JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES DE RHAM

Sur l'analysis situs des variétés à *n* dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 115-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__115_0>

Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions;

PAR GEORGES DE **RHAM**.

INTRODUCTION.

Les propriétés d'*Analysis situs* étudiées ici sont celles qui se rattachent aux systèmes de variétés orientées ou *champs* d'intégration et aux intégrales multiples dans une variété close à n dimensions. Les champs peuvent être additionnés et multipliés par un entier; en outre, ils sont l'objet de deux opérations fondamentales qui consistent, l'une à prendre la *frontière* d'un champ, l'autre à prendre l'*intersection* de de deux champs qui remplissent certaines conditions. La première conduit, par la notion d'homologie, aux invariants topologiques définis par Poincaré : nombres de Betti et coefficients de torsion. La seconde opération conduit à de nouveaux invariants topologiques, ainsi que l'a remarqué M. J. W. Alexander (1).

Les Chapitres I et II du présent travail étudient ces opérations et ces invariants, au point de vue de l'*Analysis situs combinatoire*. La variété est remplacée par un complexe défini arithmétiquement; au

(1) *Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. **10**, 1924, p. 99, 101, 483; t. **11**, 1925, p. 143. (Je n'ai eu connaissance de ces Notes qu'après avoir obtenu les principaux résultats.)

lieu des champs, on considère les *chaînes* ou combinaisons d'éléments du complexe. On peut ainsi obtenir un exposé rigoureux sans introduire aucune considération de théorie des ensembles.

Le Chapitre I contient d'abord un exposé des principes de la théorie, pour lequel on s'est inspiré d'un mémoire de M. H. Weyl [1]. Le paragraphe **9** est consacré à un théorème utilisé dans la théorie des intersections qui, elle, remplit le Chapitre II.

Les intersections et les coefficients d'enlacement sont définis simultanément, par récurrence. Après les généralités (§ **10**, **11**, **12**), le cas où l'intersection a zéro dimension est étudié d'une manière approfondie (§ **13** à **17**); cette étude, dont les résultats ne sont d'ailleurs pas nouveaux, ne fait intervenir que l'homologie avec division et les chaînes d'ordre infini. La méthode suivie ici a permis de faire une étude analogue relativement aux chaînes d'ordre fini, en considérant des coefficients d'enlacement au lieu de nombres d'intersections (§ **18** et **19**).

Des exemples qui illustrent et complètent la théorie du Chapitre II ont été rassemblés au Chapitre IV; ils montrent que les diverses circonstances prévues se présentent effectivement. Ce dernier chapitre a été rédigé d'une manière concise : quelques démonstrations n'ont pas été insérées dans le texte.

L'application de l'*Analysus situs* à la théorie des intégrales multiples est développée au Chapitre III. On sait depuis longtemps que les nombres de Betti jouent un rôle dans cette théorie; mais lorsqu'on veut préciser ce rôle, on est conduit à des théorèmes qui ont été énoncés d'une manière tout à fait explicite par M. E. Cartan [2]. On trouvera ici une démonstration complète de ces théorèmes, valable pour les variétés closes qui admettent une subdivision polyédrale. Les rapports entre la théorie des intersections et celle des intégrales sont indiqués au paragraphe **27**.

Les résultats obtenus suggèrent l'idée de considérer un champ à

---

(1) H. Weyl, *Analysis situs Combinatorio* (*Rev. Mat. Hisp. Amer.*, t. 5, 1923).

(2) E. Cartan, *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos* (*Comptes rendus*, t. 187, 1928, p. 196-198). Voir aussi *Annales de la Soc. polon. de Math.*, 1929.

q dimensions et un élément d'intégrale multiple d'ordre $n-q$ comme deux aspects d'une même notion plus générale ([1]). C'est ainsi que dans l'espace ordinaine, le courant électrique est représenté par un champ à une dimension lorsqu'il parcourt les arêtes d'un réseau conducteur, ou par un élément d'intégrale double, son flux, lorsqu'il traverse un corps conducteur à trois dimensions. De ce point de vue, les opérations qui font passer à la frontière d'un champ ou à l'intersection de deux champs sont rapprochées de celles qui donnent la dérivée extérieure d'un élément d'intégrale ou le produit de deux tels éléments. De même, le calcul d'une intégrale est rapproché du calcul du nombre d'intersections de deux champs. Le développement de cette idée obligerait à considérer des intégrales ayant des singularités; pour ne pas allonger davantage, on s'est borné ici aux intégrales partout régulières.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici, à M. Henri Lebesgue, ma profonde reconnaissance pour tout ce que je lui dois; c'est grâce à ses conseils et à ses critiques que j'ai pu m'orienter au début de mes recherches, et ses encouragements m'ont fait persévérer.

Remarque sur les principaux travaux consultés.

Pour les Chapitres I et II, les mémoires fondamentaux sont ceux de Poincaré :

1. H. Poincaré. — *a*. *Analysis situs* (*Journal de l'Éc. Polyt.*, 1894).

b. Complément à l'*Analysis situs* (*Palermo Rendic.*, vol. 13, 1899).

c. Second complément à l'*Analysis situs* (*Proc. of the London math. Soc.*, 1900).

Les principes de l'*Analysis situs* combinatoire ont été ensuite l'objet de plusieurs exposés, dont voici les principaux :

2. H. Weyl. — *Analisis situs Combinatorio* (*Rev. Matem. Hisp. Amer.*, 1923).

3. O. Veblen and J. W. Alexander. — *Manifolds of* N *dimensions* (*Annals of Mathematics*, 1912-1913).

---

(1) Pour $q=0$, c'est l'intégrale de Stieltjes.

4. O. Veblen. — *Lectures on Analysis situs* (New-York, 1922).

5. J. W. Alexander. — *Combinatorial Analysis situs* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 1926).

Sur les coefficients d'enlacement, voir :

6. H. Lebesgue. — *Sur l'invariance du nombre des dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées* (*Comptes rendus*, t. 152, p. 841).

7. L. E. J. Brouwer. — *On loopings coefficients* (*Proc. of the section of science. Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam*, vol. 15, 1912, p. 113).

Sur les intersections, voir :

8. S. Lefschetz. — *Intersections and continuous transformations of complexes and manifolds* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 1926).

Les coefficients d'enlacement et les intersections sont définis ici (Chap. II) par une méthode sensiblement différente de celles suivies dans ces trois derniers travaux.

Pour le Chapitre III, il faut citer, outre le mémoire 1 *a* de Poincaré, un autre antérieur :

9. H. Poincaré. — *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica*, 1887).

D'autres mémoires utilisés sont cités dans le cours du texte. Signalons le livre récent : *Topology*, by S. Lefschetz (1930), et le fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule dû au même auteur.

CHAPITRE I.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES COMPLEXES.

1. *Définition du complexe. Chaînes.* — Un complexe à n dimensions est un système fini d'éléments qui ont entre eux certaines relations. Il y a $n+1$ catégories d'éléments, qui seront appelés éléments de dimension 0, de dimension 1, ..., de dimension n, suivant la catégorie à laquelle ils appartiennent; ceux de dimension 0, 1 ou 2 seront appelés respectivement sommets, arêtes ou faces. Un élément quelconque sera souvent désigné par a_i^q; l'indice supérieur, q, indique la dimension, et l'indice inférieur servira à différencier les éléments de même dimension.

Nous appelons *q-chaîne* toute combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de dimension q. Si, dans une q-chaîne c^q, le coefficient de a_i^q est λ_i, on écrira $c^q = \Sigma \lambda_i a_i^q$ et l'on dira que a_i^q est pris λ_i fois dans c^q. Les q-chaînes peuvent être additionnées, soustraites, et multipliées par un entier; ces opérations conduisent à de nouvelles q-chaînes définies sans ambiguïté.

Les relations entre les éléments du complexe consistent en ceci, qu'à toute q-chaîne correspond une $(q-1)$-chaîne bien déterminée, sa *frontière*, cette correspondance vérifiant les trois conditions suivantes :

I. *La frontière d'une somme* (ou différence) *de deux chaînes est égale à la somme* (ou différence) *des frontières des chaînes composantes.*

II. *La frontière d'une q-chaîne est une* $(q-1)$-*chaîne fermée, en convenant d'appeler fermée une chaîne dont la frontière est nulle.*

III. *Dans la frontière d'un élément* a_i^q, *le coefficient de tout élément* a_j^{q-1} *est égal à* o, $+1$ *ou* -1.

Pour exprimer qu'une chaîne c^q a pour frontière c^{q-1}, on écrit, d'après Poincaré, $c^q \equiv c^{q-1}$.

Un complexe est complètement défini si l'on donne le nombre α_q des éléments de dimension q, pour $q = 0, 1, \ldots, n$, et si l'on donne la frontière de chaque élément. La frontière de a_i^q est une $(q-1)$-chaîne qu'on peut écrire $\sum\limits_j \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1}$

$$(1) \qquad a_i^q \equiv \sum_j \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1}.$$

L'ensemble de ces relations constitue le schéma du complexe.

La condition III exprime que ε_{ij}^q est égal à o, $+1$ ou -1.

La condition II se traduit par les relations suivantes :

$$(2) \qquad \sum_j \varepsilon_{ij}^q \varepsilon_{jk}^{q-1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \alpha_q;\ k = 1, 2, \ldots, \alpha_{q-2};\ q = 2, 3, \ldots, n).$$

Si l'on désigne par T_q le tableau à α_q lignes et α_{q-1} colonnes formé par les ε_{ij}^q, ces relations (2) peuvent s'écrire sous la forme suivante, en utilisant la multiplication symbolique des tableaux :

$$T_q T_{q-1} = 0.$$

2. *Homologies. Groupes abéliens attachés à un complexe.* — Une q-chaîne c^q est dite homologue à zéro $c^q \sim 0$, si elle est la frontière d'un $(q+1)$-chaîne $c^{q+1} \equiv c^q$. Deux chaînes sont dites homologues, si leur différence est homologue à zéro.

Cette notion d'homologie permet d'attacher aux q-chaînes fermées d'un complexe un groupe abélien $\mathcal{G}_q$ de la manière suivante :

A toute q-chaîne fermée correspond un et un seul élément de $\mathcal{G}_q$; à deux q-chaînes homologues correspond le même élément; à deux q-chaînes non homologues correspondent deux éléments distincts de $\mathcal{G}_q$; enfin à la somme $c_1^q + c_2^q$ de deux q-chaînes correspond le « produit » des éléments de $\mathcal{G}_q$ qui correspondent à c_1^q et c_2^q.

On vérifie immédiatement que les éléments de $\mathcal{G}_q$ se composent bien comme dans un groupe abélien. Ainsi, à tout complexe à n dimensions sont attachés $(n+1)$ groupes abéliens $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$. Pour préciser les définitions de $\mathcal{G}_0$ et de $\mathcal{G}_n$, nous conviendrons que toute o-chaîne est fermée et qu'une n-chaîne fermée n'est homologue à zéro que si elle est identiquement nulle. Pour plus de commodité, l'opération de composition des éléments d'un de ces groupes sera désignée par le signe $+$ et sera appelée addition (alors qu'en théorie des groupes on dit en général multiplication). En conséquence, l'élément identique sera désigné par o (zéro).

Les éléments d'ordre fini, c'est-à-dire dont un multiple est égal à o, contenus dans $\mathcal{G}_q$, forment un groupe fini γ_q appelé groupe de torsion. Les éléments $e_1, e_2, \ldots, e_r$, d'ordres respectifs $k_1, k_2, \ldots, k_r$, forment une base pour γ_q, si tout élément de γ_q est égal à une et une seule combinaison de la forme

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_r e_r,$$

où x_i est un reste entier $[\bmod k_i]$. La structure de γ_q est complètement déterminée par la suite des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_r$; mais la réciproque n'est pas vraie. Pour que ces entiers soient univoquement déterminés par γ_q, il faut les astreindre à des conditions supplémentaires, ce qu'on peut faire de deux manières. On peut choisir la base de manière que les k_i soient des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers, et alors ils sont univoquement déterminés (à l'ordre près) par le groupe. On peut aussi choisir la base de manière que chacun des nombres k_i divise le suivant, et alors aussi ils sont complètement déterminés; on les appelle alors coefficients de torsion de dimension q; on sait (ce qui sera d'ailleurs établi plus loin) que ces coefficients sont égaux aux diviseurs élémentaires du tableau T_{q+1}.

Disons qu'une q-chaine c^q est homologue à zéro avec division si un multiple de c^q, kc^q est homologue à zéro, ou ce qui revient au même, si l'élément de $\mathcal{G}_q$ qui correspond à c^q est d'ordre fini. De même qu'au moyen de l'homologie ordinaire (sans division) nous avons fait correspondre aux q-chaînes fermées le groupe $\mathcal{G}_q$, de même au moyen de l'homologie avec division on leur fera correspondre un groupe qui sera désigné par g_q. Ce groupe g_q est purement infini, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun élément d'ordre fini (sauf o). Il s'obtient à partir de $\mathcal{G}_q$ en assimilant à o les éléments d'ordre fini de $\mathcal{G}_q$, ce qu'on exprime en écrivant $g_q = \frac{\mathcal{G}_q}{\gamma_q}$. La structure de g_q est complètement déterminée par le nombre P_q des éléments nécessaires pour former une base. P_q est le $q^{\text{ième}}$ nombre de Betti du complexe. En désignant par t_q le rang du tableau T_q, on a $P_q = \alpha_q - t_q - t_{q+1}$ (ce qui sera d'ailleurs établi plus loin).

3. *Complexes superposables, isomorphes, réciproques.* — Disons que les deux éléments a_i^q et a_j^{q-1} sont en relation positive, nulle ou négative, suivant que $\varepsilon_{ij}^q = +1$, o ou -1.

Deux complexes seront dits *superposables*, s'il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque, les éléments qui se correspondent ayant même dimension, telle que deux éléments de l'un soient en relation nulle ou non nulle en même temps que leurs correspondants.

Si, de plus, deux éléments de l'un sont en relation positive ou négative en même temps que leurs correspondants, les deux complexes seront dits *isomorphes*, et la correspondance sera dite un *isomorphisme*.

Au point de vue où nous nous plaçons, deux complexes isomorphes doivent être considérés comme identiques; ils ne diffèrent que par les notations. Les groupes abéliens attachés à deux complexes isomorphes ont la même structure. Il n'en est pas de même pour deux complexes superposables, bien que géométriquement, il semble qu'on ne doive pas les distinguer. Toutefois, nous verrons que dans certaines conditions, deux complexes superposables sont par là même isomorphes.

Deux complexes à n dimensions sont dits *réciproques*, si les éléments de dimension q de l'un sont en correspondance biunivoque avec ceux de dimension $n-q$ de l'autre, pour $q=0, 1, \ldots, n$, de manière que deux éléments de l'un soient en relation positive, nulle ou négative en même temps que leurs correspondants. Tout complexe a un complexe réciproque et un seul à des isomorphismes près. Si l'on désigne par a_i^q et b_i^{n-q} les éléments correspondants de deux complexes réciproques, par U_q les tableaux relatifs au second analogues aux tableaux T_q du premier, U_q est le tableau transposé de T_{n-q+1}. Il en résulte *que les coefficients de torsion de dimension q de l'un sont égaux à ceux de dimension $n-q-1$ de l'autre, et que le nombre P_q de l'un est égal au nombre P_{n-q} de l'autre.*

4. *Complexes planoïdes et réguliers.* — Soit a_i^q un élément de dimension q d'un complexe. Prenons les éléments de dimensions $q-1$ qui sont en relation non nulle avec a_i^q, les éléments de dimension $q-2$ qui sont en relation non nulle avec l'un au moins de ces derniers, puis ceux de dimension $q-3$ qui sont en relation non nulle avec l'un au moins des précédents, etc., jusqu'aux éléments de dimension 0. L'ensemble des éléments ainsi obtenus forme un nouveau complexe qui est dit *la frontière de a_i^q* (1).

Considérons d'autre part l'ensemble des éléments de dimension $q+1$, $q+2, \ldots, n$, qui ont a_i^q sur leur frontière et abaissons de $q+1$ unités la dimension de chacun d'eux sans changer leurs relations. On obtient un complexe à $n-q-1$ dimensions qui est *l'aster de centre a_i^q*.

---

(1) Le même mot désigne aussi la $(q-1)$-chaîne frontière de a_i^q envisagé comme q-chaîne; mais cela ne semble pas devoir prêter à équivoque, du moment qu'on sera prévenu.

Nous pouvons maintenant définir une classe de complexes qui joueront un rôle important, et que nous appellerons *complexes planoïdes*.

DÉFINITION. — *Un complexe planoïde à 0 dimension est formé de deux sommets.*

Un complexe à $n > 0$ dimensions est planoïde si :

1° *Il est sans torsion et ses nombres de Betti sont :*

$$P_0 = P_n = 1, \qquad P_i = 0 \qquad (0 < i < n);$$

2° *La frontière de chacun de ses éléments et tous ses asters sont planoïdes.*

Un complexe sera dit *régulier* s'il satisfait à la seconde condition sans remplir nécessairement la première.

THÉORÈME. — *Le complexe réciproque d'un complexe planoïde est planoïde; le compleqe réciproque d'un complexe régulier est régulier.*

Le théorème est évident pour $n = 0$; supposons-le vrai pour $n - 1$ et passons à n. Soient A et B deux complexes réciproques, a_i^q et b_i^{n-q} deux éléments correspondants. De la définition des complexes réciproques, il résulte immédiatement que la frontière de a_i^q et l'aster de centre b_i^{n-q} sont deux complexes réciproques; de même l'aster de centre a_i^q et la frontière de b_i^{n-q}. Si donc A est régulier, B l'est aussi. Si de plus A est planoïde, c'est-à-dire vérifie la condition 1°, en vertu de la remarque faite à la fin du paragraphe **3**, B vérifiera aussi cette condition et sera donc aussi planoïde.

5. *Connexité et orientation.* — Un complexe est *connexe* s'il est impossible de répartir ses éléments en deux classes telles que tout élément de l'une soit en relation nulle avec tout élément de l'autre. Un complexe non connexe pourra être considéré comme la réunion de plusieurs complexes connexes; ses groupes s'obtiendront simplement en réunissant les groupes de ses parties constituantes, ou, d'une manière plus précise, on aura une base pour le groupe $\mathcal{G}_q$ d'un complexe non connexe en juxtaposant les bases des groupes $\mathcal{G}_q$ relatifs à ses parties constituantes.

THÉORÈME I. — *Le groupe $\mathcal{G}_0$ d'un complexe régulier et connexe est cyclique d'ordre infini ou d'ordre 2. Réciproquement, si le groupe $\mathcal{G}_0$ d'un complexe régulier est cyclique, ce complexe est connexe.*

Supposons le théorème établi pour les complexes à moins de n dimensions (il est évident pour $n = 0$) et passons au cas de n dimensions, en commençant par la première partie.

Remarquons d'abord qu'entre deux éléments quelconques d'un complexe régulier et connexe, on peut en intercaler d'autres de manière à former une suite d'éléments dont deux consécutifs sont en relation non nulle. En effet, s'il y avait deux éléments qui ne puissent pas être unis par ce procédé, on pourrait répartir les éléments du complexe en deux classes, la première contenant tous les éléments qui peuvent être unis au premier, la seconde tous les autres éléments; tout élément de la première classe serait en relation nulle avec tout élément de la seconde : le complexe ne serait pas connexe.

Soient a_1^0 et a_2^0 deux sommets; nous allons voir qu'on peut les unir par une suite d'éléments de dimensions 0 et 1. En effet, soit $\nu > 1$ la dimension maximum des éléments d'une suite unissant a_1^0 et a_2^0. Choisissons un sommet sur la frontière de chaque élément de cette suite; on obtient une suite de sommets dont deux consécutifs sont sur la frontière d'un même élément de dimension ν au plus, donc dans un complexe planoïde à $\nu - 1$ dimensions au plus; comme $\nu \leq n$ ces complexes planoïdes sont connexes, par conséquent deux sommets consécutifs de notre suite pourront être unis par des éléments de dimension $\nu - 1$ au plus et il en sera de même des sommets extrêmes a_1^0 et a_2^0.

En répétant ce procédé, on obtiendra finalement une suite de sommets dont le premier est a_1^0, le dernier a_2^0, et dont deux consécutifs a_i^0 et a_j^0 sont sur la frontière d'une même arête. On a donc $a_i^0 \sim \pm a_j^0$, et de toutes ces relations résulte $a_2^0 \sim \pm a_1^0$. a_2^0 étant un sommet quelconque, a_1^0 forme une base pour le groupe $\mathcal{G}_0$ qui est bien cyclique.

Si $2a_1 \sim 0$, $\mathcal{G}_0$ est d'ordre 2. Si l'on n'a pas $2a_1 \sim 0$, on ne peut avoir à la fois $a_i^0 \sim a_1^0$ et $a_i^0 \sim - a_1^0$; supposons les notations choisies de manière que $a_i^0 \sim a_1^0$ quel que soit i. Alors, dans la frontière de toute arête, et par suite de toute 1-chaîne, la somme des coefficients des sommets est nulle. On ne peut donc avoir $ka_1^0 \sim 0$ si $k \neq 0$; $\mathcal{G}_0$ est cyclique d'ordre infini. La première partie du théorème est établie.

Pour établir la seconde, considérons un complexe régulier non connexe; il est formé par au moins deux complexes réguliers et connexes. Son groupe $\mathcal{G}_0$ s'obtiendra donc en réunissant au moins deux groupes cycliques d'ordre 2 ou infini; il en résulte qu'il ne peut être cyclique.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi : *Pour un complexe régulier et connexe, ou bien* $P_0 = 1$ *et il n'y a pas de torsion à* 0 *dimension, ou bien* $P_0 = 0$ *et il y a un et un seul coefficient de torsion à* 0 *dimension égal à deux.*

En remarquant que deux complexes réciproques sont en même temps connexes et non connexes, réguliers et non réguliers, on obtient la proposition corrélative :

THÉORÈME II. — *Pour un complexe régulier et connexe à n dimensions, ou bien* $P_n = 1$ *et il n'y a pas de torsion à* $(n-1)$ *dimensions, ou bien* $P_n = 0$ *et il y a un et un seul coefficient de torsion à* $n-1$ *dimensions égal à deux.*

Considérons un complexe régulier et connexe de $P_n = 1$; alors toute n-chaîne fermée est homologue à un multiple de l'une d'elles. Nous allons voir que toute n-chaîne fermée est *identique* à un multiple de l'une d'elles.

On a vu que deux sommets peuvent être unis par une suite de sommets et d'arêtes; de même (proposition corrélative) deux éléments de dimension n peuvent être unis par une suite d'éléments de dimensions n et $n-1$. Cela posé, soit $\sum_{0}^{\alpha_n} \lambda_i a_i^n$ une n-chaîne fermée. Tous les λ_i sont égaux en valeur absolue; en effet, si deux éléments avaient deux coefficients différents en valeur absolue, de la suite d'éléments les unissant, on déduirait deux éléments adjacents, c'est-à-dire ayant un même élément a_j^{n-1} sur leurs frontières, qui auraient des coefficients différents en valeur absolue, ce qui est impossible, car alors a_j^{n-1} figurerait avec un coefficient non nul dans la frontière de $\Sigma\lambda_i a_i^n$, et cette n-chaîne ne serait pas fermée. En modifiant au besoin les notations (changement de a_i^n en $-a_i^n$), notre n-chaîne pourra s'écrire

$\lambda . \Sigma a_i^n$, et l'on voit qu'elle est un multiple de Σa_i^n. Les deux chaînes Σa_i^n et $-\Sigma a_i^n$ sont les deux *n-chaînes primitives* du complexe.

Théorème III. — *Si deux complexes réguliers et connexes, de* $P_0 = 1$ *sont superposables, ils sont isomorphes.*

Soient A et B ces deux complexes; désignons par a_i^q les éléments de A, par b_j^q ceux de B, et supposons les notations choisies de manière que a_i^q et $\pm b_i^q$ se correspondent, que $a_i^n \sim a_1^n$ et $b_i^n \sim b_1^n$ quel que soit i. Nous allons montrer qu'on peut préciser les signes de manière que la correspondance devienne un isomorphisme.

Nous ferons se correspondre $+a_i^0$ et $+b_i^0$. Supposons l'isomorphisme réalisé pour les éléments de dimension inférieure à λ et les notations telles que, dans cet isomorphisme, $+b_i^\mu$ et $+a_i^\mu$ se correspondent ($\mu < \lambda$), et passons aux éléments de dimension λ. Soit

$$a_i^\lambda = \sum_j \varepsilon_{ij}^\lambda a_j^{\lambda-1}.$$

Le second membre est l'une des deux $(\lambda - 1)$-chaînes primitives du complexe frontière de a_i^λ. En vertu de l'isomorphisme déjà réalisé, $\sum_j \varepsilon_{ij}^\lambda b_j^{\lambda-1}$ sera l'une des deux $(\lambda - 1)$-chaînes primitives du complexe frontière de b_i^λ, de sorte qu'on aura

$$b_i^\lambda = \varepsilon \sum_j \varepsilon_{ij}^\lambda b_j^{\lambda-1} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

En mettant a_i^λ et εb_i^λ en correspondance, on étend l'isomorphisme aux éléments de dimension λ. Il s'étend de même à tous les éléments et le théorème est établi.

Voici la proposition corrélative :

Théorème IV. — *Si deux complexes réguliers et connexes, de* $P_n = 1$, *sont superposables, ils sont isomorphes.*

Dans la suite, nous limiterons notre attention aux complexes réguliers et connexes pour lesquels l'un au moins des nombres de Betti extrêmes P_0 et P_n, est égal à 1. On sait que lorsqu'on subdivise une variété d'un seul tenant de manière à former un polyèdre, en orientant convenablement les éléments de ce polyèdre, on obtient un complexe régulier et connexe de $P_0 = 1$. On pourrait de même obtenir un complexe de $P_n = 1$. Ces deux complexes sont identiques si la variété est bilatère, et dans ce cas seulement. Cela nous conduit à poser les définitions suivantes :

Un complexe régulier et connexe pour lequel $P_0 = P_n = 1$ *sera dit bilatère.* Nous savons qu'alors il n'y a pas de torsion à o ni à $n-1$ dimensions.

Un complexe régulier et connexe pour lequel $P_0 = 1$ *et* $P_n \neq 1$ *sera dit unilatère de première espèce.* Nous savons qu'alors $P_n = 0$, qu'il y a un et un seul coefficient de torsion à $(n-1)$ dimensions égal à 2, et qu'il n'y a pas de torsion à o dimension.

Un complexe régulier et connexe pour lequel $P_n = 1$ *et* $P_0 \neq 1$ *sera dit unilatère de seconde espèce.* Nous savons qu'alors $P_0 = 0$, et qu'il y a un et un seul coefficient de torsion à o dimension égal à 2 et pas de torsion à $(n-1)$ dimensions.

Deux complexes unilatères de première et de seconde espèce superposables seront dits unilatères associés.

Orienter un complexe bilatère, c'est choisir simultanément une base de $\mathcal{G}_0$ et une base de $\mathcal{G}_n$. On peut supposer les notations telles que la base de $\mathcal{G}_n$ soit Σa_i^n et celle de $\mathcal{G}_0$ a_1^0, et qu'on ait $a_j^0 \sim a_1^0$ quel que soit j. On convient que le choix de $-\Sigma a_i^n$ et $-a_1^0$ définit la même orientation que le choix de Σa_i^n et a_1^0. Par contre, les choix de $-\Sigma a_i^n$ et a_1^0 ou Σa_i^n et $-a_1^0$ définissent l'orientation opposée.

Un complexe unilatère ne peut pas être orienté, mais s'il est de première espèce, on peut faire un choix entre les deux bases possibles pour $\mathcal{G}_0$, et s'il est de seconde espèce entre celles de $\mathcal{G}_n$.

Nous dirons que le complexe à $q-1$ dimensions K frontière de l'élément a_i^q du complexe A bilatère orienté ou unilatère de première espèce est *orienté naturellement*, si l'on choisit pour base de G_0 la même dans K que dans A et pour base de $\mathcal{G}_{q-1}$ la $(q-1)$-chaîne frontière de a_i^q.

Pareillement, nous dirons que l'aster K' de centre a_i^q dans un complexe A bilatère orienté ou unilatère de seconde espèce est *orienté naturellement*, si l'on prend pour base de $\mathcal{G}_{n-q-1}$ dans K' la $(n-q-1)$-

chaîne Σa_k^n $\left(\text{la sommation s'étendant aux } a_k^n \text{ contenus dans } K', \text{ et } \sum_{k=1}^{\alpha_n} a_k^n \text{ étant la base du groupe } \mathcal{G}_n \text{ de A}\right)$ et pour base de $\mathcal{G}_0$ un élément a_j^{q+1} (qui a o dimension dans K′) en relation positive avec a_i^q. (On voit aisément que cette base ne dépend pas de l'arbitraire qui réside dans le choix de a_j^{q+1}.)

6. *Subdivision et équivalence. Invariance des groupes* $\mathcal{G}_q$. — Soient a_i^q un élément d'un complexe A à n dimensions, K un complexe planoïde à q dimensions dont la frontière soit isomorphe à celle de a_i^q, l'isomorphisme étant tel que, si $\sum_1^{\beta_q} b_j^q$ est la q-chaîne primitive de K, la $(q-1)$-chaîne qui limite b_1^q corresponde à la $(q-1)$-chaîne qui limite $-a_i^q$.

Nous appellerons *subdivision élémentaire de* A l'opération qui consiste à passer de A au complexe $\bar{A}$ ainsi défini :

$\bar{A}$ contient tous les éléments de A et tous ceux de K sauf a_i^q et b_1^q et deux éléments correspondants des frontières de a_i^q et b_1^q sont identifiés (ils ne comptent plus que pour un seul élément). Les relations entre ces éléments ne sont pas changées, sauf que les éléments a_j^{q+1} qui avaient $\pm a_i^q$ sur leur frontière ont à la place $\pm \sum_{k=2}^{\beta_q} b_k^q$, et un élément provenant de l'identification de deux éléments de A et K aura les mêmes relations que ses antécédents dans A et K. Nous dirons que les nouveaux éléments introduits (ceux de K) sont dans a_i^q.

Théorème I. — *Les groupes* $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ *de* $\bar{A}$ *sont identiques à ceux de* A.

Ce théorème résulte immédiatement du suivant :

Théorème II. — *Toute* p-*chaîne* c^p *de* A, *qui est homologue à zéro dans* $\bar{A}$, *l'est aussi dans* A ; *toute chaîne fermée* $\bar{c}^p$ *de* $\bar{A}$ *est homologue à une chaîne de* A.

On va établir simultanément ces deux assertions en montrant que toute chaîne $\bar{c}^p$ de $\bar{A}$, fermée ou dont la frontière est dans A, est homologue à une chaîne c^p de A.

Soit $\bar{c}^p = \bar{c}_1^p + \bar{c}_2^p$, $\bar{c}_1^p$ contenant les éléments de $\bar{c}^p$ situés dans a_i^q (élément subdivisé). La frontière de $\bar{c}_1^p$ sera une chaîne c_1^{p-1} située sur la frontière de a_i^q, qui, puisqu'elle est planoïde, contient aussi une chaîne c_1^p limitée à c_1^{p-1}; $\bar{c}_1^p - c_1^p$ est une chaîne fermée, homologue à zéro puisqu'elle est contenue dans K qui est planoïde. $c^p = c_1^p + \bar{c}_2^p$ est alors la chaîne cherchée, contenue dans A et homologue à $\bar{c}^p$. L'opération qui transforme $\bar{c}^p$ en c^p s'appellera *balayage de a_i^q*.

COROLLAIRE. — *Si* A *est un complexe planoïde*, $\bar{A}$ *en est aussi un.*

La première condition caractérisant un complexe planoïde est remplie en vertu du théorème I. Pour vérifier la seconde condition, supposons la proposition établie pour moins de n dimensions. (Elle est évidente pour $n = 0$.) Les modifications subies par les frontières d'éléments et les asters consistent en une subdivision; comme ce sont des complexes planoïdes à moins de n dimensions, ils restent planoïdes.

Disons que deux complexes sont *équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite de subdivisions élémentaires et d'opérations inverses. Nous pouvons alors résumer ce qui précède ainsi :

THÉORÈME III. — *Un complexe équivalent à un complexe régulier est régulier et a les mêmes groupes $\mathcal{G}_q$, donc aussi les mêmes nombres de Betti et coefficients de torsion.*

7. *Pyramides. Subdivision normale.* — Soit K un complexe planoïde à $(n-1)$ dimensions. Nous allons construire à partir de K un complexe planoïde P à n dimensions qui sera dit la pyramide *construite sur* K.

Les éléments de K se retrouvent dans P avec les mêmes relations. A chacun d'eux correspond un nouvel élément à une dimension de plus, dont le premier est dit la *base*. Ces nouveaux éléments, *côtés* de la pyramide, sont en relation négative avec leur base et ont entre eux des relations opposées à celles de leurs bases : deux de ces éléments sont en relation positive, nulle ou négative, suivant que leurs bases sont en relation négative, nulle ou positive. On ajoute encore un sommet, le sommet de la pyramide, en relation positive avec toutes les nouvelles arêtes et un élément à n dimensions, dont la frontière est la $(n-1)$-chaîne primitive de K; ce dernier élément est la base de la pyramide.

Pour vérifier que la condition II du paragraphe **1** est remplie, il suffira de montrer que la frontière de tout nouvel élément est fermée. Soient a^{q+1} un nouvel élément, b^q sa base, Σb_i^{q-1} la frontière de b^q, a_i^q l'élément ayant b_i^{q-1} comme base. En vertu de notre définition, on a

$$a^{q+1} \equiv -b^q - \Sigma a_i^q.$$

La frontière de Σa_i^q est tout entière contenue dans K, car sans cela Σb_i^{q-1} ne serait pas fermée. On aura donc

$$\Sigma a_i^q \equiv -\Sigma b_i^{q-1}.$$

et la frontière de a^{q+1} est bien fermée.

Prouvons que P est planoïde. D'abord, on voit immédiatement que $P_0 = P_n = 1$. Si $0 < q < n$, toute q-chaîne fermée c^q est homologue à zéro; en effet, soit $c^q = c_1^q + c_2^q$, c_1^q contenant les éléments de c^q contenus dans K; soit c^{q+1} la chaîne dont la base est $-c_1^q$; on aura $c^{q+1} \equiv c^q$, car la frontière de c^{q+1} est formée par c_1^q et par les éléments dont la base figure avec le signe $+$ dans la frontière de c_1^q, et ces derniers éléments forment précisément c_2^q. On a donc bien $c^q \sim 0$, d'où $P_q = 0$. Reste à montrer que les frontières d'élément et les asters de P sont planoïdes, ce qui se fait immédiatement par induction, puisque, sauf la frontière de la base de P et l'aster de centre le sommet de P qui sont identiques à K, la frontière de tout nouvel élément et chaque aster sont des pyramides à moins de n dimensions. P est donc bien planoïde.

Si l'on prend, pour effectuer la subdivision élémentaire de l'élément a_i^q du complexe A, la pyramide P construite sur la frontière de a_i^q, la base de P jouant le rôle de l'élément b_1^q du paragraphe **6**, on obtient ce que nous appellerons la *subdivision pyramidale* de a_i^q.

Soumettons à la subdivision pyramidale toutes les arêtes d'un complexe régulier A, puis toutes les faces du complexe obtenu, puis tous les éléments à trois dimensions du complexe obtenu, etc., jusqu'à n dimensions. On obtient un complexe C qui est dit la *subdivision normale* de A et qui va être étudié.

On va montrer qu'à toute suite $a_{i_0}^{q_0}, a_{i_1}^{q_1}, \dots, a_{i_r}^{q_r}$, de $r+1$ éléments de A, de dimensions décroissantes, telle que chaque élément contienne tous les suivants dans sa frontière, correspond un et un seul élément à r dimensions de C, et réciproquement. Cet élément sera désigné par le symbole $(a_{i_0}^{q_0} a_{i_1}^{q_1} \dots a_{i_r}^{q_r})$. Pour $r=0$, $(a_{i_0}^{q_0})$ représente le sommet de la pyramide construite dans la subdivision de $a_{i_0}^{q_0}$ si $q_0 > 0$, et le sommet $a_{i_0}^{q_0}$ lui-même si $q_0 = 0$. Il est clair qu'il n'y a pas d'autres sommets et notre assertion est établie pour $r=0$. Passons par induction au cas de r quelconque. Après avoir subdivisé les éléments à q_1 dimensions, $a_{i_0}^{q_0}$ contiendra sur sa frontière l'élément $(a_{i_1}^{q_1} \dots a_{i_r}^{q_r})$ qui provient de la subdivision de $a_{i_1}^{q_1}$, et en subdivisant $a_{i_0}^{q_0}$, il s'introduira un et un seul élément ayant pour base $(a_{i_1}^{q_1} \dots a_{i_r}^{q_r})$; c'est cet élément qui est désigné par $(a_{i_0}^{q_0} a_{i_1}^{q_1} \dots a_{i_r}^{q_r})$.

Cette notation met en évidence la structure du complexe C; on voit en effet que, pour qu'un élément soit sur la frontière d'un autre, il faut et il suffit que la suite qui représente le premier soit extraite de la suite qui représente le second.

8. *Théorèmes de dualité.* — Soient A et B deux complexes réciproques à n dimensions, dont les éléments correspondants sont désignés par a_i^q et b_i^{n-q}. Les subdivisions normales de A et B sont deux complexes superposables; en effet, si à l'élément $(a_{i_0}^{q_0} a_{i_1}^{q_1} \dots a_{i_r}^{q_r})$ du premier, on fait correspondre l'élément $(b_{i_0}^{n-q_0} \dots b_{i_r}^{n-q_r})$ du second, deux éléments de l'un sont en relation nulle ou non nulle en même temps que leurs correspondants dans l'autre.

Si A est bilatère et connexe, de $P_0 = P_n = 1$, il en sera de même pour B et pour chacune des deux subdivisions normales, qui sont alors isomorphes en vertu du théorème III (§ 5). A et B sont deux complexes équivalents, d'où résulte le théorème de dualité de Poincaré :

Théorème I. — *Dans un complexe bilatère à n dimensions, les nombres de Betti P_q et P_{n-q} sont égaux; les coefficients de torsion de dimension q sont respectivement égaux à ceux de dimension $n-q-1$.*

Si A est unilatère, B sera équivalent au complexe unilatère A′ associé de A. D'où :

Théorème II. — *Si A et A′ sont deux complexes unilatères associés, le nombre P_q de l'un est égal au nombre P_{n-q} de l'autre et les coefficients de torsion de dimension q de l'un sont respectivement égaux à ceux de dimension $n-q-1$ de l'autre.*

9. *Un théorème géométrique.* — La subdivision normale va être utilisée pour établir un théorème qui jouera un rôle important dans le chapitre suivant.

Soit A un complexe à n dimensions, régulier, bilatère ou unilatère; soit B le complexe réciproque de A si A est bilatère et du complexe associé de A si A est unilatère. Les éléments correspondants de A et B seront toujours désignés par a^q_i et b^{n-q}_i.

Les subdivisions normales de A et B sont isomorphes, comme on a vu; elles seront considérées comme un seul complexe C, les éléments que l'isomorphisme met en correspondance étant identifiés. Ainsi, les deux symboles $(a^{q_0}_{i_0}\dots a^{q_r}_{i_r})$ et $(b^{n-q_r}_{i_r}\dots b^{n-q_0}_{i_0})$ désigneront le même élément de C. D'ailleurs, avec l'une et l'autre notation, on fait abstraction du signe de cet élément.

Les q-chaînes de C qui proviennent, par la subdivision, d'une q-chaîne de A (ou de B), ou d'un élément de A (ou de B) seront appelées respectivement q-chaînes de A (ou de B) ou élément de A (ou de B). Les autres chaînes ou éléments considérés seront toujours des chaînes de C ou des éléments de C.

Nous dirons qu'un élément de A (ou de B) contient à son intérieur un élément de C, si ce dernier provient de la subdivision du premier. Tout élément de C est à l'intérieur d'un élément de A et d'un seul, et d'un élément de B et d'un seul; ainsi, $(a^{q_0}_{i_0}\dots a^{q_r}_{i_r})$ est à l'intérieur de $a^{q_r}_{i_0}$ et de $b^{n-q_r}_{i_r}$.

Nous dirons encore qu'un élément appartient à une chaîne c^q s'il figure dans c^q avec un coefficient non nul ou s'il est sur la frontière d'un tel élément.

Lemme I. — *Les éléments qui appartiennent à la fois à une $(i+k)$-*

chaîne de A et à une $(n-k)$-chaîne de B sont de dimension au plus égale à i.

En effet, soit

$$(a_{i_0}^{q_0}\dots a_{i_r}^{q_r}) = (b_{i_r}^{n-q_r}\dots b_{i_0}^{n-q_0})$$

un élément appartenant à la fois à une $(i+k)$-chaine de A et à une $(n-k)$-chaine de B. Cet élément est à l'intérieur d'un élément de A de dimension $(i+k)$ au plus, d'où $q_0 \leqq i+k$. On obtient, de même, $n-q_r \leqq n-k$ ou $q_r \geqq k$, ce qui donne $q_0 - q_r \leqq i$, et comme $q_0 - q_r \geqq r$, on a bien $r \leqq i$. Le lemme est établi.

Faisons quelques remarques sur la structure du complexe C_1, qui forme la frontière d'un élément b_j^s de B. Les éléments de B qui appartiennent à C_1 forment un complexe B_1 qui n'est autre que la frontière de b_j^s dans B, et dont C_1 est la subdivision normale. Pour que l'élément

$$(a_{i_0}^{q_0}\dots a_{i_r}^{q_r}) = (b_{i_r}^{n-q_r}\dots b_{i_0}^{n-q_0})$$

soit contenu dans C_1, il faut et il suffit que $b_{i_r}^{n-q_r}$ soit sur la frontière de b_j^s, ou, ce qui revient au même, que $a_{i_r}^{q_r}$ ait a_j^{n-s} sur sa frontière. Il en résulte que les éléments de A qui figurent dans le signe $(a_{i_0}^{q_0}\dots a_{i_r}^{q_r})$ sont tous dans l'aster de A de centre a_j^{n-s}, et réciproquement si tous ces éléments sont dans cet aster, notre expression représente un élément de C_1. C_1 est donc aussi la subdivision normale de cet aster, qui sera désigné par A_1 et qui est le complexe réciproque de B_1. De plus, à toute $(n-k)$-chaine c^{n-k} de A correspond une $(s-1-k)$-chaine d^{s-1-k} bien déterminée de A_1, qu'on obtient en supprimant de c^{n-k} les éléments de A qui n'ont pas a_j^{n-s} sur leur frontière; la chaine d^{s-1-k} contient tous les éléments de C_1 qui sont contenus dans c^{n-k} et aucun autre.

LEMME II. — *Soient c^{i-k} une chaîne fermée ou dont la frontière est une chaîne de B, c^{n-k} une chaîne de A n'ayant en commun avec c^{i-k} que des éléments de dimension i au plus; on peut trouver une chaîne c^{i-k} de B qui limite avec c^{i-k} une chaîne $\dot{c}^{i-k+1}$ $(\dot{c}^{i-k+1} \equiv c^{i-k} - c_{*}^{i-k})$, n'ayant en commun avec c^{n-k} que des éléments de dimension $(i+1)$ au plus.*

Si $n=0$, le lemme est évident; A, B et C étant identiques, on n'a qu'à prendre $c_*^{i+k} = c^{i+k}$ et $\overset{*}{c}{}^{i+k+1} = 0$. Supposons-le établi pour les complexes à moins de n dimensions.

Désignons par $B(c^{i+k})$ l'ensemble formé par les éléments de B qui contiennent à leur intérieur un élément de c^{i+k} et par les éléments de leur frontière, et soit $\varphi(c^{i+k})$ le nombre des éléments de B de $B(c^{i+k})$ qui ont une dimension supérieure de $i+k$.

Si $\varphi(c^{i+k}) = 0$, c^{i+k} est une chaîne de B. En effet, soient b_j^{i+k} un élément de B, c_1^{i+k} la portion de c^{i+k} intérieure à b_1^{i+k}; si c_1^{i+k} n'était pas égale à un multiple de b_j^{i+k}, elle aurait un élément frontière à l'intérieur de b_j^{i+k}; cet élément, ne pouvant être sur la frontière de $c^{i+k} - c_1^{i+k}$ qui n'a aucun élément à l'intérieur de b_j^{i+k} par définition de c_1^{i+k}, ni à l'intérieur d'un élément de B limité par b_j^{i+k} parce que $\varphi(c^{i+k}) = 0$, cet élément appartiendrait donc à la frontière de c^{i+k}, ce qui contredit l'hypothèse que cette frontière est une chaîne de B. c_1^{i+k} est donc égale à un multiple de b_j^{i+k}, $\lambda_j b_j^{i+k}$, et $c^{i+k} = \sum_j \lambda_j b_j^{i+k}$ est bien une chaîne de B. Dans ce cas, le lemme est évident, on n'a qu'à prendre

$$c_*^{i+k} = c^{i+k} \quad \text{et} \quad \overset{*}{c}{}^{i+k+1} = 0.$$

Supposons maintenant que $\varphi(c^{i+k}) = N$ et que le lemme est établi si $\varphi(c^{i+k}) < N$.

Soient b_j^s un élément de $B(c^{i+k})$ de dimension maximum, c_1^{i+k} la portion de c^{i+k} située à l'intérieur de b_j^s et c_2^{i+k} le reste de c^{i+k}, de sorte que $c^{i+k} = c_1^{i+k} + c_2^{i+k}$. La frontière c_1^{i+k-1} de c_1^{i+k} ne contient aucun élément situé à l'intérieur de b_j^s (sinon, la frontière de c^{i+k} ne serait pas une chaîne de B), c'est donc une chaîne fermée située sur la frontière C_1 de b_j^s. C_1 est, comme on l'a vu, la subdivision normale de deux complexes réciproques A_1 et B_1. Soit d^{s-1-k} la chaîne de A_1 qui se déduit de c^{n-k} et qui contient tous les éléments de C_1 qui appartiennent à c^{n-k}. Les éléments communs à c_1^{i+k-1} et à d^{s-1-k} sont de dimension $i-1$ au plus, car ce sont les bases des éléments communs à $\overset{*}{c}{}_1^{i+k}$ et c^{n-k}. Comme C_1 est à $s-1 < n$ dimensions, nous pouvons appliquer le lemme II à C_1, A_1, B_1, c_1^{i+k-1} et d_1^{s-1-k}; on obtient deux chaînes $\overset{*}{c}{}_1^{i+k}$ et c_{1*}^{i+k-1} contenues dans C_1, telles que

$$(1) \qquad \overset{*}{c}{}_1^{i+k} \equiv c_1^{i+k-1} - c_{1*}^{i+k-1},$$

c_{1*}^{i+k-1} étant une chaîne de B_1 et $\overset{*}{c}{}_1^{i+k}$ n'ayant en commun avec d^{s-1-k} que des éléments de dimension i au plus.

c_{1*}^{i+k-1} étant homologue à c_1^{i+k-1} est donc homologue à zéro dans C et aussi dans B_1 (puisque B_1 est planoïde); soit c_{1*}^{i+k} une chaîne de B_1 telle que $c_*^{i+k} \equiv c_{1*}^{i+k-1}$; en vertu du lemme I, c_{1*}^{i+k} n'a en commun avec d^{s-1-k} que des éléments de dimension i au plus. Avec les éléments de b_j^s qui s'appuient sur $c_{1*}^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k}$, on forme une chaîne $\overset{*}{c}{}_1^{i+k+1}$ qui n'a en commun avec c^{n-k} que des éléments de dimension $i+1$ au plus (car la base de ces éléments appartient à la fois à d^{s-1-k} et à $c_{1*}^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k}$) et telle que

$$\overset{*}{c}{}_1^{i+k+1} \equiv c_1^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i-k} - c_1^{i+k}. \tag{2}$$

Désignons par c^{i+k-1} la frontière de c^{i+k} et considérons la chaîne $c_2^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k}$. On a

$$c^{i+k} \equiv c^{i+k-1}; \qquad c_1^{i+k} \equiv c_1^{i+k-1},$$

d'où

$$c_2^{i+k} = c^{i+k} - c_1^{i+k} \equiv c^{i+k-1} - c_1^{i+k-1},$$

d'où, en vertu de (1),

$$c_2^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k} \equiv c^{i+k-1} - c_{1*}^{i+k-1}.$$

Le second membre est une chaîne de B (c^{i+k-1} en est une par hypothèse et c_{1*}^{i+k-1} par construction). La chaîne $c_2^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k}$ est donc limitée par une chaîne de B; de plus,

$$\varphi(c_2^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k}) < \mathrm{N},$$

car $\mathrm{B}(c_2^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k})$ ne contient que des éléments de B (c^{i+k}) et ne contient pas b_j^s. On peut donc appliquer le lemme II et l'on obtient deux chaînes $\overset{*}{c}{}_2^{i+k+1}$ et c_{2*}^{i+k}, telles que

$$\overset{*}{c}{}_2^{i+k+1} \equiv (c_2^{i+k} + \overset{*}{c}{}_1^{i+k}) - c_{2*}^{i+k}. \tag{3}$$

c_{2*}^{i+k} étant une chaîne de B et $\overset{*}{c}{}_2^{i+k+1}$ n'ayant en commun avec c^{n-k} que des éléments de dimension au plus $i+1$.

Pour terminer, posons

$$\overset{*}{c}{}^{i+k+1} = -\overset{*}{c}{}_1^{i+k+1} + \overset{*}{c}{}_2^{i+k+1} \quad \text{et} \quad c_*^{i+k} = c_{1*}^{i+k} + c_{2*}^{i+k}.$$

$\overset{*}{c}{}^{i+k+1}$ et c_*^{i+k} satisfont aux conditions exigées.

En effet, d'après (2) et (3), on a

$$\overset{*}{c}{}^{i+k+1} \equiv c^{i+k} - c_*^{i+k};$$

c_*^{i} est une chaine de B parce que c_{1*}^{i+k} et c_{2*}^{i+k} en sont, et $\overset{*}{c}{}^{i+k+1}$ ne contient aucun élément de c^{n-k} de dimension supérieure à $i+1$ parce qu'il en est ainsi pour $\overset{*}{c}{}_1^{i+k+1}$ et $\overset{*}{c}{}_2^{i+k+1}$. Le lemme II est donc complètement établi.

Le théorème que nous avions en vue pourra maintenant s'établir aisément..

Théorème. — *Si c^{i+k} et c^{n-k} sont deux chaînes dans un complexe régulier à n dimensions, n'ayant en commun que des éléments de dimension i au plus, et si c^{i+k} est homologue à zéro, on peut toujours, en subdivisant au besoin le complexe, construire une chaîne c^{i+k+1} limitée à c^{i+k} et n'ayant que des éléments de dimension $i+1$ au plus en commun avec c^{n-k}.*

En effet, en considérant la subdivision normale, on peut, d'après le lemme II, trouver deux chaines c_*^{i+k} et $\overset{*}{c}{}^{i+k+1}$ telles que

$$\overset{*}{c}{}^{i+k+1} \equiv c^{i+k} - c_*^{i+k};$$

c_*^{i+k} est une chaine homologue à zéro dans le réciproque; on peut donc trouver une chaine c_*^{i+k+1} telle que

$$c_*^{i+k+1} \equiv c_*^{i+k}.$$

Alors, la chaine

$$c^{i+k+1} = \overset{*}{c}{}^{i+k+1} + c_*^{i+k+1}$$

satisfait aux conditions désirées. On a, en effet,

$$c^{i+k+1} \equiv c^{i+k},$$

et c^{i+k+1} n'a en commun avec c^{n-k} que des éléments de dimension $i+1$

au plus, car il en est ainsi pour c_*^{i+k+1} en vertu du lemme I, et pour $\overset{*}{c}^{i+k+1}$ en vertu du lemme II.

Remarque. — Si l'on ajoute dans l'hypothèse que c^{i+k} n'a que des éléments de dimension $i-1$ au plus en commun avec la frontière de c^{n-k}, on peut ajouter dans la conclusion que c^{i+k+1} n'a que des éléments de dimension i au plus en commun avec la frontière de c^{n-k}. Le théorème ainsi précisé se laisse démontrer sans modifications essentielles du raisonnement.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES INTERSECTIONS.

10. *Intersections et coefficients d'enlacement.* — Soit A un complexe à n dimensions, bilatère ou unilatère de seconde espèce; supposons les notations choisies de manière que $\sum_1^{\alpha n} a_j^n$ soit la n-chaîne primitive, base de $\mathcal{G}_n$. Soient c^{i+k} et c^{n-k} deux chaînes de A, n'ayant en commun que des éléments de dimension i au plus, ceux de dimension i n'étant situés ni dans la frontière de c^{i+k}, ni dans celle de c^{n-k}. Notre but est de définir une i-chaîne, qui sera appelée *l'intersection de c^{i+k} avec c^{n-k}* et qui sera désignée par la notation $c^{i+k}.c^{n-k}$.

Si $i=0$ et si A est bilatère orienté, $c^k.c^{n-k}$ sera homologue à un multiple, la_1^0 de la base a_1^0 de $\mathcal{G}_0$. L'entier l sera dit *le nombre des intersections de c^k avec c^{n-k}*.

Nous définirons en même temps le *coefficient d'enlacement* de deux chaînes homologues à zéro, à $(k-1)$ et $(n-k)$ dimensions, sans aucun élément commun, situées dans un complexe planoïde orienté à n dimensions.

Ces deux définitions seront données simultanément en procédant par récurrence.

DÉFINITION I_0. — Soient c' et c'' deux chaînes situées dans le complexe A, n'ayant en commun que des éléments de dimension i non situés sur la frontière de c^n; soient a^i un tel élément, λ le nombre de fois qu'il figure dans c^i, μ le nombre de fois qu'un élément a_j^n ayant a^i sur sa frontière figure dans c^n (si $i = n$, on prendra a^i lui-même au lieu de a_j^n); μ est indépendant du choix de a_j^n, parce que a^i n'est pas sur la frontière de c^n. *L'intersection de c^i avec c^n est la i-chaîne*

$$c^i . c^n = \Sigma \lambda . \mu . a^i,$$

où la sommation s'étend à tous les éléments à i dimensions de A contenus à la fois dans c^i et dans c^n, λ et μ étant déterminés pour chacun de ces éléments de la manière indiquée.

Définition I_k. — Soient c^{i+k} et c^{n-k} deux chaînes situées dans le complexe A, n'ayant en commun que des éléments de dimension i au plus, ceux de dimension i n'étant pas situés sur leurs frontières; soit a^i un tel élément; dans l'aster P_ν de centre a^i, à $\nu = n - i - 1$ dimensions, orienté naturellement, à c^{i+k} et c^{n-k} correspondent deux chaînes d^{k-1} et $d^{\nu-k}$, à $(k-1)$ et $(\nu - k)$ dimensions, fermées et homologues à zéro parce que a^i n'est sur la frontière, ni de c^{i+k}, ni de c^{n-k} et sans élément commun parce que c^{i+k} et c^{n-k} n'en ont aucun à plus de i dimensions; soit λ le coefficient d'enlacement de d^{k-1} avec $d^{\nu-k}$ dans P_ν. *L'intersection de c^{i+k} avec c^{n-k} est la i-chaîne.*

$$c^{i+k} . c^{n-k} = \Sigma \lambda . a^i.$$

où la sommation s'étend à tous les éléments à i dimensions de A contenus à la fois dans c^{i+k} et c^{n-k}, λ étant déterminé pour chacun de ces éléments de la manière indiquée.

Définition II_{k-1}. — Soient c^{k-1} et c^{n-k} deux chaînes fermées et homologues à zéro, sans élément commun, situées dans un complexe planoïde P à n dimensions. *Le coefficient d'enlacement de c^{k-1} avec c^{n-k} est le nombre des intersections de c^{k-1} avec une chaîne c^{n-k+1} limitée à c^{n-k}, $c^{n-k+1} \equiv c^{n-k}$, n'ayant que des sommets en commun avec c^{k-1}.*

La définition I_k s'appuie ainsi sur la définition II_{k-1} qui, elle-même, suppose la définition I_{k-1}. Comme I_0 se suffit à elle-même, il n'y a pas de cercle vicieux. Mais la définition II_{k-1} demande à être justifiée et complétée : il faut d'abord prouver que le nombre appelé coefficient d'enlacement de c^{k-1} avec c^{n-k} ne dépend pas du choix de c^{n-k+1}, et ensuite il faudra s'affranchir de l'hypothèse faite implicitement, qu'il existe au moins une chaîne, telle que c^{n-k+1}, limitée à c^{n-k} et n'ayant que des sommets en commun avec c^{k-1}. On s'affranchit de cette hypothèse en remarquant que, d'après le théorème du paragraphe **9**, la construction de c^{n-k+1} sera toujours possible en subdivisant au besoin le complexe P; mais il faut montrer que le coefficient trouvé ne dépend pas de la manière dont on fait cette subdivision. Ces exigences seront satisfaites par les deux théorèmes suivants :

Théorème I_k. — *Soient c^k et c^{n-k-1} deux chaînes fermées et homologues à zéro, sans élément commun, situées dans un complexe planoïde orienté à n dimensions* P; *c_1^{n-k} et c_2^{n-k} deux chaînes limitées à c^{n-k-1},*

$$c_1^{n-k} \equiv c^{n-k-1} \qquad \text{et} \qquad c_2^{n-k} \equiv c^{n-k-1}$$

n'ayant que des sommets en commun avec c^k; alors, les nombres des intersections de c^k avec c_1^{n-k} et avec c_2^{n-k} sont égaux.

Théorème II_k. — *Soient c^k et c^{n-k-1} deux chaînes fermées et homologues à zéro, sans élément commun, dans un complexe planoïde orienté à n dimensions* P; P_1 *et* P_2 *deux subdivisions de* P, *c_1^{n-k} une chaîne située dans* P_1, *limitée à c^{n-k-1} et n'ayant que des sommets en commun avec c^k, c_2^{n-k} une chaîne analogue dans* P_2; *alors le nombre des intersections de c^k avec c_1^{n-k} dans* P_1 *est égal au nombre des intersections de c^k avec c_2^{n-k} dans* P_2.

Démonstration de I_0 *et* II_0. — Une conséquence immédiate de la définition I_0, c'est qu'on a

$$c^0 . c_1^n - c^0 . c_2^n = c^0 . (c_1^n - c_2^n).$$

Pour établir I_0, il suffit de montrer que

$$c^0 . (c_1^n - c_2^n) \sim 0.$$

Or, comme on a

$$c_1^n \equiv c^{n-1} \qquad \text{et} \qquad c_2^n \equiv c^{n-1},$$

$c_1^n - c_2^n$ est une n-chaîne fermée et est par conséquent égale à un multiple, $\mu \Sigma a_j^n$, de la n-chaîne primitive Σa_j^n; en vertu de la définition I_0, on aura

$$c^0.(c_1^n - c_2^n) = \mu . c^0,$$

et cette chaîne est bien homologue à zéro puisque c^0 l'est par hypothèse.

Le théorème II_0 revient à affirmer en plus que l'intersection $c^0.c^n$ ne change pas si l'on subdivise P, ce qui est une conséquence immédiate des définitions.

Démonstration de I_k. — Supposons les théorèmes I_x et II_x établis non seulement pour $x = 0$, mais pour $x = 1, \ldots, k - 1$. On peut alors considérer la définition II_x comme justifié pour $x < k$ et la définition I_x pour $x \leqq k$, ce qui va nous permettre d'établir le lemme suivant :

LEMME. — *Soient, dans le complexe planoïde* P, c^{n-k+1} *une chaîne ayant pour frontière* c^{n-k},

$$c^{n-k+1} \rightrightarrows c^{n-k},$$

et c^k *une chaîne fermée n'ayant que des sommets en commun avec* c^{n-k} *et que des arêtes en commun avec* c^{n-k+1} ; *alors on a*

$$c^k.c^{n-k+1} \rightrightarrows c^k.c^{n-k}.$$

Chacune de ces intersections est bien définie, puisque les définitions I_{k-1} et I_k sont justifiées par hypothèse. Il faut montrer que tout sommet a^0 de P figure le même nombre de fois dans $c^k.c^{n-k}$ et dans la frontière de $c^k.c^{n-k+1}$. Si a^0 n'est pas contenu à la fois dans c^k et c^{n-k}, aucune des arêtes issues de a^0 ne sera contenue à la fois dans c^k et c^{n-k+1}, et a^0 ne figure ni dans $c^k.c^{n-k}$ ni dans la frontière de $c^k.c^{n-k+1}$. Supposons maintenant que a^0 figure μ fois dans $c^k.c^{n-k}$; soient a_1^1, $a_2^1, \ldots$ les arêtes issues de a^0, qu'on peut supposer en relation positive avec a^0; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les nombres de fois qu'elles figurent dans $c^k.c^{n-k+1}$. Le lemme sera établi si nous montrons que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = \mu.$$

Dans l'aster P_{n-1} de centre a^0, à c^k, c^{n-k+1} et c^{n-k} correspondent des chaînes d^{k-1}, d^{n-k} et d^{n-k-1}, telles que $d^{n-k} \equiv d^{n-k-1}$ et $d^{k-1} \equiv 0$; d^{k-1} et d^{n-k} n'ont aucun élément commun, d^{k-1} et d^{n-k} n'ont en commun que des sommets. μ est par définition le coefficient d'enlacement de d^{k-1} avec d^{n-k-1} dans P_{n-1}, c'est-à-dire le nombre des intersections de d^{k-1} avec d^{n-k}. Or, les sommets de P_{n-1} proviennent des arêtes a'_1, a'_2, …, issues de a^0 ; pour trouver le nombre de fois que le sommet s_1 provenant de a'_1 figure dans $d^{k-1}.d^{n-k}$, il faut considérer l'aster P'_{n-2} de centre s_1 situé dans P_{n-1}, qui est identique à l'aster P''_{n-2} de centre a'_1 dans P, et chercher le coefficient d'enlacement dans P'_{n-2} des chaînes provenant de d^{k-1} et d^{n-k} ; ces chaînes étant identiques à celles situées dans P''_{n-2} qui proviennent de c^k et c^{n-k-1}, dont le coefficient d'enlacement est λ_1 par définition de λ_1, s_1 figure λ_1 fois dans $d^{k-1}.d^{n-k}$. Pour la même raison, les sommets de P_{n-1} provenant de a'_2, a'_3, …, figureront λ_2 fois, λ_3 fois, … dans $d^{k-1}.d^{n-k}$. Le nombre μ des intersections de d^{k-1} avec d^{n-k} est donc $\mu=\lambda_1+\lambda_2+\ldots$ et le lemme est établi.

Le théorème I_k résulte aisément de là. Comme

$$c_1^{n-k}\equiv c^{n-k-1} \quad \text{et} \quad c_2^{n-k}\equiv c^{n-k-1},$$

$c_1^{n-k}-c_2^{n-k}$ est une chaîne fermée ; d'après le théorème du paragraphe 9, en subdivisant au besoin P, on pourra construire une chaîne c^{n-k+1} limitée à $c_1^{n-k}-c_2^{n-k}$ et n'ayant que des arêtes en commun avec c^k. En vertu du lemme :

$$c^k.c^{n-k+1}\equiv c^k.(c_1^{n-k}-c_2^{n-k}),$$

d'où

$$c^k.c_1^{n-k}\sim c^k.c_2^{n-k},$$

les nombres d'intersections de c^k avec c_1^{n-k} et c_2^{n-k} sont égaux.

Démonstration du théorème II_k. — Reprenons les notations employées dans l'énoncé. Le théorème est immédiat s'il existe dans P une chaîne c^{n-k} limitée à c^{n-k-1} et n'ayant que des sommets en commun avec c^k ; en effet, en vertu du théorème I_k, les nombres d'intersections de c^k avec c_1^{n-k} dans P_1 et avec c_2^{n-k} dans P_2 sont égaux au nombre d'intersections de c^k avec c^{n-k}, qui est le même dans P, P_1 et P_2.

De là résulte que le coefficient d'enlacement de c^k avec c^{n-k-1} dans P_1 est bien défini et ne change pas si l'on subdivise P_1 ; soit μ_1 sa valeur. Le coefficient d'enlacement de ces mêmes chaînes dans P_2 est aussi bien défini ; soit μ_2 sa valeur. Il faut prouver que $\mu_1=\mu_2$.

Pour cela, nous utiliserons un complexe planoïde Q à $n+1$ dimensions, qu'on peut appeler le prisme construit sur P et qui se définit ainsi :

Q contient tout d'abord deux complexes P′ et P″ identiques à P. Ensuite, à chaque élément de P correspond un nouvel élément de Q, à une dimension de plus, en relation positive avec son correspondant dans P′ et négative avec son correspondant dans P″; ces nouveaux éléments (les côtés du prisme) ont entre eux les relations opposées à celles qui existent entre leurs correspondants dans P. Enfin, Q contient deux éléments à $n+1$ dimensions, l'un (base supérieure) en relation négative avec la n-chaîne primitive de P′, l'autre (base inférieure) en relation négative avec la n-chaîne primitive de P″. Il est aisé de vérifier que Q est planoïde, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe **7**, pour la pyramide.

Subdivisons P′ et P″ de manière à obtenir des complexes $\overline{\mathrm{P}'}$ et $\overline{\mathrm{P}''}$ identiques à P_1 et P_2, puis soumettons chacune des bases de Q à la subdivision pyramidale; soient $\overline{\mathrm{Q}}$ le complexe obtenu, s_1 et s_2 les sommets introduits en subdivisant les deux bases. Remarquons que les astres de centre s_1 et s_2 sont respectivement isomorphes à P_1 et P_2, les orientations coïncidant si $\overline{\mathrm{Q}}$ est convenablement orienté; de plus $s_1 \sim s_2$.

A toute q-chaîne c^q de P correspond une $(q+1)$-chaîne bien déterminée C^{q+1} de $\overline{\mathrm{Q}}$, formée par les côtés du prisme qui correspondent aux éléments de c^q et par les éléments contenus dans les bases qui s'appuient sur les éléments des chaînes de $\overline{\mathrm{P}'}$ et $\overline{\mathrm{P}''}$ correspondant à c^q. Cette correspondance est linéaire, et si $c^{q+1} \equiv c^q$, C^{q+2} et C^{q+1} correspondant à c^{q+1} et c^q, on a

$$C^{q+2} \equiv -\, C^{q+1}.$$

Considérons en particulier les chaînes C^{k+1} et C^{n-k} qui correspondent à c^k et c^{n-k-1}. Ce sont deux chaînes fermées et homologues à zéro, n'ayant en commun que les sommets s_1 et s_2. Si l'isomorphisme entre l'aster de centre s_1 et P_1 est bien déterminé, les chaînes de cet aster provenant de $(-1)^{k+1}C^{k+1}$ et $(-1)^{n-k}C^{n-k}$ sont identiques aux chaînes c^k et c^{n-k-1} dans P_1; leur coefficient d'enlacement est donc bien déterminé et vaut μ_1. De même, le coefficient d'enlacement des chaînes provenant de $(-1)^{k+1}C^{k+1}$ et $(-1)^{n-k}C^{n-k}$ dans l'aster de centre $-s_2$ est bien déterminé et vaut μ_2. Il en résulte que l'intersection de $(-1)^{k+1}C^{k+1}$ avec $(-1)^{n-k}C^{n-k}$ dans $\overline{Q}$ est bien définie et égale à $\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2$, D'ailleurs, en reprenant le raisonnement utilisé pour établir le lemme, on voit que cette intersection est homologue à zéro, d'où $\mu_1 = \mu_2$. C. Q. F. D.

La définition I_k tombe en défaut si $i + k = n$; *nous poserons alors, pour la compléter,* $c^n . c^p = c^p . c^n$.

11. *Propriétés générales des intersections :*

Théorème I. — c^{i+k} et c^{n-k} *étant deux chaînes d'un complexe bilatère ou unilatère de seconde espèce à n dimensions, n'ayant en commun que des éléments de dimension i au plus, ceux de dimension i n'étant pas situés sur leurs frontières, on a*

$$c^{i+k} . c^{n-k} = (-1)^{k(n-k-i)} c^{n-k} . c^{i+k},$$

ou, en posant $i + k = p$ et $n - k = q$,

$$c^p . c^q = (-1)^{(n-p)(n-q)} c^q . c^p.$$

Théorème II. — *Soient* c^k, c^{k-1}, c^l et c^{l-1} *des chaînes contenues dans un complexe bilatère ou unilatère de seconde espèce à* ν *dimentions, telles que*

$$c^k \equiv c^{k-1} \qquad \text{et} \qquad c^l \equiv c^{l-1},$$

c^k et c^l *n'ayant en commun que des éléments de dimension* $k + l - \nu$ *au plus,* c^k *et* c^{l-1} *ainsi que* c^{k-1} *et* c^l *que des éléments de dimension* $k + l - \nu - 1$ *au plus; alors on a*

$$c^k . c^l \equiv c^k . c^{l-1} + (-1)^{\nu-l} c^{k-1} . c^l.$$

Le théorème I a lieu pour $n = 1$; alors, en effet, i et k ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1 et dans chaque cas le théorème a lieu par définition.

Supposons le théorème I établi pour les dimensions inférieures à n et démontrons tout d'abord le théorème II pour $\nu < n$.

Par un raisonnement identique à celui employé pour établir le lemme du paragraphe **10**, on montre qu'un élément à $(k + l - \nu - 1)$ dimensions non contenu dans c^{k-1} figure autant de fois dans $c^k . c^{l-1}$ que dans la frontière de $c^k . c^l$. De même, un élément non contenu dans c^{l-1} figure autant de fois dans $c^l.c^{k-1}$ que dans la frontière de $c^l.c^k$; d'ailleurs, en vertu du théorème I applicable puisque $\nu < n$, on a

$$c^l.c^k = (-1)^{(\nu-l)(\nu-k)} c^k.c^l \quad \text{et} \quad c^l.c^{k-1} = (-1)^{(\nu-l)(\nu-k+1)} c^{k-1}.c^l;$$

le nombre de fois qu'un tel élément figure dans $c^{k-1}.c^l$ est donc égal au nombre de fois, multiplié par $(-1)^{\nu-l}$, qu'il figure dans la frontière de $c^k.c^l$. Comme aucun élément à $(k+l-\nu-1)$ dimensions n'est contenu à la fois dans c^{k-1} et c^{l-1}, on a bien

$$c^k.c^l = c^k.c^{l-1} + (-1)^{\nu-l} c^{k-1}.c^l.$$

Démontrons maintenant le théorème I pour n dimensions. Si $i+k=n$, il a lieu par définition de $c^n.c^{n-k}$. Si $i+k<n$, soit a^i un élément commun à c^{i+k} et c^{n-k}, et soient d^{k-1} et $d^{\nu-k}$ les chaînes provenant de c^{i+k} et c^{n-k} dans l'aster P_ν de centre a_i à $\nu = n-i-1 < n$ dimensions. Tout revient à montrer que le coefficient d'enlacement de d^{k-1} avec $d^{\nu-k}$ est égal à celui de $d^{\nu-k}$ avec d^{k-1} multiplié par

$$(-1)^{k(n-k-i)} = (-1)^{k(\nu-k+1)}.$$

En subdivisant au besoin P_ν, on pourra construire deux chaînes d^k et $d^{\nu-k+1}$ n'ayant que des arêtes en commun, telles que

$$d^k = d^{k-1} \quad \text{et} \quad d^{\nu-k+1} = d^{\nu-k}.$$

En vertu du théorème II (applicable puisque $\nu < n$),

$$d^k.d^{\nu-k+1} = d^k.d^{\nu-k} + (-1)^{\nu-(\nu-k+1)} d^{k-1}.d^{\nu-k+1},$$

d'où

$$d^{k-1}.d^{\nu-k+1} \sim (-1)^k d^k.d^{\nu-k}.$$

En vertu du théorème I (applicable puisque $\nu < n$), on a

$$d^k.d^{\nu-k} = (-1)^{k(\nu-k)} d^{\nu-k}.d^k,$$

d'où

$$d^{k-1}.d^{\nu-k+1} \sim (-1)^{k(\nu-k+1)} d^{\nu-k}.d^k,$$

ce qui signifie précisément que le coefficient d'enlacement de d^{k-1} avec $d^{\nu-k}$ est égal à celui de $d^{\nu-k}$ avec d^{k-1} multiplié par $(-1)^{k(\nu-k+1)}$, et les théorèmes I et II sont maintenant complètement établis.

THÉORÈME III. — *L'intersection de deux chaînes fermées est une* *chaîne fermée. Si, de plus, l'une des deux premières chaînes est homologue à zéro, l'intersection est homologue à zéro.*

THÉORÈME. IV. — *Si, dans l'intersection de deux chaînes fermées, on remplace chacune d'elles par une autre homologue, l'intersection reste homologue à elle-même.*

Ces théorèmes résultent immédiatement du théorème II et du fait que l'intersection est fonction linéaire de chacun de ses arguments, grâce au théorème du paragraphe **9**.

Appelons *ordre* d'une chaîne homologue à zéro avec division le plus petit entier positif par lequel il faut multiplier cette chaîne pour la rendre homologue à zéro; les chaînes d'ordre infini seront celles qui ne sont pas homologues à zéro avec division.

THÉORÈME V. — *L'intersection d'une chaîne d'ordre d avec toute autre chaîne fermée a un ordre qui divise d. Si la seconde chaîne a aussi un ordre fini d', l'ordre de l'intersection est un diviseur commun à d* et *d'.*

Ce théorème résulte immédiatement du troisième. En particulier, le groupe $\mathcal{G}_n$ d'un complexe bilatère ne contenant aucun élément d'ordre fini autre que l'élément identique, on a :

THÉORÈME VI. — *Dans un complexe bilatère à n dimensions, le nombre des intersections d'une q-chaîne homologue à zéro avec division avec toute $(n-q)$-chaîne fermée est nul.*

THÉORÈME VII. — *Associativité de l'intersection*

$$(c^p.c^q).c^r = c^p.(c^q.c^r).$$

Il faut supposer, bien entendu, que, n étant la dimension du complexe,

$$p+q-n \geqq 0, \qquad q+r-n \leqq 0. \qquad p+q+r-2n \geqq 0:$$

nous supposerons encore que les trois chaînes c^p, c^q et c^r n'ont en commun que des éléments de dimension $p+q+r-2n$ au plus, ceux pour lesquels cette dimension maximum est atteinte n'étant pas situés sur les frontières de c^p, c^q ou c^r.

Supposons d'abord que deux des nombres p, q, r soient égaux à n,

p et q par exemple. Soient a^r un élément commun aux trois chaînes, a^n un élément ayant a^r sur sa frontière; soient λ, μ et ν les nombres de fois que a^r et a^n figurent respectivement dans c^r, c^p et c^q. Alors, a^n figure $\mu\nu$ fois dans $c^p.c^q$ et a^r $\lambda\mu\nu$ fois dans $(c^p.c^q).c^r$. De même, a^r figure $\lambda\nu$ fois dans $c^q.c^r$ et $\lambda\nu\mu$ fois dans $c^p.(c^q.c^r)$. Le théorème se démontre de même si p et r ou q et r sont égaux à n. L'un de ces cas se présentant toujours pour $n=1$, le théorème est établi pour $n=1$.

Supposons le théorème établi pour les complexes de dimension inférieure à n. Posons $i=p+q+r-2n$; on peut supposer qu'aucun des nombres p, q, r n'est égal à i, car dans le cas contraire, les deux autres seraient égaux à n. Soit a^i un élément commun à c^p, c^q et c^r; dans l'aster P_ν à $\nu=n-i-1$ dimensions de centre a^i, à c^p, c^q et c^r correspondent les chaînes fermées $d^{p'}$, $d^{q'}$ et $d^{r'}$; $d^{p'}.d^{q'}$ correspond à $c^p.c^q$ et $d^{q'}.d^{r'}$ à $c^q.c^r$; p', q' et r' sont respectivement égaux à $p-i-1$, $q-i-1$ et $r-i-1$. Pour démontrer notre théorème, il suffit de prouver que le coefficient d'enlacement de $d^{p'}.d^{q'}$ avec $d^{r'}$ est égal à celui de $d^{p'}$ avec $d^{q'}.d^{r'}$. Soit $d^{r'+1} \rightarrow d^{r'}$; on aura

$$d^{q'}.d^{r'+1} \rightarrow d^{q'}.d^{r'}.$$

D'ailleurs, comme $\nu<n$, on a

$$(d^{p'}.d^{q'}).d^{r'+1} = d^{p'}.(d^{q'}.d^{r'+1}),$$

ce qui signifie précisément que nos deux coefficients d'enlacement sont égaux. C. Q. F. D.

Ce théorème donne un sens à l'intersection de trois ou plusieurs chaînes.

Des propriétés des intersections qui viennent d'être énumérées, on peut déduire une série d'autres dont nous donnerons seulement un exemple. Si c_1^{n-1} et c_2^{n-1} sont deux chaînes fermées homologues entre elles, $c_1^{n-1}.c_2^{n-1}$ est une chaîne d'ordre au plus égal à deux. En effet, en vertu de I, on a

$$c_1^{n-1}.c_2^{n-1} = -c_2^{n-1}.c_1^{n-1};$$

en vertu de IV,

$$c_1^{n-1}.c_2^{n-1} \sim c_2^{n-1}.c_1^{n-1};$$

d'où

$$2c_1^{n-1}.c_2^{n-1} \sim 0.$$

12. *Conditions nécessaires pour l'équivalence.* — Soient A et A' deux complexes bilatères ou unilatères de seconde espèce; $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ les groupes abéliens attachés à A; $\mathcal{G}'_0, \mathcal{G}'_1, \ldots, \mathcal{G}'_n$ ceux attachés à A'. D'après le théorème III (§ 6), pour que A et A' soient équivalents, il est nécessaire qu'on puisse déterminer un isomorphisme (holoédrique) entre les groupes $\mathcal{G}_q$ et $\mathcal{G}'_q$ pour $q = 0, 1, \ldots, n$.

L'étude des intersections permet de préciser ces conditions. A tout élément de $\mathcal{G}_{i-k}$ suivi d'un élément de $\mathcal{G}_{n-k}$ correspond, en vertu du théorème IV (§ 11), un élément bien déterminé de $\mathcal{G}_i$ qu'on appellera encore l'intersection des deux premiers. Ces relations entre les éléments de $\mathcal{G}_{i-k}$, $\mathcal{G}_{n-k}$ et $\mathcal{G}_i$ ne changeant pas lorsqu'on subdivise le complexe A, *pour que A et A' soient équivalents, il est nécessaire qu'on puisse déterminer entre les groupes $\mathcal{G}_q$ et $\mathcal{G}'_q$ $(q = 0, 1, \ldots, n)$ des isomorphismes tels qu'à l'intersection de deux éléments de $\mathcal{G}_{i-k}$ et $\mathcal{G}_{n-k}$ corresponde l'intersection des éléments correspondants de $\mathcal{G}'_{i-k}$ et $\mathcal{G}'_{n-k}$, quels que soient ces éléments, i, et k.*

Transformons cet énoncé. En vertu de la linéarité de l'intersection, il suffit, pour pouvoir trouver l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{G}_{i-k}$ et $\mathcal{G}_{n-k}$, de connaître celles d'éléments pris dans des bases de ces groupes. Soit $e^q_1, e^q_2, \ldots, e^q_{r_q}$ une base de $\mathcal{G}_q$; tout élément e^q de $\mathcal{G}_q$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$e^q = \sum_{j=1}^{r_q} x_j e^q_j,$$

où x_j est un entier quelconque si e^q_j est d'ordre infini et un reste [mod(ordre de e^q_j)] si cet ordre est fini. En particulier, l'intersection de e^{i-k}_α avec e^{n-k}_β pourra se mettre sous cette forme

$$e^{i-k}_\alpha . e^{n-k}_\beta = \sum_{\gamma=1}^{r_i} x_{\alpha,\beta,\gamma} e^i_\gamma.$$

Les $x_{\alpha,\beta,\gamma}$ forment un tableau à triple entrée, qui sera désigné par $T_{i,k}$; il fait connaître l'intersection des éléments de $\mathcal{G}_{i-k}$ avec ceux de $\mathcal{G}_{n-k}$. L'énoncé ci-dessus devient alors :

Théorème. — *Pour que deux complexes réguliers soient équivalents, il* *est nécessaire que par un choix convenable des bases de leurs groupes, leurs tableaux* $T_{i,k}$ *deviennent égaux chacun à chacun.*

Les propriétés des tableaux $T_{i,k}$ ou du système de ces tableaux, qui sont indépendantes du choix des bases, sont donc des propriétés du complexe invariantes par rapport aux transformations élémentaires (subdivision et opération inverse). Pour prendre l'exemple le plus simple, le fait que $T_{i,k}$ ait tous ses éléments nuls ne dépend pas du choix des bases; il exprime que l'intersection d'une $(i+k)$-chaîne fermée avec une $(n-k)$-chaîne fermée est toujours homologue à zéro. Un peu plus généralement, les intersections des $(i+k)$-chaînes fermées avec les $(n-k)$-chaînes fermées engendrent un sous-groupe de $\mathcal{G}_i$; les nombres caractérisant la structure de ce sous-groupe sont des invariants, qu'il est d'ailleurs aisé de calculer à l'aide de $T_{i,k}$.

Ces tableaux ne peuvent pas être quelconques : chacune des propriétés générales des intersections énumérées au paragraphe **11** se traduit en un caractère général de ces tableaux. Par exemple, si l'on désigne par $x_{\lambda,\mu,\nu}$ le terme général de $T_{i,k}$ et par $y_{\lambda,\mu,\nu}$ celui de $T_{i,n-k-i}$, on a, en vertu du théorème I (§ **11**),

$$x_{\lambda,\mu,\nu} = (-1)^{k(n-k-i)} y_{\mu,\lambda,\nu}.$$

Cette étude fournit-elle effectivement de nouveaux invariants? Existe-t-il des complexes pouvant être reconnus non équivalents au moyen du théorème ci-dessus et ne pouvant pas l'être au moyen du théorème III (§ **6**)? La réponse générale à cette question est affirmative : nous construirons au Chapitre IV deux complexes réguliers ayant les mêmes groupes $\mathcal{G}_n$, le tableau $T_{i,k}$ étant nul pour l'un et pas pour l'autre; cela pourvu seulement que i soit positif. Au contraire, si $i = 0$, le tableau $T_{0,k}$, qui n'est plus qu'à double entrée, peut être réduit à une forme canonique unique et ne fournit pas de nouveaux invariants, sauf dans un cas exceptionnel. Ce sont ces tableaux $T_{0,k}$ qui vont être étudiés dans la suite, après quelques préliminaires indispensables.

13. *Intersection d'éléments réciproques dans la subdivision normale.* — Soient A un complexe *bilatère* à n dimensions, B le réciproque de A ; désignons toujours par a^q_i les éléments de A, les notations étant choisies de manière que $\sum_{i=1}^{\alpha_n} a^n_i$ soit la base de $\mathcal{G}_n$, et que $a^0_i \sim a^0_1$ quel que soit i, a^0_1 étant la base de $\mathcal{G}_0$. L'élément de B qui correspond à a^q_i, appelé réciproque de a^q_i, est toujours désigné par b^{n-q}_i. Identifions les subdivisions normales de A et B en établissant entre elles un isomorphisme tel que $\Sigma a^n_i = \Sigma b^n_i$. On peut alors considérer, dans cette subdivision normale C, dont l'orientation se déduit de celle de A, l'intersection d'une chaine de A avec une chaine de B.

THÉORÈME :

$$a^q_i . b^{n-q}_j \sim \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} a^0_1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La première partie est immédiate : si $i \neq j$, a^q_i et b^q_j ne se touchent pas et $a^q_i . b^{n-q}_j = 0$.

Si $i = j$, a^q_i et b^{n-q}_i ont en commun seulement un sommet, celui désigné par (a^q_i). Le théorème est vrai pour $q = 0$

$$a^0_i . b^n_i = (a^0_i) \sim a^0_1.$$

Supposons-le établi pour les dimensions $1, 2, \ldots, q-1$ de l'élément de A, et passons à la dimension q.

Soit a^{q-1}_k un élément de A en relation positive avec a^q_i. Alors b^{n-q+1}_k est en relation positive avec b^{n-q}_i. Parmi les éléments de A situés dans la frontière de a^q_i, a^{q-1}_k est le seul qui touche b^{n-q-1}_k et parmi les éléments de B situés dans la frontière de b^{n-q+1}_k, b^{n-q}_i est le seul qui touche a^q_i. Il en résulte (théorème II, § 11) :

$$a^q_i . b^{n-q+1}_k = a^q_i . b^{n-q}_i - (-1)^{q-1} a^{q-1}_k . b^{n-q+1}_k,$$

d'où

$$a^q_i . b^{n-q}_i \sim (-1)^q a^{q-1}_k . b^{n-q+1}_k.$$

Comme par hypothèse

$$a^{q-1}_k . b^{n-q+1}_k \sim (-1)^{\frac{(q-1)q}{2}} a^0_1.$$

on a bien

$$a^q_i . b^{n-q}_i \sim (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} a^0_1.$$

Corollaire. — *Si*

$$c_1^q = \sum x_i a_i^q \qquad \text{et} \qquad c_2^{n-q} = \sum y_i b_i^{n-q},$$

on a

$$c_1^q . c_2^{n-q} \sim (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \sum x_i y_i a_1^n.$$

14. *Réduction du schéma.* — Reprenons le schéma d'un complexe A (que nous pouvons d'abord supposer tout à fait quelconque), tel qu'il a été défini au paragraphe **1** :

$$(1) \qquad a_i^q = \sum_j \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_q;\ q = 1, 2, \ldots, n).$$

En désignant simplement par a^q le tableau à une colonne et α_q lignes formé par les a_i^q, T_q étant toujours le tableau des ε_{ij}^q,

$$a^q = \begin{Vmatrix} a_1^q \\ a_2^q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{\alpha_q}^q \end{Vmatrix} \qquad T_q = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11}^q & \varepsilon_{12}^q & \ldots & \varepsilon_{1\alpha_{q-1}}^q \\ \varepsilon_{21}^q & \varepsilon_{22}^q & \ldots & \varepsilon_{2\alpha_{q-1}}^q \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varepsilon_{\alpha_q 1}^q & \varepsilon_{\alpha_q 2}^q & \ldots & \varepsilon_{\alpha_q \alpha_{q-1}}^q \end{Vmatrix}$$

les relations (1) peuvent se mettre sous la forme plus condensée

$$(1') \qquad a^q = T_q a^{q-1}.$$

D'ailleurs, on a toujours

$$(2) \qquad T_q T_{q-1} = 0 \qquad (q = 2, 3, \ldots, n).$$

Disons qu'un système de q-chaînes

$$A_1^q, \quad A_2^q, \quad \ldots, \quad A_{\alpha_q}^q$$

est un système fondamental, si toute q-chaîne est égale à une et une seule combinaison linéaire à coefficients entiers des A_i^q. On obtient tous les systèmes fondamentaux en effectuant sur les a_i^q (qui forment déjà un système fondamental) une substitution unité quelconque S_q (substitution linéaire à coefficients entiers dont le déterminant vaut ± 1). En désignant par A^q le tableau à une colonne et α_q lignes formé par les A_i^q, on a

$$A^q = S_q a^q.$$

Si l'on effectue une telle substitution pour chaque dimension, le schéma (1′) devient

$$A^q = S_q T_q S_{q-1}^{-1} A^{q-1}.$$

Nous allons choisir les S_q de manière que ces relations prennent la forme la plus simple possible.

Tout d'abord, en vertu d'un théorème classique de Kronecker, on peut trouver deux substitutions unités S'_q et S''_{q-1}, telles que les seuls éléments non nuls de $S'_q T_q S''^{-1}_{q-1}$ soient dans la diagonale principale et que chacun d'eux divise le suivant (en convenant que o ne divise que o et est divisible par tout entier). Alors, en posant

$$A'^q = S'_q a^q \qquad \text{et} \qquad A''^{q-1} = S''_{q-1} a^{q-1},$$

on aura

$$A'^q = S'_q T_q S''^{-1}_{q-1} A''^{q-1},$$

ou, en détaillant,

$$(3) \qquad \begin{cases} A'^q_i = d^q_i A''^{q-1}_i & (i = 1, 2, \ldots, t_q), \\ A'^q_i = 0 & (i = t_q + 1, \ldots, \alpha_q). \end{cases}$$

t_q est le rang de T_q; $d^q_1, d^q_2, \ldots, d^q_{t_q}$ sont ses diviseurs élémentaires.

Toute q-chaîne peut s'exprimer au moyen des A'^q_i; pour qu'elle soit fermée, il faut et il suffit qu'elle s'exprime seulement avec les A'^q_i d'indice i plus grand que t_q. En particulier, les A''^{q-1}_i ($i = 1, 2, \ldots, t_q$) qui figurent aux seconds membres de (3), étant fermées, pourront s'exprimer avec les A'^{q-1}_i ($i > t_{q-1}$). Alors, en effectuant sur les A''^{q-1}_i une substitution unité convenable S'''_{q-1}, on pourra obtenir que, en posant $A^{q-1} = S'''_{q-1} A''^{q-1}$, on ait

$$\begin{aligned} A^{q-1}_i &= A'^{q-1}_i & (i = 1, 2, \ldots, t_{q-1}), \\ A^{q-1}_{i+t_{q-1}} &= A''^{q-1}_i & (i = 1, 2, \ldots, t_q). \end{aligned}$$

Les relations (3) deviennent

$$\begin{aligned} A^q_i &= d^q_i A^{q-1}_{i+t_{q-1}} & (i = 1, 2, \ldots, t_q), \\ A^q_i &= 0 & (i = t_q + 1, \ldots, \alpha_q). \end{aligned}$$

La substitution S_q qui permet de passer directement des a^q_i aux A^q_i, $A^q = S_q a^q$, est égale à $S'''_q S'_q$. En posant

$$\mathfrak{T}_q = S_q T_q S^{-1}_{q-1},$$

les relations (3) s'écrivent encore

$$A^q = \mathcal{C}_q A^{q-1} \qquad \text{avec } \mathcal{C}_q \mathcal{C}_{q-1} = 0.$$

ou, en détaillant et en désignant par $\omega^q_{i,j}$ le terme général de $\mathcal{C}_q$ [ces nombres sont tous nuls sauf les $\omega^q_{i,i+t_{q-1}}$ ($i = 1, 2, \ldots, t_q$) qui sont respectivement égaux aux d^q_i]

$$A^q_i = \omega^q_{i,i+t_{q-1}} A^{q-1}_{i+t_{q-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t_q),$$
$$A^q_i = 0 \qquad (i = t_q + 1, \ldots, \alpha_q).$$

Les homologies fondamentales sont

$$\omega^{q+1}_{i,i+t_q} A^q_{i+t_q} \sim 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t_{q+1}).$$

L'avantage du système fondamental ainsi formé résulte des remarques suivantes. Pour que la chaine $c^q = \Sigma x_i A^q_i$ soit fermée, il faut et il suffit que

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{t_q} = 0;$$

pour qu'elle soit homologue à zéro avec division, il faut et il suffit qu'on ait de plus

$$x_{t_q+t_{q+1}} = \ldots = x_{\alpha_q} = 0.$$

Toute q-chaine fermée est donc homologue avec division à une et une seule combinaison de

$$A^q_{t_q+t_{q+1}+1}, \quad A^q_{t_q+t_{q+1}+2}, \quad \ldots, \quad A^q_{\alpha_q}.$$

Ces $\alpha_q - t_q - t_{q+1}$ chaines forment une base pour le groupe g_q, et $P_q = \alpha_q - t_q - t_{q+1}$ en convenant de poser $t_0 = t_{n+1} = 0$.

Enfin, cette forme réduite du schéma met aussi en évidence la structure de γ_q : les coefficients de torsion de dimension q sont égaux à ceux des nombres $\omega^{q+1}_{i,i+t_q}$ qui sont plus grands que 1, et les $A^q_{i+t_q}$ correspondants forment une base pour γ_q.

15. *Réduction corrélative du réciproque.* — Soient B le réciproque du complexe A du paragraphe **14**, b^{n-q}_i l'élément réciproque de a^q_i, η^q_{ij} les nombres relatifs à B analogues aux ε^q_{ij} de A, U_q le tableau des η^q_{ij}. Le schéma de B peut alors s'écrire sous la forme suivante analogue à (1') (§ **14**)

$$b^q = U_q b^{q-1},$$

et l'on sait (§ 5) que U_q est le tableau transposé, $\overline{T}_{n-q+1}$, de T_{n-q+1}

$$U_q = \overline{T}_{n-q+1}.$$

Effectuons sur les b^q_i la substitution S^*_{n-q} contragrédiente de S_{n-q}

$$B^q = S^*_{n-q} b^q.$$

Le schéma devient

$$B^q = S^*_{n-q} U_q S^{*-1}_{n-q+1} B^{q-1}$$

ou

$$B^q = \mathfrak{U}_q B^{q-1},$$

en posant

$$\mathfrak{U}_q = S^*_{n-q} U_q S^{*-1}_{n-q+1}.$$

Il est aisé de voir que $\mathfrak{U}_q$ est le tableau transposé du tableau $\mathfrak{T}_{n-q+1}$ du paragraphe **14**. (On n'a qu'à utiliser les règles de calculs suivantes : $\overline{XY} = \overline{Y}\,\overline{X}$ et $X^* = \overline{X}^{-1}$.)

En détaillant, on a donc

$$B^{n-q}_{i+l_q} = \omega^{q-1}_{i,i+l_q} B^{n-q-1}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l_{q-1}).$$
$$B^{n-q}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l_q, l_q + l_{q+1} + 1, \ldots, \alpha_q).$$

et les homologies fondamentales sont

$$\omega^q_{i,i+l_{q-1}} B^{n-q}_i \sim 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l_q).$$

Pour que la chaine $c^{n-q} = \Sigma \xi_i B^{n-q}_i$ soit fermée, il faut et il suffit que

$$\xi_{1+l_q} = \xi_{2+l_q} = \ldots = \xi_{l_{q-1}+l_q} = 0;$$

pour qu'elle soit homologue à zéro avec division, il faut et il suffit que de plus

$$\xi_{l_q+l_{q-1}+1} = \xi_{l_q+l_{q-1}+2} = \ldots = \xi_{\alpha_q} = 0.$$

Il en résulte que les $P_q = \alpha_q - l_q - l_{q-1}$ chaines $B^{n-q}_{i+l_q+l_{q-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, P_q)$ forment une base pour le groupe g_{n-q} de B.

16. *Un théorème de Poincaré.* — Soient $c^q = \Sigma x_i a^q_i$ une chaine du complexe A, $d^{n-q} = \Sigma y_i b^{n-q}_i$ une chaine du réciproque B.

Pour que c^q supposée fermée soit homologue à zéro avec division, il *faut et il suffit que, quelle que soit d^{n-q} fermée, on ait*

$$\sum_{i=1}^{\alpha_q} x_i y_i = 0 \quad [1].$$

Exprimons c^q avec les A_i^q et d^{n-q} avec les B_i^{n-q}

$$c^q = \sum x_i a_i^q = \sum \xi_i A_i^q \qquad \text{et} \qquad d^{n-q} = \sum y_i b_i^{n-q} = \sum \eta_i B_i^{n-q}.$$

On a

$$(1) \qquad \sum x_i y_i = \sum \xi_i \eta_i,$$

car les substitutions qui font passer des x aux ξ et des y aux η sont contragrédientes.

D'après les remarques faites aux paragraphes **14** et **15**, si c^q et d^{n-q} sont fermées, on a

$$\xi_i \eta_i = 0 \qquad \text{pour } i \leq t_q + t_{q-1},$$

de sorte qu'on peut se limiter aux indices $i > t_q + t_{q-1}$. Or, si c^q est homologue à zéro avec division, tous ces ξ_i sont nuls et la somme considérée sera nulle aussi; dans le cas contraire, l'un de ces ξ_i n'est pas nul, soit ξ_j, si l'on fait $d^{n-q} = B_j$ la somme considérée se réduit à $\xi_j \neq 0$.

17. *Intersections des q- et (n — q)-chaînes.* — Supposons maintenant que A soit un complexe bilatère, et identifions les subdivisions normales C de A et B comme au paragraphe **13**. $c^q . c^{n-q}$ désignera indifféremment la o-chaîne intersection de c^q avec c^{n-q} ou le nombre des intersections de c^q avec c^{n-q}.

Théorème I. — *Si c^q fermée n'est pas homologue à zéro avec division, on peut trouver c^{n-q} fermée telle que $c^q . c^{n-q} \neq 0$. Si c^q est primitive, c'est-à-dire n'est pas homologue avec division à un multiple d'une autre chaîne, on peut obtenir que $c^q . c^{n-q} = 1$.*

Ce théorème résulte immédiatement de celui du paragraphe **16**; on peut supposer en effet que c^q est une chaîne de A, $c^q = \sum \xi_i A_i^q$, et

---

[1] On a évidemment un énoncé équivalent en permutant c^q et d^{n-q}.

si $c^{n-q} = \Sigma \eta_i B_i^{n-q}$ on a, d'après le paragraphe **13** et (1), paragraphe **16**,

$$c^q . c^{n-q} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \Sigma \xi_i \eta_i$$

et si c^q est primitive, les ξ_i qui figurent dans cette somme sont premiers entre eux.

Pour tirer les conséquences de ce théorème, distinguons trois cas :

a. $q \neq n - q$. Si l'on prend pour bases des groupes g_q et g_{n-q} les chaînes A_i^q et B_i^q ($i = t_q + t_{q-1} + 1, \ldots, \alpha_q$), le tableau $T_{n,q}$ est ramené à une forme canonique : il a tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui valent $(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}$.

b. $q = n - q =$ entier impair, $n =$ multiple de 4 plus 2. Soit c_1, $c_2, \ldots, c_{P_{\frac{n}{2}}}$ une base de g_q. Le tableau $T_{n,q}$, formé par les nombres $c_i . c_k$, est antisymétrique d'après le théorème I (§ **11**) et son déterminant vaut ± 1. On sait que son rang $P_{\frac{n}{2}}$, est pair et qu'il peut être réduit à une forme canonique en effectuant sur les c_i une substitution unité convenable, c'est-à-dire en changeant la base de g_q. D'où :

THÉORÈME II. — *Pour un complexe bilatère dont la dimension n est un multiple de 4 plus 2, le nombre $P_{\frac{n}{2}}$ est pair et le tableau $T_{n,\frac{n}{2}}$ peut être réduit à une forme canonique.*

c. $q = n - q =$ entier pair, $n =$ multiple de 4.

Dans ce cas, le tableau des nombres $c_i . c_k$ est symétrique. On peut lui substituer la forme quadratique

$$\Phi = \Sigma (c_i c_k) x_i x_k$$

que nous dirons attachée au complexe. Si l'on change la base de $g_{\frac{n}{2}}$, cela revient à effectuer une substitution unité sur les variables de Φ. Si l'on change la base de g_0, c'est-à-dire si l'on change l'orientation du complexe, Φ est multipliée par -1. D'où :

THÉORÈME III. — *Pour que deux complexes bilatères dont la dimension est un multiple de 4 soient équivalents, il est nécessaire que, si Φ et*

Φ' sont leurs formes attachées, on puisse passer de Φ à Φ' ou $-\Phi'$ par une substitution unité sur les variables.

En d'autres termes, il faut que Φ appartienne à la même classe arithmétique que Φ' ou $-\Phi'$. Ce cas est donc le seul où le tableau $T_{n,q}$ puisse apporter de nouveaux invariants. On verra par des exemples, au Chapitre IV, qu'il s'introduit effectivement de nouveaux invariants.

Ce théorème donne aussi une condition pour qu'un complexe admette une transformation en lui-même qui renverse l'orientation. Soient $C, C_1, C_2, \ldots, C_l$ une suite de complexes donc chacun dérive du précédent par une transformation élémentaire et dont le dernier est isomorphe à C. La suite de ces transformations et l'isomorphisme entre C_l et C définissent une transformation de C en lui-même. Si C est bilatère, il en sera de même de $C_1, C_2, \ldots, C_l$ et de l'orientation de C on déduit de proche en proche des orientations pour $C_1, C_2, \ldots, C_l$. Dans l'isomorphisme entre C_l et C, on pourra toujours s'arranger pour que les bases des groupes $\mathcal{G}_n$ se correspondent; si alors les bases des groupes $\mathcal{G}_0$ se correspondent, l'orientation est conservée; dans le cas contraire elle est renversée.

Théorème IV. — *Pour qu'un complexe bilatère à $n = 4p$ dimensions admette une transformation en lui-même qui renverse l'orientation, il faut que la forme quadratique Φ attachée appartienne à la même classe que $-\Phi$.*

En particulier, le rang $P_{\frac{n}{2}}$ doit être pair et l'indice d'inertie égal à la moitié du rang.

18. *Enlacement des chaînes d'ordre fini.* — Les développements du paragraphe précédent, relatifs aux chaînes d'ordre infini, suggèrent l'idée de faire, relativement aux chaînes d'ordre fini, une étude analogue.

La définition du coefficient d'enlacement d'une q-chaîne fermée avec une $(n-q-1)$-chaîne fermée dans un complexe planoïde à n dimensions, donnée au paragraphe **10**, s'étend immédiatement au cas de deux chaînes homologues à zéro dans un complexe bilatère quelconque. En effet, si c^q et c^{n-q-1} sont deux telles chaînes, le nombre des intersections de c^q avec une chaîne c_1^{n-q} limitée à c^{n-q-1}, $c_1^{n-q} \equiv c^{n-q-1}$, ne dépend que de c^q et c^{n-q-1}, car si $c_2^{n-q} \equiv c^{n-q-1}$, en vertu de $c^q \sim 0$ et $c_2^{n-q} - c_1^{n-q} \equiv 0$, on a

$$c^q . c_2^{n-q} - c^q . c_1^{n-q} = c^q . (c_2^{n-q} - c_1^{n-q}) \sim 0.$$

Il suffit même que c^q ne soit homologue à zéro qu'avec division et la conclusion subsiste. Si c^{n-q-1} n'est homologue à zéro qu'avec division, soit k un entier tel que $kc^{n-q-1} \sim 0$; nous conviendrons que le coefficient d'enlacement de c^q avec c^{n-q-1} est égal à celui de c^q avec kc^{n-q-1} divisé par k.

Comme l'intersection, le coefficient d'enlacement est linéaire par rapport à chacun de ses arguments ; il est entier si l'un deux est homologue à zéro ; enfin si on les permute, il est multiplié par $(-1)^{(q+1)(n-q)}$, ainsi qu'il a été établi au cours de la démonstration du théorème I (§ **11**).

THÉORÈME I. — *Le reste* [mod 1] *du coefficient d'enlacement de deux chaînes d'ordre fini ne change pas si l'on remplace chacune d'elles par une autre homologue.*

En effet, soient c^q et c^{n-q-1} les deux chaînes d'ordre fini, et remplaçons c^q par exemple par une chaîne homologue c_1^q. La différence des coefficients d'enlacement considérés est égale à celui de $c^q - c_1^q$ avec c^{n-q-1}, qui est entier parce que $c^q - c_1^q \sim 0$.

Désignons le reste [mod 1] de ce coefficient par $\{c^q, c^{n-q-1}\}$. On est ainsi ramené à considérer une nouvelle série de tableaux attachés au complexe. Soient $c_1^q, c_2^q, \ldots, c_r^q$ une base pour γ_q et $c_1^{n-q-1}, c_2^{n-q-1}, \ldots, c_r^{n-q-1}$ une base pour γ_{n-q-1} ; les nombres $\{c_i^q, c_j^{n-q-1}\}$ forment le $q^{\text{ième}}$ des tableaux considérés. γ_q et γ_{n-q-1} étant isomorphes, on peut supposer, ce que nous ferons, que l'ordre de c_i^q est égal à celui de c_i^{n-q-1}. Désignons-le par $|c_i^q|$.

THÉORÈME II. — *On peut choisir les bases de* γ_q *et* γ_{n-q-1} *de manière que*

$$\{c_i^q . c_j^{n-q-1}\} = \qquad \text{si } i \neq j.$$

$$\{c_i^q . c_i^{n-q-1}\} = \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{c_i^q}.$$

Soient A le complexe considéré et B son réciproque, et reprenons les schémas réduits des paragraphes **14** et **15**. Les chaînes A^q_{i,t_q} et B_i^{n-q-1}, i étant tel que $\omega^{q+1}_{i,i+t_q} > 1$, forment les bases cherchées. En effet, les ordres de ces chaînes sont égaux a $\omega^{q+1}_{i,i+t_q}$ et l'on a

$$\{A^q_{i,t_q}, B_j^{n-q-1}\} = \frac{1}{\omega^{q+1}_{i,i+t_q}} A^q_{i,t_q} \cdot B^{n-q}_{j,t_q} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{\omega^{q+1}_{i,i+t_q}} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Corollaire. — *Si c^q est homologue à zéro, quelle que soit la chaîne c^{n-q-1} d'ordre fini, $\{c^q, c^{n-q-1}\} = 0$. Réciproquement, si c^q est homologue à zéro avec division, on peut trouver une chaîne d'ordre fini c^{n-q-1}, telle que $\{c^q, c^{n-q-1}\} \neq 0$; plus précisément, si c^q est d'ordre k, on peut obtenir que $\{c^q, c^{n-q-1}\} = \frac{1}{k}$.*

La première partie est déjà établie. Pour la seconde, utilisons les bases du théorème II et posons

$$c^q = \sum x_i c_i^q \qquad \text{et} \qquad c^{n-q-1} = \sum y_i c_j^{n-q-1}.$$

On a

$$(1) \qquad \{c^q, c^{n-q-1}\} = \sum_{i,j} x_i y_j \{c_i^q, c_j^{n-q-1}\} = \pm \sum \frac{x_i y_i}{c_i^q} \qquad [\bmod 1].$$

x_i et y_i sont des restes entiers $[\bmod |c_i^q|]$. L'ordre de c^q est le plus petit entier k tel que

$$k x_i = 0 \qquad [\bmod c_i^q].$$

On a donc

$$k x_i = \lambda_i c_i^q$$

et les λ_i sont des entiers premiers dans leur ensemble. Multipliant (1) par k, il vient

$$k \{c^q, c^{n-q-1}\} = \pm \sum \lambda_i y_i \qquad [\bmod k]$$

et l'on peut bien choisir les y_i entiers de manière que $\pm \Sigma \lambda_i y_i = 1$, ce qui établit la proposition.

D'après le théorème II, si $q \neq n - q - 1$, les tableaux considérés ici peuvent être ramenés à une forme canonique et ne fournissent pas de nouveaux invariants. Si n est impair, appelons tableau d'enlacement attaché au complexe le $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ des tableaux considérés, et disons que deux tels tableaux appartiennent à la même classe s'ils deviennent identiques pour un choix convenable des bases des groupes $\gamma_{\frac{n-1}{2}}$. Si l'on change l'orientation du complexe, les éléments de son tableau d'enlacement (ce sont des restes [mod 1]) sont changés de signes. Alors :

THÉORÈME III. — *Pour que deux complexes bilatères à un nombre impair de dimensions soient équivalents, il est nécessaire que, si* T *et* T' *sont leurs tableaux d'enlacement,* T *appartienne à la même classe que* T' *ou* — T'.

On peut aussi remarquer que pour qu'un tel complexe admette une transformation en lui-même qui renverse l'orientation, il faut que T appartienne à la même classe que — T.

Les circonstances sont différentes suivant que $q = n - q - 1 = \frac{n-1}{2}$ est impair ou pair. On a

$$\{c_i^q, c_k^q\} \equiv (-1)^{q+1}\{c_k^q, c_i^q\} \qquad [\bmod 1].$$

Dans le premier cas, $n \equiv 3$ [mod 4], il y a symétrie; nous verrons au Chapitre IV, par des exemples, qu'alors le théorème a effectivement des applications. Le second cas, où il y a antisymétrie et $n \equiv 1$ [mod 4], va être examiné au paragraphe suivant.

19. Le problème traité ici, purement arithmétique, peut être posé ainsi. On a un groupe abélien fini γ; à tout couple formé par deux de ses éléments, c_1 et c_2, est attaché un reste [mod 1] bien déterminé, $\{c_1, c_2\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $$\{c_1 + c'_1, c_2\} \equiv \{c_1, c_2\} + \{c'_1, c_2\} \qquad [\bmod 1].$$

2° $$\{c_1, c_2\} \equiv -\{c_2, c_1\} \qquad [\bmod 1].$$

3° Si c_1 est d'ordre k, quel que soit c_2, on a :

$$k\{c_1, c_2\} \equiv 0 \qquad [\bmod 1];$$

et l'on peut choisir c_2 de manière que

$$\{c_1, c_2\} = \frac{1}{k}.$$

Chercher quelles sont les structures de γ compatibles avec ces hypothèses, et choisir une base de γ, $c_1, c_2, \ldots, c_r$, de manière que le tableau des $\{c_i, c_k\}$ ait une forme aussi simple que possible.

Posons quelques définitions.

Les éléments $c_1, c_2, \ldots$ seront dits indépendants si de

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots = 0$$

résulte

$$x_1 c_1 = x_2 c_2 = \ldots = 0.$$

c_2 et c_2 sont orthogonaux si $\{c_1, c_2\} = 0$. Un sous-groupe γ' de γ sera dit fermé, si la condition 3° a lieu pour γ'. En vertu de 2°,

$$\{c, c\} = -\{c, c\} \quad (\bmod 1);$$

donc $\{c, c\} = 0$ ou $\frac{1}{2}$; c sera dit de première catégorie si $\{c, c\} = 0$, de seconde catégorie si $\{c, c\} = \frac{1}{2}$. Les éléments de première catégorie forment un sous-groupe de γ. Quel que soit c, $2c$ est toujours de première catégorie; il en résulte que tout élément d'ordre impair est de première catégorie.

a. Cas où il n'y a pas d'éléments de seconde catégorie :

Soit c_1 un élément d'ordre maximum ζ_1; soit c_2 tel que $\{c_1, c_2\} = \frac{1}{\zeta_1}$. L'ordre ζ_2 de c_2 est égal à ζ_1, car

$$\{c_1, \zeta_2 c_2\} = 0 \equiv \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \quad (\bmod 1).$$

c_1 et c_2 sont indépendants, car de $x_1 c_1 + x_2 c_2 = 0$ on tire

$$0 = \{x_1 c_1 + x_2 c_2, c_2\} \equiv x_1 \{c_1, c_2\} \equiv \frac{x_1}{\zeta_1} \quad (\bmod 1).$$

d'où $x_1 c_1 = 0$ et de même $x_2 c_2 = 0$.

Considérons le sous-groupe γ' de γ formé des éléments orthogonaux à c_1 et c_2. Tout élément c de γ peut s'exprimer avec c_1, c_2 et un élément de γ'; en effet, si $\{c_1, c\} = \frac{y_1}{\zeta_1}$ et $\{c, c_2\} = \frac{y_2}{\zeta_2}$, $c - y_1 c_2 - y_2 c_1$ sera orthogonal à c_1 et c_2 et par conséquent contenu dans γ'. D'ailleurs, tout élément c' de γ' est indépendant de c_1 et c_2, car de

$$x'c' + x_1 c_1 + x_2 c_2 = 0$$

on tire comme ci-dessus

$$x_1 c_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 c_2 = 0,$$

d'où aussi $x'c' = 0$.

Pour avoir une base de γ, il suffit donc d'adjoindre à c_1 et c_2 une base de γ'. Or, γ' est fermé, car si c'_1 est un de ses éléments d'ordre k, on pourra trouver c'_2 tel que $\{c'_1, c'_2\} = \frac{1}{k}$, et si c' n'est pas dans γ', on peut l'y faire rentrer en lui retranchant une combinaison de c_1 et c_2, ce qui n'altère pas $\{c'_1, c'_2\}$.

On peut donc opérer sur γ' comme sur γ, et l'on en tire deux éléments indépendants c_3 et c_4, d'ordre maximum $\zeta_3 = \zeta_4$, tels que $\{c_3, c_4\} = \frac{1}{\zeta_3}$, et le sous groupe γ'' formé des éléments de γ' orthogonaux à c_3 et c_4 jouira relativement à γ' des mêmes propriétés que γ' relativement à γ. ζ_3 divise ζ_1, car sans cela, l'ordre de $c_1 + c_3$, plus petit commun multiple de ζ_1 et ζ_3, serait plus grand que ζ_1, ce qui est impossible.

En opérant sur γ'' comme sur γ', et en continuant, on arrivera finalement à un $\gamma^{(s)}$ ne contenant que l'élément identique (zéro). Alors, la suite des éléments $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2s}$ forme une base pour γ; les ordres de ces éléments, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2s}$ sont les coefficients de torsion; ils sont deux à deux égaux : $\zeta_1 = \zeta_2$, $\zeta_3 = \zeta_4$, ... Enfin le tableau des $\{c_i, c_k\}$ est ramené à une forme canonique, puisque les seuls qui ne soient pas nuls sont

$$\{c_{2j-1}, c_{2j}\} \equiv -\{c_{2j}, c_{2j-1}\} \equiv \frac{1}{\zeta_{2j-1}} \quad (\bmod 1) \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

b. Cas où il y a des éléments de seconde catégorie :

Pour avoir une base de γ, il suffit de juxtaposer une base du sous-groupe des éléments d'ordre impair et une base du sous-groupe des éléments dont l'ordre est une puissance de deux.

On voit de plus que chacun de ces sous-groupes est fermé et que tout élément de l'un est orthogonal à tout élément de l'autre. Le problème est ainsi décomposé en deux parties. La première, relative au sous-groupe des éléments d'ordre impair, est déjà résolue, puisqu'il n'y a pas d'élément de seconde catégorie. Reste la seconde relative au cas d'un groupe γ dont l'ordre est une puissance de deux.

Soit χ l'un des éléments de seconde catégorie d'ordre minimum 2^κ; soit c_1 l'un des éléments d'ordre maximum 2^{k_1}, et supposons d'abord $k_1 > \kappa$.

On peut supposer c_1 de première catégorie, sinon on le remplacerait par $c_1 - \chi$ qui serait alors de première catégorie et encore d'ordre 2^{k_1}. Soit c_2 tel que $\{c_1, c_2\} = \frac{1}{2^{k_1}}$; on peut encore supposer c_2 de première catégorie, car s'il était de seconde catégorie, on le remplacerait par $c'_2 = \lambda(c_2 - \chi)$, λ étant tel que $\{c_1, c'_2\} = \frac{1}{2^{k_1}}$; pour cela, il faut que, en posant $\{c_1, \chi\} = \frac{x}{2^\kappa}$, d'où

$$\{c_1, \lambda(c_2 - \chi)\} = \lambda\left(\frac{1}{2^{k_1}} - \frac{x}{2^\kappa}\right) \qquad |\bmod 1|.$$

on ait

$$\lambda(1 - 2^{k_1 - \kappa} x) = 1 \qquad |\bmod 2^{k_1}|.$$

et si $k_1 > \kappa$, λ peut toujours être choisi de manière qu'il en soit ainsi.

En raisonnant comme dans a, on voit que l'ordre de c_2 est égal à celui c_1, et pour obtenir une base de γ, il suffit d'adjoindre à c_1 et c_2 une base du sous-groupe γ' forme des éléments orthogonaux à c_1 et c_2. γ' est fermé et contient des éléments de seconde catégorie d'ordre 2^κ et aucun d'ordre inférieur. S'il contient des éléments d'ordre supérieur à 2^κ, on pourra opérer sur lui comme sur γ, et après un certain nombre d'opérations, on obtiendra un groupe $\gamma^{(l)}$, ne contenant pas d'élément d'ordre supérieur à 2^κ et contenant des éléments de seconde catégorie, tous d'ordre 2^κ. On a une suite d'éléments $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{2l-1}, c_{2l}$, d'ordres $2^{k_1} = 2^{k_2}, \ldots, 2^{k_{2l-1}} = 2^{k_{2l}}$, et les seuls $\{c_j, c_k\}$ non nuls étant les suivants :

$$\{c_{2i-1}, c_{2i}\} = -\{c_{2i}, c_{2i-1}\} = \frac{1}{2^{k_{2i}}} \quad |\bmod 1| \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Pour avoir une base de γ, il suffit d'adjoindre à ces éléments une base de $\gamma^{(l)}$, de sorte qu'on est ramené aux cas examinés ci-dessous :

c. Cas où tous les éléments de seconde catégorie sont d'ordre maximum 2^{k_1} (avec $k_1 > 1$) :

Soit c_1 de seconde catégorie, d'ordre 2^{k_1}; soit c_2 tel que $\{c_1, c_2\} = \frac{1}{2^{k_1}}$; on peut s'arranger pour que c_2 soit de première catégorie, car si ce n'était pas le cas, on le remplacerait par $c'_2 = \lambda(c_1 - c_2)$, λ étant choisi tel que

$$\{c_1, c'_2\} \equiv \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k_1}}\right) \equiv \frac{1}{2^{k_1}} \qquad [\bmod 1]$$

ou

$$\lambda(2^{k_1-1} - 1) \equiv 1 \qquad [\bmod 2^{k_1}].$$

ce qui est toujours possible si $k_1 > 1$.

Tout élément c de γ peut s'exprimer avec c_1, c_2 et le sous-groupe γ' orthogonal à c_2 et c_2. En effet, en retranchant de c un multiple de c_1, on le rend orthogonal à c_2, puis en lui retranchant un multiple de c_2, ce qui le laisse orthogonal à c_2, on le rend orthogonal à c_1. On voit, comme dans a, que γ' est fermé et que ses éléments sont indépendants de c_1 et c_2.

En opérant sur γ' comme sur γ, s'il contient encore des éléments de seconde catégorie, on arrivera finalement à un groupe n'en contenant plus et l'on achèvera comme dans a.

Soit c_1, c_2; c_3, c_4; ... la base obtenue pour γ; les ordres de ces éléments sont $2^{k_1} = 2^{k_2}$, $2^{k_3} = 2^{k_4}$, ... On peut encore s'arranger pour que c_1 soit le seul élément de seconde catégorie; il pourrait se faire, en effet, si $k_3 = k_1$, que c_3 par exemple soit de seconde catégorie. Il faudrait alors le remplacer par

$$c'_3 = c_3 + c_1 - 2^{k_1-1} c_2,$$

qui est de première catégorie; on a bien

$$\{c_1, c'_3\} = 0, \qquad \{c'_3, c_4\} = \frac{1}{2^{k_3}}$$

et en retranchant éventuellement de c_2 un multiple de c_4, on obtient

$$\{c_2, c'_3\} = 0.$$

d. Cas où il y a des éléments de seconde catégorie et où tous les éléments sont d'ordre 2 :

Soit c_1 un élément de seconde catégorie, $\{c_1, c_1\} = \frac{1}{2}$; γ' le sous-groupe des éléments orthogonaux à c_1; on voit qu'il est fermé et qu'on aura une base de γ en adjoignant à c_1 une base de γ'. Si γ' contient des éléments de seconde catégorie, en le traitant comme γ, on arrivera à un groupe $\gamma^{(u)}$ ne contenant pas d'élément de seconde catégorie, et qu'on traite comme dans *a*.

On obtient ainsi une base formée d'une suite de u éléments de seconde catégorie, $c_1, c_2, \ldots, c_u$, et de v couples d'éléments de première catégorie,

$$c_{u+1}, c_{u+2}; \quad c_{u+3}, c_{u+4}; \quad \ldots; \quad c_{u+2v-1}, c_{u+2v}.$$

Les seuls $\{c_i, c_j\}$ $(i \neq j)$ non nuls sont

$$\{c_{u+2i-1}, c_{u+2i}\} \equiv -\{c_{u+2i}, c_{u+2i-1}\} \equiv \frac{1}{2} \quad (\text{mod } 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, v).$$

Si $u > 2$, on peut diminuer u de 2 en augmentant v de 1. En effet, au lieu de c_1, c_2 et c_3 on peut mettre dans la base :

$$c'_1 = c_1 + c_2, \qquad c'_2 = c_1 + c_3, \qquad c'_3 = c_1 + c_2 + c_3:$$

c'_1 et c'_2 sont de première catégorie et orthogonaux à c_3; on a

$$\{c'_1, c'_2\} = \frac{1}{2};$$

et c'_3 est de seconde catégorie.

On arrivera ainsi à $u = 1$ ou 2, et ces deux cas sont d'ailleurs irréductibles l'un à l'autre, puisque dans le premier cas la base contient un nombre impair d'éléments et dans le second cas un nombre pair.

e. Revenons au cas d'un groupe γ quelconque et résumons cette discusion :

Il en résulte d'une part que le tableau d'enlacement peut être ramené à une forme canonique unique s'il n'y a pas d'élément de seconde catégorie, et à une forme canonique ne dépendant que de $\varkappa$ dans le cas contraire; d'autre part, que, sauf dans le cas où $\varkappa = 1$, les coefficients de torsion peuvent être répartis en couples, chaque couple en contenant deux égaux; si $\varkappa = 1$ il peut y avoir un couple exceptionnel contenant un coefficient impair égal à la moitié de l'autre ou un seul coefficient égal à deux.

Convenons que $\varkappa = 0$ dans le cas *a*. Relativement au complexe bilatère à $n = 4p + 1$ dimensions, sa signification est la suivante : si $\varkappa = 0$, toute $2p$-chaîne (d'ordre fini) est enlacée un nombre entier de fois avec une chaîne homologue ; si $\varkappa \neq 0$, $2^{\varkappa}$ est l'ordre minimum d'une $2p$-chaîne enlacée un nombre non entier de fois avec une chaîne homologue.

Nous devons alors compléter le théorème III (§ **18**) par le suivant :

THÉORÈME I. — *Pour que les tableaux d'enlacement attachés à deux complexes bilatères à $n = 4p + 1$ dimensions, ayant mêmes groupes γ_{2p}, appartiennent à la même classe, il faut et il suffit que le nombre $\varkappa$ soit le même pour les deux.*

Et nous avons aussi le résultat suivant :

THÉORÈME II. — *Pour un tel complexe, sauf l'exception signalée, possible seulement si $\varkappa = 1$, les coefficients de torsion de dimension $2p$ sont deux à deux égaux* (¹).

CHAPITRE III.

VARIÉTÉS. INTÉGRALES MULTIPLES (²).

20. *Champs d'intégration et intégrales.* — Avant d'aborder les intégrales multiples, il est nécessaire de définir avec précision ce qu'on doit entendre par champ d'intégration à q dimensions dans l'espace à n dimensions.

L'ensemble de n fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des q variables $t_1, t_2, \ldots, t_q$, définies dans un polyèdre convexe T de l'espace des t, continues et ayant des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre en tout

(¹) Dans une Note (*Comptes rendus*, t. **186**, 1928, p. 670), où ces résultats sont énoncés, j'ai omis de signaler les circonstances relatives au cas où il y a des éléments de seconde catégorie ; je ne sais d'ailleurs pas si ce cas peut effectivement se présenter.

(²) Quelques-uns des résultats obtenus dans ce chapitre ont été annoncés dans une Note aux *Comptes rendus*, t. **188**, p. 1651.

point de T, représente dans l'espace des x ce que nous appellerons un *q-champ élémentaire* dont T sera dit le *polyèdre représentatif.*

Un *q-champ* quelconque est représenté par la réunion de plusieurs q-champs élémentaires; cette réunion sera indiquée par le signe $+$.

Supposons qu'on puisse établir, entre les polyèdres représentatifs de deux q-champs élémentaires c^q et c'^q, une correspondance biunivoque s'exprimant par des fonctions linéaires, telle que les fonctions qui définissent c^q et c'^q prennent en des points correspondants les mêmes valeurs; si le déterminant de la correspondance est positif, c^q et c'^q sont dits *égaux :* $c^q = c'^q$; s'il est négatif, c^q et c'^q sont *opposés :* $c^q = c'^q$.

Ces notions s'étendent aux champs quelconques. Un q-champ est *nul*, s'il est formé de champs élémentaires deux à deux opposés ou s'il peut être rendu tel en subdivisant ses champs élémentaires.

Frontière. — Soient $T_i (i = 1, 2, \ldots)$ les faces (polyèdres à $q - 1$ dimensions) du polyèdre T relatif au q-champ élémentaire c^q. Par une substitution linéaire à déterminant positif sur $t_1, t_2, \ldots, t_q$, on peut obtenir que T_i soit contenu dans l'hyperplan $t_1 = 0$. En restreignant à T_i les fonctions qui représentent c^q, on obtient un $(q - 1)$-champ élémentaire c_i^{q-1}. Soit $\varepsilon_i = +1$ ou -1 suivant que les points intérieurs de T satisfont à $t_1 < 0$ ou $t_1 > 0$. *La frontière de c^q est alors par définition*

$$c^{q-1} = \sum_i \varepsilon_i c_i^{q-1}.$$

Par là se trouve définie la frontière de tout q-champ; elle en dépend d'une manière linéaire et homogène. On vérifie que la frontière est toujours un champ fermé (c'est-à-dire dont la frontière est nulle).

Il est commode de considérer aussi des o-champs, formés d'un nombre fini de points dont chacun est affecté d'un coefficient entier. Le polyèdre représentatif d'un 1-champ c^1 se réduit à un segment $a < t < b$; la frontière de c^1 se compose des points correspondant à $t = a$ et $t = b$, le premier pris avec le coefficient -1, le second avec $+1$.

Intégrales multiples. — Une expression telle que

$$\omega = \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_q} [dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_q}].$$

où les $A_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et où la sommation s'étend à toutes les combinaisons des n indices 1, 2, ..., n pris q à q, sera appelée ici, pour abréger, *forme de degré* q (¹). C'est un élément d'intégrale q-uple.

Il est commode de considérer aussi les formes de degré 0 : ce sont les fonctions de point. Si $\omega = f(p)$ est une telle forme, et si c^0 est un 0-champ formé des points $p_1, p_2, \ldots, p_r$ pris avec les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, on aura par définition

$$\int_{c^0} \omega = \sum_1^r \lambda_i f(p_i).$$

L'intégrale d'une même forme, étendue à des champs égaux (ou opposés), prend des valeurs égales (ou opposées); elle dépend d'une manière linéaire et homogène du champ d'intégration.

Dérivation extérieure. — Si les coefficients de ω sont des fonctions dérivables, on en déduit une forme de degré $q+1$, ω', sa dérivée (extérieure), par la formule

$$\omega' = \Sigma | dA_{i_1 i_2 \ldots i_q} dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_q} |$$

Pour $q = 0$, cette opération se réduit à la différentiation ordinaire.

Nous dirons qu'une forme est régulière, si ses coefficients sont des fonctions à dérivées premières continues et s'il en est de même pour sa dérivée extérieure. Toutes les formes envisagées seront supposées régulières.

Formule de Stokes généralisée. — Si c^{q+1} est un champ de frontière c^q, on a

$$\int_{c^{q+1}} \omega' = \int_{c^q} \omega.$$

Avec les hypothèses faites ici, la démonstration ne présente aucune difficulté.

(¹) Ces expressions sont appelées, par M. E. Cartan, formes extérieures de différentielles. Pour tout ce qui concerne leurs propriétés et leurs règles de calcul, *voir* E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Chap. VI et VII.

Produit extérieur. — De deux formes de degrés p et q, ω_1 et ω_2, on déduit, si $p+q\leqq n$, une forme de degré $p+q$: $[\omega_1\omega_2]$, appelée le produit (extérieur) de ω_1 et ω_2. Rappelons les formules :

$$[\omega_1\omega_2]=(-1)^{pq}[\omega_2\omega_1],$$
$$[\omega_1\omega_2]'=[\omega'_1\omega_2]+(-1)^p[\omega_1\omega'_2],$$
$$(\omega')'=0.$$

21. *Lemmes.* — On va établir ici quelques lemmes qui seront utilisés plus loin.

LEMME I. — *Un q-champ fermé c^q $(q>0)$ contenu dans l'intervalle I_n*

$$|x_i|<1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

est toujours égal à la frontière d'un $(q+1)$-champ c^{q+1} contenu dans I_n ; si $q=0$, il faut que la somme des coefficients des points qui constituent c^0 soit nulle, ce qui s'exprime par

$$\int_{c^0}1=0.$$

L'énoncé relatif à $q=0$ est immédiat. Soit $q>0$ et supposons le lemme établi pour $n-1$ dimensions (il est évident pour $n=0$). Soit I_{n-1} l'intersection de I_n avec l'hyperplan $x_1=0$. Par projection sur I_{n-1}, il est aisé de construire un $(q+1)$-champ $\bar{c}^{q+1}$ limité par c^q et par la projection, c_1^q, de c^q sur I_{n-1}. c_1^q étant fermé, on peut trouver dans dans I_{n-1} un champ c_1^{q+1} limité par c_1^q. Alors, la frontière du champ $c^{q+1}=\bar{c}^{q+1}-c_1^{q+1}$, contenu dans I_n, est égale à c^q.

Avant de passer au deuxième lemme, il convient de faire quelques remarques.

Désignons par I_n, Σ_n, $\Sigma_r\times I_{n-r}$, $\Sigma_r\times\Sigma_{n-r}$ les domaines définis respectivement par les inégalités suivantes :

$$|x_i|<\alpha \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \quad \text{et} \quad \sum_1^n x_i^2<\rho^2;$$

$$\sum_1^r x_i^2<\rho^2 \quad \text{et} \quad |x_i|<\alpha \qquad (i=r+1, \ldots, n);$$

$$\sum_1^r x_i^2<\rho_1^2 \quad \text{et} \quad \sum_{r+1}^n x_i^2<\rho^2.$$

Pour abréger, nous appellerons du *type de* I_n tout domaine qui peut être mis en correspondance avec l'un des domaines ci-dessus, de telle manière que les coordonnées d'un point soient des fonctions uniformes et à dérivées premières et secondes continues des coordonnées du point correspondant, qu'il soit à l'intérieur ou sur la frontière de son domaine. Cela posé, on va montrer qu'on peut établir une correspondance satisfaisant à ces mêmes conditions entre un domaine quelconque du type de I_n et un domaine Δ tel que :

1° Δ est situé dans le domaine $|x_n| < k$ et contient le cylindre

$$|x_n| < k, \quad \sum_1^{n-1} x_i^2 < \varepsilon^2,$$

k et ε étant deux constantes positives.

2° L'intersection de Δ avec l'hyperplan $x_n = \text{const.}$ est un domaine T_{x_n} du type de I_{n-1}.

I_n et $\Sigma_r \times I_{n-r}$ satisfaisant déjà à ces conditions, examinons le cas de Σ_n. Posons

$$x = +\sqrt{\sum_1^{n-1} x_i^2}$$

et soit $f(x)$ une fonction paire définie pour $|x| < \rho$, ayant dans cet intervalle une dérivée seconde continue et jamais positive, égale à $+\sqrt{\rho^2 - x^2}$ pour $|x| < \frac{2\rho}{3}$ et à une constante $k(\rho)$, son maximum, pour $|x| < \frac{\rho}{3}$. Une telle fonction est aisée à construire. Si, sans changer les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, on multiplie x_n par $\frac{f(x)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$, Σ_n est transformé en un domaine défini par $|x_n| < f(x)$ qui remplit les conditions exigées pour Δ; en effet, d'une part, cette inégalité équivaut pour $|x| < \frac{\rho}{3}$ à $|x_n| < k$, d'autre part, elle peut se mettre sous la forme $x^2 < \varphi(x_n)$, ce qui prouve que T_{x_n} est un Σ_{n-1}.

Le même procédé peut être appliqué à $\Sigma_r \times \Sigma_{n-r}$: on n'a qu'à poser alors

$$x = +\sqrt{\sum_{r+1}^{n-1} x_i^2}.$$

Notre assertion est donc établie.

LEMME II. — *Soit* ω *une forme régulière de degré* p, *nulle hors d'un domaine* $\mathcal{D}$ *du type de* I_n, *telle que* $\omega' = 0$ *si* $p < n$ *et* $\int_{\mathcal{D}} \omega = 0$ *si* $p = n$; *alors on peut trouver une forme régulière de degré* $p - 1$, ϖ *nulle hors de* $\mathcal{D}$, *telle que* $\varpi' = \omega$.

Pour faciliter la démonstration, nous supposerons que ω dépende d'une manière régulière d'un certain nombre de paramètres $t_1, t_2, \ldots$, pour certaines valeurs desquels elle s'annule; ces valeurs seront indiquées par l'inégalité $\psi(t) > 0$; ϖ devra aussi dépendre d'une manière régulière des t, s'annuler pour $\psi(t) > 0$, et l'égalité $\varpi' = \omega$ devra avoir lieu pour toutes les valeurs de ces paramètres.

Pour $n = 1$, on n'a qu'à prendre $\varpi = \int_{-\alpha}^{x_1} \omega$. En effet, ω est une forme de degré 1, $\omega = \varphi(x_1, t)\,dx_1$; φ étant nulle pour $|x_1| > \alpha$ ou $\psi(t) > 0$, il en sera de même de ω puisque $\int_{-1}^{1} \omega = 0$.

Pour passer à n quelconque, supposons le lemme établi pour moins de n variables. D'après ce qui a été dit ci-dessus, on peut supposer que $\mathcal{D}$ se réduit au domaine Δ.

S*oit d'abord* $p = n$. — Posons $\omega = [dx_n \omega_1]$ et

$$\int_{T_{x_n}} \omega_1 = f(x_n), \qquad \int_{-k}^{x_n} f(x_n)\,dx_n = F(x_n);$$

$f(x_n)$ et $F(x_n)$ sont des fonctions régulières de x_n et des t, nulles pour $|x_n| > k$ ou $\psi(t) > 0$, car alors ω s'annule et l'on a

$$\int_{-k}^{k} f(x_n)\,dx_n = \int_{\Delta} \omega = 0.$$

Soit ω_2 une forme régulière de degré $n - 1$, indépendante de x_n

et dx_n, nulle hors du domaine

$$\sum_1^{n-1} x_i^2 < \varepsilon^2$$

et dont l'intégrale étendue à ce domaine vaut 1. La forme de degré $n-1$, $\omega_1 - f(x_n)\omega_2$, où l'on considère x_n comme un paramètre, satisfait aux conditions du lemme pour $(n-1)$ variables, T_{x_n} jouant le rôle de $\mathcal{O}$; de plus elle s'annule pour $\psi(t) > 0$ ou $|x_n| > k$. On peut donc trouver une forme régulière w, nulle hors de T_{x_n} et pour $\psi(t) > 0$ ou $|x_n| > k$, telle que $w' = \omega_1 - f(x_n)\omega_2$ en considérant x_n comme un paramètre.

Considérant x_n comme une variable, on a

$$-[dx_n w]' = [dx_n \omega_1] - [f(x_n)\, dx_n \omega_2] = \omega - [dF\omega_2].$$

La forme $\varpi = [F(x_n)\omega_2] - [dx_n w]$ est régulière, nulle hors de Δ et pour $\psi(t) > 0$, et l'on a $\varpi' = \omega$.

Soit maintenant $p < n$. — Séparant dans ω les termes qui contiennent dx_n, on peut écrire

$$\omega = \omega_1 + [dx_n \omega_2].$$

Si l'on considère x_n comme un paramètre, ω_1 est une forme régulière satisfaisant aux conditions du lemme pour $(n-1)$ variables. En effet, si $p < n-1$, on a bien $\omega'_1 = 0$; si $p = n-1$, soit $T_{x_n} + S$ la frontière de l'un des domaines Δ_1 en lesquels T_{x_n} partage Δ; ω est nulle sur S et l'on a

$$\int_{T_{x_n}} \omega_1 = \int_{T_{x_n}} \omega = \int_{T_{x_n}+S} \omega = \int_{\Delta_1} \omega' = 0.$$

De plus, ω_1 s'annule pour $\psi(t) > 0$ ou $|x_n| > k$. On peut donc trouver une forme régulière ϖ_1, nulle hors de T_{x_n} et pour $|x_n| > k$ ou $\psi(t) > 0$, telle que $\varpi'_1 = \omega_1$ en considérant x_n comme un paramètre.

Considérant x_n comme une variable, on a

$$\varpi'_1 = \omega_1 + \left[dx_n \frac{\partial \varpi_1}{\partial x_n}\right].$$

La forme $\omega - \varpi'_1 = \left[dx_n\left(\omega_2 - \frac{\partial\varpi_1}{\partial x_n}\right)\right]$ a sa dérivée nulle puisque c'est le cas de ω et ϖ'_1. Considérant x_n comme un paramètre, la forme de degré $p-1$, $\omega_2 - \frac{\partial\varpi_1}{\partial x_n}$, a donc sa dérivée nulle et l'on peut trouver une forme ϖ_2, nulle hors de T_{x_n} et pour $\psi(t) > 0$ ou $|x_n| > k$, telle que $\varpi'_2 = \omega_2 - \frac{\partial\varpi_1}{\partial x_n}$.

Considérant x_n comme une variable, on a

$$-[dx_n\varpi_2]' = \left[dx_n\left(\omega_2 - \frac{\partial\varpi_1}{\partial x_n}\right)\right].$$

La forme de degré $p-1$, $\varpi = \varpi_1 - [dx_n\varpi_2]$, est régulière, nulle hors de Δ et pour $\psi(t) > 0$, et l'on a $\varpi' = \omega$. Le lemme est donc établi.

Le troisième lemme fait intervenir d'autres domaines. Nous appellerons *du type* $I_r \times S_{n-r}$ tout domaine qui peut être considéré comme l'ensemble des couples d'un point pris dans un domaine du type de I_r et d'un point pris sur une hypersphère à $(n-r)$ dimensions S_{n-r}. Les couples qui correspondent à un point fixe de S_{n-r} forment un domaine I_r^0 à r dimensions, qu'on peut considérer comme un r-champ.

LEMME III. — *Soit ω une forme régulière de degré p nulle hors d'un domaine $\mathcal{D}$ du type de $I_r \times S_{n-r}$, satisfaisant à $\omega' = 0$, et de plus, si $p = n$ à $\int_{\mathcal{D}} \omega = 0$, si $p = r$ à $\int_{I_r^0} \omega = 0$; on peut trouver une forme régulière de degré $p-1$, ϖ, nulle hors de $\mathcal{D}$, telle que $\varpi' = \omega$.*

Cet énoncé suppose implicitement que $\mathcal{D}$ est contenu dans un espace à n dimensions; nous supposerons, pour fixer les idées, que c'est l'hypercylindre défini par l'équation

$$\sum_1^{n-r+1} y_i^2 = 1$$

dans l'espace à $(n+1)$ dimensions de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_{n-r+1}$, et que $\mathcal{D}$ est le domaine, situé sur cet hypercylindre, défini par les conditions $|x_i| < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. I_r^0 sera alors défini par les conditions

$$y_{n-r+1} = 1, \qquad y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-r} = 0.$$

Si $r = n$, $\mathcal{D}$ se compose de deux domaines du type de I_n, et l'on est ramené au lemme II. Supposons $r < n$, et raisonnons sur $I_r \times S_{n-r}$. Coupons ce domaine par les hyperplans $y_{n-r+1} = \frac{1}{2}$ et $y_{n-r+1} = -\frac{1}{2}$; il est partagé en trois parties; soit D_1 celle où $y_{n-r+1} > \frac{1}{2}$, D_2 celle où $y_{n-r+1} < -\frac{1}{2}$, et J la partie intermédiaire où $|y_{n-r+1}| \leqq \frac{1}{2}$. Il est aisé de voir que chacun des domaines D_1, D_2, $D_1 + J$, $D_2 + J$ est du type de I_n. Par contre, J, qui est défini par les conditions

$$|x_i| \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, r), \qquad |y_{n-r+1}| \leqq \frac{1}{2}, \qquad \sum_1^{n-r+1} y_i^2 = 1,$$

est du type de $I_{r+1} \times S_{n-r-1}$.

Il est aisé de construire une fonction régulière de y_{n-r+1}, $\varphi(y_{n-r+1})$, nulle pour $y_{n-r+1} \leqq -\frac{1}{2}$ et égale à 1 pour $y_{n-r+1} \geqq \frac{1}{2}$. La forme $\varphi\omega$ est alors nulle hors de $D_1 + J$ et égale à ω dans D_1.

a. Cas de $p = n$. — Soit ω_1 une forme régulière de degré n, nulle hors de J, et telle que

$$\int_J \omega_1 = \int_{D_1 + J} \varphi\omega.$$

La forme $\varphi\omega - \omega_1$ satisfaisant aux conditions du lemme II pour le domaine $D_1 + J$, on peut trouver ϖ_1 nulle hors de $D_1 + J$, telle que

$$\varpi'_1 = \varphi\omega - \omega_1.$$

La forme $\omega - \varpi'_1$ satisfait aux conditions du lemme II pour le domaine $D_2 + J$; en effet, elle s'annule hors de $D_2 + J$, puisque hors de $\mathcal{D}$ $\omega = 0$ et $\varpi_1 = 0$ et dans D_1 $\varpi'_1 = \omega$; de plus,

$$\int_{D_2 + J} \omega - \varpi'_1 = \int_{\mathcal{D}} \omega - \varpi'_1 = \int_{\mathcal{D}} \omega = 0.$$

On peut donc trouver ϖ_2 nulle hors de $D_2 + J$ et telle que $\varpi'_2 = \omega - \varpi'_1$.

La forme $\varpi = \varpi_1 + \varpi_2$ répond alors aux conditions désirées.

b. Cas de $p < n$. — Le lemme étant vrai pour les domaines $I_\rho \times S_{n-\rho}$ si $\rho = n$, supposons-le établi pour $\rho > r$.

On a

$$[\varphi\omega]' = [d\varphi\omega].$$

Nous montrerons que la forme $[d\varphi\omega]$, de degré $p+1$, satisfait aux conditions du lemme III pour le domaine J. Cela supposé fait, on peut trouver ω_1 nulle hors de J telle que $\omega'_1 = [d\varphi\omega]$. La forme $\varphi\omega - \omega_1$ satisfait aux conditions du lemme II pour le domaine $D_1 + J$, et l'on peut trouver ϖ_1 nulle hors de $D_1 + J$ telle que $\varpi'_1 = \varphi\omega - \omega_1$. La forme $\omega - \varpi'_1$ satisfait aux conditions du lemme II pour le domaine $D_2 + J$, et l'on peut trouver ϖ_2 nulle hors de $D_2 + J$ telle que $\varpi'_2 = \omega - \varpi'_1$. La forme $\varpi = \varpi_1 + \varpi_2$ répond alors aux conditions désirées.

Il reste ainsi uniquement à montrer que $[d\varphi\omega]$ satisfait aux conditions du lemme III pour le domaine J. Cette forme est bien nulle hors de J, puisque $\omega = 0$ hors de $\mathcal{D}$ et $d\varphi = 0$ dans D_1 et dans D_2; sa dérivée extérieure est nulle. Ces conditions suffisent si son degré, $p+1$, est différent de n et de $r+1$.

Si $p+1 = n$, il faut de plus que $\int_J d\varphi\omega = 0$. Soit $T_{y_{n-r+1}}$ l'intersection de J avec l'hyperplan $y_{n-r+1} = \text{const}$. On a

$$\int_J [d\varphi\omega] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-r+1}}\right) dy_{n-r+1} \int_{T_{y_{n-r+1}}} \omega.$$

Or, $\int_{T_{y_{n-r+1}}} \omega = 0$, car, en désignant par $T_{y_{n-r+1}} + S$ la frontière de l'un des domaines Δ en lesquels $T_{y_{n-r+1}}$ partage $\mathcal{D}$, ω s'annule sur S et l'on a

$$\int_{T_{y_{n-r+1}}} \omega = \int_{T_{y_{n-r+1}}+S} \omega = \int_\Delta \omega' = 0.$$

Si $p+1 = r+1$, il faut que

$$\int_{I^0_{r+1}} [d\varphi\omega] = 0.$$

On peut définir I^0_{r+1} par les conditions

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-r-1} = 0; \qquad y_{n-r} = +\sqrt{1 - y^2_{n-r+1}}.$$

et

$$|x_i| \leqq 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, r), \qquad |y_{n-r+1}| < \frac{1}{2}.$$

Soit $\mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}$ le domaine à r dimensions défini par les mêmes conditions que I''_{r+1}, sauf que l'inégalité $|y_{n-r+1}| < \frac{1}{2}$ est remplacée par l'égalité $y_{n-r+1} = \text{const.}$ Lorsque y_{n-r+1} varie de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$, $\mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}$ balaie I''_{r+1}, et l'on a

$$\int_{I''_{r+1}} [d\varphi\omega] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-r+1}}\right) dy_{n-r+1} \int_{\mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}} \omega.$$

Or $\int_{\mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}} \omega = 0$. En effet, soit Δ_1 le domaine balayé par $\mathfrak{U}_\tau$ lorsque τ varie de y_{n-r+1} à 1; Δ_1 est limité par $\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}$ et une portion où $\omega = 0$; on a donc

$$\int_{\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}} \omega = \int_{\Delta_1} \omega' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \int_{\mathfrak{U}_{y_{n-r+1}}} \omega = \int_{\mathfrak{U}_1} \omega$$

et cette dernière intégrale est nulle par hypothèse, car $\mathfrak{U}_1$ n'est pas autre chose que I''_r.

22. *Variétés closes à n dimensions.* — Nous supposerons qu'une variété à n dimensions, V, jouit de la propriété suivante, qu'on pourra prendre comme définition.

V peut être complètement recouverte par un nombre fini de domaines $v_1, v_2, \ldots$; dans chacun de ces domaines v_i, les points sont repérés au moyen de n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui mettent v_i en correspondance biunivoque avec l'intervalle I_n; dans la portion commune à deux de ces domaines v_i et v_j, on passe des coordonnées de l'un des systèmes à celles de l'autre par des fonctions qui ont des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre.

Les définitions des champs et des formes régulières, données pour l'espace à n dimensions, s'étendent immédiatement à une variété telle que V.

Un q-champ c^q est dit homologue à zéro (dans V), s'il existe un $(q+1)$-champ c^{q+1} ayant pour frontière c^q, et l'on écrit

$$c^{q+1} \equiv c^q \qquad \text{et} \qquad c^q \sim 0.$$

Une forme régulière de degré p, ω, sera dite *fermée*, si sa dérivée extérieure est nulle : $\omega' = 0$. On dira encore que ω est *homologue à zéro*, $\omega \sim 0$, s'il existe une forme régulière ϖ telle que $\varpi' = \omega$.

La formule de Stokes montre que *l'intégrale d'une forme homologue à zéro étendue à un champ fermé est nulle*, et que *l'intégrale d'une forme fermée étendue à un champ homologue à zéro est nulle.*

Le but des paragraphes qui suivent est d'établir les réciproques de ces théorèmes. Il sera nécessaire pour cela de faire une hypothèse supplémentaire sur V.

23. *Subdivision polyédrale.* — Disons qu'un champ élémentaire c^q, dans la variété V, est *régulier*, si l'on peut trouver un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, valable dans un domaine contenant c^q, et tel que c^q soit représenté par les fonctions $x_i = t_i$ $(1 \leqq i \leqq q)$, $x_i = 0$ $(q < i \leqq n)$. La frontière d'un q-champ régulier se compose évidemment de $(q-1)$-champs élémentaires réguliers.

Une *subdivision polyédrale* de V est un système d'un nombre fini de champs élémentaires réguliers, tel que la frontière de tout champ du système soit formée avec des champs du système, et tel que tout point de V soit à l'intérieur d'un champ du système et d'un seul. Soient a_1^q, a_2^q, ... ces q-champs élémentaires $(q = 0, 1, \ldots, n)$. La structure de la subdivision polyédrale est représentée par un complexe dont les éléments sont les a_i^q. La frontière de a_i^q est en effet une combinaison des a_i^{q-1}, et chacune des conditions I, II et III du paragraphe **1** est vérifiée.

Nous admettons encore que, pour tout élément a_i^q, on peut trouver un système de coordonnées, soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, valable dans un domaine contenant le domaine Δ rempli par les n-champs qui ont a_i sur leur frontière, ayant son origine en un point de a_i^q, et tel que la ligne représentée par les équations

$$(1) \qquad x_1 = a_1 t, \qquad x_2 = a_2 t, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n t,$$

les a étant des constantes et t un paramètre positif, ne coupe la frontière de Δ qu'en un seul point.

On peut alors établir la proposition suivante : *Soit $\mathcal{D}$ un domaine intérieur à Δ; on peut construire un domaine du type de I_n, intérieur à Δ et contenant $\mathcal{D}$.* En effet, soit r la distance à l'origine du point où la ligne (1) coupe la frontière de Δ; r est fonction uniforme et continue de $a_1, a_2, \ldots, a_n$; on peut trouver une fonction positive ρ des a, inférieure à r, continue et à dérivées continues jusqu'au second ordre, telle que le domaine $\Sigma x_i^2 < \rho^2$ (qui est du type de I_n) satisfasse aux conditions désirées.

Dans la suite, on admettra toujours que la variété considérée admet une subdivision polyédrale, sans chercher à remplacer cette hypothèse par une autre d'apparence plus générale.

24. *Formes élémentaires.* — Soient A le complexe d'éléments a_i^q défini par une subdivision polyédrale de la variété V, et B le complexe réciproque de A, l'élément b_i^{n-q} correspondant toujours à a_i^q. On va construire, dans V, un système de domaines $\mathcal{D}(b_i^q)$ en correspondance biunivoque avec les éléments de B et jouissant des propriétés suivantes :

1° Chacun de ces domaines est du type de I_n.

2° $\mathcal{D}(b_i^q)$ est à l'intérieur du domaine Δ rempli par les n-champs élémentaires qui ont a_i^{n-q} sur leur frontière.

3° Si b_j^{q-1} est sur la frontière de b_i^q, $\mathcal{D}(b_j^{q-1})$ est à l'intérieur de $\mathcal{D}(b_i^q)$.

La construction des $\mathcal{D}(b_i^0)$ ne présente aucune difficulté : on n'a qu'à prendre un domaine du type de I_n à l'intérieur de a_i^n. Supposons construits les domaines $\mathcal{D}(b_j^p)$ pour $p < q$ et passons à $\mathcal{D}(b_i^q)$. L'ensemble des $\mathcal{D}(b_j^{q-1})$ tels que b_j^{q-1} soit sur la frontière de b_i^q forme un domaine $\mathcal{D}$ intérieur à Δ; en effet, $\mathcal{D}(b_j^{q-1})$ est par hypothèse intérieur au domaine Δ' rempli par les n-champs qui ont a_j^{n-q+1} sur leur frontière, et si b_j^{q-1} est sur la frontière de b_i^q, a_i^{n-q} est sur celle de a_j^{n-q+1} et Δ' fait partie de Δ. Nous savons alors construire un domaine, du type de I_n, contenu dans Δ et contenant $\mathcal{D}$ (§ **23**), qu'on pourra prendre pour $\mathcal{D}(b_i^q)$.

Au moyen de ces domaines, on va construire, dans V, un système de formes régulières, $\omega(b_i^q)$, en correspondance biunivoque avec les éléments de B, et jouissant des propriétés suivantes :

1° $\omega(b_i^q)$ est une forme de degré $(n-q)$, nulle hors de $\mathcal{D}(b_i^q)$.

2° Si

$$\sum_i x_i b_i^q \equiv \sum_i y_i b_i^{q-1},$$

on a

$$\sum_i x_i \omega'(b_i^q) = \sum_i y_i \omega(b_i^{q-1}).$$

3°
$$\int_{a_i^q} \omega(b_k^{n-q}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Tout d'abord, la construction des formes de degré n ne présente aucune difficulté : il est aisé de construire $\omega(b_i^0)$ régulière et nulle hors de $\mathcal{D}(b_i^0)$ telle que

$$\int_{\mathcal{D}(b_i^0)} \omega(b_i^0) = 1.$$

$\mathcal{D}(b_i^0)$ étant contenu dans a_i^n, l'intégrale ne change pas si on l'étend à a_i^n, et les trois conditions sont remplies.

Supposons construites les formes de degré supérieur à $n-q$, et passons à celles de degré $n-q$.

Soit $\sum_j z_j b_j^{q-1}$ la frontière de b_i^q, et considérons la forme de degré $n-q+1$, $\sum_j z_j \omega(b_j^{q-1})$. Elle satisfait aux conditions du lemme II (§ **21**) pour le domaine $\mathcal{D}(b_i^q)$; en effet, elle est nulle hors de $\mathcal{D}(b_i^q)$, puisque chacune des formes qui la composent est nulle hors d'un domaine contenu dans $\mathcal{D}(b_i^q)$; sa dérivée extérieure est nulle en vertu de 2°, car la frontière de b_i^q est fermée. Cela suffit si $n-q+1 < n$. Si $n-q+1 = n$, ou $q=1$, il faut de plus que son intégrale étendue à $\mathcal{D}(b_i^1)$ soit nulle. Soit $b_i^1 \equiv \varepsilon b_j^0 + \varepsilon' b_k^0$; notre forme se réduit à $\varepsilon\omega(b_j^0) + \varepsilon'\omega(b_k^0)$ et $\mathcal{D}(b_i^1)$ est intérieur à l'ensemble de a_i^n et a_k^n. On pourra donc remplacer, dans l'intégrale, $\mathcal{D}(b_i^1)$ par un champ tel que $\pm a_j^n \pm a_k^n$, en choisissant les signes de manière que a_i^{n-1} ne figure pas dans sa frontière. Or, puisque $b_i^1 \equiv \varepsilon b_j^n + \varepsilon' b_k^n$, a_i^{n-1} figure avec le signe ε dans la frontière de a_j^n et avec le signe ε' dans celle de a_k^n. On peut alors prendre le champ $\varepsilon a_j^n - \varepsilon' a_k^n$, et l'intégrale devient

$$\int_{\varepsilon a_j^n - \varepsilon' a_k^n} \varepsilon \omega(b_j^n) + \varepsilon' \omega(b_k^n) = \varepsilon^2 \int_{a_j^n} \omega(b_j^n) - \varepsilon'^2 \int_{a_k^n} \omega(b_k^n);$$

et comme $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$, elle est bien nulle.

Appliquant le lemme II (§ **21**), on obtient une forme $\omega(b_i^q)$, régulière, nulle hors de $\mathcal{O}(b_i^q)$, et telle que

$$\omega'(b_i^q) = \sum_j \varepsilon_j \omega(b_j^{q-1}).$$

Ces formes $\omega(b_i^q)$ satisfont, par construction, aux conditions 1° et 2°. La première partie de 3° résulte de 1°. Pour vérifier la seconde partie, prenons un élément a_h^{n-q+1} en relation positive avec a_i^{n-q}; on aura

$$a_h^{n-q+1} \equiv a_i^{n-q} + c^{n-q},$$

c^{n-q} ne contenant pas a_i^{n-q}.

b_h^{q-1} sera en relation positive avec b_i^q et l'on aura

$$\omega'(b_i^q) = \omega(b_h^{q-1}) + \omega_1,$$

ω_1 étant nulle sur a_h^{n-q+1}. La formule de Stokes donne

$$\int_{a_i^{n-q} + c^{n-q}} \omega(b_i^q) = \int_{a_h^{n-q+1}} \omega'(b_i^q).$$

Comme ω_1 s'annule sur a_h^{n-q+1}, le second membre se réduit à $\int_{a_h^{n-q+1}} \omega(b_h^{q-1})$, c'est-à-dire 1. Comme $\omega(b_i^q)$ est nulle sur c^{n-q}, le premier membre se réduit à $\int_{a_i^{n-q}} \omega(b_i^{n-q})$. La condition 3° est bien remplie.

23. *Deux théorèmes.* — L'emploi des formes élémentaires et de la subdivision polyédrale pour l'étude des propriétés générales de V repose sur deux théorèmes qui seront établis ici. Ils permettront, dans certaines conditions, de remplacer une forme quelconque par une combinaison des formes élémentaires et un q-champ quelconque par une combinaison des a_i^q.

Théorème I. — *Toute forme fermée régulière est homologue à une combinaison linéaire à coefficients constants des formes élémentaires.*

La démonstration comprend deux parties : réduction à un théorème auxiliaire, et démonstration de ce théorème auxiliaire.

Théorème auxiliaire. — *Soit ω une forme régulière de degré p nulle dans un domaine contenant les éléments de A de dimension inférieure à q, et dont la dérivée ω' est nulle dans un domaine contenant a_i^q ; on peut construire une forme ϖ, régulière, de degré $p-1$, nulle dans un domaine contenant tous les éléments de A qui n'ont pas a_i^q sur leur frontière, et telle que l'on ait dans un domaine contenant a_i^q :*

$$\text{si } p \neq q, \quad \varpi' = \omega; \qquad \text{si } p = q, \quad \varpi' = \omega - k\omega(b_i^{n-q}),$$

k étant une constante.

a. Réduction au théorème auxiliaire. — Soit donc ω une forme fermée de degré p. D'après le théorème auxiliaire, on peut construire une forme ϖ telle que $\varpi' = \omega$ dans un domaine contenant a_1^0. Cela revient à dire que ω est homologue à une forme $(\omega - \varpi')$ nulle dans un domaine contenant a_1^0.

Supposons démontré que ω est homologue à une forme ω_1 nulle dans un domaine contenant les éléments de dimension inférieure à q et les $(i-1)$ premiers éléments de dimension q : $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_{i-1}^q$, et montrons qu'elle est homologue à une forme nulle dans un domaine contenant en plus a_i^q, en supposant $q \neq p$. En vertu du théorème auxiliaire, on peut construire une forme ϖ_1 nulle dans un domaine contenant en particulier les éléments de dimension inférieure à q et $a_1^q, \ldots, a_{i-1}^q$, telle que $\varpi_1' = \omega_1$ dans un domaine contenant a_i^q. On a donc

$$\omega \sim \omega_1 \sim \omega_1 - \varpi_1',$$

la dernière forme s'annulant bien dans un domaine qui contient les éléments de dimension inférieure à q et les i premiers de dimension q.

On tire de là deux conclusions :

1° ω est homologue à une forme nulle dans un domaine contenant les éléments de dimension inférieure à p.

2° Si ω est nulle dans un domaine contenant les éléments de dimension p, elle est homologue à zéro.

Partant de 1°, supposons ω elle-même nulle sur les éléments de dimension inférieure à p. D'après le théorème auxiliaire, on peut trouver une forme régulière ϖ_i et une constante k_i telles que l'on ait

$$\varpi_i' = \omega - k_i\omega(b_i^{n-p}) \tag{1}$$

dans un domaine contenant a_i^q.

On aura, en conséquence,

$$\Sigma\varpi_i' = \omega - \Sigma k_i\omega(a_i^{n-p}) \tag{2}$$

dans un domaine contenant tous les éléments de A de dimension p. En effet, dans un domaine convenable contenant a_i^q, (2) se réduit à (1), puisque les ϖ_k et $\omega(b_k^{n-q})$ s'annulent dans ce domaine si $i \neq k$.

Montrons que $\Sigma k_i\omega(b_i^{n-p})$ est fermée. Comme c'est une combinaison des formes élémentaires, il suffit de montrer que son intégrale est nulle lorsqu'on l'étend à la frontière de n'importe quel élément de A à $(p+1)$ dimensions (¹); sur tel champ, (2) a lieu; les intégrales du premier membre et de ω sont nulles, parce que ce sont des formes fermées et que le champ est homologue à zéro; l'intégrale de $\Sigma k_i\omega(b_i^{n-p})$ sera donc nulle aussi.

La forme $\omega - \Sigma k_i\omega(b_i^{n-p})$ est donc fermée, elle est nulle dans un domaine contenant les éléments de dimension p; d'après 2°, elle est homologue à zéro :

$$\omega \sim \Sigma k_i\omega(b_i^{n-q}).$$

b. Démonstration du théorème auxiliaire. — Prenons, pour repérer les points d'un domaine contenant a_i^q, des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que a_i^q soit contenu dans l'hyperplan P_q :

$$x_{q+1} = x_{q-2} = \ldots = x_n = 0.$$

(¹) Car ces intégrales sont égales aux coefficients l_j de la dérivée extérieure, $\Sigma l_j\omega(b_j^{n-p+1})$, de $\Sigma k_i\omega(b_i^{n-p})$.

Soit, dans l'espace des x, C le cylindre engendré par les hyperplans à $n-q$ dimensions perpendiculaires à P_q et passant par un point de la frontière de a_i^q.

D'après la définition des q-champs élémentaires réguliers tels que a_i^q (§ 23), il est aisé de trouver q fonction $y_1, y_2, \ldots, y_q$ de $x_1, x_2, \ldots, x_q$, à dérivées premières continues et à jacobien non nul *à l'intérieur* de a_i^q, qui représentent a_i^q sur la sphère

$$\sum_1^q y_i^2 \leqq 1.$$

Comme ω s'annule dans un domaine contenant la frontière de a_i^q, on peut trouver deux nombres positifs, ε et ε_1, assez petits pour que ω soit nulle dans le domaine défini par

$$1-\varepsilon \leqq r \leqq 1, \qquad \rho \leqq \varepsilon_1,$$

en posant

$$r^2 = \sum_1^q y_i^2 \qquad \text{et} \qquad \rho^2 = \sum_{q+1}^n x_i^2 :$$

ce domaine tend en effet vers la frontière de a_i^q lorsque ε et ε_1 tendent vers zéro. On peut encore supposer ε et ε_1 assez petits pour que le domaine D_1, défini par $r \leqq 1-\varepsilon$ et $\rho \leqq \varepsilon_1$, contienne tous les points de a_i^q intérieurs à $\mathcal{D}(b_i^{n-q})$ et ne contienne aucun point des domaines $\mathcal{D}(b_h^l)$ tels que a_h^{n-l} n'a pas a_i^q sur sa frontière; en effet, la frontière de a_i^q est extérieure à $\mathcal{D}(b_i^{n-q})$ et a_i^q est à l'extérieur des $\mathcal{D}(b_h^l)$ considérés.

Soient ε_2 un nombre positif inférieur à ε_1 et D_2 le domaine qui se déduit de D_1 en substituant ε_2 à ε_1.

La frontière de D_1 se compose de deux parties adjacentes :

$$F_1 : \quad r = 1-\varepsilon, \quad \rho \leqq \varepsilon_1, \qquad \text{et} \qquad \Phi_1 : \quad r \leqq 1-\varepsilon, \quad \rho = \varepsilon_1.$$

La frontière de D_2 se compose de deux parties analogues, F_2 et Φ_2. F_2 est située sur F_1, Φ_2 est à l'intérieur de D_1. ω s'annule sur F_1.

Cela posé, pour établir le théorème auxiliaire, il suffira de *construire une forme régulière ϖ, nulle hors de* D_1 *et telle que l'on ait dans* D_2 :

$$\varpi' = \omega \qquad \text{si } p \neq q$$

et

$$\varpi' = \omega - k\omega(b_i^{n-q}) \qquad \text{si } p = q.$$

En effet, cette égalité aura bien lieu dans un domaine contenant a_i^q, puisque la portion de a_i^q extérieure à D_2 peut être enfermée dans un domaine où $\varpi = \omega = 0$ [et $\omega(b_i^{n-q}) = 0$ si $p = q$].

Liquidons tout d'abord *le cas de* $q = n$. Alors, ρ n'a plus de signification, D_2 est identique à D_1, qui est un domaine du type de I_n, intérieur à a_i^n et contenant $\mathcal{O}(b_i^n)$. D'après le lemme II (§ **21**), on peut trouver une forme ϖ nulle hors de D_1 et telle que l'on ait dans D_1

$$\varpi' = \omega \quad \text{si } p < n \qquad \text{et} \qquad \varpi' = \omega - k\omega(b_i^0) \quad \text{si } p = n,$$

en posant $k = \int_{a_i^n} \omega$.

Supposons maintenant que $q < n$.

Le domaine $D = D_1 - D_2$, défini par

$$r \leqq 1 - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 \leqq \rho \leqq \varepsilon_1.$$

est du type $I_{q-1} \times S_{n-q-1}$. Le champ I_{q+1}^0 peut être défini par

$$r \leqq 1 - \varepsilon. \qquad \varepsilon_2 \leqq \rho \leqq \varepsilon_1. \qquad x_{q+1} = x_{q+2} = \ldots = x_{n-1} = 0. \qquad x_n = \rho.$$

D est limité par Φ_1, Φ_2 et $F_1 - F_2$.

Soit $\varphi(\rho)$ une fonction régulière de ρ, nulle pour $\rho > \varepsilon_1$ et égale à 1 pour $\rho < \varepsilon_2$. La forme $[\varphi\omega]$ s'annule hors de D_1, car sur F_1 $\omega = 0$ et sur Φ_2 $\varphi = 0$. La forme $[\varphi\omega]' = [d\varphi\omega]$ s'annule en plus dans D_2 où $d\varphi = 0$; elle est donc nulle hors de D, et sa dérivée extérieure est nulle. D'après le lemme III (§ **21**), cela suffit pour que l'on puisse trouver une forme régulière ω_1, nulle hors de D, telle que $\omega_1' = [d\varphi\omega]$, lorsque le degré, $p+1$, de $[d\varphi\omega]$ est différent de $q+1$ et de n.

Si $p+1 = n$, il faut que la condition supplémentaire $\int_D [d\varphi\omega] = 0$ soit vérifiée. Soit T_ρ l'intersection de D avec l'hypersurface $\rho = \text{const}$. On a

$$\int_D [d\varphi\omega] = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right) d\rho \int_{T_\rho} \omega.$$

Or $\int_{T_\rho} \omega = 0$, car si Δ est la portion de D_1 limitée par T_ρ et Φ_1

(définie par $r \leqq 1 - \varepsilon$, $\rho \leqq$ const.), ω s'annulant sur Φ_1, on a

$$\int_{T_\rho} \omega = \int_{\Delta} \omega' = 0.$$

La condition supplémentaire est bien vérifiée.

La forme $[\varphi\omega] - \omega_1$ est nulle hors de D_1, égale à ω dans D_2, et sa dérivée est nulle. D'après le lemme II (§ **21**), on peut trouver une forme régulière ϖ, nulle hors de D_1, telle que $\varpi' = [\varphi\omega] - \omega_1$. Le théorème auxiliaire est donc établi pour $p \neq q$.

Supposons maintenant $p = q$.

Soit t_{x_n} le champ défini par

$$r \leqq 1 - \varepsilon, \qquad x_{q+1} = \ldots = x_{n-1} = 0, \qquad x_n = \text{const.}$$

t_0 se réduit à l'intersection de D_1 avec a_i^q, de sorte que

$$\int_{t_0} \omega(b_i^{n-q}) = \int_{a_i^q} \omega(b_i^{n-q}) = 1,$$

car $\omega(b_i^{n-q})$ s'annule dans la partie de a_i^q extérieure à t_0. On voit d'ailleurs que $\int_{t_{x_n}} \omega(b_i^{n-q})$ ne dépend pas de x_n pour $x_n < \varepsilon_1$, car le champ balayé par t_{x_n} lorsque x_n part de 0 est limité par $t_{x_n} - t_0$ et une partie où $\omega(b_i^{n-q})$ est nulle, et $\omega(b_i^{n-q})$ a sa dérivée nulle dans D_1. Pour les mêmes raisons, $\int_{t_{x_n}} \omega$ ne dépend pas de x_n. En posant $\int_{t_0} \omega = k$, on aura donc

$$\int_{t_{x_n}} \omega - k\,\omega(b_i^{n-q}) = 0.$$

Considérons la forme $[\varphi;\omega - k\omega(b_i^{n-q});]$. Sa dérivée,

$$[d\varphi;\omega - k\omega(b_i^{n-q});],$$

est une forme de degré $p+1 = q+1$, nulle hors de D, et dont la dérivée est nulle. D'ailleurs

$$\int_{\mathrm{I}^n_{q-1}} [d\varphi;\omega - k\omega(b_i^{n-q});] = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right) d\rho \int_{t_\rho} \omega - k\omega(b_i^{n-q}) = 0$$

en vertu de l'égalité précédente et parce que, quand x_n varie de ε_2 à ε_1, t_{x_n} balaie I^0_{q+1}.

D'après le lemme III (§ **21**), on peut trouver (¹) une forme ω_1, nulle hors de D, telle que

$$\omega'_1 = [d\varphi\{\omega - k\omega(b_i^{n-q})\}].$$

La forme $[\varphi\{\omega - k\omega(b_i^{n-q})\}] - \omega_1$ est nulle hors de D_1, égale à $\omega - k\omega(b_i^{n-q})$ dans D_2, et sa dérivée est nulle. D'après le lemme II (§ **21**) on peut trouver une forme ϖ nulle hors de D_1 et telle que

$$\varpi' = [\varphi\{\omega - k\omega(b_i^{n-q})\}].$$

Le théorème auxiliaire est complètement établi.

Théorème II. — *Tout champ fermé est homologue à une combinaison des champs élémentaires.*

Ce théorème pourrait être établi par une marche analogue à celle suivie pour le théorème I, en utilisant, outre le lemme I (§ **21**), un lemme analogue au lemme III (§ **21**). Mais il a déjà été établi, d'une autre manière, par M. J. W. Alexander (²); il est vrai que l'illustre auteur se base sur des définitions un peu différentes des nôtres, en ce qu'il n'introduit aucune condition de dérivabilité; mais le raisonnement subsiste sans aucune modification si l'on introduit ces conditions.

26. *Théorèmes généraux* (³). — On appelle *périodes* d'une forme fermée les valeurs de son intégrale étendue à des champs fermés.

Théorème I. — *Une forme fermée dont toutes les périodes sont nulles est homologue à zéro.*

D'après le théorème I (§ **25**), une telle forme est homologue à une combinaison des formes élémentaires, $\Sigma y_i\omega(b_i^{n-q})$, qui sera évidem-

(¹) Si $p+1=n=q+1$, il y a une seconde condition supplémentaire, qui est celle qui a été vérifiée plus haut.

(²) J. W. Alexander, *A Proof of the invariance of certain constants of Analysis situs* (*Trans. of the am. math. Soc.*, 1915, p. 148).

(³) *Voir* les Mémoires de M. E. Cartan cités dans l'Introduction.

ment fermée, et que nous désignerons par $\omega(d^{n-q})$ en posant $d^{n-q} = \Sigma y_i b_i^{n-q}. \omega(d^{n-q})$ a toutes ses périodes nulles, et il suffit de montrer qu'elle est homologue à zéro. Or on va voir que c'est la dérivée extérieure d'une combinaison des formes élémentaires, ou, ce qui revient au même, que la chaîne d^{n-q} est homologue à zéro dans le complexe B. En effet, si elle ne l'était pas, on pourrait, en vertu du théorème de Poincaré du paragraphe **16**, trouver une chaîne fermée de A, $c^q = \Sigma x_i a_i^q$, telle que $\Sigma x_i y_i \neq 0$; on en déduit

$$\int_{c^q} \omega(d^{n-q}) \neq 0$$

et notre forme aurait une période non nulle, contre l'hypothèse.

Théorème II. — *Étant donnés* P *champs d'intégration fermés, à* q *dimensions, entre lesquels n'existe aucune homologie, on peut trouver une forme fermée de degré* q, *prenant, intégrée sur ces* P *champs,* P *valeurs données à l'avance.*

D'après le théorème II (§ **25**) et d'après le paragraphe **14**, les champs donnés sont homologues avec division à des combinaisons des champs $A^q_{t_q + t_{q-1} + i}$ $(i = 1, 2, \ldots, P_q)$. Supposons donc que le $k^{\text{ième}}$ champ considéré soit

$$\sum_i e_{k,i} A^q_{t_q + t_{q-1} + i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, P). \tag{1}$$

Désignons par $\omega(B^{n-q}_{t_q + t_{q-1} + i})$ la combinaison des formes élémentaires qui se déduit de $B^{t_q + t_{q-1} + i}_{n-q}$. C'est une forme fermée, qui, intégrée sur $A^q_{t_q + t_{q-1} + k}$, prend la valeur 1 si $i = k$, 0 si $i \neq k$ (§ **15** et **16**). Cela posé, si l'on cherche à déterminer les nombres x_j de manière que la forme

$$\Sigma x_j \omega(B^{n-q}_{t_q - t_{q-1} - j})$$

prenne, intégrée sur les champs (1), les valeurs données $l_1, l_2, \ldots, l_P$, on est conduit au système

$$\sum_i e_{k,i} x_i = l_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, P).$$

Ce système est toujours possible, car, les champs (1) n'étant liés par aucune homologie (dans V et *a fortiori* dans A), le rang du tableau $\|e_{k,i}\|$ est égal à P.

La condition que les champs donnés ne sont liés par aucune homologie est évidemment nécessaire. De là résulte que les P_q champs $A^q_{l_q+l_{q-1}+i}$ ne sont liés par aucune homologie (dans V), et P_q est le nombre maximum de tels champs. On peut faire une remarque analogue sur les $\omega(B^{n-q}_{l_q+l_{q-1}+i})$. D'où :

THÉORÈME III. — *Si* P_q *est le* $q^{\text{ième}}$ *nombre de Betti du complexe* A, P'_q *le nombre maximum de* q*-champs fermés de* V *liés par aucune homologie* (dans V), P''_q *le nombre analogue relatif aux formes fermées de degré* q, *on a*

$$P_q = P'_q = P''_q.$$

27. *Produits extérieurs et intersections.* — De deux formes fermées de degrés p et q, ω_1 et ω_2, on déduit, si $p+q \leqq n$, une forme fermée de degré $p+q$, leur produit extérieur $[\omega_1\,\omega_2]$. Si l'un des facteurs est homologue à zéro, le produit l'est aussi. Il est alors naturel de se poser le problème suivant : *Calculer les périodes de* $[\omega_1\,\omega_2]$, *connaissant celles de* ω_1 *et* ω_2.

Sans changer les périodes d'un produit ni des facteurs, on peut remplacer ceux-ci par des combinaisons des formes élémentaires, $\omega(c^{n-p})$ et $\omega(c^{n-q})$, correspondant aux chaînes c^{n-p} et c^{n-q} de B(1). *Nous supposerons* qu'on peut les choisir de manière que c^{n-p} et c^{n-q} n'aient en commun que des éléments de dimension $n-p-q$ au plus.

Remarquons ici que le complexe A est régulier; en effet, si l'on cherche à établir cela par récurrence, on est ramené à prouver que les frontières d'éléments et les asters de A jouissent de la propriété 1° du paragraphe 4; or cela résulte, comme on sait, de ce que ces complexes correspondent à des subdivisions polyédrales d'hypersphères. B sera donc aussi régulier. Si V est d'un seul tenant, A et B sont connexes. Si V est bilatère, il en est de même de A et B; si V est unilatère, A est unilatère de première espèce et B de seconde espèce.

(1) Ce ne sont plus nécessairement des chaînes entières : les coefficients peuvent être des nombres réels quelconques.

Ces remarques faites, les deux chaînes c^{n-p} et c^{n-q} ont une intersection bien déterminée $c^{n-q}.c^{n-p}$ (les définitions du paragraphe **10** s'étendent d'elles-mêmes au cas des chaînes non entières), et le problème posé sera complètement résolu par le théorème suivant.

Théorème :

$$[\omega(c^{n-p})\,\omega(c^{n-q})] \sim \omega(c^{n-q}.c^{n-p}).$$

Lemme. — *L'intégrale*

$$H = \int_{a_k^{p+q}} [\omega(c^{n-p})\,\omega(c^{n-q})]$$

est égale au nombre de fois que b_k^{n-p-q} figure dans $c^{n-q}.c^{n-p}$.

Ce lemme admis, le théorème est immédiat : les intégrales des deux formes qui figurent dans son énoncé auront la même valeur pour les champs d'intégration formés d'éléments de la subdivision, elles auront donc mêmes périodes et seront homologues.

Démonstration du lemme. — Il n'est pas nécessaire que c^{n-q} et c^{n-p} soient fermées; nous supposerons seulement, dans l'énoncé du lemme, que b_k^{n-p-q} ne figure pas dans la frontière de c^{n-q} ou c^{n-p} et n'est pas sur la frontière d'un élément commun à c^{n-q} et c^{n-p}. Soit λ le nombre de fois que b_k^{n-p-q} figure dans $c^{n-q}.c^{n-p}$; il s'agit de prouver que

$$H = \lambda. \tag{1}$$

Dans le cas où b_k^{n-p-q} ne figure pas dans c^{n-p} (ou c^{n-q}), (1) est évident, car $\lambda = 0$ et $H = 0$ parce que $\omega(c^{n-p})$ [ou $\omega(c^{n-q})$] est nulle sur a_k^{p+q}.

Laissant ce cas, *supposons d'abord* $p = 0$. Soit b_l^n un élément ayant b_k^{n-p-q} sur sa frontière. Si b_l^n figure μ fois dans c^{n-p}, et b_k^{n-p-q} ν fois dans c^{n-p}, on a par définition $\lambda = \mu.\nu$ (§ **10**). Mais alors

$$\int_{a_k^{p+q}} \omega(c^{n-q}) = \nu \quad (\text{§ } \mathbf{24}).$$

et $\omega(c^{n-q})$ est une fonction égale à μ en a_l^n et dont la différentielle s'annule sur a_k^{p+q} (parce que b_k^{n-p-q} n'est pas sur la frontière de c^q). $\omega(c^{n-p})$ est donc égale à μ sur a_k^{p+q}, d'où $H = \mu.\nu = \lambda$.

Procédant par récurrence, supposons le lemme établi lorsque la chaîne qui joue le rôle de c^{n-p} a une dimension supérieure à $n-p$.

Soit c^{n-p+1} une chaîne de B telle que l'on ait, dans l'aster de centre b_k^{n-p-q}, $c^{n-p+1} \equiv c^{n-p}$, et n'ayant, dans cet aster, que des éléments de dimension $n-p-q+1$ au plus en commun avec c^{n-q}. *Nous admettrons l'existence* d'une telle chaîne; il resterait à s'affranchir de cette restriction, ce qui ne sera pas fait ici.

Soit $\sum_i x_i a_i^{p+q-1}$ la frontière de a_k^{p+q}. Si $b_i^{n-p-q+1}$ figure λ_i fois dans $c^{n-q}.c^{n-p+1}$, on aura

$$\lambda = \sum_i x_i \lambda_i,$$

parce que, dans l'aster de centre b_k^{n-p-q}, on a

$$c^{n-q}.c^{n-p+1} \equiv c^{n-q}.c^{n-p}.$$

D'après le lemme appliqué à c^{n-q} et c^{n-p+1},

$$\int_{x_i a_i^{p+q-1}} [\omega(c^{n-p+1})\,\omega(c^{n-q})] = \lambda_i,$$

d'où, par addition,

$$(2) \qquad \int_{\Sigma x_i a_i^{p+q-1}} [\omega(c^{n-p+1})\,\omega(c^{n-q})] = \Sigma\lambda_i = \lambda.$$

Mais sur a_k^{p+q} on a

$$\omega'(c^{n-q}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega'(c^{n-p+1}) = \omega(c^{n-p}),$$

d'où

$$[\omega(c^{n-p+1})\,\omega(c^{n-q})]' = [\omega(c^{n-p})\,\omega(c^{n-q})].$$

La formule de Stokes montre alors que l'intégrale au premier membre de (2) est égale à H. Sous réserve de l'hypothèse faite, le lemme et le théorème sont établis.

Ce théorème nous montre que le problème posé au début, déterminer les périodes de $[\omega_1\omega_2]$ connaissant celles de ω_1 et ω_2, ne nécessite que la connaissance des tableaux d'intersections de B; inversement, la connaissance des périodes de produits extérieurs pourra servir à déterminer ces tableaux, ou du moins la partie de ces tableaux qui subsiste lorsqu'on se borne à l'homologie avec division.

Signalons quelques conséquences. Le produit de deux formes à périodes entières a aussi ses périodes entières. Si V est bilatère et si ω est une forme fermée à périodes non toutes nulles, de degré p, on peut trouver une forme fermée de degré $n-p$, ϖ, telle que

$$\int_V [\omega\varpi] = 1.$$

28. *Homéomorphie et équivalence.* — Soient V_1 et V_2 deux variétés donnant naissance, par subdivision, aux complexes A_1 et A_2. Il peut arriver que A_1 et A_2 soient équivalents sans que V_1 et V_2 soient homéomorphes; cela résulte de l'existence, établie par Poincaré [1], de variétés à trois dimensions ayant les mêmes groupes $\mathcal{G}_q$ ($q = 0, 1, 2, 3$) que l'hypersphère et non homéomorphes à celle-ci.

Par contre, il semble très probable, bien que ce ne soit pas prouvé, que si V_1 et V_2 sont homéomorphes, alors A_1 et A_2 sont équivalents. Il y aurait lieu de prouver directement que les conditions nécessaires pour l'équivalence de A_1 et A_2, formulées au Chapitre II, sont aussi nécessaires pour l'homéomorphie de V_1 et V_2. Cette preuve a été faite, en ce qui concerne les nombres de Betti et les coefficients de torsion, par M. J. W. Alexander [2]. En ce qui concerne les tableaux d'intersections des chaînes d'ordre infini, et si l'on se restreint aux homéomorphies satisfaisant à des conditions de dérivabilité, une preuve est implicitement contenue dans le théorème du paragraphe **27**. Pour le cas général, on pourra consulter le mémoire cité de M. Lefschetz.

---

(1) H. Poincaré, *Cinquième complément à l'Analysis situs* (*Palermo Rendic.*, 1904).

(2) *Loc. cit.*, § **25** (1).

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION DES COMPLEXES.

29. *Produit de deux complexes.* — Le produit, $A \times \bar{A}$, de deux complexes A et $\bar{A}$, à m et n dimensions, est un complexe à $m+n$ dimensions, dont les éléments sont en correspondance biunivoque avec les couples formés d'un élément de A et d'un élément de $\bar{A}$; celui qui correspond au couple $(a_i^p, \bar{a}_j^q)$ a $p+q$ dimensions et sera désigné par $a_i^p \times \bar{a}_j^q$.

Si

$$a^p = \sum_i x_i a_i^p \qquad \text{et} \qquad \bar{a}^q = \sum_j y_j \bar{a}_j^q,$$

nous conviendrons d'écrire

$$a^p \times \bar{a}^q = \sum_{i,j} x_i y_j (a_i^p \times \bar{a}_j^q).$$

Pour définir la frontière des chaînes de $A \times \bar{A}$, nous conviendrons que, si

$$a^p \equiv a^{p-1} \qquad \text{et} \qquad \bar{a}^q \equiv \bar{a}^{q-1},$$

on a

$$a^p \times \bar{a}^q \equiv a^p \times \bar{a}^{q-1} + (-1)^q a^{p-1} \times \bar{a}^q.$$

Les trois conditions du paragraphe **1** sont bien vérifiées.

Pour déterminer la structure des groupes $\mathcal{G}_q$ du produit, réduisons les schémas de A et $\bar{A}$ comme au paragraphe **14**. Le schéma de $A \times \bar{A}$ devient alors

$$\begin{array}{ll}
A_i^p \times \bar{A}_j^q \equiv \bar{\omega}_{j,j+\bar{t}_{q-1}}^q A_i^p \times \bar{A}_{j+\bar{t}_{q-1}}^{q-1} + (-1)^q \omega_{i,i+t_{p-1}}^p A_{i+t_{p-1}}^{p-1} \times \bar{A}_j^q & (i \leqq t_p,\ j \leqq \bar{t}), \\
A_i^p \times \bar{A}_j^q \equiv \bar{\omega}_{j,j+\bar{t}_{q-1}}^q A_i^p \times \bar{A}_{j+\bar{t}_{q-1}}^{q-1} & (i < t_p;\ j \leqq \bar{t}_q), \\
A_i^p \times \bar{A}_j^q \equiv \ldots\ldots\ldots (-1)^q \omega_{i,i+t_{p-1}}^p A_{i+t_{p-1}}^{p-1} \times \bar{A}_j^q & (i \leqq t_p;\ j > \bar{t}_q), \\
A_i^p \times \bar{A}_j^q \equiv 0 & (i > t_p;\ j > \bar{t}_q).
\end{array}$$

Cherchons un système fondamental de chaînes fermées. On a d'abord les chaînes à un terme, produits de deux chaînes fermées, qui se trouvent dans la quatrième ligne de notre schéma. Reste à déterminer les chaînes formées de plusieurs termes, dont les frontières se détruisent.

Les chaînes du second membre de la première ligne, produits d'une chaîne d'ordre fini avec une chaîne limitée, ne figurant que dans un seul second membre, une chaîne fermée ne peut contenir de terme qui se trouve au premier membre de la première ligne.

Une chaîne dans le second membre des lignes deux et trois s'y trouve exactement une fois ou deux fois, suivant qu'un seul de ses facteurs ou les deux sont d'ordre fini. De là résulte qu'on aura un système fondamental de chaînes fermées en adjoignant aux chaînes à un terme des chaînes à deux termes seulement; ces dernières sont les mêmes, à un facteur près, qui se trouvent dans les seconds membres de la première ligne : elles sont donc d'ordre fini. Les homologies se lisent directement sur le schéma.

On aura une base pour les chaînes d'ordre infini, c'est-à-dire pour les groupes g_q de $A \times \bar{A}$, en faisant tous les produits de chaînes prises dans des bases des groupes g_q de A et $\bar{A}$. En désignant par P_q, P'_q, P''_q les nombres de Betti de $A \times \bar{A}$, A et $\bar{A}$, on a

$$(1) \qquad P_q = \sum_{i+k=q} P'_i P''_k.$$

Notre schéma fournit aussi aisément des bases pour les groupes γ_q de $A \times \bar{A}$. Désignons par $\pi_q(x)$, $\pi'_q(x)$ et $\pi''_q(x)$ les nombres des q-chaînes d'ordre x dans les bases des groupes γ_q de $A \times \bar{A}$, A et $\bar{A}$. Dans la base du groupe γ_q de $A \times \bar{A}$, on a d'abord les produits d'une chaîne d'ordre infini par une chaîne d'ordre fini; l'ordre est égal à l'ordre de cette dernière. Ensuite, il y a les produits de deux chaînes d'ordre fini; l'ordre est égal au plus grand commun diviseur des ordres de ces dernières. Enfin, à chacun de ces derniers produits correspond une chaîne à deux termes, de même ordre et de dimension d'une unité supérieure. En désignant par (u, v) le plus grand commun diviseur de u et v, on peut résumer cela dans la formule suivante ([1]) :

$$\pi_q(x) = \sum_{i+k=q} P'_i \pi''_k(x) + \pi'_i(x) P''_k + \sum_{\substack{i+k=q,q-1 \\ (u,v)=x}} \pi'_i(u)\pi''_k(v).$$

Remarquons que, d'après la manière dont on a choisi les bases des groupes γ_q, $\pi'_q(x)$ et $\pi''_q(x)$ sont les nombres des coefficients de torsion à q dimensions égaux à x pour A et $\bar{A}$; mais en général il n'en est plus de même de $\pi_q(x)$ relativement à $A \times \bar{A}$. Ces nombres n'en déterminent pas moins la structure du groupe γ_q de $A \times \bar{A}$ et il est aisé d'en déduire les coefficients de torsion.

Les résultats obtenus contiennent le suivant :

THÉORÈME I. — *Si A et $\bar{A}$ sont sans torsion, $A \times \bar{A}$ est aussi sans torsion, et ses nombres de Betti sont déterminés par la formule* (1).

Je me bornerai à énoncer les deux théorèmes suivants, dont les démonstrations, un peu longues, ne présentent pas de difficulté.

THÉORÈME II. — *Si A et $\bar{A}$ sont deux complexes réguliers, $A \times \bar{A}$ est aussi un complexe régulier.*

THÉORÈME III. — *Soient A_1 et A_2 deux chaînes à p_1 et p_2 dimensions ayant une intersection bien déterminée, $A_1 . A_2$, dans le complexe régulier A, à m dimensions ; soient $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ des chaînes analogues, de dimensions q_1 et q_2, dans le complexe régulier $\bar{A}$ à n dimensions ; alors, dans le complexe $A \times \bar{A}$, on a*

$$(A_1 \times \bar{A}_1).(A_2 \times \bar{A}_2) = (-1)^{(m-p_2)(n+q_1)}[(A_1 . A_2) \times (\bar{A}_1 . \bar{A}_2)].$$

30. *Somme de deux complexes.* — Soient A et $\bar{A}$ deux complexes bilatères, orientés, à un même nombre de dimensions n; en les subdivisant au besoin, on peut toujours trouver deux éléments de dimension n, a dans A et $\bar{a}$ dans $\bar{A}$, entre les frontières desquels existe un isomorphisme tel que, si a^0 (resp. $\bar{a}^0$) et a^{n-1} (resp. $\bar{a}^{n-1}$) sont les

---

([1]) Cette formule et la précédente ont été déjà établies par M. Künneth (*Math. Annalen*, t. **90**, p. 65-85; t. **91**, p. 125-134).

bases des groupes $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_n$ de la frontière de a (resp. $\bar{a}$) orientée naturellement, a^0 corresponde à $\bar{a}^0$ et a^{n-1} à $-\bar{a}^{n-1}$. En identifiant les éléments correspondants de ces frontières et supprimant a et $\bar{a}$, on déduit de A et $\bar{A}$ un nouveau complexe qui sera désigné par $A+\bar{A}$. Cette opération est analogue à la subdivision élémentaire (§ 6) et se confond avec elle si l'un des complexes A ou $\bar{A}$ est planoïde.

$A+\bar{A}$ est un complexe bilatère, dont l'orientation se déduit de celles de A et $\bar{A}$; on aura une base pour ses groupes $\mathcal{G}_q(0<q<n)$ en juxtaposant les bases des groupes $\mathcal{G}_q$ de A et $\bar{A}$, et ses tableaux d'intersections s'obtiennent simplement en réunissant ceux relatifs à A et $\bar{A}$.

31. *Construction des exemples annoncés au paragraphe* **12.** — Désignons par S_x un complexe planoïde à x dimensions; s^0_x et S^x seront les bases de ses groupes $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_x$.

a. Considérons le complexe $(S_{p-r}\times S_{q-r})\times S_r$. C'est un complexe bilatère, sans torsion, à $n=p+q-r$ dimensions. D'après le paragraphe **29**, les chaînes suivantes formeront des bases pour ses groupes $\mathcal{G}_x(0<x<n)$

$$
\begin{aligned}
c^q &= (s^0_{p-r}\times S^{q-r})\times S^r,\\
c^p &= (S^{p-r}\times s^0_{q-r})\times S^r,\\
c^{n-r} &= (S^{p-r}\times S^{q-r})\times s^0_r.\\
c_{n-q} &= (S^{p-r}\times s^0_{q-r})\times s^0_r;\\
c^{n-p} &= (s^0_{p-r}\times S^{q-r})\times s^0_r.\\
c^r &= (s^0_{p-r}\times s^0_{q-r})\times S^r.
\end{aligned}
$$

Les intersections de ces chaînes s'obtiennent aisément au moyen du théorème III (§ **29**). On trouve que celles de dimension positive qui ne sont pas nulles sont les suivantes :

$$c^q.c^p=(-1)^{pr}c^r,\qquad c^p.c^{n-r}=(-1)^{r(p-q)}c^{n-q},\qquad c^{n-r}.c^q=(-1)^{(p-r)r}c^{n-p}.$$

Si les entiers p, q, r, $n-p$, $n-q$ et $n-r$ sont tous distincts, le nombre de Betti $P_x(0<x<n)$ de notre complexe est égal à 1 ou à 0, suivant que x est égal à l'un de ces entiers ou non; les seuls tableaux $T_{i,k}(i>0)$ non nuls sont $T_{r,n-p}$, $T_{n-q,r}$ et $T_{n-p,n-q}$, qui contiennent chacun un seul nombre égal à ± 1.

b. Considérons maintenant le complexe

$$(S_p \times S_{n-p}) + (S_q \times S_{n-q}) + (S_r \times S_{n-r}),$$

p, q, r et n ayant les mêmes valeurs que dans *a*.

Comme le précédent, ce complexe est régulier, bilatère et sans torsion, il y a encore les mêmes nombres de Betti. Mais ses tableaux $T_{i,k}(i > 0)$ sont tous nuls (car il en est ainsi pour ses parties constitutives). Nos deux complexes ne sont donc pas équivalents, bien qu'ils aient les mêmes groupes $\mathcal{G}_x$: c'est l'exemple annoncé au paragraphe **12**.

L'hypothèse que les entiers p, q, r, $n-p$, $n-q$ et $n-r$ sont distincts n'a rien d'essentiel. Si par exemple $n = 3$, $p = q = 2$, $r = 1$, on obtient deux complexes dont les nombres de Betti sont $P_0 = P_3 = 1$, $P_1 = P_2 = 3$; le seul tableau à considérer, $T_{1,1}$, a trois lignes et trois colonnes; tous ses éléments sont nuls pour le second complexe, tandis que pour le premier, avec les bases choisies, les éléments de la diagonale principale sont $1, 1, -1$ et les autres 0. Ce dernier exemple est celui qui a été signalé par M. J. W. Alexander (¹).

32. *Construction des exemples annoncés au paragraphe* **17**. — Considérons la variété close à $2n$ dimensions représentée par l'espace projectif ponctuel complexe E_n à n dimensions complexes. Il est aisé de prouver qu'elle admet une subdivision polyédrale, qui engendre un complexe régulier A. Ensuite, on peut voir que A est sans torsion et que ses nombres de Betti non nuls sont

$$P_0 = P_2 = \ldots = P_{2l} = \ldots = P_{2n} = 1,$$

en raisonnant directement sur E_n de la manière suivante.

D'abord, on a $P_0 = P_{2n} = 1$, parce que la variété est connexe et bilatère. Ensuite, si $q < 2n$, on peut voir que tout champ c^q fermé ou dont la frontière est contenue dans l'hyperplan de l'infini E_{n-1} est homologue à un champ contenu dans E_{n-1}, en projetant c^q sur E_{n-1} d'un point de E_n non situé sur c^q ni sur E_{n-1}. Il en résulte que les nombres de Betti $P_q(q < 2n)$ sont les mêmes pour E_n et pour E_{n-1}.

(¹) *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, vol. **10**, 1924, p. 101.

On est donc ramené de E_n à E_{n-1}; comme notre assertion est vraie pour $n = 1$ (car E_r est la sphère), elle est établie.

Choisissons n pair : $n = 2p$. Le complexe A, à $4p$ dimensions, a son nombre de Betti P_{2p} égal à 1 ; la forme quadratique attachée à A, ne contenant qu'une variable et ayant d'ailleurs un déterminant égal à $+1$, se réduit à x^2 ou $-x^2$. Le signe dépend de l'orientation de A. En vertu du théorème IV (§ **17**), A (et par suite E_{2p}) n'admet pas de transformation en lui-même qui renverse l'orientation.

Prenons quatre exemplaires de A, A_1, A_2, A_3 et A_4, orientés de manière que leurs formes quadratiques attachées soient x_1^2, x_2^2, x_3^2 et $-x_4^2$. Les complexes $A_1 + A_2$ et $A_3 + A_4$ sont sans torsion et ont les mêmes nombres de Betti; la forme attachée au premier est $\Phi = x_1^2 + x_2^2$ et celle attachée au second est $\Phi' = x_3^2 - x_4^2$. Comme Φ' n'appartient pas à la même classe que Φ ou $-\Phi$, nos deux complexes ne sont pas équivalents : c'est l'application annoncée du théorème III (§ **17**).

33. *Construction des exemples annoncés au paragraphe* **18**. — On va commencer par construire un complexe à un nombre impair de dimensions, dont les nombres de Betti $P_q (0 < q < n)$ sont nuls, et qui a un coefficient de torsion, et un seul, égal à p, dans chaque dimension impaire, et aucun dans les dimensions paires.

Considérons le complexe A, qui contient p éléments dans chaque dimension, $a_i^q (i = 1, \ldots, p)$, défini par le schéma suivant (on convient que $a_{i+p}^q = a_i^q$)

$$(1) \qquad \begin{cases} a_j^{q+1} = -a_i^q + a_{i+1}^q & (i = 1, 2, \ldots, p) \quad \text{pour } q \text{ pair,} \\ a_i^{q+1} = \sum\limits_{i=1}^{p} a_j^q & (i = 1, 2, \ldots, p) \quad \text{pour } q \text{ impair.} \end{cases}$$

Il admet visiblement l'automorphisme J qui change a_i^q en a_{i+1}^q, et l'on peut vérifier qu'il est planoïde.

On peut d'ailleurs déduire A d'une subdivision convenable de l'hypersphère

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n+1} x_i^2 = 1,$$

l'automorphisme J correspondant à la transformation

$$(3)\qquad \begin{cases} x'_{2i-1} = x_{2i-1}\cos\dfrac{2\pi}{p} - x_{2i}\sin\dfrac{2\pi}{p}, \\ x'_{2i} = x_{2i-1}\sin\dfrac{2\pi}{p} + x_{2i}\cos\dfrac{2\pi}{p} \end{cases}$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}\right),$$

qui engendre, comme J, un groupe cyclique d'ordre p.

L'automorphisme J s'étend évidemment à la subdivision normale C de A. Les éléments de C se répartissent en systèmes contenant chacun les p éléments qui se déduisent de l'un d'eux par J et ses puissances; deux éléments d'un même système ne peuvent être sur la frontière d'un même élément, ni dans un même aster. Appelons chaîne invariante élémentaire la somme des éléments d'un même système.

Cela posé, *les chaînes invariantes élémentaires peuvent être considérées comme les éléments d'un nouveau complexe* $\overline{\mathrm{C}}$. A toute chaîne $\bar{c}^q$ de $\overline{\mathrm{C}}$, correspond une chaîne c^q de C, invariante par J; on dira que c^q recouvre $\bar{c}^q$. Si $c^q \equiv c^{q-1}$, $\bar{c}^q$ et $\bar{c}^{q-1}$ étant recouvertes par c^q et c^{q-1}, on a $\bar{c}^q \equiv \bar{c}^{q-1}$.

$\overline{\mathrm{C}}$ est un complexe régulier; chacun de ses éléments est recouvert par p éléments de C, dont les frontières ne se touchent pas et qui sont centres d'asters ne se touchant pas; il en résulte que la frontière de tout élément de $\overline{\mathrm{C}}$ est isomorphe à la frontière d'un élément de C et tout aster de $\overline{\mathrm{C}}$ à un aster de C. La régularité de C entraîne donc celle de $\overline{\mathrm{C}}$.

On remarquera d'ailleurs que $\overline{\mathrm{C}}$ représente la variété, dont les points correspondent aux systèmes de points de l'hypersphère (2), qui se déduisent de l'un d'eux en répétant la transformation (3).

Pour déterminer le groupe $\mathcal{G}_q$ de $\overline{\mathrm{C}}$, remarquons qu'en vertu de la relation entre $\overline{\mathrm{C}}$ et C, $\mathcal{G}_q$ est le groupe formé par les q-chaînes fermées invariantes de C lorsqu'on assimile à zéro celles qui limitent une $(q+1)$-chaîne invariante.

On peut même remplacer C par A, et alors on constate directement sur le schéma (1) que pour q pair et positif, il n'y a aucune chaîne fermée invariante, dans ce cas, $\mathcal{G}_q$ se réduit à l'élément zéro;

pour q impair, toutes les chaînes fermées invariantes sont les multiples de $\sum_{j=1}^{p} a_j^q$, et si $q < n$, les p^{uples} de cette chaîne sont les seuls qui limitent une chaîne invariante, en sorte que $\mathcal{G}_q$ est cyclique d'ordre p. $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_n$ sont cycliques d'ordre infini.

$\overline{C}$ représente donc bien le complexe qu'on voulait obtenir.

Faisons $n = 4k + 3$ et $p = 3$. Le groupe γ_{2k+1} de $\overline{C}$ étant cyclique d'ordre $p = 3$, le tableau d'enlacement ne contient qu'un nombre :

$$\{c, c\} = \frac{x}{3},$$

c étant une base de γ_{2k+1} (qui ne contient que les éléments o, c et $2c$); x ne peut être nul en vertu du corollaire du théorème II (§ **18**); il est donc égal à 1 ou 2. Il ne change pas si l'on change la base de γ_{2k+1}, car

$$\{2c, 2c\} = \frac{4x}{3} = \frac{x}{3} \qquad [\bmod 1],$$

mais il change si l'on change l'orientation de $\overline{C}$. De là résulte que $\overline{C}$ n'admet pas de transformation en lui-même qui renverse l'orientation.

Prenons quatre exemplaires de $\overline{C}$: C_1, C_2, C_3 et C_4, orientés de manière que leurs tableaux d'enlacement contiennent respectivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Les complexes $C_1 + C_2$ et $C_3 + C_4$ ont mêmes nombres de Betti et mêmes coefficients de torsion (deux égaux à trois dans chaque dimension impaire). Leurs tableaux d'enlacement sont respectivement :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Soient c_1, c_2 et c'_1, c'_2 les bases correspondantes des groupes γ_{2k+1}. Le seul élément $c = xc_1 + yc_2$ du premier pour lequel $\{c, c\} = 0$ est $c = 0$, car

$$\{c, c\} = \frac{x^2 + y^2}{3} \equiv 0 \qquad [\bmod 1]$$

entraîne

$$x \equiv y \equiv 0 \qquad [\bmod 3].$$

Il n'en est pas de même dans le second; $c' = c'_1 + c'_2$ n'est pas nul, bien que $\{c', c'\} = 0$. De là résulte que le tableau T' n'appartient pas à la même classe que T ou — T et nos deux complexes ne sont pas équivalents : c'est l'application annoncée du théorème III (§ **18**).

34. Citons, pour terminer, d'autres exemples qui se rattachent au précédent.

Le complexe A considéré au début du paragraphe **33**, de dimension $n = 2\nu + 1$, admet encore l'automorphisme qui change a_i^{2r-1} et a_i^{2r} en $a_{i+l_r}^{2r+1}$ et $a_{i+l_r}^{2r}$; $l_0, l_1, \ldots, l_\nu$ étant des entiers premiers avec p.

Comme ci-dessus, on en déduit un complexe régulier $\overline{\mathrm{C}}(l_0, l_1, \ldots, l_\nu)$, qui a toujours les mêmes nombres de Betti et coefficients de torsion.

Si e_ν est une base de $\gamma_{2\nu-1}$, $e_\nu e_\nu$, $e_\nu e_\nu e_\nu$, ... sont des éléments de $\gamma_{2\nu-3}$, $\gamma_{2\nu-5}$, ..., et l'on peut prouver qu'ils peuvent servir de bases pour ces groupes. De cette manière, les tableaux d'intersections sont ramenés à une forme canonique : ceux qui ne sont pas nuls contiennent le seul nombre 1. Inversement, e_ν étant fixé, c'est la seule manière de choisir les bases qui ramène les tableaux à cette forme.

En ce qui concerne les tableaux d'enlacement, on peut constater que lorsque les bases sont choisies de la manière indiquée, ils contiennent tous le même nombre (déterminé [mod 1]). Pour une orientation particulière et un choix particulier de e_ν, ce nombre est

$$\frac{l_0 l_1 l_2 \ldots l_\nu}{p}.$$

Si l'on change l'orientation, il change de signe; si l'on change e_ν en me_ν, m étant premier avec p (ce qui est la base la plus générale de $\gamma_{2\nu+1}$), il est multiplié par $m^{\nu+1}$.

Conclusion. — *Pour que les deux complexes*

$$\overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{C}}(l_0, l_1, \ldots, l_\nu) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{C}}' = \overline{\mathrm{C}}(l'_0, l'_1, \ldots, l'_\nu)$$

soient équivalents, il est nécessaire que l'équation à une inconnue entière m

$$(1) \qquad l_0 l_1 \ldots l_\nu \equiv \pm m^{\nu+1} l'_0 l'_1 \ldots l'_\nu \qquad [\mathrm{mod}\, p]$$

admette au moins une solution.

Ainsi, pour $n=3$, $\nu=1$, $p=5$, $l_0=l_1=1$, $l'_0=1$ et $l'_1=2$, les deux complexes à trois dimensions $\overline{C}$ et $\overline{C}'$ ne sont pas équivalents, car la congruence

$$1 \equiv \pm m^2 2 \quad (\bmod 5)$$

n'a aucune solution entière; cet exemple est celui qui a été signalé par M. Alexander [1].

On voit ici la nécessité de considérer simultanément les tableaux d'enlacement et les tableaux d'intersections. Pour ν pair, en particulier, les tableaux d'enlacements peuvent être ramenés à une forme canonique; mais ils ne peuvent pas l'être en même temps que les tableaux d'intersections.

On peut se demander s'il suffit, pour l'équivalence de $\overline{C}$ et $\overline{C}'$, que (1) ait une solution. Désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu+1}$ les fonctions symétriques élémentaires de $l_0, l_1, \ldots, l_\nu$, f_i étant celle de degré i; soient f'_i les fonctions analogues des l', et considérons le système

$$(2) \qquad \begin{cases} f_i \equiv \varepsilon m^i f'_i & (i=1, 2, \ldots, \nu+1), \\ \varepsilon^2 = 1. \end{cases}$$

Il est aisé de prouver que *la condition que le système (2) admette une solution m entière est suffisante pour l'équivalence de* $\overline{C}$ *et* $\overline{C}'$. Il semble que cette dernière condition soit aussi nécessaire et que la première soit insuffisante, mais la question n'est pas résolue.

---

(1) *Trans. Am. Math. Soc.*, t. 20, 1919, p. 339-342, et *Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. 10, 1924, p. 99.