JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Sur un problème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables et sur divers points de la théorie des fonctions harmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 363-375.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__363_0>

Sur un problème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables et sur divers points de la théorie des fonctions harmoniques;

PAR GEORGES **BOULIGAND**.

1. La publication par M. Henri Cartan, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, de plusieurs théorèmes remarquables sur le développement en série de polynomes homogènes d'une fonction de deux variables complexes, holomorphe dans un domaine cerclé de M. Carathéodory ([1]), me fournit une occasion naturelle de reprendre, avec quelques détails, l'étude d'un problème intéressant, au sujet duquel j'avais mentionné divers résultats, dans une Note antérieure ([2]). La solution de ce problème fait intervenir des considérations de géométrie des ensembles, très apparentées à celles que j'ai présentées dans divers Mémoires et dont M. Georges Durand a prolongé notablement l'étude ([3]).

Pour faciliter l'énoncé, je rappelle d'abord que le développement autour d'un point régulier P_0, à coordonnées réelles, d'une fonction harmonique $U(P)$, en série de polynomes homogènes par rapport aux composantes de $\overrightarrow{P_0P}$, converge dans la sphère du centre P_0 passant par le point singulier réel le plus proche de P_0. Comme nous le verrons

([1]) HENRI CARTAN, *Les fonctions de deux variables complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 190, p. 354 et 718).

([2]) BOULIGAND, *Sur l'étude directe de certaines fonctions monogènes dans le domaine réel* (*C. R. du Congrès des Sociétés savantes en* 1925 : *Sciences*).

([3]) *Voir* les n^{os} 6 et 7 du présent Mémoire.

plus loin, cette propriété appartient à une famille de fonctions beaucoup plus générale, comprenant *en particulier* les fonctions dont l'ensemble des points singuliers imaginaires se localise sur les cônes isotropes ayant leurs sommets aux points singuliers réels.

Je vais appeler pour abréger *fonction à champ réel autonome* toute fonction uniforme $\varphi(P)$ (1) qui autour d'un point P_0 régulier quelconque du champ réel se développe en une série de polynomes, homogènes par rapport aux composantes de $\overrightarrow{P_0P}$, cette série étant absolument convergente dans la sphère de centre P_0, passant par le point singulier réel le plus rapproché de P_0. Le problème dont nous allons nous occuper consiste à distinguer les fonctions uniformes à champ réel autonome.

2. Soit le point P_0 à coordonnées $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ réelles. Considérons un développement de la forme

$$\sum_m \varphi_m(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0), \tag{1}$$

où φ_m représente un polynome homogène et de degré m. Menons par le point P_0 une droite *réelle* de cosinus directeurs $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Soit P un point réel de cette droite (orientée) tel que

$$\overline{P_0P} = \rho.$$

Le développement précédent se réduit sur cette droite à la série entière en ρ

$$\sum_m \rho^m \varphi_m(c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{2}$$

La condition de notre problème peut se formuler de la manière suivante : l'intervalle de convergence de cette série doit égaler la distance du point P_0 au point singulier réel le plus proche de la fonction admettant le développement (1). Désignons par S ce point.

Sur la droite précédente, le rayon de convergence de la série (2) n'est limité que par des points singuliers, réels ou imaginaires, portés

(1) Il s'agit d'uniformité dans le champ réel : voir la note du n° **12**.

par cette droite, c'est-à-dire ayant des coordonnées de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 + iy_1 = x_1^0 + c_1(u + iv), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n + iy_n = x_n^0 + c_n(u + iv). \end{cases}$$

Utilisons maintenant cette remarque familière de géométrie analytique : si les $y_1, \ldots, y_n$ ne sont pas tous nuls, il existe une droite réelle et une seule contenant le point

$$x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n.$$

Cette droite est issue du point $(x_1, \ldots, x_n)$ et contient le vecteur de composantes $(y_1, \ldots, y_n)$. On peut établir une correspondance biunivoque entre le point imaginaire précédent et le vecteur lié, ayant pour origine le point $(x_1, \ldots, x_n)$ et pour composantes $(y_1, \ldots, y_n)$. Cela fournit une représentation d'un point imaginaire, par un vecteur lié, telle que le support de ce vecteur soit justement l'unique droite réelle passant par ce point imaginaire. Voici un autre avantage : prenons la droite précédente pour axe des X_1 ; alors un de ses points imaginaires aura des coordonnées $(X_1 + iY_1, 0, \ldots, 0)$, si bien que $|Y_1|$ représente précisément la longueur du vecteur M_1M_2 ; ou mieux, si l'on veut obtenir dans le mode précédent la représentation, fidèle aux conventions usuelles, de l'affixe d'un point imaginaire M_1M_2 d'une droite réelle, il suffit, dans un plan orienté mené par cette droite, de faire tourner le vecteur M_1M_2 de $+\frac{\pi}{2}$ autour de son origine (¹).

(¹) Pour une étude systématique de la représentation des points imaginaires, je renvoie le lecteur à l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. III, vol. 2, fasc. 1, p. 98 et suiv. Au mode actuel de figuration se rattachent divers problèmes :

A. A chaque fonction analytique $x_2 + iy_2 = f(x_1 + iy_1)$, correspond dans le plan (x_1, x_2) un champ vectoriel (y_1, y_2) de divergence nulle et tel que

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = 1 \qquad (C. R., \text{ 23 juin 1930}),$$

d'où une correspondance entre les fonctions analytiques et les solutions de $rt - s^2 = 1$.

B. Prenons maintenant $x_3 + iy_3 = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$. A chaque point

3. Ces remarques simples s'adaptent bien à la question actuelle. En effet étant donnée une fonction analytique de plusieurs variables complexes, pour étudier le développement de cette fonction, sous la forme (1), dans le champ réel, autour d'un point P_0 et ses conditions de convergence, nous sommes amenés à chercher les points singuliers (réels ou non) de l'empreinte de cette fonction sur chaque droite réelle (compte tenu des points imaginaires de cette droite), et ce qui précède nous donne une représentation géométrique de ces points singuliers.

Soit donc $\Delta\Delta'$ une droite réelle. Considérons l'image M_1M_2 d'un point singulier imaginaire situé sur $\Delta\Delta'$. Soit P_0 un point réel de $\Delta\Delta'$. Cherchons la condition pour que la présence de M_1M_2 laisse cependant subsister l'autonomie du champ réel pour la fonction étudiée. Nous allons prouver qu'*elle peut se traduire par l'inégalité*

$$(4) \qquad \overline{M_1M_2}^2 + \overline{M_1P_0}^2 \geqq \delta^2(P_0),$$

imposée à tout point P_0 *de la droite* $\Delta\Delta'$, *en désignant par* $\delta(P_0)$ *la plus courte distance du point* P_0 *à l'ensemble des points singuliers réels.*

En effet soit $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ le point singulier imaginaire représenté par le vecteur lié M_1M_2. Appelons $c_1, c_2, \ldots c_n$ les cosinus directeurs de $\Delta\Delta'$. Des coordonnées $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ du point réel P_0 on passe à celles de notre point imaginaire par les formules (3). Relativement à l'origine P_0 prise sur l'axe réel $\Delta\Delta'$, l'abscisse complexe de notre point imaginaire a $u^2 + v^2$ pour carré de son module. Donc l'intervalle de convergence ρ de la série (2) satisfait à l'inégalité

$$u^2 + v^2 \geqq \rho^2.$$

En appelant $\delta(P_0)$ la plus courte distance du point P_0 à l'ensemble

---

$M_1(x_1, x_2, x_3)$, correspond ici une courbe lieu de l'extrémité M_2 de notre vecteur. Pour M_1 arbitraire, ces courbes forment un complexe, qui dans le cas où f est linéaire dégénère en une congruence formée de droites parallèles. A chaque M_2 correspond de même une courbe lieu de M_1, qui pour f linéaire est une droite de la congruence précédente. Dans le cas de f quelconque, ces propriétés admettent le prolongement différentiel suivant : soit M_1M_2 un vecteur figuratif provenant de la fonction f; la tangente en M_1 à la courbe décrite par M_1 lorsque M_2 reste fixe et la tangente en M_2 à la courbe décrite par M_2 lorsque M_1 reste fixe sont des droites parallèles.

des points singuliers **réels**, nous devons donc avoir

$$u^2 + v^2 \geqq \delta^2(P_0),$$

ou encore [compte tenu des relations (3)]

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 \geqq \delta^2(P_0),$$

ou enfin

$$(4) \qquad \overline{P_0 M_1}^2 + \overline{M_1 M_2}^2 \geqq \delta^2(P_0). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette inégalité jouera par la suite un rôle fondamental.

4. Commençons par étudier le cas d'un point singulier réel unique. Soit S ce point. L'inégalité (4) devient

$$(4') \qquad \overline{P_0 M_1}^2 + \overline{M_1 M_2}^2 \geqq \overline{P_0 S}^2.$$

Elle doit être satisfaite pour toute position du point P_0 sur la droite $M_1 M_2$.

Désignons par H la projection orthogonale de S sur cette droite. Nous aurons

$$\overline{M_1 M_2}^2 \geqq \overline{SH}^2 + \left(\overline{HP_0}^2 - \overline{P_0 M_1}^2\right).$$

Pour que le second membre ne devienne pas infini positif lorsque le point P_0 s'éloigne indéfiniment dans l'un des deux sens sur la droite, il faut que le point M_1 coïncide avec le point H. Notre inégalité se réduit donc alors à

$$\overline{M_1 M_2}^2 \geqq \overline{SH}^2.$$

D'où :

Théorème A. — *Quand une fonction à champ réel autonome n'a qu'un point singulier réel à distance finie, la représentation d'un point singulier imaginaire est un vecteur lié* $M_1 M_2$ *tel que le triangle* $SM_1 M_2$ *soit rectangle en* M_1 *et que l'angle aigu* $SM_1 M_2$ *soit au moins égal à* 45°.

Dans le cas seulement où cet angle est précisément de 45°, on obtient des points singuliers situés sur le cône isotrope de sommet S.

Le théorème A nous fournit la distribution des points singuliers imaginaires compatibles avec l'autonomie du champ réel dans le cas d'un point singulier réel unique S. Nous appellerons pour abréger

$I(S)$ un ensemble de points imaginaires M_1M_2 attachés au point S suivant la condition exprimée dans l'énoncé du théorème A.

5. Nous allons maintenant établir une autre proposition importante :

Théorème B. — *Considérons dans le champ réel un ensemble fermé* F *de points* S. *Supposons qu'à chaque point* S *soit attaché un ensemble* $I(S)$ *conforme à la condition du théorème* A. *Si une fonction a ses singularités localisées sur la réunion des ensembles* $I(S)$ *relatifs aux divers points* F *de* S, *cette fonction est à champ réel autonome.*

En effet, soit un point singulier imaginaire, représenté par le vecteur lié M_1M_2. Ce point est attaché à un point réel (au moins) S de l'ensemble F dans les conditions exprimées par l'énoncé du théorème A. Donc, quel que soit le point P_0 pris sur la droite M_1M_2, nous aurons

$$\overline{P_0M_1}^2 + \overline{M_1M_2}^2 \geqq \overline{P_0S}^2.$$

Dès lors, ou bien S est le point singulier réel le plus rapproché de P_0, on a donc

$$\delta^2(P_0) = \overline{P_0S}^2$$

et par suite, l'inégalité (4) est satisfaite; ou bien S n'est pas le point singulier réel le plus rapproché de P_0 ; on a donc

$$\delta^2(P_0) < \overline{P_0S}^2$$

et par suite, l'inégalité (4) est vérifiée *a fortiori*. C. Q. F. D.

Conséquence. — Un polynome par rapport à des fonctions à champ réel autonome n'ayant chacune qu'un point singulier réel et prises en nombre fini est une fonction à champ réel autonome.

6. D'après le théorème B, en réunissant les ensembles singuliers de fonctions à champ réel autonome n'ayant chacun qu'un point singulier réel unique, on obtient une nouvelle fonction à champ réel autonome.

Mais les ensembles singuliers, compatibles avec notre propriété d'autonomie, dont la classe se trouve définie par cette opération de réunion, ne sont pas les plus généraux. Cette classe est en effet celle qui prendrait naissance, si au lieu d'exprimer l'inégalité (4), on écrivait que l'on a

$$\overline{P_0M_1}^2 + \overline{M_1M_2}^2 \geqq \overline{P_0S}^2,$$

pour tout point S de l'ensemble F. En fait, l'inégalité (4) est beaucoup plus large que cet ensemble des conditions.

Nous allons approfondir les conséquences de l'inégalité (4) *dans le cas où l'ensemble* F *des points singuliers réels* (à distance finie) *est borné.* Ce cas comprend notamment celui où l'ensemble F ne contient qu'un nombre fini de points.

Nous allons établir une proposition importante :

Théorème C. — *Quand une fonction à champ réel autonome admet pour ensemble de ses points singuliers réels un ensemble* F *borné, la représention d'un point singulier imaginaire est un vecteur lié* M_1M_2 *tel que, sur la droite portant ce vecteur, le point* M_1 *appartienne au segment fermé minimum contenant les projections orthogonales des points de* F.

Il s'agit de montrer que l'inégalité (4) ne peut avoir lieu si le point M_1 se trouve sur l'une des demi-droites prolongeant, au delà de l'une de ses extrémités, le segment minimum AB contenant les projections orthogonales des points de F sur la droite portant M_1M_2. Prenons l'une de ces demi-droites, soit par exemple $A\Delta$. Par hypothèse, la fonction étudiée est à champ réel autonome. Nous avons donc, en vertu de (4), en prenant P_0 sur $A\Delta$:

$$\overline{P_0M_1}^2 + \overline{M_1M_2}^2 \geqq \delta^2(P_0) \geqq \overline{P_0A}^2.$$

Cela posé, si le point M_1 était situé sur $A\Delta$, la différence

$$\overline{P_0A}^2 - \overline{P_0M_1}^2 = (P_0A + P_0M_1)AM_1$$

croîtrait indéfiniment avec la distance P_0A. Elle ne pourrait donc rester moindre que $\overline{M_1M_2}^2$. C. Q. F. D.

7. Continuons à supposer que l'ensemble F soit borné. Donnons-nous un point M_1 et cherchons à exprimer les conditions qu'il faut

imposer à la direction M_1M_2 pour que le point singulier représenté par le vecteur lié M_1M_2 ne trouble pas l'autonomie du champ réel.

D'après le théorème C, la variété linéaire perpendiculaire en M_1 à M_1M_2 doit être comprise entre les deux variétés projetantes extrêmes de points de F sur la droite M_1M_2, variétés qui lui sont parallèles. Or lorsque la direction M_1M_2 est arbitraire, ces variétés projetantes extrêmes *enveloppent* (au sens de la théorie des enveloppes par réunion de M. Georges Durand) (¹) la plus petite région convexe contenant l'ensemble F. Désignons-la par R. Par suite, pour qu'une direction Δ issue du point M_1 convienne, il faut et il suffit que la variété linéaire à $n-1$ dimensions, menée par M_1 normalement à cette direction coupe le cône de sommet M_1 circonscrit à R; ou encore que la direction Δ se trouve à l'intérieur du cône supplémentaire de sommet M_1. Les deux cônes précédents n'existent que si le point M_1 est situé à l'extérieur de R. Si le point M_1 est dans R, on voit que la direction M_1M_2 peut être quelconque.

8. Considérons un point M_1 et une direction permise passant par ce point. D'après le théorème C, le point M_1 appartient au segment fermé minimum AB contenant les projections orthogonales des points de F sur la droite considérée.

Nous aboutissons de la sorte à une condition nécessaire. Mais il reste encore à exprimer que, pour le point M_1 pris sur le segment AB, on a

$$\overline{M_1M_2}^2 \geqq \max_{P_0 \in AB} \left[\delta^2(P_0) - \overline{M_1P_0}^2 \right].$$

On voit que cette condition, à l'encontre de celle que avions énoncée dans le théorème C, n'est pas susceptible de s'exprimer simplement. Elle met en jeu le maximum de la fonction entre crochets, maximum qui dépend de la position du point M_1 sur le segment AB, en même temps que de la structure de l'ensemble F.

(¹) Cette théorie sera exposée ici même dans un important Mémoire de M. G. Durand qui paraîtra prochainement. Voir en attendant ses Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1929-1930).

9. Pour terminer cette étude de l'ensemble des points singuliers imaginaires d'une fonction à champ réel autonome, nous observerons que si l'on considère un point singulier réel isolé O et qu'on se borne à chercher les conditions imposées aux vecteurs $M_1 M_2$ qui correspondent à des points singuliers très voisins de O, on trouve encore (par un raisonnement analogue à la démonstration du théorème A) que le triangle OM_1M_2 doit être rectangle en M_1 et que l'on doit avoir

$$M_1 M_2 > OM_1.$$

10. Relativement aux fonctions à champ réel autonome, nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME D. — *Si une fonction à champ réel autonome est régulièrement analytique en chaque point d'un domaine ouvert* Δ (de l'espace réel), *son développement taylorien autour de chaque point* $P_0(x^0, \ldots, x_n^0)$ *de* Δ *converge pour tout point* $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ *tel que l'on ait*

$$(6) \qquad |x_1 + iy_1 - x_1^0| < \lambda_1, \qquad \ldots, \qquad |x_n + iy_n - x_n^0| < \lambda_n,$$

avec

$$(7) \qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \frac{R^2}{2},$$

où R *désigne la plus courte distance du point* P_0 *à la frontière de* Δ.

En effet, par suite de l'autonomie du champ réel, si $M_1 M_2$ représente quelque point singulier imaginaire, en tout point réel P de la droite $M_1 M_2$ intérieur à la sphère Σ de centre P_0 et de rayon R, nous aurons l'inégalité fondamentale (4), d'où

$$\overline{M_1 M_2}^2 + \overline{M_1 P}^2 \geqq \delta^2(P) \geqq (R - P_0 P)^2.$$

Donc $\overline{M_1 M_2}^2$ dépassera le maximum sur cette droite de

$$\varphi(P) = (R - P_0 P)^2 - \overline{M_1 P}^2,$$

maximum qui ne nous intéresse que pour M_1 intérieur à Σ, car alors seulement, il est positif.

Or, pour trouver un système $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de rayons de convergence, c'est-à-dire de longueurs telles que les inégalités (6) définissent un domaine d'holomorphie de la fonction, il nous suffit de trouver le minimum de

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \overline{P_0 M_1}^2 + \overline{M_1 M_2}^2,$$

sous la condition

$$\overline{M_1 M_2}^2 \geqq \max_{\text{pour P sur } M_1 M_2} \varphi(P)$$

et d'égaler à ce minimum la somme $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2$.

Supposons provisoirement M_1 donné. Prenons pour plan de la figure celui qui contient le point P_0 et la droite $M_1 M_2$. Nous cherchons

$$\min \left\{ \overline{P_0 M_1}^2 + \max_{\text{pour P sur } M_1 M_2} \left[(R - P_0 P)^2 - \overline{M_1 P}^2 \right] \right\}.$$

Cherchons l'orientation qu'il faut donner à la droite $M_1 M_2$ (issue de M_1) pour que le maximum de $\varphi(P)$ sur cette droite (ou mieux sa partie intérieure à la sphère) soit aussi petit que possible. Pour une position donnée Δ de la droite $M_1 M_2$, le point P_1 où a lieu le maximum de $\varphi(P)$ s'obtient en menant en M_1 la perpendiculaire $M_1 H$ à Δ et joignant $P_0 H$ qui coupe Δ en P_1 : effectivement, en ce point P_1, il est facile de s'assurer que le gradient de $\varphi(P)$ est normal à Δ; en P_1, la grandeur géométrique de ce vecteur est en effet

$$2\left(\overrightarrow{HP_1} - \overrightarrow{M_1 P_1}\right),$$

et par suite, sa projection sur Δ est bien nulle. Quant à la valeur du maximum, elle est égale à

$$\overline{HP_1}^2 - \overline{M_1 P_1}^2 = \overline{M_1 H}^2.$$

Son minimum a donc lieu quand le point H se confond avec le point A, c'est-à-dire quand la droite $M_1 M_2$ est perpendiculaire à $P_0 A$.

Finalement, nous sommes donc ramenés à chercher le minimum de

$$\overline{P_0 M_1}^2 + (R - P_0 M_1)^2 = u^2 + (R - u)^2$$

pour l'ensemble des positions de M_1 : ce minimum est $\frac{R^2}{2}$. Le résultat annoncé est donc établi.

11. Au cours du raisonnement qui précède, nous avons rencontré ce résultat : soit une fonction à champ réel autonome, analytiquement régulière en chaque point réel d'une sphère Σ de centre P_0 et de rayon R; les seuls points singuliers imaginaires représentés par un vecteur M_1M_2 dont l'origine M_1 est intérieure à la sphère sont tels que la longueur M_1M_2 dépasse le segment M_1H compris entre la droite perpendiculaire M_1M_2 et l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, sous-tendu par cette droite. La question se pose de savoir si l'on ne pourrait substituer à la relation (7) une autre plus large

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0.$$

La réponse est négative; nous allons montrer que, dans l'espace $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, la sphère

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \frac{R^2}{2}$$

est le domaine maximum où les inégalités (6) permettent d'affirmer la convergence du développement en série de puissances.

En effet, soient donnés $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, et le point P_0 étant choisi pour origine, cherchons le minimum de $|x_n + iy_n|$ au-dessous duquel nous soyons certains de l'absence de point singulier. Ce minimum se détermine en tenant compte des conditions suivantes :

1° On a

$$(8) \qquad x_1^2 + y_1^2 \leqq \lambda_1^2, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 \leqq \lambda_{n-1}^2.$$

2° En l'absence de point singulier s'opposant à l'autonomie du champ réel, on a

$$\overline{M_1M_2}^2 \geqq \min\left(\overline{M_1H}^2\right) = (R - P_0M_1)^2,$$

d'où

$$(9) \qquad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2} \geqq R \quad (^1).$$

Or, dans ce champ, on prouve aisément que le minimum de $x_n^2 + y_n^2$

(1) On déduit de là l'holomorphie de la fonction dans le domaine défini par

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2} < R.$$

est le même que dans le champ obtenu en remplaçant les conditions (8) et (9) par des égalités.

Or, ce minimum est encore celui de $x_n^2+y_n^2$, où x_n et y_n sont soumis à la condition [1]

$$\sqrt{u^2+x_n^2}+\sqrt{v^2+y_n^2}=R,$$

u et v désignant les variables auxiliaires

$$u^2=x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2,$$
$$v^2=y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2,$$

soumises maintenant à la condition

$$u^2+v^2=\lambda_1^2+\ldots+\lambda_{n-1}^2.$$

Or, la méthode classique nous ramène à écrire l'annulation des dérivées partielles de

$$x_n^2+y_n^2-2\mu\left(\sqrt{u^2+x_n^2}+\sqrt{v^2+y_n^2}\right),$$

ce qui donne

$$\sqrt{u^2+x_n^2}=\sqrt{v^2+y_n^2}=\mu=\frac{R}{2},$$

d'où

$$x_n^2+y_n^2=\frac{R^2}{2}-u^2-v^2$$
$$=\frac{R^2}{2}-\lambda_1^2-\ldots-\lambda_{n-1}^2,$$

ce qui nous ramène bien a l'équation (7).

Nous retrouvons ainsi un résultat déjà obtenu, mais cette seconde forme offre l'avantage de montrer qu'on ne peut aller au delà.

12. Le théorème du n° **10** s'applique notamment aux fonctions harmoniques et, plus généralement, aux solutions d'équations de la forme

$$\Delta^{(n)}u+\lambda_{n-1}\Delta^{(n-1)}u+\ldots+\lambda_2\Delta^{(2)}u+\lambda_1\Delta u+\lambda_0 u=0,$$

---

(1) Nous profitons ici d'une circonstance permettant de réduire le nombre des variables.

les λ désignant des constantes, et

$$\Delta, \quad \Delta^{(2)}, \quad \Delta^{(3)}, \quad \ldots$$

le laplacien et les opérateurs itérés ([1]).

Il s'ensuit aisément que si, dans le champ réel indéfini, une solution d'une équation aux dérivées partielles du type précédent est partout régulière, elle constitue de ce fait même une fonction entière des variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

([1]) Il est à peine besoin d'ajouter qu'une de ces fonctions, uniforme dans le champ réel, n'est pas nécessairement uniforme dans le champ complexe. Ce fait est bien connu pour la solution élémentaire de l'équation de Laplace à deux ou trois variables.