à zéro.

Enfin, les surfaces de glissement, s'il en existe dans le fluide, sont équivalentes à des surfaces de tourbillon et peuvent être considérées sous cet aspect.

Ainsi, toutes les singularités du mouvement absolu du fluide équivalent à des régions ou à des surfaces de tourbillon au sein d'un courant liquide, en partie fictif ou asservi, mais rendu continu dans tout l'espace.

6. *Vitesse du fluide.* — Dans le fluide indéfini et rendu entièrement continu par le procédé ci-dessus indiqué, les singularités du mouvement absolu et, par suite, les tourbillons équivalents ne s'étendent pas au delà d'un domaine qui englobe le solide et dont l'étendue, en raison de l'hypothèse spécifiée plus haut, est finie.

Par suite, la vitesse absolue du fluide peut être déterminée en appliquant la loi de Biot et Savart à l'ensemble des tourbillons absolus dans le fluide.

Le tourbillon absolu a pour valeur :

dans le domaine $\mathcal{V}$:

$$\overline{\Omega}'_a = \overline{\Omega}' - \overline{\omega};$$

dans le domaine $\mathcal{V}_0$:

$$\overline{\Omega}'_a = -\overline{\omega};$$

dans le reste du fluide ou domaine complémentaire $\mathcal{D}$:

$$\overline{\Omega}_a = \overline{\Omega} - \overline{\omega}.$$

Désignons par $\overline{V}_{\Omega'_a}$ et $\overline{V}''_{\Omega_a}$ les vitesses engendrées, suivant la loi de Biot et Savart, par les tourbillons absolus contenus, respectivement, dans les domaines $(\mathcal{V} + \mathcal{V}_0)$ et $\mathcal{D}$.

On a, en un point P,

$$(11)\qquad \begin{cases} \overline{V}_{\Omega'_a} = \displaystyle\int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} \frac{[(\overline{\Omega}'_a)_{P'} \times \overline{r}_{P'P}]}{2\pi r^3} d\varpi_{P'}, \\ \overline{V}_{\Omega''_a} = \displaystyle\int_{\omega} \frac{[(\overline{\Omega}''_a)_{P'} \times \overline{r}_{P'P}]}{2\pi r^3} d\varpi_{P'}. \end{cases}$$

Ces relations sont valables en tout point P du fluide, sauf sur une surface de glissement. Sur une telle surface, les intégrales précédentes sont indéterminées. Toutefois, lorsque l'étendue du domaine $\mathcal{V}$ est finie, l'intégrale qui définit $\overline{V}_{\Omega'_a}$ est, en général, définie en tout point du volume $\mathcal{V}$.

Des relations (11) et de l'hypothèse que les singularités du mouvement absolu du fluide sont toutes situées à distance finie du solide immergé, il résulte immédiatement, ainsi que l'a d'ailleurs démontré par une autre voie M. Painlevé (¹), que la *vitesse absolue du fluide s'annule à une distance* R *très grande du solide comme* $\frac{1}{R^3}$.

La vitesse $\overline{V}$ (ou $\overline{V}'$) dans le mouvement relatif permanent a pour valeur au point P :

$$(12)\qquad \overline{V} = \overline{V}_0 + (\overline{\omega} \times \overline{d}) + \overline{V}_{\Omega'_a} + \overline{V}_{\Omega''_a}.$$

En particulier, en tout point de $\mathcal{V}_0$:

$$\overline{V} = 0.$$

7. *Réaction du courant sur le solide immergé.* — Considérons, dans le courant permanent primitif, le système formé par le solide S et la partie de ce courant comprise dans le domaine $\mathcal{V}$ (supposé d'abord d'étendue finie).

Considérons, d'autre part, le système formé par le noyau liquide $\mathcal{V}_0$ et le courant asservi occupant le domaine $\mathcal{V}$.

En comparant ces deux systèmes, on remarque que la vitesse et la pression du courant libre extérieur ont, respectivement, en chaque

(¹) *Cf.* P. Painlevé, *Leçons sur l'Hydrodynamique professées à la Faculté des Sciences de Paris* (1923-1924).

point de la frontière S′, la même valeur dans les deux systèmes. De plus, les systèmes comparés sont en mouvement permanent.

Les forces extérieures (relatives) agissant sur chacun de ces systèmes forment, par suite, deux systèmes de forces équivalents.

Soit $(\overline{A}, \overline{C})$ l'ensemble des actions extérieures absolues, autres que la pression du fluide ambiant, qui maintiennent le solide S en équilibre dans le courant, $\overline{A}$ et $\overline{C}$ représentant la résultante et le moment résultant (par rapport à l'origine) de ces forces.

La réaction absolue du fluide sur le solide immergé peut se caractériser, de même, par sa résultante $\overline{F}$ et son moment résultant (par rapport à l'origine) G et l'on a, en désignant par ρ_0 la densité du solide S,

$$(13)\qquad (\overline{F}, \overline{G}) \sim -\int_S \overline{n} p_S \, ds \sim -(\overline{A}, \overline{C}) - \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \omega^2 \overline{d} \, dv.$$

L'équivalence (exprimée par le symbole $\sim$) des forces extérieures (relatives) agissant sur les systèmes comparés se traduit par la relation

$$\begin{aligned}(\overline{A}, \overline{C}) - \int_{S'} \overline{n}' p_{S'} \, d_{S'} + \int_{\mathcal{V}} [\rho \omega^2 \overline{d} + 2\rho(\overline{\omega} \times \overline{V})] \, dv + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \omega^2 \overline{d} \, dv \\ \sim -\int_{S'} \overline{n}' p_{S'} \, ds' + \int_{S'} \overline{Q}' \, ds' + \int_{\mathcal{V}} [\overline{\varpi} + \rho \omega^2 \overline{d} + 2\rho(\overline{\omega} \times \overline{V}')] \, dv \\ + \int_{\mathcal{V}_0} \rho \omega^2 \overline{d} \, dv,\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (13) et des expressions (7) et (8) de $\overline{\varpi}$ et de $\overline{Q}'$,

$$\begin{aligned}(14)\qquad (\overline{F}, \overline{G}) \sim \int_{S'} \overline{n}'(q_0 - q_{S'}) \, ds' - 2\rho \int_{\mathcal{V}} [\overline{\omega} \times (\overline{V}' - \overline{V})] \, dv \\ - 2\rho \int_{\mathcal{V}} [(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \times \overline{V}'] \, dv - \rho \int_{\mathcal{V}_0} \omega^2 \overline{d} \, dv.\end{aligned}$$

Cette expression est indépendante de l'étendue du domaine $\mathcal{V}$ et l'on peut faire tendre celle-ci vers zéro.

Tous les termes de cette relation tendent alors vers une limite bien déterminée, mais cette limite n'apparaît pas immédiatement pour la troisième intégrale du second membre qu'il est préférable de mettre sous une autre forme. On peut écrire, en tenant compte de (12),

$$(15)\qquad \int_{\mathcal{V}} [(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \times \overline{V}'] \, dv \sim \int_{\mathcal{V}} \{(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \times [\overline{V}_0 + (\overline{\omega} \times \overline{d}) + \overline{V}_{\Omega'_a} + \overline{V}_{\Omega_a}]\} \, dv.$$

La vitesse $\overline{V}'$ du courant fictif étant nulle en tout point du noyau $\mathcal{V}_0$, l'intégrale précédente peut être étendue, sans changer de valeur, au domaine $(\mathcal{V}+\mathcal{V}_0)$. Dans le volume $\mathcal{V}_0$, le tourbillon absolu $\overline{\Omega}'_a$ se réduit à $-\overline{\omega}$. En développant l'expression précédente, on a donc :

$$
(16)\quad \int_{\mathcal{V}} [(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \times \overline{V}'] dv \sim \int_{\mathcal{V}} \{(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \times [\overline{V}_0 + (\overline{\omega} \times \overline{d}) + \overline{V}''_{\Omega_a}]\} dv
$$
$$
+ \int_{\mathcal{V}_0} \omega^2 \overline{d}\, dv + \int_{\mathcal{V}_0} (-\overline{\omega} \times \overline{V}''_{\Omega_a}) dv
$$
$$
+ \int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} (\overline{\Omega}'_a \times \overline{V}'_{\Omega'_a}) dv.
$$

La dernière intégrale s'écrit

$$
\int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} [\overline{\Omega}'_a \times \overline{V}'_{\Omega'_a}]_P dv_P
$$
$$
\sim \int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} \int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} \left\{ \frac{(\overline{\Omega}'_a)_{P'} [(\overline{\Omega}'_a)_P \overline{r}_{P'P}] - \overline{r}_{P'P} [(\overline{\Omega}'_a)_P (\overline{\Omega}'_a)_{P'}]}{2\pi r^3} \right\}_P dv_P dv_{P'}
$$
$$
\sim \int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} \int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} [(\overline{\Omega}'_a)_{P'}]_P \frac{(\overline{\Omega}'_a)_P \overline{r}_{P'P}}{2\pi r^3} dv_P dv_{P'}.
$$

Avec les notations adoptées et lorsqu'il y a lieu de distinguer, la première lettre indice affectant un vecteur désigne le point de l'espace auquel se rapporte la valeur de ce vecteur et la seconde son point d'application.

Dans le domaine $(\mathcal{V}+\mathcal{V}_0)$, le vecteur $\overline{\Omega}'_a = \overline{\Omega}' - \overline{\omega}$ peut être discontinu sur la surface S, mais sa composante normale reste continue à la traversée de cette surface en vertu de la condition

$$
\overline{V}'_S = 0,
$$

imposée au courant fictif sur S.

Sur la surface S′, la composante normale de ce tourbillon est égale à celle du tourbillon extérieur $\overline{\Omega}_a$ en vertu de la condition

$$
\overline{V}'_{S'} = \overline{V}_S.
$$

En tenant compte de ce fait, il est facile de montrer que l'intégrale précédente peut se mettre sous la forme

$$(17)\quad \int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0} [\Omega'_a \times \overline{V}_{\Omega'_a}]_P dv_P \sim -\int_{\mathcal{V}+\mathcal{V}_0}\int_{S'} [(\overline{\Omega}'_a)_{P'}]_P \frac{(\overline{\Omega}_a \overline{n}')_P}{2\pi r} ds'_P dv_{P'}.$$

Les expressions (16) et (17) permettent de déterminer aisément les limites respectives des différents termes de $(\overline{F}, \overline{G})$ lorsque, dans la relation (14), on fait tendre l'étendue du volume $\mathcal{V}$ vers zéro.

Dans ce passage à la limite, la surface S′ tend vers S, la vitesse $\overline{V}'$ reste finie dans $\mathcal{V}$, le tourbillon $\overline{\Omega}'$ ou $\overline{\Omega}'_a$ du courant fictif $\mathcal{V}$ devient infiniment grand, mais les vecteurs élémentaires $\overline{\Omega}' dv$ et $\overline{\Omega}'_a dv$ tendent tous deux vers $\frac{1}{2}\overline{\gamma}ds$, $\overline{\gamma}$ étant l'*intensité* définie par (9) de la surface de tourbillon S.

Après réduction, on obtient, en définitive, pour la réaction absolue du fluide sur le solide, l'expression

$$\begin{aligned}(18)\quad (\overline{F}, \overline{G}) \sim & \int_S \overline{n}(q_0 - q_s)ds - 3\rho\int_{\mathcal{V}_0} \omega^2 \overline{d}\, dv - 2\rho\int_{\mathcal{V}_0} (\overline{V}''_{\Omega_a} \times \overline{\omega})dv \\ & - 2\rho\int_{\mathcal{V}_0}\int_S (\overline{\omega})_P \frac{[\overline{\Omega}_a \overline{n}]_P}{2\pi r} ds_P dv_{P'} \\ & + \rho\int_S \{[\overline{V}_0 + (\overline{\omega}\times\overline{d}) + \overline{V}''_{\Omega_a}]\times\overline{\gamma}\} ds \\ & + \rho\int_S\int_S (\overline{\gamma}_{P'})_P \frac{(\overline{\Omega}_a \overline{n})_P}{4\pi r} ds_P ds_{P'}.\end{aligned}$$

Cette relation vectorielle représente symboliquement la résultante et le moment résultant auxquels on peut réduire la réaction absolue du courant sur l'obstacle, en fonction des conditions à la surface $(q_S, \overline{V}_S$ *ou* $\overline{\gamma})$ *et des singularités* $(\overline{\Omega}_a)$ *du mouvement absolu du fluide.* Elle fournit ainsi l'expression de cette réaction que nous nous proposions d'établir.

Assurément, cette relation n'est pas simple et l'on peut remarquer qu'elle suppose connues les grandeurs q_S et V_S sur la surface de l'obstacle, c'est-à-dire aussi la pression correspondante p_s du courant, en fonction de laquelle on a beaucoup plus simplement :

$$(\overline{F}, \overline{G}) \sim -\int_S \overline{n} p_S ds.$$

ainsi qu'il a été indiqué plus haut [relation (13)].

Toutefois, il est un cas où cette expression se simplifie extrêmement : c'est celui où le mouvement absolu du fluide dépend d'un potentiel continu dant tout l'espace, à l'extérieur du solide.

8. *Cas où le mouvement absolu du fluide est régi par un potentiel continu, régulier à l'infini.* — Dans ce cas, on a, dans tout le fluide,

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} q &= q_0, \\ \overline{\Omega}_a &= 0, \\ \overline{V}''_{\Omega_a} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on désigne par $-\overline{V}_e$ la vitesse d'entraînement, dans le mouvement du solide S, par rapport aux axes absolus :

$$-\overline{V}_e = -\overline{V}_0 - (\overline{\omega} \times \overline{d}),$$

et par $(\overline{F}_c, \overline{G}_c)$ la force centripète qui s'exercerait sur le solide S si celui-ci était doué d'une densité triple de celle ρ du liquide extérieur, la réaction du courant sur le solide immergé est donnée, en vertu de (18) et (19), par

$$(20) \qquad (\overline{F}, \overline{G}) \sim (\overline{F}_c, \overline{G}_c) + \rho \int_S (\overline{V}_e \times \overline{\gamma})\, ds.$$

Considérons, en particulier, la résultante $\overline{F}$ seule. Celle-ci peut s'écrire, en désignant par $\overline{W}$ la vitesse absolue du fluide,

$$\begin{aligned} \overline{F} = \rho \overline{V}_0 \times \int_S \overline{\gamma}\, ds + \rho \int_S \{ (\overline{\omega} \times \overline{d}) \times (\overline{n} \times [\overline{V}_0 + (\overline{\omega} \times \overline{d}) + \overline{W}]) \} ds \\ - 3\rho \int_{\mathcal{V}_0} \omega^2 \overline{d}\, dv. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_S \overline{\gamma}\, ds = \int_S (\overline{n} \times [\overline{V}_0 + (\overline{\omega} \times \overline{d}) + \overline{W}])\, ds = 2\overline{\omega} \mathcal{V}_0,$$

$$\int_S [(\overline{\omega} \times \overline{d}) \times (\overline{n} \times \overline{V}_0)]\, ds = -\overline{\omega} \int_S [\overline{n}(\overline{V}_0 \times \overline{d})]\, ds = 0,$$

$$\int_S \{(\overline{\omega} \times \overline{d}) \times [\overline{n} \times (\overline{\omega} \times \overline{d})]\} ds = \omega^2 \int_S \overline{d}(\overline{n}\, d)\, ds,$$

$$\int_S \{(\overline{\omega} \times \overline{d}) \times (\overline{n} \times \overline{W})\} ds = \int_S \overline{d}[\overline{n}(\overline{W} \times \overline{\omega})]\, ds - \overline{\omega} \int_S \overline{n}(\overline{W} \times \overline{d})\, ds.$$

Soit Σ une sphère ayant l'origine pour centre et entourant complètement l'obstacle S. Soit Δ le domaine compris entre S et Σ. La formule de Green permet d'écrire

$$\int_S \overline{n}(\overline{W} \times \overline{d})ds = \int_\Sigma \overline{n}(\overline{W} \times \overline{d})d\sigma - \int_\Delta \overline{D}(\overline{W} \times \overline{d})dv.$$

La dernière intégrale est nulle, car

$$\overline{D}(\overline{W} \times \overline{d}) = -\overline{W}(\overline{D} \times \overline{d}) + \overline{d}(\overline{D} \times \overline{W}) = 0.$$

La première intégrale du second membre est également nulle, car son élément relatif à l'anneau $\delta\Sigma$ de la sphère Σ, compris entre les parallèles de rayon d et $(d + \delta d)$, a pour expression

$$(21) \qquad \int_{\delta\Sigma} \overline{n}.(\overline{W} \times \overline{d})d\sigma = d.\delta d.\Gamma_d,$$

Γ_d désignant la circulation du fluide dans le mouvement absolu sur le parallèle de rayon d. Or, cette circulation est nulle puisque le mouvement absolu du fluide dépend d'un potentiel continu, nécessairement uniforme sur Σ.

En tenant compte des relations précédentes, l'expression de $\overline{F}$ se met alors sous la forme simplifiée :

$$(22) \qquad \overline{F} = \rho \int_S \overline{d}\{\overline{n}[\omega^2\overline{d} + (\overline{W} \times \overline{\omega})]\}ds - 3\rho \int_{v_0} \omega^2 \overline{d} dv.$$

Sous cette forme on reconnaît que la composante F_x (suivant l'axe du mouvement) de la force $\overline{F}$, dont tous les éléments sont parallèles à $\overline{d}$, c'est-à-dire normaux à l'axe x, est nulle. De plus, si le mouvement du solide se réduit à une translation $(\overline{\omega} = 0)$, la force F est nulle.

La relation (20) permet d'ailleurs de former immédiatement l'expression des composantes de $\overline{F}$ suivant les axes xyz. On a, en tenant compte des relations

$$u = u_a + V_0, \qquad v = v_a - \omega z, \qquad w = w_a + \omega y,$$

et par un calcul facile :

$$(23)\quad \begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = \rho \int_S \omega y(\beta w_a - \gamma v_a)\, ds, \\ F_z = \rho \int_S \omega z(\beta w_a - \gamma v_a)\, ds. \end{cases}$$

Le couple résultant $\overline{G}$, évalué par rapport à l'origine O, a pour expression, en désignant par $\overline{l}$ le rayon-vecteur $\overline{OM}$ d'un point M,

$$\overline{G} = -3\rho \int_{v_0} \omega^2(\overline{l} \times \overline{a})\, dv + \rho \int_S [\overline{l} \times (\overline{V}_e \times \overline{\gamma})]\, ds.$$

De cette relation, on déduit facilement, pour les composantes de ce vecteur,

$$(24)\quad \begin{cases} G_x = \rho V_0 \int_S [y(\gamma u - \alpha w) + z(\alpha v - \beta u)]\, ds, \\ G_y = \rho \int_S \{\omega[z^2(\beta u - \alpha v) - yz(\gamma u - \alpha w) \\ \qquad - xz(\beta w - \gamma v)] - x V_0(\gamma u - \alpha w)\}\, ds + \int_{v_0} 3\rho\omega^2 xz\, dv, \\ G_z = \rho \int_S \{\omega[xy(\beta w - \gamma v) - yz(\beta u - \alpha v) \\ \qquad - y^2(\gamma u - \alpha w)] - x V_0(\alpha v - \beta u)\}\, ds - \int_{v_0} 3\rho\omega^2 xy\, dv. \end{cases}$$

En passant de la surface S à celle de la sphère Σ et en tenant compte de (21), on obtient

$$(25)\quad \begin{cases} G_x = 0, \\ G_y = \int_\Delta \rho[\omega(y u_a - x v_a) - V_0 w_a]\, dv + \rho \int_\Sigma x V_0(\alpha w_a - \gamma u_a)\, d\sigma, \\ G_z = \int_\Delta \rho[\omega(z u_a - x w_a) + V_0 v_a]\, dv + \rho \int_\Sigma x V_0(\beta u_a - \alpha v_a)\, d\sigma. \end{cases}$$

Les relations (23) et (25) montrent que la réaction absolue du courant sur le solide immergé se réduit, en tout point de l'axe x du mouvement hélicoïdal uniforme du solide, à une résultante $\overline{F}$ et à un couple résultant $\overline{G}$, tous deux perpendiculaires à l'axe x [1]. Il en résulte que le mouvement du solide peut être entretenu sans dépense d'énergie : *le courant envisagé n'échappe pas au paradoxe de d'Alembert* convenablement généralisé.

En définitive, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'ensemble des efforts absolus exercés sur un solide* S, *animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme, par un courant liquide permanent dont le mouvement absolu dépend d'un potentiel continu dans tout l'espace et régulier à l'infini, est équivalent à un système composé :*

1° *des efforts centripètes qui s'exerceraient sur le volume* $\mathcal{V}_0$ *du solide, si la densité de celui-ci était triple de celle du liquide,*

$$-3\rho\int_{V_0}\omega^2\,\overline{d}\,dv;$$

2° *des actions élémentaires*

$$\rho(\overline{V}_e\times\overline{\gamma})\,ds,$$

attachées à chaque élément de la surface S *du solide.*

Ce système se réduit, en tout point de l'axe x du mouvement, à une résultante $\overline{F}$ *et à un couple résultant* $\overline{G}$ *perpendiculaires à cet axe.*

Si le mouvement du solide se réduit à une translation uniforme $(\overline{\omega}=0)$, *la résultante* $\overline{F}$ *est nulle et la réaction du courant sur l'obstacle se réduit à un couple résultant* $\overline{G}$ *perpendiculaire à la direction de la translation.*

Ce théorème, qui se rattache à celui de M. Cisotti dans le Mémoire déjà cité plus haut, *généralise et complète* un théorème de M. Pascal [2], dont l'énoncé ne visait que la résultante $\overline{F}$ et le cas du solide en translation.

---

(1) Ce résultat a été établi par M. U. Cisotti dans le Mémoire déjà cité. La démonstration qui en est donnée ici repose sur la nullité d'une intégrale double étendue à la surface de la sphère Σ et dont l'élément relatif à un anneau élémentaire $\delta\Sigma$ de cette sphère est nul en vertu de (21). Ce mode de démonstration a été indiqué par M. H. Vergne (*C. R. Acad. Sc.*, 16 avril 1923).

(2) *Cf.* M. PASCAL, *Atti dei Lincei*, vol. 30, 1er semestre 1921, p. 249.

Il généralise et complète également le théorème de Joukowski dont l'énoncé ne vise que la résultante $\overline{F}$, le problème plan ou à deux dimensions et le cas du solide en translation.

9. *Cas où les singularités du courant atteignent l'infini.* — Dans ce cas, les artifices indiqués plus haut permettent encore de réaliser de manière fictive la continuité du liquide indéfini en régime permanent, mais l'application de la loi de Biot et Savart à la détermination de la vitesse absolue du fluide paraît mise en défaut par les singularités du courant à l'infini.

Les démonstrations classiques de la validité de cette loi reposent, en effet, sur l'hypothèse que les tourbillons contenus dans le fluide continu et indéfini sont tous situés à distance finie.

Cette difficulté peut être levée de la manière suivante :

Admettons que les singularités du mouvement absolu du fluide (surfaces de glissement, tourbillons, cavitations) ne puissent naître qu'à la paroi du solide (¹). Leur développement au sein du fluide exige, pour atteindre l'infini, un laps de temps infini et le régime permanent envisagé ne peut être conçu que comme une *limite vers laquelle le régime varié tend asymptotiquement avec le temps écoulé.*

Considérons la période du régime varié. Le fluide peut être rendu continu, à tout instant de cette période, en imaginant dans le domaine $\mathcal{V}$ compris entre les surfaces invariables S et S′ un courant fictif soumis aux conditions énumérées à l'article 4. Ce courant tourbillonnaire sera soumis, dans le domaine $\mathcal{V}$, à un champ d'actions extérieures d'intensité (variable avec le temps) :

$$\overline{\varpi}' = 2\rho[(\overline{\Omega}' - \overline{\omega}) \wedge \overline{V}'] - \rho\frac{\partial \overline{V}'}{dt}$$

et, sur la frontière S′, au champ d'actions extérieures superficielles d'in-

(¹) On pourrait aussi invoquer, pour expliquer la naissance de ces singularités, la présence d'obstacles parasites (poussière en suspension, par exemple) ou la formation de bulles gazeuses au sein du liquide. Il serait aisé de mettre le raisonnement utilisé ici d'accord avec ces hypothèses.

tensité (variable avec le temps),

$$\overline{Q}' = -\overline{n}'(q_0 - q_{S'}).$$

Par cet artifice, l'obstacle solide peut être remplacé *à tout instant* par un obstacle fluide.

La continuité du fluide étant ainsi rétablie, la loi de Biot et Savart, applicable à tout instant du régime varié, permet de déterminer la vitesse absolue du fluide au même instant en utilisant les tourbillons du mouvement absolu, tourbillons qui se ferment alors tous sur eux-mêmes à distance finie.

Cette application restant valable quel que soit le temps écoulé, il en résulte que :

1° Dans la configuration des tourbillons absolus qui correspond au courant permanent (rendu artificiellement continu), l'application de la loi de Biot et Savart à l'ensemble de ces tourbillons et par rapport à un point quelconque situé à distance finie du solide (et en dehors d'une surface de tourbillon) fournit un vecteur déterminé;

2° Ce vecteur représente la vitesse absolue du fluide, au point considéré, dans le régime permanent.

Ce résultat montre que les raisonnements utilisés et les relations établies à l'article **7** sont encore valables dans le cas où les singularités du mouvement absolu du fluide atteignent l'infini.

L'équation symbolique (18) est, par suite, *générale*.

Cas où le solide est animé d'une translation uniforme. — Dans ce cas, la rotation $(-\overline{\omega})$ du solide est nulle et le tourbillon absolu $\overline{\Omega}_a$ coïncide en chaque point avec le tourbillon relatif $\overline{\Omega}$ correspondant.

La relation (18) se simplifie notablement et donne

$$(\overline{F}, \overline{G}) \sim \int_S \overline{n}(q_0 - q_S)\,ds + \rho\int_S [(\overline{V}_0 + \overline{V}_{\overline{\Omega}}) \times \overline{\gamma}]\,ds + \rho\int_S\int_S (\overline{\gamma}_{P'})_P \frac{(\overline{\Omega}\,\overline{n})_P}{2\pi r}\,ds_P\,ds_{P'}, \tag{18 bis}$$

avec

$$q_S = p_S + \rho\frac{V_S^2}{2}, \qquad q_0 = p_0 + \rho\frac{V_0^2}{2}, \qquad \overline{\gamma} = (\overline{n} \times \overline{V}_S).$$

Si le mouvement du fluide dépend d'un potentiel continu, cette relation se réduit à

$$(\bar{F}, \bar{G}) \sim \rho \int_{s} (\bar{V}_0 \times \bar{\gamma})\, ds \tag{20^{bis}}$$

et l'on a

$$\int_{s} \gamma\, ds = \int_{\Sigma_\infty} (\bar{n} \times V)\, d\sigma - \int_{\mathcal{D}_\infty} 2\bar{\Omega}\, dv = 0.$$

De cette remarque (¹) il résulte immédiatement que

$$\bar{F} = 0.$$

(¹) Cette remarque a été faite par M. P. Noaillon (*C. R. Acad. Sc.*, 176, 16 avril 1923) à propos du théorème formulé antérieurement par M. Pascal.