

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. LABROUSSE

Vecteurs complexes et cercles orthogonaux à une sphère. Parataxie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 10 (1931), p. 307-334.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10_307_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Vecteurs complexes et cercles orthogonaux à une sphère.
Parataxie ;

PAR A. LABROUSSE.

Introduction.

Les quelques remarques que nous présentons ici nous ont été suggérées par une conférence de M. Bertrand Gambier, faite le 26 juin 1929, à la Société mathématique de France, pour exposer ses recherches toutes récentes sur l'extension aux cercles de l'espace de la configuration des dix droites, dite configuration Petersen-Morley.

M. Gambier avait, dans cette conférence, utilisé pour la représentation des cercles Γ orthogonaux à une sphère fixe S , des éléments de la géométrie non euclidienne à quatre dimensions (¹). Nous avons ici indiqué une autre représentation basée sur l'emploi de vecteurs complexes, de façon à ne pas sortir du domaine de l'espace à trois dimensions; ce procédé a l'avantage de condenser en une seule relation (complexe) les deux conditions de perpendicularité de deux cercles Γ . Il y a deux représentations complexes distinctes à employer suivant que la sphère S est de rayon réel ou imaginaire pure. Dans ce dernier cas, les propriétés paratactiques se mettent en évidence en utilisant les diviseurs $1+j$ et $1-j$ de l'expression j^2-1 dont la nullité est prise comme définition du symbole j .

(¹) Ce procédé avait été signalé à M. Gambier par M. Cartan; depuis, M. Gambier a exposé, avec quelques modifications et compléments ce procédé dans ce Journal même (*Journal de Math.*, t. IX, 1930, p. 179-199).

Il devenait ensuite aisé, par un procédé analogue à celui de M. J. Pérès (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 6^e série, t. 1, 1926, p. 193-197), à propos de la configuration Petersen-Morley de droites, de déduire une configuration Petersen-Morley de cercles.

**I. — Cercles orthogonaux à une sphère.
Conditions de perpendicularité.**

Soit S une sphère fixe de centre O et rayon R (R est réel ou imaginaire pure, O est réel). Dans tout ce qui suit, O est pris pour origine d'un système d'axes rectangulaires. Il existe ∞^3 cercles orthogonaux à S , nous les désignons par Γ .

1. *Représentation de Γ par des coordonnées de droite.* — Soit Δ l'axe du cercle Γ ; si Γ est donné, Δ est connu et unique; inversement si Δ est donné, Γ est connu et unique : en effet, Γ est dans le plan normal à Δ mené par O ; Γ admet pour centre C la projection de O sur Δ et pour carré de son rayon la puissance de C par rapport à S . Si R est imaginaire pure, à toute droite Δ réelle correspond un cercle Γ réel; si R est réel, Γ est réel seulement si Δ est réelle et extérieure à S ; si Δ est réelle et coupe S , le rayon de Γ est imaginaire pure, mais les équations du cercle Γ restent à coefficients réels, remarque importante dans toute cette théorie.

On pourra donc définir Γ par les coordonnées plückériennes (a, b, c, l, m, n) de Δ ; les équations de Γ sont

$$\sum ax = 0, \quad \sum x^2 - \frac{2 \sum (bn - cm)x}{\sum a^2} + R^2 = 0.$$

Le carré du rayon ρ de Γ est $\rho^2 = \frac{\sum l^2}{\sum a^2} - R^2$.

2. *Conditions pour que deux cercles Γ soient perpendiculaires.* — Nous disons, avec M. Vessiot, que les deux cercles Γ et Γ' sont *perpendiculaires*, s'ils ont deux points communs où ils se coupent à angle droit. *Pour que Γ et Γ' soient perpendiculaires, ils doivent d'abord être*

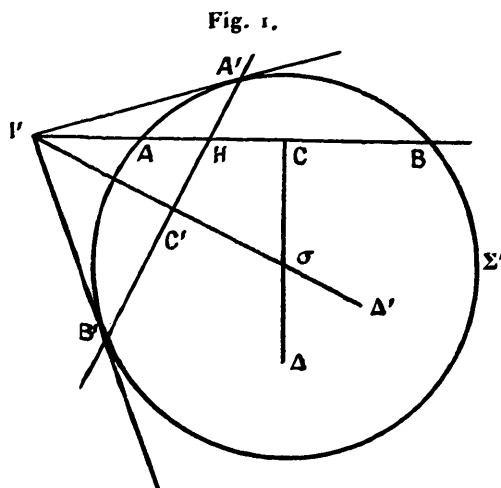
cosphériques; ensuite leurs plans P, P' doivent être conjugués par rapport à la sphère Σ qui porte Γ, Γ'. Voyons les conditions correspondantes pour les axes Δ, Δ' :

a. Si Γ, Γ' sont cosphériques, leurs axes se rencontrent; réciproquement, si les axes Δ, Δ' sont sécants, Γ et Γ' sont cosphériques: projetons O en H sur le plan Δ, Δ'; d'après le théorème des trois perpendiculaires, les projections C, C' de H sur Δ et Δ' sont les centres de Γ et Γ'; les plans de Γ et Γ' sont OHC, OHC'. Le cercle Γ (ou Γ') coupe OH en deux points (α, β) ou (α', β') définis par les relations

$$\begin{aligned} \overline{O\alpha} + \overline{O\beta} &= 2OH, & \overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} &= R^2, \\ \overline{O\alpha'} + \overline{O\beta'} &= 2OH, & \overline{O\alpha'} \cdot \overline{O\beta'} &= R^2. \end{aligned}$$

Cela prouve que le couple (α, β) coïncide avec le couple (α', β'); les deux cercles Γ, Γ' sont donc cosphériques et la sphère Σ qui les porte est orthogonale à S et a pour centre σ le point de concours de Δ et Δ'.

b. Exprimons maintenant que P et P', plans de Γ et Γ', sont conjugués par rapport à Σ: prenons pour plan de la figure (fig. 1) le plan Δ, Δ';



ce plan coupe Σ suivant un grand cercle Σ' et Γ, Γ' suivant deux diamètres AB, A'B'; le pôle I' de A'B' par rapport à Σ' est le pôle de P' relativement à Σ, il est dans P et par suite sur AB. Montrons que I' est le pôle de Δ par rapport au cercle S' trace de S sur le plan Δ, Δ'. Ce cercle S' a pour centre H; il est orthogonal à Σ'; le carré de son rayon

est $\overline{HA} \cdot \overline{HB}$; on doit vérifier l'égalité $\overline{HI'} \cdot \overline{HC} = \overline{HA} \cdot \overline{HB}$; puisque l'on a $2\overline{HC} = \overline{HA} + \overline{HB}$, on est ramené à vérifier

$$\frac{1}{\overline{HI'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{HA}} + \frac{1}{\overline{HB}} \right),$$

ce qui résulte de ce que A et B sont conjugués harmoniques par rapport à H et I'. La droite Δ_0 conjuguée de Δ par rapport à S passe donc en I', qui appartient à Δ' : donc Δ' rencontre aussi Δ_0 .

Réciproquement, supposons que Δ' et Δ_0 se rencontrent (bien entendu Δ' est supposée déjà rencontrer Δ); le point de rencontre de Δ' et Δ_0 est pôle de Δ par rapport à S'; il est d'abord sur la perpendiculaire à Δ menée par H, c'est-à-dire sur AB, c'est donc le point I' commun à Δ' et AB. En renversant le raisonnement qui précède, on voit que A et B sont conjugués par rapport à H et I': la polaire de I' par rapport à Σ' passe par H et est perpendiculaire à Δ' : c'est donc $A'B'$; le plan P' a pour pôle, relativement à Σ , le point I'; ce pôle est sur le plan P; donc les cercles Γ, Γ' de Σ sont orthogonaux.

CONCLUSION. — Pour que deux cercles Γ, Γ' orthogonaux à une même sphère S soient perpendiculaires, il faut et suffit que l'axe Δ' de l'un d'eux rencontre l'axe Δ de l'autre, ainsi que le conjugué Δ_0 de Δ par rapport à S.

REMARQUES. — 1° A tous les cercles Γ' perpendiculaires à un cercle Γ donné correspondent les droites d'une congruence linéaire définie par Δ et Δ_0 .

2° Si Γ' est perpendiculaire à Γ , il est aussi perpendiculaire au cercle Γ_0 qui a pour axe la droite Δ_0 conjuguée de Δ relativement à S; nous dirons que Γ et Γ_0 sont conjugués par rapport à S. On voit que Γ et Γ_0 admettent ∞^2 cercles Γ' perpendiculaires communs.

3° Les plans de Γ et Γ_0 sont perpendiculaires et se coupent suivant un diamètre commun à Γ et Γ_0 rencontré par Γ en P, Q et par Γ_0 en P_0, Q_0 ; C et C_0 étant les centres de Γ, Γ_0 , on a

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OQ} &= R^2, & 2\overline{OC} &= \overline{OP} + \overline{OQ}, & \overline{OC} \cdot \overline{OC}_0 &= R^2, \\ \overline{OP}_0 \cdot \overline{OQ}_0 &= R^2, & 2\overline{OC}_0 &= \overline{OP}_0 + \overline{OQ}_0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(\overline{OP} + \overline{OQ})(\overline{OP}_0 + \overline{OQ}_0) = 2(\overline{OP} \cdot \overline{OQ} + \overline{OP}_0 \cdot \overline{OQ}_0),$$

de sorte que P, Q, P₀, Q₀ forment une division harmonique; toute sphère passant par l'un des cercles Γ, Γ₀ coupe l'autre orthogonalement : le système Γ, Γ₀ est donc l'un de ceux qui ont été désignés en géométrie anallagmatique sous des noms variés : *cercles en biinvolution de M. Kœnigs, anneau orthogonal de Guichard, croix de cercles, cercles conjugués de M. Vessiot.*

4° Dès à présent, écartant le cas simple où deux cercles Γ et Γ' (donnés *a priori*) sont sécants en deux points ou en un point, nous voyons que le problème consistant à trouver un nouveau cercle qui leur soit perpendiculaire commun se décompose en deux opérations : d'abord trouver la sphère unique S (de centre réel, de rayon réel ou imaginaire pure) orthogonale à Γ et Γ'; puis construction des deux droites appartenant simultanément aux deux congruences linéaires (Δ, Δ₀) et (Δ', Δ'₀); nous reviendrons plus loin sur cette question, pour montrer que les deux droites en jeu sont réelles et distinctes; et de plus nous prévoyons la possibilité du cas d'indétermination avec *x'* solutions : Δ, Δ₀, Δ', Δ'₀, appartenant, pour une configuration très particulière de Γ et Γ' à une même quadrique; nous verrons qu'avec des cercles réels, ceci n'est réalisé que si le rayon R de S est imaginaire pure.

II. — Représentation d'un cercle par un vecteur complexe. Cas de la sphère réelle.

1. *Expression analytique de la condition de perpendicularité.* — Nous supposons d'abord la sphère S réelle; sans restreindre, on peut supposer R² = 1. Calculons d'abord les coordonnées de la droite Δ₀ conjuguée de Δ (a, b, c, l, m, n). Considérons le vecteur \overrightarrow{AB} de coordonnées (a, b, c, l, m, n) (fig. 2); il est porté par Δ; l, m, n sont les projections du moment \overrightarrow{OG} de \overrightarrow{AB} en O; sur Δ₀ nous pouvons placer $\overrightarrow{A_0 B_0}$ équipollent à \overrightarrow{OG} ; soit $\overrightarrow{OG_0}$ le moment de $\overrightarrow{A_0 B_0}$ en O; $\overrightarrow{OG_0}$ a la direc-

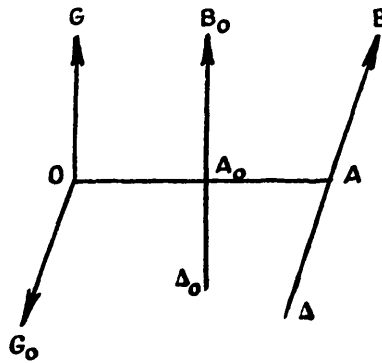
tion de \vec{AB} , mais le sens opposé; on a

$$OG_0 = OA_0 \cdot A_0 B_0 = OA_0 \cdot OG = OA_0 \cdot OA \cdot AB,$$

mais $OA_0 \cdot OA = 1$, donc $OG_0 = AB$; en résumé

$$\vec{OG}_0 = -\vec{AB}.$$

Fig. 2.



Les coordonnées de $\vec{A_0 B_0}$, ou de Δ_0 , sont

$$a_0 = l, \quad b_0 = m, \quad c_0 = n, \quad l_0 = -a, \quad m_0 = -b, \quad n_0 = -c.$$

En exprimant que $\Delta'(a', b', c', l', m', n')$ rencontre Δ et Δ_0 , on voit que :

Les conditions de perpendicularité de deux cercles Γ, Γ' d'axes Δ, Δ' sont

$$\Sigma a l' + \Sigma a' l = 0, \quad \Sigma a a' - \Sigma l l' = 0.$$

2. Emploi d'un vecteur complexe. — Posons $X = a + il, Y = b + im, Z = c + in$, i étant le symbole ordinaire des nombres imaginaires. Nous dirons que X, Y, Z sont les projections, sur les axes Ox, Oy, Oz respectivement, d'un vecteur complexe \vec{V} ; réciproquement à un vecteur complexe \vec{V} tel que $\Sigma a l = 0$ correspond un cercle Γ et un seul.

Soient \vec{V}, \vec{V}' les vecteurs complexes correspondant à deux cercles Γ, Γ' ; par analogie avec le cas des vecteurs réels, nous dirons que \vec{V}, \vec{V}'

sont orthogonaux si l'on a

$$XX' + YY' + ZZ' = 0;$$

ou

$$\Sigma XX' = \Sigma(a + il)(a' + il') = \Sigma aa' - \Sigma ll' + i(\Sigma al' + \Sigma la').$$

CONCLUSION. — Pour que deux cercles Γ, Γ' soient perpendiculaires, il faut et suffit que les vecteurs complexes \vec{V}, \vec{V}' qui les représentent soient orthogonaux.

3. Plus généralement, un vecteur complexe \vec{U} sera défini par $X = A + iL, Y = B + iM, Z = C + iN$, les nombres A, B, C, L, M, N étant indépendants; la connaissance de \vec{U} revient à celle de deux vecteurs réels $\vec{V}_1(A, B, C), \vec{V}_2(L, M, N)$; on pourrait poser $\vec{U} = \vec{V}_1 + i\vec{V}_2$. Il serait aisé d'étendre à ces vecteurs les notions de somme géométrique, produit scalaire, produit vectoriel, ainsi que les propriétés de ces opérations. Nous nous bornerons à quelques remarques :

a. Les deux vecteurs réels \vec{V}_1, \vec{V}_2 font en général un angle quelconque; s'ils sont rectangulaires, on a $\Sigma AL = 0$; nous dirons alors que \vec{U} est un vecteur complexe rectangle; alors, et dans ce cas seulement, il lui correspond un cercle Γ .

b. Si \vec{V} est un vecteur rectangle et λ un facteur réel, $\lambda\vec{V}$ est aussi un vecteur rectangle; il définit le même cercle Γ .

c. Soit $\vec{V}(a + il, b + im, c + in)$ un vecteur rectangle définissant Γ ; le vecteur $iV(-l + ia, -m + ib, -n + ic)$ est aussi rectangle et définit le cercle Γ_0 conjugué de Γ .

d. Soient \vec{U} un vecteur $(A + iL, B + iM, C + iN)$ non rectangle et $p + iq$ un scalaire complexe; parmi tous les vecteurs $(p + iq)\vec{U}$, de projections $(p + iq)(A + iL) = pA - qL + i(qA + pL) \dots$, il y en a deux \vec{V}, \vec{V}_0 qui sont rectangles, définis par l'équation

$$(E) \quad (p^2 - q^2)\Sigma LA + pq(\Sigma A^2 - \Sigma L^2) = 0.$$

On obtient pour le rapport $\frac{p}{q}$ deux valeurs réelles dont le produit

égale (-1); nous faisons, bien entendu, abstraction d'un multiplicateur réel; si $(p + iq)(\Lambda + iL), \dots$ sont les projections de \vec{V} , on peut prendre pour celles de $\vec{V}_0, (-q + ip)(\Lambda + iL), \dots$, d'où résulte $\vec{V}_0 = i\vec{V}$; donc à \vec{V} et \vec{V}_0 correspondent deux cercles conjugués par rapport à S. Si ρ est le rayon du cercle Γ correspondant à la racine choisie $\frac{\rho}{q}$ de (E), on a

$$(\rho^2 - q^2)\Sigma(L^2 - \Lambda^2) + 4\rho q\Sigma\Lambda L = \rho^2\Sigma(\rho\Lambda - qL)^2.$$

L'élimination de $\Sigma(L^2 - \Lambda^2)$ entre (E) et cette relation donne

$$\rho q[\frac{1}{2}\Sigma\Lambda^2 - \Sigma L^2]^2 + \frac{1}{4}(\Sigma\Lambda L)^2 = \rho^2\Sigma\Lambda L\Sigma(\rho\Lambda - qL)^2.$$

Cela prouve que la racine $\frac{\rho}{q}$ de même signe que $\Sigma\Lambda L$ donne un cercle réel, tandis que l'autre racine donne un cercle imaginaire (d'équations réelles).

e. L'équation (E) s'évanouit dans le seul cas où l'on a $\Sigma\Lambda L = 0$, $\Sigma\Lambda^2 = \Sigma L^2$; le vecteur \vec{U} est alors rectangle et l'axe Δ correspondant est tangent à S; \vec{U} définit un cercle Γ de rayon nul; dans ce qui suit, ce cas est écarté.

4. *Cercles perpendiculaires communs à deux Γ .* — Une parenthèse pour que le lecteur comprenne bien la nature du problème traité : Γ et Γ' sont deux cercles qui ne se coupent ni en un, ni en deux points, non enlacés, donnés à priori indépendamment de toute sphère S; il existe alors une sphère, et une seule, S, orthogonale à Γ et Γ' , de rayon réel; le centre O est le centre radical de deux sphères contenant Γ et de deux sphères contenant Γ' ; tout cercle (c) cosphérique commun à Γ et Γ' est orthogonal à S, car les cordes communes à ce nouveau cercle (c) et à Γ ou Γ' concourent en O; le carré du rayon de S est la puissance de O relativement à Γ ou Γ' ; un cercle (c) perpendiculaire commun à Γ et Γ' est donc orthogonal aussi à S : nous avons donc déterminé S (réduit par homothétie le rayon R de S à l'unité) et nous appliquons désormais les considérations qui précèdent. Soient $\vec{V}(X, Y, Z), \vec{V}'(X', Y', Z')$ les deux vecteurs complexes qui défi-

nissent Γ, Γ'); le cercle (c) perpendiculaire commun est défini par un vecteur complexe rectangle (α, β, γ) ; on doit avoir

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y + \gamma Z &= 0, \\ \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' &= 0. \end{aligned}$$

Soit \vec{U} le vecteur complexe de projections $YZ' - ZY', ZX' - XZ', XY' - YX'$, c'est-à-dire le vectoriel $\vec{V} \wedge \vec{V}'$; les relations précédentes ne peuvent se réduire à une seule que si l'on a

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z},$$

c'est-à-dire, puisque \vec{V} et \vec{V}' sont rectangles, que si Γ et Γ' sont conjugués (par rapport à S): nous savons d'ailleurs que, dans ce cas, tout cercle (c) orthogonal à S et perpendiculaire à Γ est aussi perpendiculaire à Γ' ; l'axe de (c) est l'une quelconque des ∞^2 droites s'appuyant sur les axes (conjugués) de Γ et Γ' . Ce cas écarté, l'une au moins des composantes complexes de \vec{U} , par exemple $XY' - YX'$ est différente de zéro; les quantités α, β, γ sont donc proportionnelles aux trois quantités complexes, bien déterminées

$$\frac{YZ' - ZY'}{XY' - YX'}, \quad \frac{ZX' - XZ'}{XY' - YX'}, \quad 1.$$

et par suite, d'après l'étude qui précède, nous obtenons deux cercles (c) , (c_0) , et deux seulement, définis par le vecteur \vec{U} dans leur ensemble; l'un (c) est réel, l'autre est imaginaire, mais d'équations réelles; (c) et (c_0) sont perpendiculaires simultanément à Γ et Γ' , et de plus conjugués par rapport à S ; (c) et (c_0) sont aussi perpendiculaires aux cercles Γ_0, Γ'_0 conjugués de Γ et Γ' et plus généralement à l'ensemble des ∞^2 couples conjugués correspondant aux vecteurs non rectangles de composantes $(X + \lambda X', Y + \lambda Y', Z + \lambda Z')$ où λ est un scalaire complexe.

Cette étude prouve que les quatre droites $\Delta, \Delta', \Delta_0, \Delta'_0$, axes de $\Gamma, \Gamma', \Gamma_0, \Gamma'_0$ ont nécessairement deux sécantes communes réelles et distinctes et que ces quatre droites n'appartiennent jamais à une même quadrique.

Nous verrons plus loin, en étudiant le cas de S imaginaire (d'équation réelle), les différences et la nécessité des précautions prises ici pour le calcul de α, β, γ et des vecteurs rectangles correspondants.

Remarque. — Supposons Γ et Γ' sécants en un unique point O : une inversion de pôle O les convertit en droites non sécantes, et le reste du problème n'a plus aucune difficulté.

Supposons Γ et Γ' sécants en deux points; tous les points O de la droite commune aux plans de Γ et Γ' sont centre d'une sphère S orthogonale à Γ et Γ' ; si les points d'intersection de Γ et Γ' sont imaginaires, le rayon de S est réel quel que soit le choix de O ; si ces points A, B sont réels, prenons O extérieur au segment AB et alors le rayon de S est réel; nous pouvons alors, pour chaque choix de S , appliquer ce qui précède, et trouver à chaque fois deux cercles $(c), (c_0)$; cela explique pourquoi il existe ∞^1 cercles perpendiculaires communs. Je me borne à signaler que les axes Δ et Δ' de Γ et Γ' concourent en Q , ceux Δ_0 et Δ'_0 de Γ_0 et Γ'_0 en Q_0 ; l'un des cercles $(c), (c_0)$ a pour axe QQ_0 , l'autre la droite d'intersection des plans (Δ, Δ') et (Δ_0, Δ'_0) ; l'un des cercles est sur la sphère fixe (Γ, Γ') , l'autre lui est orthogonal en A, B . Je n'insiste pas davantage sur ce cas classique.

III. — Cas où la sphère S est imaginaire.

1. *Vecteurs rectangles.* — On peut alors sans diminuer la généralité supposer $R^2 = -1$; dans ce cas le cercle Γ d'axe Δ , quelconque (a, b, c, l, m, n) est réel, son rayon ζ étant calculé par $\zeta^2 = \frac{\sum l^2}{\sum a^2} + 1$. On voit aisément les changements qui se produisent : les coordonnées de l'axe Δ_0 , conjugué de Δ par rapport à S , sont (l, m, n, a, b, c) . Les conditions de perpendicularité de deux cercles Γ, Γ' deviennent

$$\boxed{\sum a l' - \sum a' l = 0. \quad \sum a a' - \sum l l' = 0.}$$

A un cercle Γ correspond un vecteur complexe \vec{V} (*rectangle*) de projections

$$X = a + jl. \quad Y = b - jm. \quad Z = c + jn.$$

j étant un symbole qu'il faut définir par $j^2 = -1$ pour que les relations de perpendicularité des deux cercles Γ, Γ' puissent se remplacer par

l'unique condition $\Sigma XX' = 0$ d'orthogonalité des deux vecteurs *rectangles* \vec{V}, \vec{V}' correspondants.

Les nombres complexes définis au moyen du symbole j sont soumis aux mêmes définitions que les nombres imaginaires ordinaires; les opérations d'addition et multiplication conservent leurs propriétés de commutativité et distributivité. *Mais pour la division, il y a un cas spécial d'impossibilité, très important ici, car il nous fera apercevoir le caractère paratactique.* Par définition, le quotient $\frac{A' + B'j}{A + Bj}$ est le nombre $\alpha + \beta j$ défini par

$$(A + Bj)(\alpha + \beta j) = A' + B'j$$

ou

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta &= A', \\ B\alpha + A\beta &= B'. \end{aligned}$$

L'opération est impossible si $A = \varepsilon B$ ($\varepsilon = +1$ ou -1), à moins que l'on n'ait en même temps $A' = \varepsilon B'$; si l'on a simultanément $A = \varepsilon B, A' = \varepsilon B'$, on obtient l'unique relation $\alpha + \varepsilon\beta = \frac{B'}{B} = \frac{A'}{A}$; ces propriétés tiennent à ce que l'égalité fondamentale de définition, $j^2 - 1 = 0$, admet deux facteurs $j + 1, j - 1$ (qui nous conduiront aux deux espèces de parataxie pour une sphère S déterminée). Si l'on appelle nombre complexe *singulier* tout nombre $A(1 + j\varepsilon)$ où A est réel, la multiplication de ce nombre singulier par un nombre complexe *quelconque* donne encore un nombre complexe singulier de la même espèce, les deux espèces étant caractérisées par le choix de ε . Le produit de deux nombres complexes singuliers d'espèce opposée est nul; inversement si deux nombres complexes ont un produit nul, ils sont singuliers et d'espèce opposée.

2. Vecteurs non rectangles. — Le vecteur $\vec{V}(a + jl, b + jm, c + jn)$ introduit plus haut est *rectangle* à cause de la relation $\Sigma al = 0$; le vecteur rectangle $\vec{V}' = j\vec{V}$ définit le cercle conjugué du cercle relatif à \vec{V} . Soit maintenant le vecteur complexe $\vec{U}(A + jL, B + jM, C + jN)$; nous le multiplions comme plus haut par le scalaire $p + jq$ de façon que $(p + jq)\vec{U}$ soit rectangle; on a ainsi la condition

$$(E_1) \quad (p^2 + q^2)\Sigma AL + pq\Sigma(A^2 + L^2) = 0$$

Les deux racines en $\frac{p}{q}$ de (E_1) sont réelles, car l'on a

$$\begin{aligned} [\Sigma(A^2 + L^2)]^2 - 4(\Sigma AL)^2 &= [\Sigma(A^2 + L^2) - 2\Sigma AL][\Sigma(A^2 + L^2) + 2\Sigma AL] \\ &= [\Sigma(A - L)^2][\Sigma(A + L)^2]. \end{aligned}$$

Si l'on n'a pas *simultanément*

$$A = \varepsilon L, \quad B = \varepsilon M, \quad C = \varepsilon N$$

les deux racines de (E_1) sont réelles et distinctes; mais si ces trois égalités ont lieu, l'équation (E_1) se réduit à $(p + \varepsilon q)^2 = 0$; dans ce cas critique, chaque composante de \vec{U} contient le facteur numérique $\varepsilon + j$ diviseur de $j^2 - 1$; on obtient par le procédé indiqué, comme unique vecteur rectangle, le vecteur $(j - \varepsilon) \vec{U}$ dont les composantes sont identiquement nulles. Inversement A, B, C, L, M, N n'étant pas nulles toutes les six, l'équation (E_1) ne peut admettre la racine $\frac{p}{q} = -\varepsilon$ que si l'on a

$$\begin{aligned} \Sigma(A^2 + L^2) - 2\varepsilon \Sigma AL &= (A^2 + L^2 - 2\varepsilon AL) \\ &+ (B^2 + M^2 - 2\varepsilon BM) + (C^2 + N^2 - 2\varepsilon CN) = 0. \end{aligned}$$

Les quantités A, \dots, N étant réelles, cela entraîne

$$A = \varepsilon L, \quad B = \varepsilon M, \quad C = \varepsilon N, \quad \vec{U} = \vec{U}_1 + j\vec{U}_2, \quad \vec{U}_1 = \varepsilon \vec{U}_2.$$

L'interprétation géométrique est aisée: le système de vecteurs (A, B, C, L, M, N) admet un axe central qui passe en O , le moment résultant en O étant égal à la résultante générale ou opposé. Donc, sauf le cas critique réservé, un vecteur complexe \vec{U} définit deux cercles Γ, Γ_0 conjugués par rapport à S et réels tous deux.

3. Cercles perpendiculaires à deux cercles Γ, Γ' . Parataxie. — Soient maintenant deux cercles Γ, Γ' sans point commun et enlacés, donnés *a priori*. Ils admettent une seule sphère orthogonale S , de centre O et rayon imaginaire pure; nous réduisons, par homothétie, S à avoir -1 pour carré de son rayon et nous pouvons appliquer désormais ce qui précède. Soient $\vec{V}(X, Y, Z)$ et $\vec{V}'(X', Y', Z')$ les vecteurs rectangles correspondant à Γ et Γ' , et (α, β, γ) le vecteur rectangle correspondant

à un cercle (c) perpendiculaire commun. On doit avoir

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \quad \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0.$$

Ces deux relations équivalent à une seule relation (complexe) dans le seul cas où Γ et Γ' sont conjugués; il y a alors ∞^2 cercles perpendiculaires communs. En écartant ce cas, nous avons à distinguer deux cas, ou bien le vecteur $\vec{U} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$, de composantes complexes

$$(YZ' - ZY', \quad ZX' - XZ', \quad XY' - YX')$$

n'est pas l'un de ces vecteurs critiques signalés à l'instant, ou il est l'un de ceux-là. Dans le premier cas, l'une des trois composantes, $XY' - YX'$, par exemple, n'est pas proportionnelle à $j \pm \varepsilon$, de sorte que les nombres complexes

$$\frac{YZ' - ZY'}{XY' - YX'}, \quad \frac{ZX' - XZ'}{XY' - YX'}, \quad 1$$

sont bien définis, et conduisent à deux vecteurs complexes rectangles définissant deux cercles (c) et (c_0), et deux seulement, perpendiculaires communs avec toutes les circonstances signalées plus haut (réels, conjugués, perpendiculaires aussi à Γ_0 et Γ'_0).

Dans le cas où les trois composantes de \vec{U} contiennent en facteur chacune le même nombre $j + \varepsilon$ (cela fait deux cas distincts, suivant le signe de ε égal à $+1$ ou -1), la méthode ne s'applique plus, car la proportionnalité

$$\frac{\alpha}{YZ' - ZY'} = \frac{\beta}{ZX' - XZ'} = \frac{\gamma}{XY' - YX'}$$

cesse d'avoir un sens. Cela tient d'ailleurs à ce que les deux équations (complexes)

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \quad \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0$$

qui fournissent quatre équations (réelles) entre les inconnues

$$a, \quad b, \quad c, \quad l, \quad m, \quad n \quad (\alpha = a + jl, \beta = b + jm, \gamma = c + jn)$$

se réduisent à trois : dans le cas précédent, ces six inconnues s'exprimaient sous forme linéaire et homogène avec deux indéterminées $p : q$ et l'équation $al + bm + cn = 0$ donnait le rapport $p : q$ par une équation

tion du second degré; maintenant a, b, c, l, m, n s'expriment au moyen de *trois* indéterminées p, q, r homogènes et l'on a ∞^1 solutions. Vérifions rapidement que l'on retrouve bien les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\Delta, \Delta', \Delta_0, \Delta'_0$ appartiennent à une même quadrique.

On a, dans ce cas spécial,

$$\vec{U} = \vec{V} \wedge \vec{V}' = (j + \varepsilon) \vec{U}_2,$$

où \vec{U}_2 est un vecteur réel; si l'on pose

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + j\vec{V}_2, \quad \vec{V}' = \vec{V}'_1 + j\vec{V}'_2,$$

on a

$$\vec{U} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_1 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}'_2 + j[\vec{V}_2 \wedge \vec{V}'_1 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_2].$$

Par hypothèse on a

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_1 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}'_2 = \varepsilon(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}'_1 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_2),$$

ce qui peut se traduire par la relation

$$(\vec{V}_1 - \varepsilon\vec{V}_2) \wedge (\vec{V}'_1 - \varepsilon\vec{V}'_2) = 0.$$

Les deux vecteurs $\vec{V}_1 - \varepsilon\vec{V}_2$ et $\vec{V}'_1 - \varepsilon\vec{V}'_2$ ont donc même support, d'où les relations nécessaires et suffisantes, au nombre de deux seulement :

$$(E_2) \quad \frac{A' - \varepsilon L'}{A - \varepsilon L} = \frac{B' - \varepsilon' M'}{B - \varepsilon M} = \frac{C' - \varepsilon N'}{C - \varepsilon N}.$$

Or les axes $\Delta, \Delta', \Delta_0, \Delta'_0$ ont respectivement pour coordonnées plückériennes

(Δ)	A, B, C, L, M, N;
(Δ')	A', B', C', L', M', N';
(Δ_0)	L, M, N, A, B, C;
(Δ'_0)	L', M', N', A', B', C'.

Pour que ces quatre droites soient sur une quadrique, il est nécessaire et suffisant que toute droite rencontrant trois d'entre elles rencontre la quatrième, c'est-à-dire que l'on puisse trouver des multipli-

cateurs h, k, λ, μ tel que l'on ait

$$(E_3) \quad \begin{cases} \lambda L + \mu L' = hA + kA', & \lambda A + \mu A' = hL + kL', \\ \lambda M + \mu M' = hB + kB', & \lambda B + \mu B' = hM + kM', \\ \lambda N + \mu N' = hC + kC', & \lambda C + \mu C' = hN + kN'. \end{cases}$$

Or, si (E_2) est vérifié, soit ρ la valeur commune des rapports, on voit immédiatement que l'on a les multiplicateurs $\lambda = \rho, \mu = -1, h = \rho\varepsilon, k = -\varepsilon$ qui vérifient (E_3) . Réciproquement, si (E_3) est vérifié, on forme les combinaisons, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} (\lambda - h)(L + A) &= (k - \mu)(L' + A'), & (\lambda + h)(L - A) &= (k + \mu)(A' - L'), \\ (\lambda - h)(M + B) &= (k - \mu)(M' + B'), & (\lambda + h)(M - B) &= (k + \mu)(B' - M'), \\ (\lambda - h)(N + C) &= (k - \mu)(N' + C'), & (\lambda + h)(N - C) &= (k + \mu)(N' - C'), \end{aligned}$$

qui ne font plus figurer que deux inconnues $(\lambda - h) : (k - \mu)$ et $(\lambda + h) : (k + \mu)$; il n'y a donc que deux systèmes de solutions

$$(\varepsilon_i = \pm 1) \\ \lambda = \varepsilon_i h, \quad \mu = \varepsilon_i k, \quad \frac{L' - \varepsilon_i A'}{L - \varepsilon_i A} = \frac{M' - \varepsilon_i B'}{M - \varepsilon_i B} = \frac{N' - \varepsilon_i C'}{N - \varepsilon_i C},$$

et pour $\varepsilon_i = \varepsilon$ on retrouve (E_2) . L'interprétation géométrique des équations (E_3) est d'ailleurs bien connue : les vecteurs $h\Delta, k\Delta', -\lambda\Delta_0, -\mu\Delta'_0$ forment un système équivalent à zéro.

CONCLUSION. — Pour que Γ et Γ' soient paratactiques, il est nécessaire et suffisant que $\Delta, \Delta', \Delta_0, \Delta'_0$ appartiennent à une même quadrique Q ou encore que les vecteurs complexes rectangles associés à Γ, Γ' vérifient

$$(j - \varepsilon)(\vec{V} \wedge \vec{V}') = 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Nous avons, suivant le signe ε , défini deux congruences d'espèce opposée de cercles paratactiques à Γ . En effet on a

$$\rho = \frac{A' - \varepsilon L'}{A - \varepsilon L} = \frac{B' - \varepsilon M'}{B - \varepsilon M} = \frac{C' - \varepsilon N'}{C - \varepsilon N} = \frac{\Sigma A'(A' - \varepsilon L')}{\Sigma A'(A - \varepsilon L)} = \frac{\Sigma A'^2}{\Sigma AA' - \varepsilon \Sigma LA'},$$

et par suite

$$L' = \varepsilon A' + \frac{(L - \varepsilon A)\Sigma A'^2}{\Sigma AA' - \varepsilon \Sigma LA'}, \quad M' = \dots, \quad N' = \dots,$$

ou si l'on préfère

$$L' = \frac{(L - \varepsilon A) \Sigma A'^2 - \Lambda' \Sigma A' (L - \varepsilon A)}{\Sigma A \Lambda' - \varepsilon \Sigma L A'}, \quad M' = \dots, \quad N' = \dots,$$

de sorte que le cercle $\Gamma(A, B, C, L, M, N)$ étant donné, on a ainsi les coordonnées des cercles Γ' paratactiques à Γ exprimées en fonction de deux paramètres arbitraires $\Lambda' : B' : C'$.

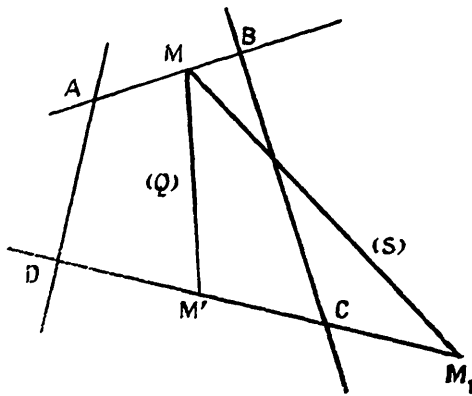
Sur la quadrique Q les génératrices de même système que Δ et Δ' définissent ∞^1 cercles tous *paratactiques* entre eux et d'une certaine espèce (ε) de parataxie; les génératrices de système opposé définissent ∞^1 cercles tous paratactiques entre eux et de l'espèce opposée ($-\varepsilon$); les cercles de l'une des séries sont perpendiculaires à tous ceux de l'autre série; ces deux séries sont tracées sur *une cyclide de Dupin équilatère*.

On remarquera que les quadriques Q obtenues pour une sphère S imaginaire donnée sont *auto-conjuguées* par rapport à S et forment un système ∞^n ; nous allons montrer que n est égal à 4. En effet, le système Γ, Γ' le plus général dépend de *six* paramètres et donne une seule quadrique Q ; donc pour avoir le système Γ, Γ' le plus général, il faut d'abord fixer les n paramètres qui déterminent Q , puis choisir *une* génératrice de Q , qui est Δ , puis *une* génératrice de même système qui est Δ' ; on a donc $n + 2 = 6$. Les points d'intersection avec S d'une droite Δ sont les foyers du cercle correspondant, de sorte que lorsque Δ balaie l'une des semi-quadriques portées par Q , ces deux foyers décrivent deux génératrices, imaginaires conjuguées, de même système, de la sphère S ; la semi-quadrique complémentaire donne les droites $\bar{\Delta}$ relatives aux cercles, paratactiques entre eux, de la série perpendiculaire à la précédente; leurs foyers sont répartis sur les deux droites complétant l'intersection de S et Q . Ces propositions résultent immédiatement des propriétés suivantes que le lecteur démontrera aisément :

Si une quadrique Q coïncide avec sa polaire réciproque relativement à la quadrique S , les deux quadriques ou bien se raccordent le long d'une conique ou bien ont en commun un quadrilatère gauche $ABCD$ (*fig. 3*); c'est le second cas qui est réalisé ici; donnons-nous S et choisissons sur S un quadrilatère gauche $ABCD$ (ce qui fait intervenir

quatre paramètres); en un point M de AB , traçons la génératrice MM_1 de S autre que AB , jusqu'à sa rencontre M_1 avec CD ; prenons M' conjugué harmonique de M_1 par rapport à CD : MM' est la généra-

Fig. 3.



trice issue de M , de la quadrique Q ; cette construction montre qu'inversement S est sa propre polaire réciproque vis-à-vis de Q . Il serait facile de poursuivre ainsi l'étude de la parataxie (angle de parataxie ...); je préfère passer à un problème intéressant, celui de Petersen-Morley, qui a été le point de départ des progrès considérables que M. Gambier a fait faire à cette théorie des cercles.

IV. — Application au problème de Morley-Petersen.

1. *Gerbe de Morley-Petersen.* — Rappelons une propriété bien connue : soient trois droites A, B, C non coplanaires issues d'un même point O ; menons les droites OA_1, OB_1, OC_1 , respectivement perpendiculaires aux plans OBC, OCA, OAB . Menons ensuite AO_2 perpendiculaire au plan AOA_1 , OB_2 au plan BOB_1 , OC_2 au plan COC_1 ; les trois droites OA_2, OB_2, OC_2 sont dans un même plan d'ailleurs perpendiculaire à la droite OH commune aux trois plans AOA_1, BOB_1, COC_1 . Malgré la dissymétrie de la définition, les dix droites de cette configuration jouent le même rôle; chacune est perpendiculaire à trois autres comme l'indique le tableau (T) où, en

regard de chaque droite (désignée par une seule lettre), figurent les droites qui lui sont perpendiculaires :

$$(T) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} A & B, C, A_2 & A_1 & BCA_2 & A_2 \\ B & C, A, B_2 & B_1 & CAB_2 & B_2 \\ C & A, B, C_2 & C_1 & ABC_2 & C_2 \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c} AA, H & & \\ BB, H & H & \\ CC, H & & \end{array} \right| A_2 B_2 C_2.$$

Appelons cette configuration *gerbe de Morley-Petersen*.

2. Un théorème d'algèbre. — Désignons les paramètres directeurs de ces droites par les notations

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(X, Y, Z), & B(X', Y', Z'), & C(X'', Y'', Z''); \\ \Lambda_1(X_1, Y_1, Z_1), & B_1(X'_1, Y'_1, Z'_1), & C_1(X''_1, Y''_1, Z''_1); \\ \Lambda_2(X_2, Y_2, Z_2), & B_2(X'_2, Y'_2, Z'_2), & C_2(X''_2, Y''_2, Z''_2); \\ & & H(\alpha, \beta, \gamma). \end{array}$$

La propriété de la configuration précédente se traduit par le théorème d'algèbre suivant :

Soient trois systèmes de nombres algébriques (X, Y, Z) , (X', Y', Z') , (X'', Y'', Z'') vérifiant l'inégalité

$$(1) \quad \left| \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{array} \right| \neq 0.$$

Calculons (X_1, Y_1, Z_1) , (X'_1, Y'_1, Z'_1) , (X''_1, Y''_1, Z''_1) par les relations

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma X_1 X' = 0, & \Sigma X'_1 X = 0, & \Sigma X''_1 X = 0, \\ \Sigma X_1 X'' = 0; & \Sigma X'_1 X'' = 0; & \Sigma X''_1 X' = 0. \end{cases}$$

Calculons ensuite (X_2, Y_2, Z_2) , (X'_2, Y'_2, Z'_2) , (X''_2, Y''_2, Z''_2) par les relations

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma X_2 X = 0, & \Sigma X'_2 X' = 0, & \Sigma X''_2 X'' = 0, \\ \Sigma X_2 X_1 = 0; & \Sigma X'_2 X'_1 = 0; & \Sigma X''_2 X''_1 = 0. \end{cases}$$

Il existe trois nombres α, β, γ non tous nuls tel que l'on ait

$$(4) \quad \Sigma \alpha X_2 = \Sigma \alpha X'_2 = \Sigma \alpha X''_2 = 0.$$

autrement dit on a

$$(5) \quad \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X''_2 & Y''_2 & Z''_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces relations vraies pour des nombres réels subsistent si les lettres représentent des nombres complexes dont les opérations d'addition et multiplication possèdent les propriétés usuelles de commutativité et distributivité, et si l'opération de division nécessaire pour résoudre les systèmes (2) et (3) ne présente pas le caractère critique plus haut. C'est cette remarque que nous allons appliquer.

3. Configuration Morley-Petersen de cercles Γ pour une sphère S réelle. — Considérons trois cercles quelconques A, B, C orthogonaux à la sphère S et non perpendiculaires à un même cercle. Les cercles B, C ont deux cercles perpendiculaires communs, soit A_1 celui qui est réel; soient B_1, C_1 les deux cercles analogues. De même, soit A_2 celui des deux cercles perpendiculaires à A, A_1 qui est réel; puis B_2, C_2 , les deux cercles analogues. Il suffit de supposer que les symboles $(X, Y, Z), \dots$ se rapportent maintenant aux vecteurs (non nécessairement rectangles, définis à un scalaire complexe près de proportionnalité) définissant le cercle qui a le même nom que la droite du numéro précédent (définissant aussi le cercle conjugué si le vecteur n'est pas rectangle; mais on ne garde que le cercle réel). La traduction est immédiate: l'expression *droite perpendiculaire à une autre* est simplement remplacée par *cercle perpendiculaire à un autre*. Nous avons donc obtenu une configuration de dix cercles réels indiquée par le tableau (T), où chaque cercle est perpendiculaire à trois autres; cette configuration s'obtient à partir des trois cercles A, B, C orthogonaux à S , choisis a priori d'une façon arbitraire.

4. Configuration Morley-Petersen de cercles Γ pour une sphère S de centre réel et rayon imaginaire pure. — Partons à nouveau de trois cercles A, B, C , orthogonaux à cette sphère S , non perpendiculaires à un même cercle.

Parmi les deux cercles réels perpendiculaires à B, C choisissons-en un que nous désignerons par A_1 ; et choisissons de même B_1, C_1 . Soit

A_2 , l'un des deux cercles réels perpendiculaires à ΛA_1 ; de même B_2 et C_2 : il y a deux cercles réels perpendiculaires à Λ_2, B_2, C_2 ; soit H l'un d'eux, *les dix cercles* $A, B, C, \Lambda_1, B_1, C_1, \Lambda_2, B_2, C_2, H$ *forment une configuration telle que chacun d'eux soit perpendiculaire à trois autres conformément au tableau (T).*

Si l'on désigne par $A_0, B_0, C_0, A_1^0, \dots, A_2^0, H^0$ les cercles respectivement conjugués, la propriété démontrée plus haut, à savoir que si deux cercles Γ et Γ' (orthogonaux à S) sont rectangulaires, Γ est aussi perpendiculaire à Γ_0 et de même Γ' perpendiculaire à Γ_0 , montre que A_1^0 est le cercle complétant A_1 comme cercles perpendiculaires commun à B et C (et B_0, C_0), ... de sorte que, en réalité, nous avons *dix couples de cercles conjugués, tels que les deux cercles d'un même couple soient perpendiculaires aux six cercles de trois autres couples.*

La démonstration se fait comme plus haut, en résolvant les systèmes (2), (3), (4), qui donnent aussitôt une gerbe de Morley-Petersen formée de dix vecteurs complexes, non rectangles, et par suite les dix couples de cercles annoncés.

Toutefois, il y a une difficulté pour la démonstration: si aucun des systèmes (2), (3), (4), qui exigent pour sa résolution, une division ne présente le caractère critique, la propriété est établie. Or il est facile de montrer que, pour un choix initial de cercles A, B, C qui ne présentent pas de couple paratactique, la circonstance critique ne se produit pas d'une façon systématique. En effet, soit une gerbe réelle de Morley-Petersen réunie aux dix cercles suivant lesquels la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ est coupée par les plans perpendiculaires à chaque rayon de la gerbe (chacun de ces plans contient trois rayons de la gerbe); on a ainsi dix couples particuliers de l'espèce indiquée, orthogonaux à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$. Une inversion donne dix couples tels que dix cercles soient sur une même sphère réelle S , et dix cercles sécants en deux points O_1, O_2 conjugués relativement à S ; les sphères de rayon nul O_1, O_2 coupent S suivant un cercle imaginaire γ et la sphère S_1 orthogonale à S suivant γ (S_1 appartient au faisceau O_1, O_2, S) est la sphère à laquelle les vingt cercles réels particuliers sont orthogonaux. Donc en prenant pour cercles initiaux A^0, B^0, C^0 trois cercles réduits à des droites concourantes (ou ce qui est équivalent sécants en deux points), puis prenant des cercles A, B, C voisins respectivement de A^0, B^0, C^0 sans avoir de point commun,

on a sûrement une configuration générale de vingt cercles de l'espèce annoncée.

M. Gambier a résolu la difficulté spéciale à ce cas par une étude directe relevant de la méthode qu'il a exposée dans ce Journal; il a bien voulu aussi, au cours de la rédaction du Mémoire actuel, procéder avec moi à un échange de vues dont je suis heureux de le remercier.

3. Exemple d'une configuration de dix cercles réels relatifs à une sphère S réelle. — Les vecteurs complexes, précieux comme moyens de démonstration, le sont aussi si l'on veut pousser jusqu'au bout des calculs qui seraient interminables par des procédés directs. Prenons le cas de la sphère S de rayon réel unité et les trois cercles suivants :

A de centre (a, 0, 0) (a > 1) décrit dans le plan Oxy,
 B " (0, b, 0) (b > 1) " Oyz,
 C " (0, 0, c) (c > 1) " Ozx.

On trouve aisément les coordonnées complexes de tous les cercles de la configuration Morley-Petersen obtenue en partant de A, B, C; elles sont indiquées par les tableaux ci-dessous.

	X	Y	Z
A	0	-ai	1
B	1	0	-bi
C	-ci	1	0

	X	Y	Z
A ₁	bi	-bc	1
B ₁	1	ci	-ca
C ₁	-ab	1	ai

Pour A₂ on a les coordonnées

$$X = \frac{a^2 + b^2 + b^2c^2 - a^2b^2 - \sqrt{D}}{2bc} + i \frac{b^2 - a^2 - b^2a^2 - b^2c^2 - \sqrt{D}}{2a},$$

$$Y = \frac{-a^2 - b^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + \sqrt{D}}{2ac} + bi,$$

$$Z = -ab + i \frac{b^2a^2 + b^2c^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{D}}{2c}$$

avec

$$D = (b^2 a^2 + b^2 c^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 c^2.$$

Celles de B_2, C_2 s'en déduisent par permutation circulaire. Enfin les coordonnées de H sont

$$X = bc(1 - a^2)\lambda - ab^2 + i[\lambda ab^2 + bc(1 - a^2)],$$

$$Y = ca(1 - b^2)\lambda - bc^2 + i[\lambda bc^2 + ca(1 - b^2)],$$

$$Z = ab(1 - c^2)\lambda - ca^2 + i[\lambda ca^2 + ab(1 - c^2)]$$

avec

$$\Delta = [a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4 - \Sigma b^2 c^2 (1 - a^2)^2]^2 + 4a^2 b^2 c^2 (\Sigma a^2 - \Sigma b^2 c^2)^2,$$

$$\lambda = \frac{a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4 - \Sigma b^2 c^2 (1 - a^2)^2 - \sqrt{\Delta}}{2abc(\Sigma a^2 - \Sigma b^2 c^2)}.$$

6. Exemple d'une configuration de vingt cercles orthogonaux à une sphère S imaginaire. — Partons encore des cercles A, B, C précédents, a, b, c étant maintenant quelconques et S étant la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$. Le tableau ci-dessous indique les coordonnées des cercles A, B, C, A_1, B_1, C_1 .

	X	Y	Z
A	0	-aj	1
B	1	0	-bj
C	-cj	1	0

	X	Y	Z
A_1	bj	bc	1
B_1	1	cj	ca
C_1	ab	1	aj

Les coordonnées des cercles conjugués $A', B', C', A'_1, B'_1, C'_1$ s'obtiennent en multipliant les précédentes par j .

Pour A_2 , on a les coordonnées

$$X = \frac{a^2 b^2 + a^2 + b^2 - b^2 c^2 - \sqrt{D}}{2bc} + j \frac{b^2 c^2 + a^2 b^2 + b^2 - a^2 - \sqrt{D}}{2a},$$

$$Y = -\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 + b^2 - \sqrt{D}}{2ca} + jb,$$

$$Z = ab - j \frac{b^2 c^2 + a^2 b^2 + a^2 + b^2 - \sqrt{D}}{2c}$$

avec

$$D = (b^2c^2 + b^2a^2 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2c^2.$$

Celles de B_2, C_2 s'en déduisent par permutation circulaire; A'_2, B'_2, C'_2 s'obtiennent en multipliant les coordonnées des cercles A_2, B_2, C_2 par j .

Enfin, les coordonnées de H sont :

$$X = bc(1 + a^2)\lambda + ab^2 + j[\lambda ab^2 + bc(1 + a^2)],$$

$$Y = ca(1 + b^2)\lambda + bc^2 + j[\lambda bc^2 + ca(1 + b^2)],$$

$$Z = ab(1 + c^2)\lambda + ca^2 + j[\lambda ca^2 + ab(1 + c^2)]$$

avec

$$\Delta = [\Sigma b^2c^2(1 + a^2)^2 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4]^2 - 4a^2b^2c^2(\Sigma a^2 + \Sigma b^2c^2)^2,$$

$$\lambda = - \frac{a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 + \Sigma b^2c^2(1 + a^2)^2 + \sqrt{\Delta}}{2abc(\Sigma a^2 + \Sigma b^2c^2)}.$$

On multiplie encore par j pour avoir H' . Le cas de parataxie exigerait que a, b, c fussent égaux à la même racine de $x^2 - x + 1 = 0$; il ne peut se produire, puisque a, b, c sont des nombres réels.

V. — Notes complémentaires.

1. *Cas paratactique.* — Il est intéressant, en restant dans l'esprit du calcul vectoriel complexe, de montrer que si l'on a

$$(\varepsilon - j)(\vec{V} \wedge \vec{V}') = 0,$$

les cercles Γ, Γ' ont ε^2 cercles perpendiculaires communs et de trouver les coordonnées de tous ces cercles. Le cercle Γ correspond au vecteur rectangle $\vec{V}(a + jl, b + jm, c + jn)$ et Γ' au vecteur, aussi rectangle, $\vec{V}'(a' + jl', b' + jm', c' + jn')$, et nous pouvons, pour fixer les idées, supposer $\varepsilon = +1$ (le cas $\varepsilon = -1$ s'obtiendrait en changeant le signe de tous les multiplicateurs de j). Si l'on pose

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_0 = YZ' - ZY', & \beta_0 = ZX' - XZ', & \gamma_0 = XY' - YX', \\ X = a + jl, & Y = b + jm, & Z = c + jn, \\ X' = a' + jl', & Y' = b' + jm', & Z' = c' + jn', \end{cases}$$

on a, par hypothèse, les relations

$$(2) \quad \alpha_0 = A(1+j), \quad \beta_0 = B(1+j), \quad \gamma_0 = C(1+j),$$

$$(3) \quad \begin{cases} A = bc' - cb' + mn' - nm' = mc' - cm' + bn' - nb', \\ B = ca' - ac' + nl' - ln' = na' - an' + cl' - lc', \\ C = ab' - ba' + lm' - ml' = lb' - bl' + am' - ma'. \end{cases}$$

Les relations (3) reviennent à

$$(b-m)(c'-n') = (1-n)(b'-m') \dots,$$

c'est-à-dire aux deux relations

$$(4) \quad \frac{a-l}{a'-l'} = \frac{b-m}{b'-m'} = \frac{c-n}{c'-n'}.$$

Les propriétés qui vont nous servir reviennent à celles-ci : si l'on adopte le point de vue de la division, le quotient $\frac{1+j}{1-j}$ est indéterminé, *partiellement seulement*, il est égal à $1 + \mu(1-j)$ où μ est *arbitraire et réel* (ce qui se voit aussitôt en multipliant par $1+j$); on peut écrire plus symétriquement $\frac{1+\lambda+j(1+\lambda)}{2}$ au lieu de $1 + \mu(1-j)$, le nombre λ étant arbitraire et réel. Si l'on adopte le point de vue de la multiplication, *le produit $(h+jk)(h'+jk')$ ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul ($h+jk=0$ entraîne $h=k=0$), ou que si l'un des facteurs est proportionnel à $1+j$ et l'autre à $1-j$, ce qui entraîne, par exemple, $h+k=0, h'-k'=0$.*

Les cercles (c), perpendiculaires à Γ et Γ' doivent s'obtenir en cherchant un vecteur (rectangle ou non) complexe (α, β, γ) tel que l'on ait

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \\ \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0. \end{cases}$$

Les nombres $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sont solution du système (5), mais ne définissent pas un vecteur utilisable, car ce vecteur a pour ses trois composantes des multiples de $1+j$; tirons néanmoins parti des relations

$$(1+j)\Sigma AX = 0, \quad (1+j)\Sigma AX' = 0.$$

Chaque expression ΣAX et $\Sigma AX'$ est un multiple de $1-j$; cela se

traduit par les relations (1)

$$(6) \quad \Sigma A(a+l) = 0, \quad \Sigma A(a'+l') = 0.$$

Cela posé, les multiplicateurs X' et $-X$, ou Y' et $-Y$ ou Z' et $-Z$ donnent des conséquences nécessaires de (5) :

$$(7) \quad \beta\gamma_0 - \gamma\beta_0 = 0, \quad \gamma\alpha_0 - \alpha\gamma_0 = 0, \quad \alpha\beta_0 - \beta\alpha_0 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les expressions

$$\beta C - \gamma B, \quad \gamma A - \alpha B, \quad \alpha B - \beta A$$

sont multiples de $1-j$, ce qui se traduit, en posant pour simplifier (2),

$$(8) \quad \alpha = A[h + jh'], \quad \beta = B[k + jk'], \quad \gamma = C[l + jl']$$

par les relations nécessaires

$$(9) \quad h + h' = k + k' = l + l'.$$

Le vecteur α, β, γ pouvant être déterminé à un facteur réel près, on peut prendre 2 comme valeur commune des expressions (9) et écrire les formules symétriques

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = A[1 + \lambda + j(1 - \lambda)], \\ \beta = B[1 + \mu + j(1 - \mu)], \\ \gamma = C[1 + \nu + j(1 - \nu)], \end{cases}$$

(1) Ceci peut s'obtenir directement, en vertu des équations (3); on voit aussitôt que l'on a

$$\begin{aligned} \Sigma A(a+l) &= \begin{vmatrix} l & m & n \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ l'-a' & m'-b' & n'-c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ l-a & m-b & n-c \\ l'-a' & m'-b' & n'-c' \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

car le dernier déterminant a ses deux dernières lignes proportionnelles. On vérifie, de même, $\Sigma A(a'+l') = 0$.

(2) A, B, C ne peuvent être nuls ensemble, Γ et Γ' n'étant pas conjugués. D'autre part, le cas où l'un des nombres A, B, C est nul se traite aisément.

où λ, μ, ν sont trois constantes à déterminer. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma \alpha X = \Sigma \{ \Lambda [1 + \lambda + j(1 - \lambda)] [a + j\lambda] \} \\ &= \Sigma \{ \Lambda [a(1 + \lambda) + \lambda(1 - \lambda)] \} + j \Sigma \{ \Lambda [a(1 - \lambda) + \lambda(1 + \lambda)] \}. \end{aligned}$$

Or, en vertu de (6), ceci se réduit à

$$(11) \quad (1 - j) \Sigma \Lambda (a - \lambda) \lambda = 0,$$

et comme le multiplicateur $\Sigma \Lambda (a - \lambda)$ est réel, cela ne peut avoir lieu que si l'on a $\Sigma \Lambda (a - \lambda) \lambda = 0$. Les équations (5) équivalent donc aux équations (10) suivies des conditions

$$(12) \quad \Sigma \Lambda (a - \lambda) \lambda = 0, \quad \Sigma \Lambda (a' - \lambda') \lambda = 0$$

qui reviennent à une seule en vertu de (4). Comme vérification, on retrouve bien les trois arbitraires annoncées précédemment (deux des nombres λ, μ, ν et ensuite le facteur de proportionnalité réel par lequel on peut multiplier α, β, γ). On peut profiter de l'indétermination qui subsiste pour rendre le vecteur (α, β, γ) rectangle; on écrit donc finalement les deux équations

$$(13) \quad \Sigma \Lambda (a - \lambda) \lambda = 0, \quad \Sigma \Lambda^2 (1 - \lambda^2) = 0$$

qui ne laissent plus subsister que l'unique arbitraire irréductible, correspondant aux cercles perpendiculaires communs (et alors deux cercles conjugués s'obtiennent en changeant de signe λ, μ, ν simultanément). Si l'on regarde λ, μ, ν comme des coordonnées rectangulaires, les deux équations (13) représentent une ellipse ayant son centre à l'origine, et il est très facile d'obtenir une représentation paramétrique. On pourra poser

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = \Lambda \lambda, & \eta = B \mu, & \zeta = C \nu, \\ \alpha = \Lambda + \xi + j(\Lambda - \zeta), & \beta = B + \eta + j(B - \eta), \\ \gamma = C + \zeta + j(C - \zeta) \end{cases}$$

et l'on a

$$(15) \quad \Sigma \xi^2 = \Sigma \Lambda^2, \quad \Sigma \xi (a - \lambda) = 0.$$

Une représentation paramétrique est

$$(16) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\sqrt{\Sigma \Lambda^2}}{\delta} \left[\frac{(a-l)(n-c)}{\Delta} \sin \varphi + (b-m) \cos \varphi \right], \\ \eta = \frac{\sqrt{\Sigma \Lambda^2}}{\delta} \left[\frac{(b-m)(n-c)}{\Delta} \sin \varphi + (l-a) \cos \varphi \right], \\ \zeta = \frac{\sqrt{\Sigma \Lambda^2}}{\delta} \frac{(a-l)^2 + (b-m)^2}{\Delta} \sin \varphi. \end{cases}$$

en posant

$$(17) \quad \delta = \sqrt{(a-l)^2 + (b-m)^2}, \quad \Delta = \sqrt{(a-l)^2 + (b-m)^2 + (c-n)^2}.$$

On remarquera les formules

$$x(1+j) = 2\alpha_0, \quad \beta(1+j) = 2\beta_0, \quad \gamma(1+\gamma) = 2\gamma_0$$

qui montrent que le vecteur $\left(\frac{x}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$ est l'un des quotients par $1+j$ du vecteur $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

2. *Quelques propositions de la théorie des quadriques.* — Nous avons vu plus haut que la quadrique (Q) contenant un premier couple de droites conjuguées par rapport à S, soit Δ et Δ_0 , puis un autre couple analogue Δ', Δ'_0 coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à S. Or, il n'y a que deux cas où une quadrique (Q) coïncide avec sa polaire réciproque vis-à-vis de S : le premier est celui où (Q) et S se raccordent le long d'une conique C; en chaque point de C, les génératrices de (Q) partagent harmoniquement celles de S issues du même point, ce qui prouve que, réciproquement, S coïncide avec sa polaire réciproque vis-à-vis de (Q); ici, ce cas ne peut se produire, car (Q) étant réelle, et S à coefficients réels, le plan de C est réel; la section de (Q) par le plan de C est réelle, puisque (Q) est réglée; mais alors il y aurait contradiction, C appartenant aussi à S qui n'a aucun point réel. C'est donc le second cas qui est réalisé : (Q) et S ont un quadrilatère gauche commun ABCD; on a ∞' cercles Γ tous paratactiques entre eux, dont les axes s'appuient sur AB et CD (génératrices de même système, imaginaires conjuguées sur S), puis ∞' cercles (c) tous paratactiques entre eux dont les axes s'appuient sur AC et BD; chaque cercle (c) est perpendiculaire à chaque cercle Γ et inversement. Les foyers des

cercles Γ sont sur AB et CD , droites isotropes, et c'est là le criterium qui a fait découvrir, aux premiers géomètres qui l'ont remarqué, le caractère paratactique. On peut remarquer que si l'on se donne un cercle unique Γ (ce qui entraîne la connaissance du cercle conjugué Γ_0), l'axe Δ de Γ coupe la sphère en P, Q ; les deux génératrices isotropes issues sur S de P coupent les génératrices de système opposé issues de Q en P_0 et Q_0 ; la droite Δ_0 est P_0Q_0 ; un cercle Γ' paratactique à Γ a un axe Δ' qui rencontre, soit PP_0 et QQ_0 , soit PQ_0 et QP_0 ; ces deux cas distincts correspondent aux deux espèces de parataxie; le quadrilatère gauche PP_0QQ_0 est tracé sur S et Δ' rencontre un couple de côtés opposés : on vérifie aussitôt que cela suffit pour que Δ'_0 rencontre les deux mêmes côtés et que les quatre droites $\Delta, \Delta', \Delta_0, \Delta'_0$ appartiennent à une même quadrique (Q) et que cette quadrique coïncide avec sa polaire réciproque vis-à-vis de S . On rencontre ainsi incidemment cette proposition que si un quadrilatère gauche (PP_0QQ_0) est tracé sur une quadrique S , toute quadrique (Q) passant par les diagonales (PQ, P_0Q_0) du quadrilatère et deux côtés opposés est à elle-même sa polaire réciproque vis-à-vis de S . Cette façon d'opérer semble faire intervenir *cinq* paramètres et non *quatre* pour déterminer (Q), à savoir les quatre paramètres déterminant le quadrilatère gauche PP_0QQ_0 sur S , puis le paramètre fixant les quadriques contenant PQ, P_0Q_0 et le couple PQ_0, QP_0 ; mais il faut remarquer que chaque quadrique (Q) ainsi obtenue est obtenue ∞' fois, car chaque génératrice Δ de (Q) fournit un quadrilatère gauche de l'espèce annoncée.

