JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FLORIN VASILESCO

Sur les singularités des fonctions harmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 81-111.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__81_0>

Sur les singularités des fonctions harmoniques.

PAR FLORIN **VASILESCO.**

INTRODUCTION.

1. On doit à M. E. Picard le théorème suivant [1] :

Il n'y a pas de singularité, pour une fonction harmonique, en un point où elle est continue, si elle reste bornée dans le voisinage de ce point.

Ce théorème a été le point de départ d'une série de travaux qui se sont montrés de plus en plus féconds pour la théorie générale des fonctions harmoniques.

Et d'abord, dès sa publication par M. Picard, M. Lebesgue fait connaître une méthode [2] qui lui permet non seulement d'établir ce théorème en l'affranchissant de la condition de continuité, mais encore de le généraliser considérablement. M. Lebesgue démontre successivement que :

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique bornée dans un domaine, aux points entièrement intérieurs [3] *à ce domaine où elle n'est pas définie :*

1° *D'un arc borné d'une courbe analytique ;*
2° *Ou de courbe rectifiable ;*
3° *D'un ensemble réductible de points ou de courbes ;*

---

[1] *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 176, 1923, p. 933.

[2] *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 176, 1923, p. 1097.

[3] « Entièrement intérieurs » signifie que les points considérés et leurs points limites sont intérieurs au domaine.

4° *D'un ensemble pouvant être enfermé dans un nombre fini de sphères dont la somme des rayons puisse être rendue aussi petite qu'on veut* (¹).

Des recherches récentes, dues à divers savants et en particulier à MM. O. D. Kellogg, N. Wiener et G. Bouligand, ont permis d'obtenir des résultats définitifs dans cet ordre d'idées, grâce au résultat suivant de M. Wiener.

2. On doit à M. Wiener (²) un procédé général de détermination d'une fonction harmonique dans un domaine, attachée d'une façon unique à des valeurs continues données sur la frontière de ce domaine. C'est ce qu'il appelle *le problème de Dirichlet généralisé*, et la fonction harmonique, *la solution de ce problème*. Voici le résultat de M. Wiener :

Soient Ω un domaine (³) *borné ou non et $f(Q)$ une fonction continue donnée sur sa frontière Σ, supposée bornée. Considérons, d'une part, une fonction continue $\mathcal{F}(P)$ définie dans $\Omega + \Sigma$ et coïncidant avec $f(Q)$ sur Σ* (⁴), *et d'autre part, une suite de domaines Ω_k intérieurs à Ω pour lesquels le problème ordinaire de Dirichlet soit soluble* (⁵).

Si $F_k(P)$ est la solution de ce problème pour le domaine Ω_k et les valeurs $\mathcal{F}_k(P)$ sur sa frontière Σ_k, la suite des fonctions $F_k(P)$ tend uniformément, dans toute région fermée de Ω, vers une fonction harmonique unique $F(P)$, indépendante du choix des Ω_k et de $\mathcal{F}(P)$. $F(P)$ est la solution du problème de Dirichlet généralisé.

(¹) Cela signifie que la *capacité* de l'ensemble est nulle (*voir* plus loin, pages 83 et 84).

(²) *Certain notions in potentiel theory* (*Journ. of Math. and Phys. of the Massach. Inst. of Techn.*, t. 3, 1924, p. 26). A la vérité, M. O. D. Kellogg avait déjà employé un tel procédé de définition d'une fonction harmonique dans un domaine, dans son très intéressant travail : *An Example in Potential Theory* (*Proc. Amer. Ac. Arts and Sciences*, vol. 58, n° 14, June 1923).

(³) Le mot *domaine* signifiera dans la suite *un ensemble ouvert de points*.

(⁴) Une telle fonction existe, comme l'a montré M. Lebesgue [*Sur le problème de Dirichlet* (*Rend. Circolo Math. di Palermo*, t. 24, 1907, p. 215)]. Une telle fonction existe même si l'on a affaire à *des fonctions multiformes de variables réelles*. Voir F. Vasilesco, *Thèse : Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles*, n° 22, p. 23 (Gauthier-Villars, 1925).

(⁵) On pourra prendre pour Ω_k, par exemple, le domaine formé par les cubes égaux d'un réseau, qui sont intérieurs à Ω [*Voir* note (¹), p. 86].

Cette solution coïncide avec celle du problème ordinaire lorsque celle-ci existe.

M. Wiener étend ensuite aux ensembles bornés quelconques les notions classiques de *potentiel* et de *capacité électrostatique* [1].

Le potentiel $v(P)$, d'un ensemble borné, est la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs frontières $f(Q) = 1$ et le domaine infini extérieur à cet ensemble augmenté de ses points limites.

La capacité c, de l'ensemble, est la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{dv(P)}{dn}\,dS$$

portant sur la dérivée de $v(P)$ suivant la normale intérieure à une surface S, qui contient cet ensemble entièrement à son intérieur. La capacité ne dépend pas de S et est *positive* ou *nulle*.

3. M. Bouligand [2] s'étant proposé d'étudier la solution du problème de Dirichlet généralisé à la frontière du domaine, et plus particulièrement la fonction de Green généralisée, qu'il avait définie dès 1919 [3] par le même procédé des domaines auxiliaires Ω_k, a été conduit à l'idée de débarrasser la frontière du domaine de certains ensembles de points, en lesquels la fonction de Green n'avait pas de singularités. Ces ensembles *fermés* et *de capacité nulle*, M. Bouligand les appelait *impropres*. M. Bouligand énonce le théorème suivant [4], qui contient les résultats de MM. Picard et Lebesgue :

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique aux points d'un ensemble de capacité nulle, entièrement intérieur à un domaine où cette fonction reste bornée.

M. O. D. Kellogg complète ce théorème [5], en en établissant une

---

[1] *Loc. cit.*, p. 40. Nous emploierons toutefois ici une définition de la capacité adoptée par M. Kellogg [*On the classical Dirichlet problem for general domains* (*Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. 12, VI, juin 1926, p. 402)] qui diffère légèrement de celle de M. Wiener, et par M. Bouligand [*Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de la Société polonaise de Math.*, 1925, p. 80)].

[2] *Loc. cit.*

[3] *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 169, 1919, p. 763.

[4] *Loc. cit.*, n° 35, p. 104.

[5] *Loc. cit.*, p. 403-404, théorèmes VII et VIII.

réciproque, ce qui achève de caractériser l'ensemble fermé de points, entièrement intérieur à un domaine, aux points duquel il n'y a de singularités pour aucune fonction harmonique bornée dans ce domaine. Voici le résultat de M. Kellogg.

Soient T *un domaine et* B *une partie de sa frontière avec les propriétés suivantes : a) l'ensemble* $T' = T + B$ *est encore un domaine et b) la capacité de* B *est nulle. Alors, toute fonction harmonique bornée peut être définie sur* B *de manière qu'elle soit harmonique dans* T' *et réciproquement, si cela a lieu pour toute fonction harmonique, b) s'ensuit.*

B est supposé entièrement intérieur au domaine T'.

Mais la démonstration de M. Kellogg rend valable ce théorème dans des conditions plus larges que nous allons voir. A cet effet, appelons *impropre, tout ensemble* $\mathcal{E}$ *borné ou non, dont chaque partie bornée et fermée est de capacité nulle.*

Un ensemble fermé E sera dit *de capacité nulle en un de ses points*, lorsqu'on peut entourer ce point d'une sphère assez petite, pour que la partie de E qui s'y trouve soit de capacité nulle.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points de E, en lesquels E est de capacité nulle, est impropre. C'est ce que nous appelons la partie impropre de E.

Soient Ω un domaine et Σ sa frontière. On démontre que la partie impropre $\mathcal{E}$ de E est telle que $\Omega + \mathcal{E}$ est encore un domaine.

Voici l'énoncé général qu'on peut donner du théorème de M. Kellogg :

Soient T *un domaine et* B *une partie de sa frontière telle que* $T' = T + B$ *soit encore un domaine;* T *et* B *peuvent s'étendre à l'infini.*

Si B *est un ensemble impropre, toute fonction harmonique bornée dans le voisinage de chaque point de* B *peut être définie sur* B, *de manière qu'elle soit harmonique dans* T' *et réciproquement, si cela est possible,* B *est un ensemble impropre.*

On voit que le maximum de B est la partie impropre $\mathcal{E}$ de E.

Ce théorème semble exprimer le résultat définitif qu'on peut obtenir dans la voie ouverte par le théorème de M. Picard.

4. Nous avons encore démontré le théorème suivant :

La solution du problème de Dirichlet généralisé est la même pour les domaines Ω de frontière Σ et $\Omega' = \Omega + \mathcal{E}$ de frontière $\Sigma' = \Sigma - \mathcal{E}$, pourvu que les données frontières coïncident sur Σ'.

Les deux derniers théorèmes montrent que l'ensemble $\mathcal{E}$ est *impropre* à être un ensemble de singularités pour les fonctions harmoniques, et à porter efficacement des données pour le problème de Dirichlet.

Ce dernier caractère semble bien avoir été dans l'esprit de M. Bouligand lorsqu'il entendait définir les parties impropres de la frontière (*loc. cit.*, n° 13, p. 78) à l'aide de la fonction de Green. C'est pourquoi nous avons gardé à $\mathcal{E}$ l'appellation de *partie impropre* de Σ. Nous avons démontré d'ailleurs qu'il coïncidait avec l'ensemble somme des parties impropres de M. Bouligand.

5. La méthode que nous avons employée dans ce travail, et qui consiste à raisonner sur des *ensembles réduits*, c'est-à-dire débarrassés de leur partie impropre, nous a permis de pousser plus avant qu'elle n'a été faite jusqu'ici, l'étude du potentiel aux points de l'ensemble qui l'engendre, et d'en déduire immédiatement des résultats concernant les points réguliers et irréguliers de la frontière d'un domaine quelconque.

C'est grâce à une égalité due à M. Kellogg, dont nous avons fait un usage systématique, que nous avons pu effectuer ce passage d'une étude à l'autre.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 27 décembre 1927 et 3 janvier 1928.

CHAPITRE I.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU POTENTIEL ET DE LA CAPACITÉ. ENSEMBLE IMPROPRE. ENSEMBLE RÉDUIT.

6. Soit E un ensemble borné de l'espace à trois dimensions [1], et considérons une suite $\{\sigma_k\}$ de surfaces pour lesquelles le problème

[1] Pour fixer les idées. Tout ce qui va être dit dans ce Mémoire reste valable pour les espaces à plus de trois dimensions, et aussi pour l'espace à deux dimensions, sauf

extérieur de Dirichlet est possible [1], contenant toutes E entièrement à l'intérieur [2], et tendant, en se resserrant, vers E. Le potentiel $v_k(P)$ de σ_k tend alors en décroissant vers $v(P)$, le potentiel de E, et cela d'une façon uniforme sur tout ensemble fermé extérieur à E.

C'est pourquoi la capacité c_k de σ_k tend vers la capacité c de E.

Il existe donc une surface contenant E *entièrement à l'intérieur, dont la capacité soit aussi voisine qu'on veut de celle de* E.

Entre la capacité et le potentiel, on a la relation

$$(1) \qquad \frac{c}{d_g} \leq v(P) \leq \frac{c}{d_p},$$

d_g et d_p étant la plus grande et la plus petite distance de P à E. Si le point P s'éloigne indéfiniment, on en déduit

$$(2) \qquad c = \lim R.\, v(P),$$

R étant la distance de P à un point fixe.

On verra facilement que :

Le potentiel de l'ensemble somme d'un nombre fini d'ensembles est inférieur ou égal à la somme des potentiels des ensembles composants.

Il en est de même de la capacité, d'après l'égalité précédente.

Ces propriétés, connues, du potentiel et de la capacité se déduisent aisément de leur définition [3].

Dans la suite, nous allons en donner d'autres, qui nous paraissent nouvelles.

---

avis contraire. Il suffira de faire un travail d'adaptation du langage; par exemple, le mot *surface* sera remplacé par le mot *courbe* dans le cas de deux dimensions. De même, pour la fonction de Green, le terme $\frac{1}{r}$ sera remplacé par $-\log r$, etc., etc.

(1) Si l'on fait un pavage de l'espace par des cubes de côtés a, et que l'on considère le pavage déduit de celui-ci par sa subdivision en cubes de côtés $\frac{a}{2}$, etc., on pourra prendre pour σ_k la frontière du domaine formé par ceux des cubes du $k^{\text{ième}}$ pavage qui ne contiennent pas de points de E ni de son dérivé E′ et se trouvent dans le domaine infini extérieur à E + E′.

(2) *Voir* la note (3), page 81.

(3) *Voir*, par exemple, O. D. KELLOGG (*Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. 12, VI, 1926, p. 402).

7. *Si entre les potentiels $v(\mathrm{P})$ et $\{v_n(\mathrm{P})\}$ des ensembles* E *et* $\{\mathrm{E}_n\}$, *contenus dans une région bornée* D, *on a la relation*

$$(a) \qquad v(\mathrm{P}) = \lim v_n(\mathrm{P}) \quad \textit{à } \varepsilon \textit{ près } (^1),$$

lorsque P *est extérieur à une sphère de centre fixe* O *et de rayon* R, *le produit* $\varepsilon . \mathrm{R}$ *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{\mathrm{R}}$, *alors*

$$(b) \qquad c = \lim c_n \quad (\text{où } c = \operatorname{cap} \mathrm{E} \quad \text{et} \quad c_n = \operatorname{cap} \mathrm{E}_n),$$

et réciproquement, cette relation entraîne la précédente.

En effet, de la relation (1) on tire

$$(3) \qquad v(\mathrm{P}) = \frac{c}{d'} \qquad (d_p < d' < d_g),$$

qui transforme (a) en

$$\frac{c}{d'} = \lim \frac{c_n}{d'_n} \qquad \textit{à } \varepsilon \textit{ près},$$

d'où

$$c = \lim \frac{d'}{d'_n} \quad c_n \textit{ à } \varepsilon d' \textit{ près}.$$

Mais, si R est assez grand, $\varepsilon d' < 2\varepsilon \mathrm{R}$ est assez petit et $\frac{d'}{d'_n}$ aussi voisin de 1 qu'on veut, indépendamment de n. L'égalité (b) en résulte.

Inversement, si (b) a lieu, d'après (3) on a en tout point P

$$d' v(\mathrm{P}) = \lim d'_n v_n(\mathrm{P})$$

ou

$$(4) \qquad v(\mathrm{P}) = \lim \frac{d'_n}{d'} v_n(\mathrm{P}).$$

Soit r le rayon d'une sphère (r) de centre O contenant le domaine D à l'intérieur et supposons $\mathrm{R} > r$; alors

$$\mathrm{R} - r < d' \qquad \text{et} \qquad d'_n < \mathrm{R} + r$$

et

$$\frac{\mathrm{R} - r}{\mathrm{R} + r} < \frac{d'_n}{d'} < \frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R} - r},$$

(1) Cela veut dire que tous les points limites de la suite $v_n(\mathrm{P})$ sont compris dans l'intervalle $[v(\mathrm{P}) - \varepsilon, v(\mathrm{P}) + \varepsilon]$.

d'où

$$\frac{d'_n}{d'} - \frac{2r}{R-r} < 1 < \frac{d'_n}{d'} + \frac{2r}{R+r}.$$

Multiplions chaque terme de cette inégalité par $v_n(P)$ et observons que $v_n(P) < \frac{r}{R}$, le potentiel de la sphère (r); nous obtenons

$$\frac{d'_n}{d'} v_n(P) - \frac{2r^2}{R(R-r)} < v_n(P) < \frac{d'_n}{d'} v_n(P) + \frac{2r^2}{R(R+r)}.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{2r^2}{R(R+r)}$; le produit $\varepsilon.R$ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$ et d'après (4) la relation (a) en résulte.

8. *Si un ensemble fermé borné est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de capacités nulles, il est aussi de capacité nulle.*

Soient E et $\{E_n\}$ les ensembles donnés et σ_n une surface de capacité inférieure à $\frac{\varepsilon}{2^n}$, contenant E_n entièrement à l'intérieur (6), ε étant fixe et arbitrairement petit. Tout point de E_n est donc centre d'une sphère tout entière comprise dans σ_n, et par suite, tout point de E est centre d'une sphère intérieure entièrement à une des surfaces σ_n. D'après le lemme de MM. Borel-Lebesgue, étendu par M. de la Vallée Poussin [1], E peut être enfermé dans un nombre fini de ces sphères. Soit s_n l'ensemble somme de celles de ces sphères qui sont comprises dans σ_n. Les s_n sont en nombre fini, et la capacité de s_n est inférieure à celle de σ_n. La capacité de E est donc inférieure à la somme des capacités des s_n, donc inférieure à $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots$; elle est donc nulle.

9. Remarquons que les mots *fermé* et *dénombrable* de l'énoncé précédent sont indispensables. Pour le second, cela est évident, car, un point est de capacité nulle et tout ensemble est formé de points. Pour le premier, il suffira de donner l'exemple suivant :

---

(1) *Intégrales de Lebesgue, etc.*, p. 14.

E est un ensemble dénombrable partout dense sur une sphère, par exemple. Il n'est donc pas fermé; aussi, sa capacité n'est-elle pas nulle : c'est celle de la sphère.

10. Il résulte du théorème précédent que :

Tout ensemble fermé dénombrable est de capacité nulle.

Cette proposition résulte aussi du théorème donné au numéro suivant, car, si P_1, P_2, ... sont les points d'un tel ensemble E, Σa_n une série convergente à termes positifs et $\rho_n = \overline{PP_n}$ la distance d'un point P, extérieur à l'ensemble, au point P_n, la série $\sum \frac{a_n}{\rho_n}$ est une fonction harmonique positive devenant infinie en chaque point de E. C'est ce qu'on appelle le potentiel des masses a_n situées aux points P_n (1).

11. *S'il existe une fonction harmonique (ou surharmonique continue), définie dans le voisinage extérieur d'un ensemble fermé borné* E, *en chaque point duquel elle devienne infinie positive,* E *est de capacité nulle.*

Considérons, en effet, une surface σ située dans le voisinage donné, contenant E « à l'intérieur », et assez voisine de lui pour que la fonction F(P) de l'énoncé soit positive ou nulle dans la partie ω du voisinage renfermée par σ (2).

S'il existait alors une fonction harmonique positive bornée et non identiquement nulle dans ω, s'annulant sur σ, soit $\Phi(P)$, on voit que, si petit que soit ε positif donné, on pourrait trouver une autre surface σ' intérieure à σ, et assez voisine de E qu'elle comprenne « à l'in-

---

(1) M. Bouligand a établi le théorème suivant, dont l'énoncé modifie à peine celui qu'il a donné dans le Mémoire cité (*loc. cit.*, p. 103-104) :

Étant donné un ensemble potentiant muni de masses positives, si son potentiel, lorsqu'on tend vers un point quelconque a une valeur limite unique égale à $+\infty$, cet ensemble est de capacité nulle.

Ce théorème est également un cas particulier de celui du paragraphe suivant.

(2) Ici, comme dans la suite, toute surface auxiliaire pourra être considérée assez régulière pour que les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur pour elles soient possibles. On n'a qu'à se rapporter à la note (1), p. 86.

térieur », pour que sur cette surface on ait

$$\Phi(P) < \varepsilon F(P).$$

Comme d'ailleurs cette relation a lieu sur σ, elle existe aussi en tout point du domaine délimité par σ' et σ. Mais ε étant arbitrairement petit, $\Phi(P)$ serait identiquement nulle, ce qui est une contradiction.

Il ne reste donc qu'à montrer qu'il existe une fonction $\Phi(P)$, en supposant E de capacité non nulle. Cela est facile à voir. Soit, en effet, $v(P)$ le potentiel de E et appelons $w(P)$ la solution du problème intérieur classique de Dirichlet prenant sur σ les valeurs de $v(P)$. Ces valeurs ont un maximum inférieur, au sens strict, à 1, et $w(P)$ est inférieure à ce maximum. Mais l'on sait que $v(P)$ a dans le voisinage de E des valeurs aussi voisines qu'on veut de 1 [1]. D'autre part, $w(P)$ est toujours inférieure à $v(P)$, car elle est inférieure à toutes les fonctions $v(P)$ (*voir* n° **6**) sur les surfaces σ_k et σ pour k assez grand pour que σ contienne σ_k, donc aussi dans le domaine qu'elles délimitent, et ces fonctions tendent en décroissant vers $v(P)$.

La différence

$$\Phi(P) = v(P) - w(P)$$

est donc une fonction harmonique bornée, positive et non identiquement nulle dans ω, s'annulant sur σ : c'est la fonction requise. Le théorème est donc établi.

12. La démonstration précédente montre que *les fonctions* F(P) *et* $\Phi(P)$ *ne peuvent pas exister en même temps, quel que soit l'ensemble fermé borné* E.

Nous avons fait voir que lorsque E est de capacité non nulle, $\Phi(P)$ existe, donc F(P) n'existe pas.

Nous avons vu (**10**) que si E est dénombrable c'est F(P) qui existe au détriment de $\Phi(P)$.

Il serait intéressant de savoir quelles sont les possibilités dans le cas où E est de capacité nulle mais non dénombrable.

13. Une autre question qu'il serait intéressant d'étudier est celle

[1] *Voir* O. D. Kellogg (*loc. cit.*, lemme IV, p. 404).

de savoir ce que deviennent la capacité et le potentiel d'un ensemble E lorsqu'on fait subir à l'espace une transformation ponctuelle. Il est superflu d'insister sur l'utilité que présente cette question au point de vue méthode de recherches.

Je ne m'occuperai ici que de la plus simple de ces transformations : l'homothétie. Nous en aurons besoin plus tard.

Soit O le centre d'une homothétie de rapport K. Un point P se transforme en P′, un ensemble E devient E′. Une fonction $\varphi(P)$ devient $\psi(P') = \varphi(P)$ et l'on voit que

$$\frac{\partial\psi(P')}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\varphi(P)}{\partial\rho}; \qquad \frac{\partial^2\psi(P')}{\partial\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\varphi(P)}{\partial\rho^2}; \quad \ldots,$$

ρ étant une direction quelconque. Si $\varphi(P)$ est harmonique il en est donc de même de $\psi(P')$. Par conséquent, si $\varphi(P) = v_k(P)$ relatif à E (**6**), $\psi(P') = v_k(P')$ sera le potentiel de σ'_k relatif à E′. Donc *les potentiels $v(P)$ et $v(P')$ de E et E′ coïncident aux points homologues P et P′*. D'après (1) et (3) on a

$$\frac{c'}{K d_g} \leqq v(P) = \frac{c}{d'} = v'(P) \leqq \frac{c'}{K d_p},$$

d'où

$$\frac{d'}{d_g} \leqq \frac{Kc}{c'} \leqq \frac{d'}{d_p}.$$

Comme les rapports extrêmes tendent vers 1 lorsque P s'éloigne indéfiniment, il en résulte que

$$c' = Kc.$$

D'ailleurs le changement de position d'un ensemble E dans l'espace, qui se ramène à une translation suivie de deux rotations, fait correspondre aux points homologues la même valeur du potentiel; on le voit à l'aide des surfaces σ_k, comme plus haut. La capacité ne change donc pas.

Pour passer de l'ensemble E à un de ses homothétiques, il suffira de combiner les deux cas précédents.

Ceci montre, en particulier, que le potentiel et la capacité ne dépendent que de l'ensemble et non de sa position dans l'espace.

14. Appelons « *impropre* », *tout ensemble* $\mathcal{E}$ *borné ou non, dont toute partie bornée et fermée est de capacité nulle.*

En particulier, un ensemble fermé de capacité nulle est impropre dans le sens de M. Bouligand (**5**).

15. Considérons un ensemble quelconque E et soit P un point de l'espace.

Nous dirons que E *est de capacité nulle en* P, *lorsque l'on peut trouver une sphère* (r) *de centre* P *telle que l'ensemble des points de* E « *intérieurs* » *à* (r) *soit de capacité nulle.*

Désignons par E_r cet ensemble, augmenté de ses points limites. E_r est, d'après une notation de M. Baire [1], la *portion* de E déterminée par (r). E_r est également de capacité nulle.

16. *Tout ensemble fermé borné, formé avec des points où* E *est de capacité nulle, est aussi de capacité nulle.*

Ceci résulte immédiatement du lemme de MM. Borel-Lebesgue et des propriétés de la capacité (**6**).

17. Il en résulte que *tout ensemble de capacité nulle en chacun de ses points est impropre.* Mais la réciproque n'est pas vraie, comme on le voit sur l'exemple donné au paragraphe **9**, si l'on s'appuie sur l'énoncé du paragraphe **10**. Les deux notions de l'énoncé précédent sont essentiellement différentes en ce que la première utilise les points limites de l'ensemble (pas tous), tandis que la seconde en est indépendante.

18. Soient E un ensemble *fermé* quelconque, borné ou non, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ceux de ses points en lesquels il est de capacité nulle. D'après (**16**) $\mathcal{E}$ *est impropre*. Nous l'appellerons *la partie impropre de* E.

L'ensemble $E - \mathcal{E}$, *s'il existe, est fermé. Il n'est de capacité nulle en aucun de ses points.*

---

(1) *Acta mathematica*, 1906. En réalité, M. Baire donne cette définition dans l'hypothèse que E est parfait.

Supposons, en effet, qu'il contiendrait un point P où il aurait une capacité nulle. On pourrait trouver alors un nombre r, tel que la portion E'_r de $E - \mathcal{E}$ déterminée par la sphère (r) de centre P soit de capacité nulle. La capacité de $E - \mathcal{E}$ située dans et sur la sphère $\left(\frac{r}{2}\right)$ serait *a fortiori* de capacité nulle et pourrait par conséquent être enfermée « à l'intérieur » d'une surface σ de capacité aussi petite qu'on voudrait, ε. Considérons alors la « portion » $\mathcal{E}'_{\frac{r}{2}}$ déterminée par la même sphère $\left(\frac{r}{2}\right)$ sur $\mathcal{E}$. Les points de cette portion, extérieurs à σ ou situés sur σ, forment un ensemble qui est une partie fermée de $\mathcal{E}$, donc de capacité nulle. Mais cet ensemble et σ contiennent tous les points de la portion $E_{\frac{r}{2}}$ de E, dont la capacité est ainsi inférieure à $\varepsilon + 0 = \varepsilon$. Elle est donc de capacité nulle et P serait un point de $\mathcal{E}$ non de $E - \mathcal{E}$, ce qui démontre la proposition :

L'ensemble $E - \mathcal{E}$ *n'a donc plus de partie impropre.*

19. *Tout ensemble fermé sans partie impropre sera appelé réduit.*

D'après ce qui précède, *tout ensemble fermé peut être réduit.*

Il est évident aussi que :

Toute portion d'un ensemble réduit est un ensemble réduit [voir la note (¹) page 92].

CHAPITRE II.

SINGULARITÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES. FRONTIÈRES RÉDUITES.

20. Nous allons établir d'abord, en l'étendant légèrement, une inégalité due à M. O. D. Kellogg [1]. Nous nous en servirons constamment dans les paragraphes suivants :

Soient Ω *un domaine quelconque,* Σ *sa frontière et* $G(P, Q)$ *sa fonction de Green généralisée* [2] *de pôle* Q.

(¹) *Loc. cit.*, p. 405.

(²) *Voir* note (³), p. 83, ou KELLOGG (*loc. cit.*), p. 398.

Soit encore e un ensemble fermé borné dont aucun point n'appartient à Ω; si $v(P)$ est le potentiel de cet ensemble, on a l'inégalité

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1-v(P)}{1-M}\right] \geqq G(P, Q).$$

On désigne par r le rayon d'une sphère σ de centre Q et tout entière dans Ω, sur laquelle $v(P)$ a un maximum M (¹).

Considérons la suite des domaines Ω_n (**2**) tendant vers Ω et leurs fonctions $G_n(P, Q)$ qui tendent vers $G(P, Q)$. Sur la frontière Σ_n de Ω_n, $G_n(P, Q)$ est nulle, donc inférieure à la fonction $\frac{1}{r}\left(\frac{1-v(P)}{1-M}\right)$; ceci a lieu aussi sur σ où cette fonction est au moins égale à $\frac{1}{r}$, tandis que $G_n(P, Q) < \frac{1}{r}$. Par conséquent, dans le domaine $\Omega_n - \sigma$, on a

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1-v(P)}{1-M}\right] > G_n(P, Q),$$

qui donne à la limite l'inégalité énoncée.

Si e est de capacité nulle, l'inégalité se réduit à la relation évidente $\frac{1}{r} > G(P, Q)$.

21. Cette inégalité nous servira pour établir une certaine réciprocité entre le potentiel et la fonction de Green, au point de vue du caractère régulier ou irrégulier des points de la frontière d'un domaine.

Un point O de la frontière est dit *régulier* lorsque toute solution du problème généralisé de Dirichlet dans Ω prend la valeur frontière $f(Q)$ (**2**) en O. Il faut et il suffit pour cela que $G(P, Q)$ prenne la valeur o en O.

Mais on connaît le caractère local de la régularité. Le point O aura donc le même caractère sur la frontière du domaine infini extérieur à la portion déterminée sur l'ensemble des points n'appartenant pas à Ω par une sphère (r) de centre O. Si $\mathcal{G}(P, Q)$, la fonction de Green de ce domaine tend vers zéro, le potentiel de Σ_r tend vers 1;

(¹) M. O. D. Kellogg s'est servi de ce lemme pour déduire de ce que la borne supérieure de $v(P)$ étant supposée égale à 1 au voisinage d'un ensemble e, que la fonction de Green a un minimum nul dans ce voisinage.

réciproquement, si le potentiel tend vers 1, d'après l'inégalité ci-dessus, $G(P, Q)$ tend vers zéro et Q est régulier.

Ceci montre, en gros, la réciprocité annoncée; on en verra dans la suite des exemples plus précis.

Disons tout de suite que de l'étude à la frontière du potentiel, nous obtiendrons presque immédiatement des résultats relatifs aux points frontières d'un domaine, comme on le verra au Chapitre suivant.

22. Établissons encore le *lemme* suivant :

Soient $F(P)$ *et* $\Phi(P)$ *deux fonctions harmoniques bornées dans un domaine* Ω, *prenant les mêmes valeurs supposées continues sur une partie de la frontière* $\Sigma - s$, *s étant un ensemble fermé de* Σ.

Si M *est une borne supérieure commune à* $|F(P)|$ *et* $|\Phi(P)|$ *et* $v(P)$ *le potentiel de* s, *on a dans* Ω

$$2M\,v(P) \geqq |F(P) - \Phi(P)|.$$

Reprenons, en effet, les surfaces σ_k de potentiels $v_k(P)$ (**6**) et soient σ'_k la partie de σ_k contenue dans Ω, et Σ' la partie de Σ extérieure à σ_k. σ'_k et Σ' constituent la frontière d'un domaine ω_k commun à Ω et à l'extérieur de σ_k. Mais $F(P) - \Phi(P)$ est la solution du problème de Dirichlet dans ω_k pour les valeurs $F(P) - \Phi(P)$ sur la frontière, car ces valeurs y sont continues, et la fonction harmonique tend vers ces valeurs frontières. Pour la même raison, $2M.v_k(P)$ est la solution du problème de Dirichlet pour ses propres valeurs sur la frontière. Or, sur cette frontière, l'inégalité

$$2M\,v_k(P) \geqq |F(P) - \Phi(P)|$$

a lieu. Elle a donc lieu à l'intérieur de ω_k et donne à la limite l'inégalité de l'énoncé.

23. Voici une application de ce lemme. Si s est de capacité nulle, $v(P)$ est identiquement nul et $F(P) \equiv \Phi(P)$.

Il ne peut pas y avoir deux fonctions harmoniques bornées dans un domaine, prenant les mêmes valeurs sur la frontière, sauf en un ensemble de capacité nulle.

C'est un résultat dû à M. O. D. Kellogg (*loc. cit.*, p. 405) qui l'a donné toutefois sous une forme légèrement différente. M. Kellogg suppose que s est l'ensemble des points irréguliers de la frontière et de ses points limites. Cette hypothèse n'intervient cependant pas dans son raisonnement.

24. On voit dans ce dernier théorème un autre exemple de ce fait exprimé par M. Bouligand (*loc. cit.*, p. 83) en ces termes : « les ensembles de capacité nulle jouent dans le problème de Dirichlet, le même rôle que les ensembles de mesure nulle dans le problème de l'intégration », etc.

Nous aurons l'occasion de montrer d'autres exemples de ce fait, qui le préciseront (**30**).

25. Grâce à la notion d'*ensemble impropre*, nous allons pouvoir étendre le théorème de M. Kellogg (**5**) de manière qu'il résolve complètement la question des singularités des fonctions harmoniques, qui a son point de départ dans le théorème de M. Picard (**1**).

Voici le nouvel énoncé :

Soient T *un domaine et* B *une partie de sa frontière telle que* $T' = T + B$ *soit encore un domaine. Le domaine, sa frontière et* B *peuvent s'étendre à l'infini.*

Si B *est un ensemble impropre, toute fonction harmonique bornée dans le voisinage de chaque point de* B *peut être définie sur* B *de manière qu'elle soit harmonique dans* T' *et réciproquement, si cela est possible,* B *est un ensemble impropre.*

La démonstration de M. Kellogg s'applique presque sans changement. Elle s'appuie sur le lemme suivant :

« Si $F(p)$ est une fonction bornée et continue sur une sphère σ, sauf sur un ensemble s de capacité nulle, où elle peut être discontinue, il existe une fonction harmonique dans la sphère prenant la valeur $F(p)$ en tout point de continuité de σ. »

Considérons une suite de surfaces σ_k (**6**) relatives à s ; elles découpent sur σ des contours s_n. On peut supposer $F(p)$ comprise entre o et 1.

La formule de Poisson appliquée à la fonction $F_n(p)$, égale à o dans s_n et à $F(p)$ ailleurs, donne une fonction harmonique $u_n(P)$ dans σ qui ne décroît pas lorsque n croît. Elle a donc une limite $U(P)$ harmonique dans σ. Cette fonction prend bien la valeur $F(p)$ en chaque point de continuité de $F(p)$, car quels que soient m et n, on a d'après le lemme du paragraphe **22**

$$|u_{n+m}(P) - u_n(P)| < 2 v_n(P),$$

$v_n(P)$ étant le potentiel de s_n. Donc, dans un voisinage intérieur à la sphère, de tout point p de σ qui n'appartient pas à s ou à son dérivé, $v_n(P)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$; la suite $u_n(P)$ tend donc uniformément vers $U(P)$ dans ce voisinage et comme $u_n(p) = F(p)$, $U(P)$ tend vers $F(p)$. Le lemme est démontré.

Puisque $T + B$ est encore un domaine et que B fait partie de la frontière de T, il résulte que tout point de B n'a dans son voisinage que des points de T et de B. Inversement, tout point de T' limite de points de B fait partie de B, car la frontière de T est un ensemble fermé. Donc, la partie s de B comprise dans une sphère σ située dans T' et centrée en un point de B est fermée; puisque B est impropre, *s est de capacité nulle.*

Soit alors $V(P)$ une fonction harmonique bornée dans le voisinage de B et supposons la sphère σ de rayon assez petit pour qu'elle se trouve dans ce voisinage. $V(P)$ détermine sur σ une fonction F; d'après le lemme précédent, il existe une fonction harmonique $U(P)$ dans σ coïncidant avec $V(P)$ sur σ sauf aux points de s. Considérons alors le domaine Ω intérieur à σ ayant comme frontière l'ensemble s et la surface de σ. D'après le lemme du paragraphe **22**, $U(P)$ coïncide avec $V(P)$ dans ce domaine; donc, en donnant à $V(P)$ la valeur $U(P)$ en chaque point de B intérieur à σ, $V(P)$ devient harmonique dans σ.

Ainsi, en chaque point de B, $V(P)$ a une limite unique qui, prise pour valeur de V en ce point, rend celle-ci harmonique sur B et dans son voisinage.

Réciproquement, le potentiel de s peut être défini sur s de manière à y être harmonique. C'est donc une fonction harmonique bornée dans tout l'espace, s'annulant à l'infini. Il est donc identiquement nul et s est de capacité nulle; B est impropre (**17**). Le théorème est démontré.

26. Il est à remarquer que, pour montrer que B est impropre, il n'a pas été nécessaire de supposer, comme il a été dit dans l'énoncé, que « toute fonction harmonique bornée, etc. » (*voir* l'énoncé). Il a suffi que cette propriété ait lieu pour certaines fonctions harmoniques particulières qui sont *des potentiels*, en quel cas, elle a lieu pour toute fonction harmonique.

Comme nous l'avons vu en mainte occasion et comme nous le verrons encore par la suite, il semble que *le potentiel* et *la fonction de Green* soient, parmi les fonctions harmoniques, des fonctions privilégiées.

27. Nous allons compléter le théorème précédent en recherchant l'ensemble « maximum » des points de la frontière qui pourra être pris pour B.

Soit Ω un domaine de frontière Σ. On sait que Σ est un ensemble fermé, qui a par conséquent (**18**) une *partie impropre* $\mathcal{E}$. Nous avons vu aussi que $\Sigma - \mathcal{E}$ est encore un ensemble fermé.

Aucun point de $\mathcal{E}$ n'est limite de points extérieurs à Ω.

Soit, en effet, Q un point de $\mathcal{E}$ et considérons une sphère (r) de centre Q qui détermine sur Σ une portion Σ_r de capacité nulle (**15**). Si Q était limite de points extérieurs à Ω, (r) contiendrait à l'intérieur de tels points et, naturellement, des points de Ω. D'après le théorème précédent, la fonction harmonique égale à 0 aux points de Ω et à 1 aux points extérieurs à Ω serait harmonique « à l'intérieur » de (r), ce qui est impossible, une fonction harmonique dans (r) ne pouvant être constante dans le voisinage d'un point, sans l'être partout.

On en conclut que *$\Omega' = \Omega + \mathcal{E}$ est encore un domaine de frontière* $\Sigma' = \Sigma - \mathcal{E}$, que nous appellerons avec M. Bouligand *frontière réduite*. Elle est un ensemble réduit (**19**). On verra plus loin qu'en chaque point de cette frontière la fonction de Green de Ω, qui est la même que celle de Ω' (**32**), a sa plus petite limite nulle (**39**), tandis que, en tout point de $\mathcal{E}$, cette limite est positive et non nulle (**25**).

28. La partie impropre $\mathcal{E}$ de la frontière d'un domaine T sera donc la partie maximum de la frontière qui pourra être prise pour B, dans le théorème du paragraphe **25**; toute autre partie B de cette frontière sera contenue dans $\mathcal{E}$. Ce théorème se trouve ainsi complété.

29. Appelons *frontière extérieure* de Ω' l'ensemble Σ'_e des points de Σ' qui sont limites de points extérieurs à Ω'. Les autres points de Σ' constituent la *frontière intérieure* Σ'_i de Ω'.

$\Omega'' = \Omega' + \Sigma_i$ *est donc encore un domaine.*

On verra plus loin comment cette distinction entre les deux frontières s'introduit tout naturellement.

Faisons cependant remarquer, dès maintenant, que, d'après la manière dont elles ont été définies, il y a entre ces frontières une différence essentielle. Le fait que tout point de la frontière intérieure n'a pas dans son voisinage des points extérieurs à Ω' donne à celle-ci un autre caractère. Et en tout cas, il est à présumer que ces deux frontières pourraient jouer un rôle quelque peu différent.

30. *La solution du problème de Dirichlet généralisé pour* Ω *est la même que pour* Ω' *si les données frontières coïncident sur* Σ' (*on suppose* Σ *bornée*).

Reprenons les notations du paragraphe **2**. La partie commune $\mathcal{E}_k$ de $\mathcal{E}$ et de $\Omega'_k + \Sigma'_k$ est fermée, donc de capacité nulle. Enfermons-la dans une surface σ_k (**6**) de capacité c_k, qui pourra être arbitrairement petite. Soit d_k la partie du domaine intérieur à σ_k comprise dans Ω'_k. Nous prendrons pour Ω_k le domaine $\Omega'_k - d_k$.

Les fonctions $F_k(P)$ et $F'_k(P)$ coïncident sur Σ_k, les points de σ_k exceptés. D'après un lemme précédent (**22**) elles satisfont dans Ω_k à l'inégalité

$$|F'_K(P) - F_K(P)| < 2M\, v_K(P),$$

$v_k(P)$ étant le potentiel de σ_k tout entière, qui est supérieur à celui de la partie de σ_k appartenant à Σ_k. Mais $v_k(P) < \frac{c_k}{d_p}$ (**6**). P étant fixe, on peut choisir les surfaces σ_k de manière que c_k tende vers zéro; il en sera de même de $v_k(P)$ et, par conséquent, les limites $F'(P)$ et $F(P)$ de

$F'_k(P)$ et $F_k(P)$ sont identiques dans Ω. La solution pour Ω est donc harmonique sur $\mathcal{E}$ et donne la solution pour Ω' dans les conditions de l'énoncé.

31. Remarquons que le théorème du paragraphe **25** aurait montré immédiatement que $F(P)$ est harmonique dans Ω', mais on n'aurait pas su qu'elle est la solution pour Ω'.

Le théorème précédent ainsi que celui du paragraphe **25** complété (**28**) justifient la notion d'*ensemble impropre* que nous avons adoptée dans ce travail. Je rappelle ici ce qui a été dit dans l'Introduction (**4**). Je renvoie aussi au Mémoire cité de M. Bouligand.

32. Le théorème précédent montre, en particulier, que *la fonction de Green est la même pour les domaines* Ω *et* Ω'.

CHAPITRE III.

ÉTUDE A LA FRONTIÈRE DU POTENTIEL ET DE LA FONCTION DE GREEN.

33. Nous avons vu (**2**) que le potentiel d'un ensemble borné quelconque est le même que pour cet ensemble augmenté de ces points limites. Il suffit donc de ne considérer que les ensembles fermés. Si l'on envisage le domaine infini dont un tel ensemble est la frontière, ainsi que l'ensemble réduit correspondant, on voit *qu'il suffit*, d'après le théorème précédent, *de considérer les ensembles réduits bornés*, que nous supposerons débarrassés de leurs points « intérieurs » (¹).

Soit E un tel ensemble; il partage l'espace en un domaine infini extérieur D *d'un seul tenant*, et un domaine borné d, qui n'est pas nécessairement d'un seul tenant. Si E' est la partie de E frontière de D, on a

$$E' = E'_e + E'_i,$$

(¹) Je rappelle qu'un point d'un ensemble est dit « intérieur » lorsque l'on peut trouver un voisinage assez petit autour de ce point, formé exclusivement de points de l'ensemble.

et $E'_e = E_e$ frontière extérieure de d. Appelons, comme nous l'avons déjà fait, d'' le domaine $d + E_i$ n'ayant pour frontière que E_e.

34. *Le potentiel de l'ensemble* E'_e *tend vers* 1 *aux points d'un ensemble partout dense sur* E'_e.

Cet énoncé est équivalent au suivant :

Les points réguliers de la frontière E'_e *du domaine* $D'' = D + E'_i$ *forment un ensemble partout dense sur* E'_e.

L'équivalence résulte de ce que si le point est régulier, le potentiel tend vers 1 et, inversement, si le potentiel tend vers 1, d'après l'inégalité de M. Kellogg la fonction de Green tend vers zéro et le point est régulier. Démontrons donc le premier.

Soient p un point quelconque de E'_e et (ε) une sphère de rayon ε, centrée en ce point. Cette sphère contient nécessairement des points de d''; si q est un tel point, la plus grande sphère σ centrée en q dont le domaine intérieur soit formé de points de d'' aura sur sa surface des points de E'_e, soit p', tels que la distance $\overline{pp'}$ ne dépasse pas 2ε. Si $v(P)$ désigne le potentiel de σ et $v'(P)$ celui de E'_e, nous aurons

$$v'(P) \geqq v_1(P),$$

dans le domaine D. Comme d'ailleurs

$$\lim_{P \to p'} v_1(P) = 1,$$

il en résultera

$$\lim_{P \to p'} v'(P) = 1.$$

Ainsi, tout point p est limite de points en lesquels le potentiel prend la valeur 1, ce qui démontre le théorème.

35. *Si* E'_1 *est un ensemble réduit (borné) sans domaine intérieur d, en chacun de ses points le potentiel a sa plus grande limite égale à* 1.

Soit encore p un point de E'_1. Puisque E'_1 est réduit, sa partie commune e_n, avec une sphère (ε_n) de centre p, est de capacité non nulle, quelque petit que soit ε_n. Le potentiel de e_n a donc sa borne supérieure égale à 1 sur e_n (¹). Soit P_n un point intérieur à la sphère ($2\varepsilon_n$), n'appartenant pas à e_n, en lequel ce potentiel est supérieur à $1-\varepsilon_n$. Si ce point appartenait à E'_1, on pourrait tracer autour de lui une sphère σ_n, tout entière située dans ($2\varepsilon_n$), dans laquelle le potentiel serait encore supérieur à $1-\varepsilon_n$. Sur σ_n il y aurait nécessairement des points n'appartenant pas à E'_1, sans quoi cet ensemble aurait un domaine intérieur qui comprendrait la sphère σ_n. Si l'on appelle alors P'_n un tel point, la suite $\{P'_n\}$ tendra vers p lorsque ε_n tend vers zéro et le potentiel tendra vers 1 sur cette suite, ce qui était à prouver.

36. En réunissant les deux énoncés précédents, on obtient le théorème suivant :

Le potentiel de tout ensemble réduit borné E tend vers 1 aux points d'un ensemble partout dense sur E'_e et admet 1 comme plus grande limite en tout point de E'_i, donc de $E' = E'_e + E'_i$.

Car le potentiel de E est supérieur à celui de E'_e et à celui de toute portion $(E'_i)_r$, qui est un ensemble réduit (**19**) et remplit bien les conditions du théorème précédent, si r est assez petit.

37. L'inégalité de M. Kellogg nous permettra d'énoncer le théorème corrélatif suivant :

La fonction de Green du domaine D tend vers zéro aux points d'un ensemble partout dense sur E'_e et admet en chaque point de E' zéro comme plus petite limite.

38. Il convient de remarquer que lorsque le potentiel d'un ensemble réduit E ne prend en aucun point la valeur 1, E ne renferme pas de domaine intérieur. Appelons E_n l'ensemble des points de E où la plus petite limite du potentiel soit inférieure ou égale à $1-\varepsilon_n$; E_n est fermé. E est donc la somme des ensembles $\{E_n\}$; d'après (**8**), un de ces ensembles est nécessairement de capacité non nulle, et peut être réduit. Le potentiel d'un tel ensemble a sa plus petite limite inférieure à un nombre $\lambda < 1$.

(¹) Note (¹), p. 90.

Ainsi, dans l'hypothèse qu'il existe des ensembles réduits sans points réguliers, on peut trouver de tels ensembles pour lesquels le potentiel a la plus grande limite égale à 1 et la plus petite inférieure à $\lambda < 1$. La surface de niveau déterminée par les points où le potentiel serait égal à un nombre intermédiaire entre λ et 1 présenterait alors cette propriété, qu'*elle passerait par tous les points de l'ensemble*. Ce fait, qui caractérise les ensembles dont il est question, semble devoir intervenir pour la résolution du problème de leur existence.

39. Passons à l'étude des points frontières d'un domaine quelconque. Soit Ω un tel domaine, borné ou non, dont nous supposerons seulement que la frontière Σ soit bornée [1]. Nous avons vu (**25**), (**30**) que pour toute fonction harmonique bornée dans Ω, il n'y a pas de singularité en un point de la partie impropre $\mathcal{E}$ de Σ. Nous pouvons donc nous contenter de considérer seulement le domaine Ω' de frontière Σ' (**27**) que nous supposerons, en plus, d'*un seul tenant*, ce qui donnera plus de précision sans nuire à la généralité.

Théorème. — *Sur la frontière extérieure Σ'_e de Ω' l'ensemble des points réguliers de Σ' est partout dense. Il peut arriver que l'ensemble des points irréguliers soit aussi partout dense, sur toute la frontière Σ'.*

Sur la frontière intérieure Σ'_i on peut affirmer seulement que la plus petite limite de la fonction de Green du domaine est nulle.

Soient P_0 un point de Σ'_e et (r) une sphère centrée en ce point et de rayon assez petit pour qu'elle ait des points de Ω' sur sa surface. Appelons E la *portion* déterminée par (r) sur l'ensemble des points n'appartenant pas à Ω'. Tout point de E situé sur la sphère (r) est donc limite de points « intérieurs » à (r) appartenant à Σ' ou au

---

[1] Si la frontière n'était pas bornée, le théorème qui suit demeurerait encore vrai, à condition d'entendre par point régulier un point en lequel la fonction de Green tend vers zéro, et par point irrégulier un point irrégulier localement, comme pour le cas où la frontière est bornée. Je rappelle que la solution du problème de Dirichlet généralisé a été définie pour ce dernier cas et par conséquent les points réguliers et irréguliers aussi. C'est pourquoi il faut être circonspect lorsqu'il s'agit de domaines à frontière non bornée. Il serait intéressant d'étudier le problème de Dirichlet généralisé dans ce cas, qui a été considéré déjà par M. Bouligand pour définir la fonction de Green (page 83).

domaine « extérieur » à Ω'. Dans les deux cas, E est de capacité non nulle en ce point, et comme cela a lieu pour chacun de ses points intérieurs à (r), E *est réduit.* Il renferme d'ailleurs un domaine intérieur, que nous avons appelé d'', et qui est formé de points « extérieurs » à Ω'. Le domaine extérieur à E que nous avons désigné par D (**33**) contient Ω' et coïncide avec lui dans le voisinage de P_0 déterminé par (r). Par conséquent, entre les fonctions de Green $\mathcal{G}(P, Q)$ de D et $G(P, Q)$ de Ω' on a l'inégalité

$$\mathcal{G}(P, Q) \geqq G(P, Q).$$

D'ailleurs E'_e coïncide avec Σ'_e et E'_i avec Σ'_i à « l'intérieur » de (r). Donc, d'après le théorème précédent (**37**), si près qu'on veut de P_0, il y a des points de Σ'_e en lesquels $\mathcal{G}(P, Q)$ tend vers zéro. Il en est donc de même pour $G(P, Q)$ et *ces points sont réguliers pour* Σ' *et* Ω'.

Soit P_1 un point de Σ'_i duquel, comme centre, traçons une sphère (ρ) située tout entière dans le domaine Ω'' (**33**). Le domaine D extérieur à la portion $(\Sigma'_i)_\rho$ déterminée par (ρ) sur Σ'_i comprend Ω'; l'inégalité ci-dessus subsiste encore [$\mathcal{G}(P, Q)$ est cette fois la fonction de Green de ce dernier domaine D], et d'après le même théorème appliqué à $(\Sigma'_i)_\rho$, on conclut que *la plus petite limite de* $G(P, Q)$ *est nulle en* P_1.

Il ne reste plus qu'à montrer que l'ensemble des points irréguliers peut être partout dense sur Σ'. Il suffira, pour cela, de construire un exemple.

A cet effet, nous emploierons un principe de condensation des singularités.

Considérons une épine de révolution dont la pointe soit un point irrégulier pour le domaine extérieur à l'épine. On sait qu'il suffit, pour avoir une telle épine, de faire tourner autour de l'axe une courbe donnée en coordonnées polaires par l'équation

$$\Phi = f(\rho),$$

où $f(\rho) < A e^{-\frac{B}{\rho}}$, A et B étant des constantes positives [1]. Prenons,

---

[1] *Voir* N. WIENER, *The Dirichlet Problem* (*Bull. Massach. Inst. of Techn.*, 2e série, n° 78, avril 1924, p. 138). Le premier exemple d'un tel point irrégulier est dû à M. H. Lebesgue (*Comptes rendus de la Soc. math. de France*, 1913).

La démonstration qui suit n'est évidemment pas valable pour l'espace à 2 dimensions.

pour fixer les idées,

$$(e) \qquad \Phi = f(\rho) = e^{-\frac{B}{\rho}},$$

où B sera déterminé de la façon suivante : on choisira ρ_1 assez petit pour que : 1° $\Phi_1 = e^{-\frac{1}{\rho_1}}$ soit tel que $\operatorname{tang}\Phi_1 < \frac{1}{4}$ et 2° la courbe

$$\Phi = e^{-\frac{1}{\rho'}} \quad (0 < \rho' \leqq \rho_1)$$

coupe la perpendiculaire à l'axe en $\rho' = \rho_1$ sous un angle supérieur à $\frac{\pi}{4}$, ce qui est possible car cette courbe est tangente à l'axe pour $\rho' = 0$. Si l'on remplace alors $B\rho'$ par ρ, la courbe précédente devient

$$\Phi = e^{-\frac{B}{\rho}} \quad (0 < \rho \leqq B\rho_1)$$

et l'on prendra B assez grand pour que $B\rho_1 \operatorname{tang}\Phi_1 \geqq 1$.

Voici les raisons qui justifient ce choix. Soient A un point de la courbe (e), A' sa projection sur l'axe et O l'origine ($\rho = 0$). On a d'une part

$$AA' = OA' \operatorname{tang}\Phi < OA'\frac{1}{4} = \frac{1}{4}OA',$$

et d'autre part, si A'' est le point de la courbe tel que la projection OA''' sur l'axe de OA'' soit égale à AA', on a $A''A''' < \frac{1}{4}AA'$. Le point B de la courbe qui se projette sur l'axe en B' tel que $OB' = OA' - A'A'''$ se projette sur AA' en B'' tel que $AB'' < BB'$ d'après 2°. Donc

$$BB' > AA' - BB'' > AA' - A''A''' > \frac{3}{4}AA'.$$

Si nous considérons alors la courbe

$$(\gamma) \qquad \Phi = \frac{1}{2}f(\rho) = \frac{1}{2}e^{-\frac{B}{\rho}},$$

elle coupe chaque ordonnée telle que AA' en un point dont la distance à l'axe est supérieure à $\frac{1}{3}AA'$; elle coupe donc BB' à une distance de l'axe supérieure à $\frac{1}{4}AA'$ et par conséquent elle ne coupe pas le cercle de centre A' et de rayon A''A'''.

Conclusion. — *L'épine* (e) (donnée par la courbe de même nom), *d'axe* AA' *et de pointe* A, *pénètre « à l'intérieur » de l'épine* (γ), *donc aussi des épines* (e_n) *données par les courbes*

$$(e_n) \qquad \Phi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{2^{n+1}}\right) f(\rho) \qquad (n \geqq 1),$$

qui entourent (γ), *et dont la pointe est également un point irrégulier.*

Quand deux épines auront la même pointe, nous supposerons qu'elles ont aussi le même axe.

Cela posé, soit S, S_1, S_2, ... une suite de sphères concentriques de rayons 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$, ...

Piquons dans la sphère S un nombre fini d'épines (e) d'axes perpendiculaires à S et de pointes (p_1). Appelons D_1 le domaine intérieur à S_1 et extérieur aux (e). D_1 *est d'un seul tenant, ainsi que le domaine qui lui est extérieur.* Soit Σ_1 sa surface; elle se compose de morceaux de la sphère S_1 et des épines (e) et a des arêtes.

Choisissons sur Σ_1 un nombre fini de points (p_2) différents des (p_1) et entre eux, et tels que toute sphère de rayon ε_1 centrée sur Σ_1 contienne de ces points. Considérons alors les épines (e) ayant ces points comme pointes, et comme axe la normale extérieure à S_1 si c'est un point situé sur S_1, ou la normale à l'axe de l'épine (plus haut AA') si c'est un point situé sur une épine de pointe (p_1) et non sur S_1. Le domaine D_2 sera intérieur à S_2 et extérieur aux épines (e) de pointes (p_2) et (e_1) de pointes (p_1) (*voir* ci-dessus). D_2 *est d'un seul tenant, ainsi que le domaine qui lui est extérieur.* Il a même aspect que D_1, sauf qu'il est formé d'épines (e) et (e_1), ces dernières, ayant bourgeonné, portent sur leur *partie située dans* S_1 des bouts d'épines (e) reposant sur leur base.

Sur Σ_2, frontière de D_2, on refait la même chose. On prend un nombre fini de points (p_3) différents entre eux et des précédents et tels que toute sphère centrée sur Σ_2 et de rayon ε_2 (ε_1, ε_2, ... tendant vers zéro) contienne de ces points. Le domaine D_3 sera intérieur à S_3 et extérieur aux épines (e_2) de pointes (p_1), (e_1) de pointes (p_2) et (e) de pointes (p_3), ces dernières ayant leur axe perpendiculaire à S_2 et vers l'extérieur si leur pointe est située sur S_2 ou normal à l'axe de l'épine si leur pointe est située sur une épine. Il est à peine besoin de dire que D_3 *est d'un seul tenant, ainsi que son domaine extérieur.*

Pour arriver d'un point extérieur à D_3 à un point (p_3), il suffit de pénétrer dans le canal (γ) de l'épine de pointe (p_1) qui supporte l'épine choisie de pointe p_3, bifurquer dans le canal (γ) de l'épine de pointe p_2 qui supporte l'épine donnée, et enfin bifurquer dans le canal (γ) de l'épine donnée qui aboutit au point (p_3) choisi. Il en est ainsi quel que soit le domaine D_n de la suite des domaines $D_1, D_2, D_3, \ldots$ déduits par la répétition du procédé indiqué. D'après ce qu'on a vu plus haut, pour toutes les épines (e) et (e_n) employées dans la construction, les canaux (γ) appartiennent toujours aux domaines extérieurs des domaines de la suite. Cette double suite de domaines *est d'un seul tenant.*

Les domaines D_n ont une limite $D = D_1 + D_2 + D_3 + \ldots$ qui est un domaine *d'un seul tenant*, car deux quelconques de ses points appartiennent à un D_n pour n assez grand et les D_n vont en se dilatant. Soit Σ la frontière de D. Le *domaine extérieur à* D *est aussi d'un seul tenant.* En effet, le voisinage de tout point M de ce domaine fait partie du domaine, également. Il en résulte que si M est intérieur à la sphère S' limite des S_n ou sur cette sphère, il existe un point M' sur le rayon OM (O centre des S_n) qui soit « intérieur » aux S_n, à partir d'un n assez grand et qui soit compris dans le voisinage de M. Alors, ou bien le rayon OM' prolongé au delà de M' ne rencontre pas Σ et alors on peut joindre M' à un point extérieur à S', ou bien cela n'est pas possible et alors le point M' doit se trouver avec son voisinage dans une épine (bourgeon) d'axe perpendiculaire à un rayon de S'. Il y aura un tel bourgeon de sommet p_k dans le canal (γ) duquel se trouvera M' et son voisinage, car ce voisinage est fixé et, d'après la construction, les axes des bourgeons (AA') tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En suivant alors les K canaux (γ) à partir de celui d'extrémité p_k on pourra sortir de la sphère S', dont l'extérieur fait partie du domaine extérieur à D; ce domaine est donc d'un seul tenant.

Sur la frontière Σ, les points (p_n) forment un ensemble partout dense. Tout point p_n est *irrégulier* pour la frontière Σ de D, car il est le sommet d'une épine (e) qui contient Σ dans le voisinage de son sommet. Les points du canal (γ) de p_n sont des points « extérieurs » à D, ce qui permet d'affirmer que Σ *est une frontière réduite;* c'est la frontière extérieure de D, qui est ainsi dépourvu de la frontière intérieure. Mais une telle frontière, ayant un ensemble de points irréguliers partout dense, est facile à construire. Considérons, en effet, la portion Σ_i de Σ déterminée par une sphère $\left(\frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{1}{2}$, centrée sur Σ. L'ensemble Σ_i n'a pas de domaine intérieur d (**33**) car tout point de D peut être joint avec O, donc avec l'extérieur de Σ_i. Mais, dans le voisinage de tout point de Σ_i, il y a des points (p_n) qui sont *a fortiori* irréguliers pour le domaine de frontière Σ_i. D'ailleurs, *cette frontière est réduite* (**19**).

En plaçant alors Σ_i « à l'intérieur » de D, on obtient un domaine Ω' et sur sa frontière totale Σ' (réduite) l'ensemble des points irréguliers est partout dense.

Si dans l'exemple précédent on avait fait la construction vers l'intérieur pour une suite de sphères S_n concentriques décroissantes et tendant vers une sphère S' de rayon non nul, on aurait obtenu un domaine infini jouissant des propriétés requises. Le théorème est démontré ([1]).

40. Il est intéressant de remarquer que ce dernier domaine est un exemple d'un ensemble E'_e dont le potentiel ne tend vers aucune limite en un ensemble de points partout dense sur E'_e. On sait que, au contraire, le potentiel tend vers 1 sur un pareil ensemble (**34**).

41. Le théorème précédent montre, d'une part, que l'*ensemble des points irréguliers de la frontière peut être de capacité non nulle;* et, d'autre part, qu'il pourrait y avoir une différence entre la frontière extérieure et la frontière intérieure (**29**) en ce que, tandis que sur la première l'ensemble des points réguliers de Σ' est partout dense, sur

---

([1]) Lorsque la frontière n'est pas bornée, on voit comment on pourrait former un exemple analogue au précédent. Il suffirait de remplacer les sphères S_n par des cylindres C_n dont la hauteur tendrait vers l'infini. Je n'insiste pas.

la seconde il se pourrait qu'il n'y ait pas de point régulier du tout. Il en serait ainsi, si l'on savait qu'*il existe des ensembles réduits sans points réguliers*. En effet, un tel ensemble (**38**) n'aurait pas de domaine intérieur, et pourrait être pris pour la frontière intérieure d'un domaine.

42. Mais on ignore encore s'il existe de tels ensembles.

Il se peut qu'il en existe; le critère de régularité d'un point frontière donné par M. Wiener [1] montre qu'il n'y a *apparemment* aucune impossibilité à ce qu'un ensemble ait une capacité non nulle et qu'il ait chacun de ses points comme point irrégulier.

43. Le théorème précédent contient les deux énoncés suivants, qui sont dus à M. Bouligand :

1° *La plus petite limite de la fonction de Green d'un domaine dont la frontière a été débarrassée de ses ensembles impropres est nulle en tout point de la frontière* (n° 18, p. 82, *Annales de la Société polonaise, etc.*).

2° *Tout point irrégulier de cette frontière est nécessairement limite de points réguliers* (n° 30, p. 97, *loc. cit.*).

Toutefois, pour le dernier énoncé, il convient de se limiter, comme nous avons été conduits à le faire, à la frontière extérieure du domaine par suite de ce qu'on a vu plus haut (**41**).

44. Considérons la solution du problème de Dirichlet généralisé $F(P)$ correspondant aux valeurs $f(Q)$ sur Σ' (**2**). Si ε est arbitraire, l'ensemble e des points de Σ' où quelque valeur limite de $F(P)$ est extérieure (au sens large) à l'intervalle $[f(Q)-\varepsilon, f(Q)+\varepsilon]$ est fermé.

En chaque point de e la fonction de Green $G(P, Q)$ de Ω' a sa plus grande limite différente de zéro, soit λ; sans quoi, le point serait régulier et $F(P)$ tendrait vers $f(Q)$ en ce point. Appelons e_n l'ensemble de ceux des points de e ou $\lambda \geqq \frac{1}{n}$, e_n est fermé. D'après l'inéga-

(1) *On the Dirichlet Problem* (*Bull. Massach. Inst. of Tech.*, 2e série, n° 78, avril 1924, p. 130).

lité de M. Kellogg qui s'écrit

$$v(P) \leqq 1 - r(1-M)G(P, Q),$$

lorsque $G(P, Q)$ tend sur une suite de points, vers une limite $\lambda \geqq \frac{1}{n}$, $v(P)$ a sur la même suite une plus petite limite inférieure à

$$1 - r(1-M)\frac{1}{n} < 1.$$

Ceci arrive pour tout point de e_n dont $v(P)$ est le potentiel.

Donc, *dans l'hypothèse* « qu'un ensemble de capacité nulle a nécessairement des points réguliers », l'ensemble e_n serait de capacité nulle nécessairement (**38**) et il *en serait de même de* e (**8**). On arrive ainsi à l'énoncé suivant dû à M. Bouligand (*loc. cit.*, n° 27, p. 93).

« *L'ensemble des points de la frontière où quelque valeur limite de* $F(P)$ *est extérieure à l'intervalle* $[f(Q)-\varepsilon, f(Q)+\varepsilon]$ *est de capacité nulle.* »

45. Remarquons que dans l'hypothèse faite, *l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des points irréguliers de la frontière serait impropre*. En effet, la démonstration précédente montre que l'ensemble des points E_n de Σ' où la plus grande limite de $G(P, Q)$ est supérieure à $\frac{1}{n}$ est de capacité nulle. $\mathcal{E}$ est la somme de E_n. Soient E une partie fermée de $\mathcal{E}$ et e_n sa partie commune avec E_n. e_n serait fermée et comme E est la somme des e_n, il serait aussi de capacité nulle (**8**). $\mathcal{E}$ serait donc impropre (**14**).

46. Si l'on pouvait construire un exemple de domaine pour lequel l'ensemble des points irréguliers *ne soit pas impropre*, l'hypothèse faite ci-dessus se trouverait infirmée.

47. *Dans l'hypothèse contraire* « qu'il existe des ensembles réduits sans points réguliers », les résultats ci-dessus ne seraient plus vrais. Car, comme nous l'avons dit (**41**), un tel ensemble pourrait être pris pour la frontière intérieure Σ'_i d'un domaine, et un au moins des ensembles E_n (**45**) relatifs à Σ'_i serait de capacité non nulle (**8**), soit E_n.

L'ensemble des points où quelque valeur de $G(P, Q') - \frac{1}{r}$ $\Big[$la solution du problème de Dirichlet généralisé pour $f(Q) = -\frac{1}{r}$, r étant la distance $\overline{QQ'}\Big]$ est extérieure à l'intervalle $\left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{n}, -\frac{1}{r} + \frac{1}{n}\right]$ serait alors de capacité non nulle.

D'ailleurs, l'ensemble des points irréguliers de la frontière, contenant Σ'_i ne serait plus impropre.

Janvier 1928.