JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ BLOCH

Fonctions méromorphes et surfaces algébriques; développement taylorien d'une puissance

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 287-305.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__287_0>

Fonctions méromorphes et surfaces algébriques ; développement taylorien d'une puissance ;

PAR ANDRÉ BLOCH.

1. Le premier objet du présent article est de rectifier certaines de nos affirmations antérieures au sujet des fonctions entières et méromorphes, principalement de deux et plusieurs variables. On verra que tandis que les propriétés des fractions rationnelles demeurent parallèles quel que soit le nombre des variables, par contre l'existence en nombre infini de certaines indéterminations peut donner aux fonctions méromorphes de deux variables des propriétés assez étranges, fort différentes en tout cas de celles qui ont lieu pour une variable.

Plus loin sont donnés plusieurs théorèmes de théorie des fonctions ou de géométrie algébrique; un notamment sur une surface sextique très remarquable de M. Enriques, qui paraît ouvrir la voie à des recherches générales sur les surfaces à division plurivoque.

A la fin est établi sous forme simple le développement taylorien d'une puissance $m^{\text{ième}}$. Un numéro supplémentaire concerne une méthode nouvelle d'investigation en théorie des fonctions.

2. Dans un article publié en 1927 (¹), nous avons nié l'exactitude d'un résultat établi par M. Fatou (²), auteur regretté de travaux célèbres, notamment sa thèse très belle et ses recherches très remarquables sur l'itération. Ce résultat est en réalité parfaitement exact;

(¹) *Enseignement mathématique*, t. XXVI, 1927, p. 52 : *Sur une nouvelle et importante généralisation de l'équation de Laplace*, article consacré à l'étude d'une expression différentielle remarquable introduite par M. Giraud.

(²) *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 862 et 1030.

il s'énonce ainsi : « *Il existe des couples de fonctions méromorphes (indépendantes) de deux variables qui ne peuvent s'approcher simultanément et indéfiniment de certains couples de valeurs données.* » En raison de l'importance de ce fait et de ce qu'il paraissait malaisé — et aujourd'hui encore, semble-t-il — de le rattacher aux propriétés connues des fonctions d'une et de deux variables [1], nous en donnons ici une démonstration d'une forme un peu différente, n'utilisant pas explicitement la birationalité de la substitution envisagée. Nous nous bornons à un cas simple, concernant deux fonctions entières indiquées par M. Fatou. La démonstration est une conséquence immédiate de trois lemmes indépendants l'un de l'autre.

LEMME 1. — *Il existe des fonctions entières, $f(u, v)$ et $g(u, v)$, nulles à l'origine et satisfaisant aux relations fonctionnelles*

$$f(v, 2u) = g(u, v),$$
$$g(v, 2u) = 2f(u, v) + 4f(u, v)g(u, v) - 3[g(u, v)]^2.$$

Pour établir ce lemme, on écrit les relations de récurrence entre les coefficients des développements tayloriens, comme l'a fait Poincaré [2] pour le cas d'une seule variable, on montre qu'elles déterminent les coefficients et l'on obtient pour ceux-ci des bornes supérieures d'où résulte la convergence partout. Ce procédé, un peu plus long que celui des approximations successives, est cependant plus indiqué, étant donné qu'il s'agit de fonctions analytiques.

LEMME 2. — *Soit la substitution $X = y$, $Y = 2x + 4xy - 3y^2$. Supposons que le point (x, y) appartienne à la région R définie par l'inégalité $|x + 1|^2 + |x - y|^2 \geq \frac{1}{100}$. Alors le point (X, Y) appartient également à R.*

Il suffit pour le voir de transporter l'origine au point $(-1, -1)$, de

(1) Dans l'article cité, nous avons, à tort, émis un doute sur l'existence effective des fonctions utilisées par M. Fatou, qui sont dues, on le sait, à M. Picard. La condition imposée au rapport des multiplicateurs d'être différent d'un entier et de l'inverse d'un entier était à vrai dire un peu surprenante. En réalité, si ce rapport est un entier p, il existe encore des fonctions répondant à la question, mais leurs termes de plus bas degré, au lieu d'être u et v, sont u et v^p.

(2) *J. M.*, 1890

démontrer la proposition réciproque contraire, puis de faire à la place un raisonnement direct.

Lemme 3. — *La substitution* $U = v$; $V = 2u$ *fait correspondre biunivoquement les domaines hermitiens* $2|u|^2 + |v|^2 < 2^n$ *et* $2|U|^2 + |V|^2 < 2^{n+1}$.

Ces trois lemmes admis, si le point représentatif du système de fonctions est intérieur à R quand (u, v) est dans l'avant-dernier domaine hermitien, il y sera aussi quand (u, v) est dans le dernier; or il est clair que cela a lieu si n est négatif et suffisamment grand en valeur absolue; alors, de proche en proche, le point représentatif est partout intérieur à R; le point $(-1, -1)$ n'est donc pas indéfiniment approché.

3. A l'époque de la publication de l'article cité, nous avions eu l'idée que si le théorème de Liouville-Weierstrass n'était pas exact pour un couple quelconque de fonctions méromorphes, il devait l'être par contre pour un couple de fonctions ne prenant les mêmes valeurs que pour des systèmes discrets de valeurs des variables, c'est-à-dire engendrant une correspondance partout localement bifinivoque; et M. H. Cartan a eu indépendamment la même opinion. Mais dans notre esprit elle avait été immédiatement combattue par la remarque qu'un couple quelconque de fonctions est toujours infiniment voisin d'un couple à correspondance partout localement bifinivoque. Eh bien, à l'expression de Y en x et y, adjoignons un terme εx^2 : on obtient un tel couple; or la substitution cesse d'être birationnelle, la démonstration ne s'applique plus, et il est probable que tout couple de valeurs est indéfiniment approché.

C'est encore là un fait des plus troublants. Et si sans ajouter de terme εx^2, nous faisons varier les coefficients de la substitution, nous obtiendrons également des résultats peu habituels. Faudra-t-il transformer la terminologie en vigueur? Convient-il d'associer au système de fonotions le système analogue relatif à la même substitution, mais au point double $(-1, -1)$, et les deux systèmes seraient-ils liés par une sorte de prolongement analytique de nature nouvelle, la correspondance devenant alors multiforme ? Ce n'est, en tout cas, que par une étude approfondie qu'on arrivera peut-être à ouvrir une voie à la reconstruction.

MM. E.-H. Moore et J.-F. Ritt [1] ont établi dans des cas étendus l'hypertranscendance des fonctions de Poincaré et de M. Picard. Lorsque la substitution est birationnelle, la question doit être posée. A défaut de deux n'y aurait-il pas dans ce cas au moins une relation différentielle algébrique? et pourra-t-elle servir à établir le résultat de M. Fatou à l'aide des seules relations récurrentes entre les coefficients, sans utiliser la substitution ? Il y aurait en tout cas grand intérêt à établir ce résultat de cette dernière manière; et un non moindre à trouver des systèmes de fonctions jouissant de la même propriété et vérifiant chacune deux relations différentielles algébriques distinctes, c'est-à-dire hyperalgébriques [2].

La théorie géométrique des substitutions de Cremona se complète par celle des involutions planes; mais on sait que malgré le théorème capital de M. Castelnuovo sur leur rationalité, cette dernière est encore peu avancée [3].

Quant au théorème de Liouville-Weierstrass pour le cas où le système de fonctions réalise une correspondance sans singularités d'indétermination, sa démonstration, s'il est exact, paraît des plus difficiles; la méthode esquissée dans l'article cité de l'*Enseignement mathématique* rendra peut-être quelques services.

Au sujet de cet article, signalons que le théorème de la page 57, tel qu'il est énoncé, est faux; M. Henri Cartan nous signale en effet l'exemple $X = x$, $Y = xy$, qui prouve qu'il n'a même pas lieu pour deux polynomes, les points $X = 0$, $Y \neq 0$ n'étant pas atteints; son inexactitude était donc liée au fait connu que deux polynomes indé-

---

(1) Voir J.-F. Ritt, *Math. Ann.*, t. XCV, 1925, p. 671.

(2) On appelle généralement *hypertranscendantes* les fonctions que M. Moore, suivi par M. Ritt, appelle plus justement, mais plus longuement, *transcendantalement transcendantes;* nous appelons *hyperalgébriques* celles que M. G. Loria appelle *panalgébriques;* hypertranscendant est le contraire d'hyperalgébrique. A un certain point de vue on pourrait au lieu d'hyper dire « hypoalgébrique »; mais hyperalgébrique répond mieux aux habitudes courantes. Il convient d'observer que le rôle du préfixe *hyper* n'est pas le même dans les mots hypertranscendant et hyperalgébrique; dans le premier, il limite la classe inférieurement, dans le second, supérieurement; cela paraît sans inconvénient.

(3) *Cf.* L. Godeaux, *Les transformations birationnelles du plan* (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. XXII, 1927).

pendants en x et y peuvent ne pas prendre à distance finie tous les systèmes finis de valeurs. Il faudra en modifier l'énoncé.

Quant à l'espoir formulé à la page 61, il faut l'abandonner; selon toute apparence, l'analogie avec les surfaces développables est complète, c'est-à-dire que le problème de Dirichlet pour $\Delta\Delta u = 0$, même sur une hypersphère, pourra admettre dans certains cas plus de deux solutions, et même une infinité. Cela ne sera pas pour simplifier les choses.

Au sujet du principal objet du présent paragraphe, l'exemple suivant, dû à M. H. Cartan, prouve que pour qu'un couple de fonctions méromorphes ne s'approche pas indéfiniment d'un couple de valeurs, il n'est pas nécessaire qu'il y ait indétermination en une infinité de points (x, y) [il faut seulement, peut-on supposer, qu'il y ait une infinité de fois indétermination]. C'est celui des fonctions de Picard attachées à la substitution

$$X = y,$$
$$Y = \frac{3}{2}x(1 - y^2) - y$$

et non pas au point double $x = y = 0$, mais au point double $x = y = \frac{i}{\sqrt{3}}$, ou au point double $x = y = -\frac{i}{\sqrt{3}}$. Ici, il n'y a que deux points d'indétermination : les points $x = 1$, $y = -1$ et $x = -1$, $y = 1$; car ces deux points sont simplement permutés par la substitution envisagée.

4. M. Picard (¹) a considéré comme probable l'existence de surfaces non hyperelliptiques uniformisables par les fonctions méromorphes. Une telle existence nous a paru au contraire peu vraisemblable (²). Elle nous semblait presque aussi peu probable que celle de couples de fonctions méromorphes ne s'approchant pas indéfiniment de certains couples de valeurs. Nous croyons aujourd'hui qu'elle a lieu.

Faisons d'abord quelques remarques. On n'a pas démontré, à notre connaissance, que la surface générique d'ordre $\geqq 4$ n'admet pas de

(¹) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 468 et 480.

(²) *Sur les systèmes de fonctions uniformes...* (*J. M.*, 1926, p. 21).

transformations birationnelles, ou seulement rationnelles en elle-même; c'est cependant tout à fait vraisemblable. Et c'est probablement vrai, en particulier, pour une surface générique de genres un. De même nous ne connaissons aucune publication où se trouvent déterminées toutes les transformations birationnelles, ou seulement rationnelles, d'une surface de Kummer générique en elle-même.

Considérons une surface de genre géométrique p_g non nul, admettant une transformation rationnelle en elle-même. Par cette transformation, une intégrale double de première espèce se change visiblement en une intégrale analogue; la réciproque a lieu, car à p_g intégrales indépendantes ne peuvent évidemment correspondre que p_g intégrales indépendantes. La transformation réalise donc une substitution linéaire sur les p_g intégrales de première espèce, à déterminant non nul; en la mettant sous forme canonique, on aura des intégrales se reproduisant à un facteur constant près.

Théorème. — *Si par une transformation rationnelle* $(1, n)$ *d'une surface en elle-même une intégrale double de première espèce se reproduit à un facteur constant près, ce facteur a une valeur absolue égale à* $\sqrt{n}$.

En effet, $d\Omega$ étant l'élément de l'espace quadridimensionnel de x et y complexes, considérons l'intégrale quadruple

$$\iiiint \left| \frac{Q(x, y, z)}{F'_z} \right|^2 d\Omega$$

étendue à toute la surface, et qui est finie. Elle se reproduit par la transformation, multipliée par le carré de la valeur absolue du facteur constant; mais d'autre part elle se reproduit aussi multipliée par n, puisqu'à la surface correspond n fois la surface. D'où le théorème.

On voit que lorsque la transformation est birationnelle, la valeur absolue de l'intégrale double est un invariant intégral.

M. Enriques a démontré (¹) que toute surface pour laquelle le genre arithmétique et le trigenre sont nuls, le bigenre égal à un est birationnellement équivalent à une surface sextique passant doublement par

(¹) *Sopra le superfic algebriche di bigenere uno* (*Mem. d. Soc. ital. d. Sc.*, 1906).

les six arêtes d'un tétraèdre; qu'une telle surface admet toujours une infinité discontinue de transformations birationnelles en elle-même; qu'elle représente birationnellement une involution du second ordre [1] d'une certaine surface de genres un (correspondant à l'adjonction de l'irrationnelle $\sqrt{\text{ABCD}}$, où $\text{ABCD} = 0$ est le tétraèdre).

Par la méthode de M. Enriques, on établit aisément en outre l'existence d'une infinité de transformations simplement rationnelles de la surface en elle-même.

Nous ne démontrerons pas le théorème suivant [2].

Théorème. — *Soit* $F = 0$ *la surface sextique d'Enriques. Si la surface est générique, l'intégrale double* $\int\int \sqrt{\text{ABCD}} \frac{dx\,dy}{F_z}$ *se reproduit multipliée par le facteur* $\sqrt{n}$ *dans toute transformation* $(1, n)$ *de la surface en elle-même. Si la surface est quelconque, elle se reproduit multipliée par un facteur de valeur absolue* $\sqrt{n}$.

Cette intégrale, dont il conviendrait pour démontrer complètement le théorème précédent d'étudier le comportement en tout point, fournit une signification transcendante du bigenre. En général, des intégrales analogues permettront probablement d'étudier les rapports des plurigenres avec le nombre σ de M. Severi et le groupe abélien correspondant.

5. Voyons maintenant comment les considérations du précédent numéro peuvent guider dans la recherche de surfaces uniformisables par les fonctions méromorphes.

Il est à peu près certain que les surfaces à genre d'ordre douze supérieur à un n'en font jamais partie. Il faudra donc les chercher parmi les surfaces de genres un et la surface sextique d'Enriques. Pour que

---

(1) Cette involution a-t-elle ou non des points unis ? Cette question, du moins à notre connaissance, ne paraît pas avoir été clairement résolue.

(2) Il est d'une démonstration aisée pour les transformations birationnelles envisagées par M. Enriques; car il suffit alors de l'établir dans le cas particulier de la transformation involutive déterminée par les droites rencontrant deux arêtes opposées, ce qui par le calcul est à peu près immédiat.

la méthode de M. Picard donne des fonctions méromorphes, il faut que la substitution ait un point double et que les multiplicateurs y soient inférieurs à un. Cette dernière condition entraîne, d'après les théorèmes précédents, que la substitution ne pourra être birationnelle. Mais ces conditions ne sont peut-être pas essentielles, et en perfectionnant le raisonnement on arrivera peut-être à les remplacer par d'autres moins restrictives. En tout cas, il est probable que par cette méthode on arrivera à démontrer l'uniformisabilité par les fonctions méromorphes de la surface de M. Enriques (qui, dépendant de dix modules, n'est pas en général hyperelliptique) tandis que pour les surfaces de genres un, même quartiques, on ne pourra aboutir ainsi qu'exceptionnellement. Cela laisse d'ailleurs intacte la question de l'uniformisabilité par les fonctions méromorphes de toutes les surfaces de genres un. Mais, au point de vue actuel, c'est à la surface de M. Enriques qu'il convient, semble-t-il, de s'attacher.

Si toute surface de genres un est uniformisable par des fonctions méromorphes les énoncés LIII et LIV de notre fascicule du *Mémorial* seront inexacts (le dernier même modifié). Il faudra les énoncer sous forme plus restrictive. Par exemple, il est probable que toute surface algébrique, uniformisable par des fonctions méromorphes réalisant une correspondance partout localement biunivoque, est hyperelliptique.

Sous la même supposition, la relation $f_3(x, y, z) = 1$, où le premier membre est une forme ternaire homogène, sera probablement vérifiée par des fonctions entières indépendantes de deux variables; il y a en effet beaucoup d'analogie entre le plan affecté d'une cubique lacunaire et les surfaces de genres un.

6. Dans le tome II de la sixième série des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, nous avons publié un article intitulé : *Le problème de la cubique lacunaire.* La partie algébrique en est, croyons-nous, exacte, et les problèmes qu'elle pose encore paraissent mériter de retenir l'attention; mais la partie de Théorie des fonctions donnée d'ailleurs seulement comme vraisemblable en est, selon toute apparence, dénuée de fondement.

Elle reposait en effet essentiellement sur l'idée que deux fonctions méromorphes admettant la cubique lacunaire étaient liées par une relation algébrique. Or cela ne paraît pas vrai. L'erreur ici était bien moins excusable que pour les fonctions méromorphes de deux variables, dont les propriétés inattendues ne peuvent vraisemblablement se présenter que moyennant l'accumulation peu ordinaire de certaines singularités. Bien que nous ne soyons pas davantage en mesure de nous attacher à en construire, l'existence de fonctions méromorphes d'une variable liées par l'équation d'une surface de genres un, incluses dans un plan à cubique lacunaire, et dont le point représentatif décrit une courbe transcendante, paraît encore plus certaine que celle — dont elle serait d'ailleurs une conséquence — de fonctions méromorphes indépendantes de deux variables uniformisant une telle surface, un tel plan.

Pour nous en rendre compte, soit à satisfaire à l'équation

$$(\alpha) \qquad X^3 + Y^3 + Z^3 = \text{const.}$$

par des fonctions entières d'une variable; l'article cité donne la solution pour les polynomes; pour les fonctions entières proprement dites, envisageons par exemple la solution

$$(ae^{2u} + a'e^{-u})^3 + (be^{2u} + b'e^{-u})^3 + (ce^{2u} + c'e^{-u})^3 = \text{const.},$$

les points (a, b, c), (a', b', c') doivent être supposés sur la cubique, le second le tangentiel du premier. Si l'on fait varier infiniment peu le point (a, b, c) sur la cubique, on obtient une nouvelle solution, infiniment voisine de la précédente. Est-ce la seule solution infiniment voisine? Tout fait supposer le contraire; il est clair en effet qu'il n'y a aucune raison pour que x, y, z se décomposent nécessairement chacune en une somme de deux exponentielles.

Ainsi les premiers alinéas des énoncés L et LII de notre fascicule du *Mémorial* (où d'ailleurs à cause du manque de place, nous n'avons pas fait les mêmes réserves que dans les *Nouvelles Annales*) sont inexacts; ils ne s'appliquent qu'aux courbes algébriques.

On peut se proposer de trouver toutes les fonctions entières d'ordre fini, satisfaisant à l'équation (α); on peut se guider sur les considérations suivantes :

Soit à satisfaire en fonctions entières d'une variable u à l'équation

$$(\beta) \qquad X^2 - (u^2 - 1)\,Y^2 \,\text{const.}$$

S'il s'agit de polynomes, ceux-ci sont bien connus, et l'on a, par dérivation,

$$(u^2 - 1)(XY' - YX') + uXY = \text{const}\cdot$$

S'il s'agit au contraire de fonctions entières d'ordre fini, on peut voir [1] que le second membre de cette dernière équation, au lieu d'être constant, est un polynome en t. Ainsi, dans ce cas, la solution est hyperalgébrique. Les surfaces de Riemann des fonctions X^2 correspondantes ont des définitions simples.

Analoguement, on pourra chercher des relations différentielles vérifiées par les polynomes satisfaisant à l'équation (α), et faire ensuite une recherche semblable pour des fonctions entières d'ordre fini.

7. Il résulte de ce qui précède que pour la seconde supposition émise à la page 21 de notre Mémoire de 1926 du présent *Journal* il est à peu près certain qu'elle ne correspond pas à la réalité. Mais la question se pose alors de savoir si une surface de genre d'ordre douze supérieur à un peut ou non contenir des courbes transcendantes uniformisables par des fonctions méromorphes; si elle est résolue par la négative, c'est que toute surface contenant une telle courbe sera uniformisable par des fonctions méromorphes (du moins si les suppositions du présent article sont vraies); théorème qui en suggère visiblement un plus général pour un nombre quelconque de dimensions, de variables et de fonctions.

Nous aurions mieux fait, dans le *Mémorial*, d'expliciter la forme finitiste des seconds alinéas des énoncés L et LII et du théorème LI. Le dénombrement des coefficients conduit à les regarder comme à peu peu près certains. Nous n'avons toutefois pas développé le projet de démonstration que nous avions formé en 1926, fondé sur la dérivation; il nous semble en effet qu'une méthode nouvelle et absolument géné-

[1] *Cf.* G. Valiron, *Lectures en the general theory of integral fonctions.* Toulouse 1923, p. 77.

rale doit bientôt remplaeer la dérivation [1]. Aussi n'appliquerons-nous pas cette dernière à la démonstration de l'impossibilité pour m assez grand de

$$X^m + Y^m + Z^m + T^m = 0$$

en fonctions entières non proportionnelles deux par deux, ni de

$$f_2(X^m, Y^m, Z^m, T^m) = 0$$

en fonctions entières non toutes proportionnelles, les coefficients de la forme quadratique quaternaire f_2 n'étant liés par aucune relation particulière.

A côté du théorème relatif aux quatre droites d'indices au sens large égaux à cinq, nous pouvons aujourd'hui faire figurer le suivant, réponse à une question qui nous fut proposée par M. G. Valiron :

THÉORÈME. — *Dans le plan projectif affecté de quatre droites en position générale, d'indices au sens large égaux à deux pour la première, à sept pour les trois autres, les seules courbes lieux de points à coordonnées méromorphes sont les trois diagonales du quadrilatère complet et les trois coniques dont chacune est tangente à la première, et l'est aussi à deux des trois autres en leurs points de rencontre avec la quatrième.*

Les traductions finitistes de ce théorème et des seconds alinéas des énoncés L et LII sont entièrement analogues au troisième alinéa de l'énoncé suivant qui comprend et précise le théorème LI.

THÉORÈME. — *Une surface sans singularités de l'espace à trois dimensions, d'ordre m égal ou supérieur à cinq, ne possède pas en général de courbes lieux de points à coordonnées méromorphes; si elle en possède, celles-ci sont algébriques, et par suite unicursales ou elliptiques.*

Le degré et le nombre de ces courbes sont bornés supérieurement par une quantité ne dépendant que de m.

Soient deux points A et B de la surface, non situés sur une même des courbes précédentes. Soit dans le plan d'Argand-Gauss un cercle

---

(1) Cette méthode sera en rapport avec celle de MM. F. et R. Nevanlinna, basée sur l'équation $\Delta u = e^u$, et celle de M. T. Shimizu, utilisant l'aire du domaine riemannien sur la sphère.

$|u| < R$ ($R > 1$) *et dans ce cercle des fonctions méromorphes satisfaisant à l'équation de la surface, le point représentatif venant en* A *pour* $u = 0$, *en* B *pour* $u = 1$. *Alors le rayon* R *de ce cercle admet une borne supérieure ne dépendant que de la surface et des points* A *et* B.

8. Des changements résultant de ceux indiqués ci-dessus seraient à faire dans un autre article [1]. Nous y avions rangé dans une classe (1^{re} et 2^e catégories) les surfaces de genre d'ordre douze égal à zéro ou un, à l'exception des réglés de genre supérieur à un; dans une autre classe (3^e et 4^e catégories) les surfaces de genre d'ordre douze supérieur à un et lesdites réglées. Cette division en deux classes semble devoir être maintenue (elle séparerait désormais les surfaces uniformisables par les fonctions méromorphes et les autres).

Mais au sein de chaque classe les distinctions paraissent moins aisées à faire.

La première classe se partage en trois groupes principaux : les surfaces hyperelliptiques admettant une représentation partout localement bifinivoque dans le champ quadruplement périodique; les autres surfaces hyperelliptiques (transformées birationnelles des précédentes); les surfaces non hyperelliptiques (de genres un ou sextiques d'Enriques). Le second groupe se distingue vraisemblablement du premier par le fait qu'il n'est uniformisable que par des fonctions méromorphes réalisant une correspondance a indétermination. Quant au second et au troisième groupe, bien que birationnellement distincts nous ne connaissons pas la manière de les distinguer au point de vue de la théorie des fonctions. Il est d'ailleurs probable que toute surface de genres un, toute surface équivalente à une surface sextique d'Enriques, est infiniment voisine d'une surface hyperelliptique [2].

Quant à la seconde classe, elle coïncide, les réglés exceptées, avec celle des surfaces à $P_{12} > 1$; on distingue alors les surfaces à genre linéaire égal à un et celles à genre linéaire supérieur à un. Pour celles

---

(1) *Sur l'uniformisabilité des surfaces algébriques et sur un complément à leur classification* (*Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* Lyon 1926).

(2) *Cf.* Enriques et Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta math.*, t. 32, p. 353-354).

de la première sorte, le jacobien dans l'hypersphère n'est vraisemblablement jamais borné; mais par contre la dérivée dans le cercle l'est pour un élément de contact générique (sauf peut-être pour certaines surfaces exceptionnelles, dont nous ne savons si elles existent ou non); ces surfaces appartiennent donc, dans notre terminologie, à la dernière catégorie. Pour celles de la seconde sorte, le jacobien dans l'hypersphère est probablement toujours borné; en existe-t-il pour lesquelles la dérivée dans le cercle n'est bornée nulle part, n'appartenant donc pas à la dernière catégorie; et dans l'affirmative, coïncident-elles avec les surfaces dont les courbes elliptiques sont en infinité dénombrable? Il serait en tout cas très intéressant de construire de ces dernières; et plus généralement, bien qu'ayant peut-être moins de rapports avec l'uniformisabilité méromorphe, la détermination des surfaces sur lesquelles existent des courbes de genre fixe et d'ordre non borné paraît un important problème.

9. La lecture d'un article de M. G. Calugareano [1], publié récemment, nous détermine à ajouter au présent article quelques remarques sur les fonctions méromorphes d'une variable, et une nouvelle formule de développement taylorien.

On sait, d'après Cauchy et M. Hadamard, que le rayon de convergence d'une série entière de terme général $a_n x^n$ est donné par $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$; la condition pour que la série représente une fonction entière est donc $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$.

La condition pour qu'une série entière représente une fraction rationnelle est l'existence d'une relation linéaire récurrente. Par suite, en général, l'inverse du rayon du cercle de méromorphie sera la limite supérieure des racines de certains ordres de certains déterminants; la condition de méromorphie dans tout le plan est alors que ces racines tendent vers zéro.

La condition pour que zéro par exemple soit valeur lacunaire d'une fonction méromorphe est que l'inverse soit une fonction entière.

---

[1] *Sur la détermination des valeurs exceptionnelles des fonctions entières et méromorphes de genre fini* (*Bull. des Sc. math.*, t. LIV, 1930, p. 17).

La condition pour que zéro soit valeur lacunaire d'une fonction entière d'ordre fini p est que, dans le développement taylorien de son logarithme, les coefficients des termes de degré supérieur à p soient tous nuls.

10. Soit à trouver le développement taylorien de

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)^m = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots.$$

La dérivation logarithmique donne :

$$\begin{aligned} m(a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots) \\ = (b_1 + 2b_2 x + \ldots + nb_n x^{n-1} + \ldots)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} a_0 b_1 &= m b_0 a_1, \\ 2a_0 b_2 + a_1 b_1 &= m[2b_0 a_2 + a_1 b_1), \\ 3a_0 b_3 + 2a_1 b_2 + a_2 b_1 &= m(3b_0 a_3 + 2b_1 a_2 + b_2 a_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'où, en résolvant de proche en proche et faisant $x = 1$:

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots)^m \\ &= a_0^m + \frac{a_0^{m-1}}{1} m a_1 + \frac{a_0^{m-2}}{1.2}\begin{vmatrix} ma_1 & 2ma_2 \\ -a_0 & (m-1)a_2 \end{vmatrix} \\ &\quad + \frac{a_0^{m-3}}{1.2.3}\begin{vmatrix} ma_1 & 2ma_2 & 3ma_3 \\ -a_0 & (m-1)a_1 & (2m-1)a_2 \\ 0 & -2a_0 & (m-2)a_1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \frac{a_0^{m-4}}{1.2.3.4}\begin{vmatrix} ma_1 & 2ma_2 & 3ma_3 & 4ma_4 \\ -a_0 & (m-1)a_1 & (2m-1)a_2 & (3m-1)a_3 \\ 0 & -2a_0 & (m-2)a_1 & (2m-2)a_2 \\ 0 & 0 & -3a_0 & (m-3)a_1 \end{vmatrix} + \ldots, \end{aligned}$$

formule que nous avons obtenue par cette voie le 27 octobre 1928. D'après la manière de l'obtenir, elle est valable pour m quelconque pourvu que la série $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ converge et soit de somme inférieure à $|a_0|$; pour m entier positif, la seconde condition est inutile.

On obtient de même deux formules analogues pour le logarithme et l'exponentielle

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots) \quad \text{et} \quad \exp.(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots),$$

formules qui se déduisent d'ailleurs aussi de la précédente par passage à la limite en faisant respectivement $m = 0$ et $m = \infty$.

Quel que soit m, si les a_i sont nuls à partir d'un certain rang, la fonction satisfait à une équation linéaire du premier ordre sans second membre; elle est d'ailleurs algébrique si m est rationnel.

En général, il est clair qu'une fonction algébrique quelconque de degré m satisfait à une équation linéaire d'ordre m sans second membre, à une d'ordre $m - 1$ à second membre, l'une conséquence de l'autre. Pour trouver ces équations, par exemple celle d'ordre $m - 1$, on observe que connaissant y on trouve de proche en proche $y', y'', \ldots$; puisqu'il y a m valeurs de y, il y a m systèmes $(y, y', \ldots, y^{(m-1)})$. L'équation devant être vérifiée par ces m systèmes, les coefficients en sont déterminés et on les obtiendra par un calcul d'élimination.

Une fonction algébrique de degré m satisfait à une équation d'ordre $m - 1$ sans second membre lorsque le second coefficient de l'équation algébrique est nul.

En général, il est à prévoir que le premier coefficient de chaque équation linéaire contiendra en facteur le discriminant de l'équation algébrique.

11. Au moment de terminer le précédent article, nous avons communication d'une note remarquable de M. F. Nevanlinna [1], dont la lecture nous détermine a donner ici au moins quelques indications sommaires sur la méthode nouvelle dont nous avons dit un mot au n° **7**. Nous avons trouvé en 1928 cette méthode que, tant au point de vue de la théorie des fonctions qu'à celui de la théorie des équations aux dérivées partielles, nous avons déjà communiquée à plusieurs mathématiciens.

Dans leurs travaux fondamentaux sur la théorie des fonctions [2],

---

[1] *Ueber die logarithmische Ableitungeiner meromorphen Funktion* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, 1929).

[2] *Voir* pour toutes indications bibliographiques l'ouvrage de M. R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, collection Borel, 1929). La première méthode est due plus particulièrement à M. R. Nevanlinna, la seconde à M. F. Nevanlinna.

MM. Frithiof et Rolf Nevanlinna ont créé trois méthodes différentes; la première en date est celle des valeurs moyennes logarithmiques et repose sur la dérivation; la seconde est celle qui utilise la solution de l'équation $\Delta u = e^u$ de la théorie des fonctions fuchsiennes; la troisième est celle de la note citée : elle est fort analogue à la première, mais établit de manière différente le lemme fondamental relatif à la valeur moyenne logarithmique de la dérivée logarithmique, manière qui, comme le remarque M. F. Nevanlinna, est dans un ordre d'idées très voisin de celui de la seconde méthode.

La première de ces trois méthodes est celle qui est actuellement la plus classique; elle a été la base d'un grand nombre de travaux, dont les nôtres. On peut songer à la rendre plus parfaite à deux points de vue :

1° Tout d'abord on peut penser à remplacer les valeurs moyennes logarithmiques par les aires riemanniennes sphériques, étudiées par M. T. Shimizu (1), et en étroit rapport avec elles comme il l'a montré. Les résultats seront probablement plus précis; et d'autre part ces aires s'évaluant exactement à l'aide des coefficients, tout d'abord dans le cas de polynomes et de fractions rationnelles, on pourra déduire de là des démonstrations purement algébriques.

2° D'autre part la démonstration par dérivation suppose résolue l'équation dont les racines sont les valeurs exceptionnelles imposées, supposées de même indice. Il y a évidemment grand intérêt, en vue des extensions pluridimensionnelles, à supposer simplement ces valeurs données par une équation non résolue.

Eh bien, la méthode à laquelle on sera conduit par ce double perfectionnement sera précisément celle, calquée sur la seconde méthode de MM. Nevanlinna, dont nous allons donner le principe.

Elle consiste à remplacer la solution de l'équation $\Delta u = e^u$ sur le type automorphe envisagé, solution dont l'emploi donne les résultats les plus complets, ainsi que l'ont montré MM. Nevanlinna pour un type sphérique à points lacunaires — la même méthode s'applique à un type quelconque — par une valeur approchée de cette solution.

---

(1) *Jap. Journal of Math.*, t. 6, 1929, p. 119.

Le cas d'un type à points lacunaires étant peut-être légèrement moins simple, nous prendrons pour fixer les idées un type composé de cinq points, a, b, c, d, e, que nous supposerons d'indice deux ; le point à l'infini ne présentera rien de particulier. Soit

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=\mathrm{P}_5.$$

La fonction à utiliser sera

$$v=-\frac{1}{2}\log|\mathrm{P}_5|+\frac{1}{2}\log\sqrt{1+|x|^2}.$$

On a $\Delta v>0$. Aux environs du point $x=a$, v diffère par une quantité finie de $-\frac{1}{2}\log|x-a|$. Enfin pour x très grand, v diffère par une quantité finie de $-2\log|x|$.

Il faudra, au moyen de cette fonction v remplaçant la solution de l'équation, refaire le calcul développé par M. F. Nevanlinna aux *Acta mathematica*, par M. R. Nevanlinna dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Remarquons finalement que, d'une manière à un certain point de vue inverse, on peut utiliser la fonction v dans l'intégration de l'équation aux dérivées partielles; c'est en effet une première approximation de la solution, d'où l'on pourra déduire la solution elle-même par un cheminement consistant à trouver à chaque instant la variation de la fonction par une certaine équation linéaire aux dérivées partielles avec certaines conditions aux limites.

Il est d'ailleurs bien clair que l'équation $\Delta u=e^u$, envisagée jusqu'ici seulement dans la théorie des fonctions fuchsiennes joue aussi un rôle important dans la théorie de la représentation conforme d'un domaine plan simplement et même sans doute multiplement connexe.

Enfin des considérations analogues s'appliquent à l'équation $\Delta\Delta u=e^u$, où $\Delta\Delta u$ est l'expression différentielle de M. Giraud (double laplacien de notre article cité de l'*Enseignement mathématique*). L'intégration de cette équation sur le plan projectif affecté par exemple d'une septique d'indice deux, donnera vraisemblablement la valeur extrême du jacobien dans l'hypersphère. Pour prouver la limitation de ce jacobien, on pourra, au lieu de la solution de l'équation, utiliser l'approximation

$$-\frac{1}{2}\log|C_7| + \frac{1}{2}\log\sqrt{1+|x|^2+|y|^2}$$

de cette solution. Cette même approximation peut être utilisée dans l'intégration de l'équation aux dérivées partielles. Et d'autre part, l'intégration de l'équation en question $\Delta\Delta u = e^u$, avec une certaine condition à la frontière, dans un domaine de l'espace bicomplexe, intégration qui est peut-être toujours possible, jouera vraisemblablement un rôle préliminaire important dans la question de la représentation conforme de ce domaine.

ADDENDUM.

Voici une démonstration, n'exigeant aucun calcul, du théorème du paragraphe **4** sur la surface sextique F de M. Enriques, pour le cas des transformations birationnelles considérées par ce géomètre (qui sont probablement les seules si la surface est générique).

L'adjonction de l'irrationnelle $\sqrt{\mathrm{ABCD}}$ double la surface F et donne une surface de genres un Φ. Je dis d'abord que l'intégrale double envisagée en est l'intégrale de première espèce. En effet, pour cette dernière intégrale, l'élément différentiel ne peut qu'avoir des valeurs égales et de signes contraires en deux points de Φ coïncidant avec un même point de F; elle peut alors s'écrire $\int\int \sqrt{\mathrm{ABCD}}\,\mathrm{R}(x, y, z)\frac{dx\,dy}{\mathrm{F}'_z}$, où $\mathrm{R}(x, y, z)$ est rationnel; s'il n'était pas constant, il aurait une courbe polaire; et, que cette courbe soit à l'infini, comprenne une arête du tétraèdre, ou ait une autre position quelconque, l'intégrale ne serait pas de première espèce.

Soit alors une droite s'appuyant sur les deux arêtes opposées $\mathrm{A}=\mathrm{B}=0$ et $\mathrm{C}=\mathrm{D}=0$; elle coupe la surface F en deux points M_1 et M_2, le premier coïncidant avec deux points M'_1 et M''_1 de Φ, le second avec deux points M'_2 et M''_2. Soit $\sqrt{\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}}} = u$, et soient u'_1, u''_1, u'_2, u''_2 les valeurs de u en ces quatre points de Φ; elles sont égales au signe près, et l'on a : $u'_1 = -u''_1$; $u'_2 = -u''_2$; un signe restant indéterminé, nous posons $u'_1 = u'_2$ et par suite $u''_1 = u''_2$. En définitive, tandis que sur F nous ne voyons ici que l'involution $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$, nous en voyons de la sorte trois sur Φ : l'involution fondamentale $(\mathrm{M}'_1, \mathrm{M}''_1)$ ou $(\mathrm{M}'_2, \mathrm{M}''_2)$

et les deux involutions nouvelles (M'_1, M'_2) ou (M''_1, M''_2) et (M'_1, M''_2) ou (M''_1, M'_2).

Alors, puisqu'il y a transformation birationnelle de Φ, l'intégrale de première espèce se reproduit à un facteur constant près, et puisque ces transformations sont involutives, le facteur constant est un.

(Il est d'ailleurs inutile d'observer que les deux transformations sur Φ sont des involutions, puisque celle sur F en est une; mais c'est immédiat.)