JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Intégrales quadratiques de l'équation $\frac{\delta^2\theta}{\delta u \delta v} = \left[-\frac{6}{(u-v)^2} + \frac{2}{(u+v)^2}\right]\theta$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 333-361.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__333_0>

Intégrales quadratiques de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\left[-\frac{6}{(u-v)^2}+\frac{2}{(u+v)^2}\right]\theta;$$

PAR BERTRAND GAMBIER.

---

1. *Introduction.* — On dit que les solutions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ de l'équation de Moutard

$$\text{(M)}\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-k\theta=0$$

sont *quadratiques*, si elles vérifient identiquement la relation

$$\text{(1)}\qquad \theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_p^2=\mathrm{U}+\mathrm{V},$$

où U dépend de u seul, V de v seul. Cette terminologie est due à Guichard [*Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903)]. Si les intégrales $\theta_1, \ldots, \theta_p$ ne sont pas linéairement distinctes, elles s'expriment linéairement au moyen de $q<p$ intégrales $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_q$: le premier membre de (1) devient une forme quadratique en $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_q$ que l'on décompose en une somme de $r(\leqq q)$ carrés indépendants et il y a lieu de ne parler que de r intégrales quadratiques.

La déformation continue d'une surface de l'espace à 3 dimensions avec réseau conjugué permanent revient à trouver une équation (M) qui possède *trois* intégrales quadratiques. La recherche de surfaces à lignes de courbures sphériques dans un ou deux systèmes revient à une recherche analogue (avec, en particulier, $p=6$); la recherche de certains systèmes cycliques conduit également à la recherche d'intégrales quadratiques : je renvoie le lecteur à divers Mémoires de

M. Demoulin (*Bulletins de la Classe des Sciences de Belgique*, 1919, 1920, 1921). J'ai indiqué moi-même aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1929, 1[er] semestre) comment on détermine les intégrales quadratiques de l'équation particulière (n entier) :

$$E_n \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + \frac{n(n+1)z}{(u-v)^2} = 0,$$

où l'on peut, sans restreindre, supposer n positif. Cette équation avait déjà été étudiée, pour $n=1$, par M. Drach (*Annales de Toulouse*, 1898). L'équation E_n possède en particulier *deux* intégrales quadratiques déduites aussitôt des solutions

$$(2) \qquad z_1 = (u-v)^{n+1}, \qquad z_2 = \frac{1}{(u-v)^n}, \qquad z_1 z_2 = u - v.$$

Ces solutions quadratiques sont

$$(3) \qquad \theta_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2), \qquad \theta_2 = \frac{i}{2}(z_1 - z_2), \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 = u - v.$$

J'ai montré comment on peut obtenir *tous* les systèmes quadratiques de E_n ; c'est l'objet d'un Mémoire publié aux *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. XVI, 1929, p. 301-338 ; on voit aussitôt, sans discussion, à partir des formules obtenues, que pour $n=1$, le nombre p peut prendre toutes les valeurs 2, 3, ... successives, que pour $n \geqq 2$, le nombre p peut prendre toutes les valeurs $n+2$, $n+3$, ... successives ; une discussion plus complète, empruntant les résultats spéciaux obtenus par M. Demoulin (*loc. cit.*, 1921, p. 18 et suiv.) montre que pour $n \geqq 2$ toutes les valeurs paires 2, 4, 6, ... de p sont acceptables, de sorte que l'entier p n'a comme valeurs défaillantes que les nombres impairs 1, 3, 5, ... inférieurs (sans égalité) à $n+2$: pour $p=2$, on obtient outre le couple (3) donné plus haut les couples

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= (u-v)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial u^n\, \partial v^n}\left(\frac{u_1}{u-v}\right), \\ \theta_2 &= (u-v)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial u^n\, \partial v^n}\left(\frac{v_2}{u-v}\right), \end{aligned} \right.$$

où l'on prend

$$(5) \qquad u_1 = \sqrt{u^q}, \qquad v_2 = i\sqrt{v^q} \qquad (q = 2n-1 \text{ ou } 2n+1).$$

Pour $n=1$ on peut d'ailleurs prendre plus généralement $u_1=\sqrt{P_4(u)}$ et $v_2=\sqrt{-P_4(v)}$ où P_4 est un polynome de degré quatre.

Ces couples sont précieux, car les méthodes de Bianchi et M. Demoulin font correspondre à chacun une équation nouvelle (M) qui admet *trois* solutions quadratiques et par suite donne une déformation avec réseau conjugué permanent.

Ce qui précède suffit à montrer l'intérêt du problème qui consiste :

1° à trouver les équations (M) qui ont des intégrales quadratiques;
2° à trouver les systèmes quadratiques de ces équations.

Une équation de Moutard intéressante est, en dehors de E_n, l'équation $A_{m,n}$:

$$A_{m,n}\equiv\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\left[\frac{m(m-1)}{(u-v)^2}-\frac{n(n-1)}{(u+v)^2}\right]\theta=0,$$

où nous supposons m, n entiers. On peut remplacer m par $1-m$, de sorte que m peut être supposé positif; de même on peut remplacer n par $1-n$ et supposer n positif.

Le cas $m=n$ n'est pas intéressant, car

$$A_{m,m}\equiv\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{4m(m-1)uv}{(u^2-v^2)^2}\theta=0,$$

et il suffit de prendre $u^2=U$, $v^2=V$ comme nouvelles variables indépendantes pour obtenir E_{m-1}. D'autre part changer v en $-v$ remplace $A_{m,n}$ par $A_{n,m}$ de sorte que l'on peut snpposer $m>n$. L'équation $A_{m,n}$ admet la solution particulière $(u-v)^{1-m}(u+v)^{1-n}$ et la *transformée* de $A_{m,n}$ par cette solution est $A_{m-1,n-1}$, de sorte que de proche en proche on ramène la résolution de $A_{m,n}$ à celle de $A_{m-n+1,1}$ ou E_{m-n}; $A_{m,n}$ est donc complètement intégrable (m, n étant entiers bien entendu). Darboux, au tome 2 de la *Théorie des Surfaces* (2e édition, p. 163 et suiv.), indique qu'en écrivant

$$(6)\qquad (u-v)^2=\alpha,\qquad (u+v)^2=\beta,\qquad \theta=(u-v)^m(u+v)^n\gamma,$$

l'inconnue γ vérifie l'équation

$$(7)\qquad \alpha\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha^2}-\beta\frac{\partial^2\gamma}{\partial\beta^2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(8)\qquad \gamma = \frac{\partial^{m+n}}{\partial\alpha^m\,\partial\beta^n}\left[\varphi(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\psi(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\right].$$

On remarquera d'ailleurs que l'intégrale générale de E_{m-n} fait intervenir une fonction arbitraire de u et une fonction arbitraire de v avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-n$ inclus; on passe de E_{m-n} ou $A_{m-n+1,1}$ à $A_{m,n}$ par $(n-1)$ transformations de Moutard, de sorte que l'intégrale générale de $A_{m,n}$ fait intervenir une fonction arbitraire de u, une fonction arbitraire de v avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ inclus, tandis que la formule de Darboux, théoriquement simple, a l'inconvénient de faire apparaître des dérivées jusqu'à l'ordre $m+n$.

L'équation $A_{m,n}$ admet un couple quadratique déduit des solutions particulières

$$(9)\qquad \begin{cases} \theta_1 = (u-v)^m\quad(u+v)^n, \\ \theta_2 = (u-v)^{1-m}(u+v)^{1-n} \end{cases}$$

et un autre couple déduit de

$$\theta'_1 = (u-v)^{1-m}(u+v)^n,$$
$$\theta'_2 = (u-v)^m\quad(u+v)^{1-n}.$$

Je vais déterminer tous les systèmes quadratiques de $A_{3,2}$ ou

$$A_{3,2} \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \left[\frac{+6}{(u-v)^2} - \frac{2}{(u+v)^2}\right]\theta = 0.$$

Elles admet des systèmes de 2, 4, 5, 6, 7, ... solutions quadratiques, la valeur *trois* étant exclue.

2. *Équation* $A_{3,2}$. *Intégrales quadratiques.* — D'après ce qui a été dit plus haut, $A_{3,2}$ est transformée de

$$A_{2,1} \equiv E_1 \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{2z}{(u-v)^2} = 0$$

par la solution particulière $\omega = (u-v)^2(u+v)$. La solution générale de E_1 est

$$(1)\qquad z = u'_1 + v'_1 - \frac{2(u_1 - v_1)}{u-v}.$$

La solution générale de $A_{3,2}$ est donc θ donnée par la quadrature

$$(2)\qquad \omega\theta = \int \left(z\frac{\partial\omega}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\omega\right)du - \left(z\frac{\partial\omega}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\omega\right)dv;$$

et un calcul facile conduit à écrire, pour faire disparaître les signes d'intégration

$$(3)\qquad uu_1 = \frac{dU_1}{du}, \qquad vv_1 = \frac{dV_1}{dv},$$

$$(4)\qquad \theta = \frac{vV_1'' - V_1'}{v^2} - \frac{uU_1'' - U_1'}{u^2} + \frac{4\frac{U_1'}{u}(2u+v) + 4\frac{V_1'}{v}(2v+u)}{(u-v)(u+v)} + \frac{24(V_1 - U_1)}{(u-v)^2(u+v)},$$

formules où U_1, V_1 (ou u_1, v_1) désignent des fonctions arbitraires de u ou v seul.

Nous rencontrerons plus loin des équations fonctionnelles telles que

$$(5)\qquad \theta = 0,$$

où θ est l'expression (4). J'indique, et ce sera utile pour la suite, un moyen simple de résoudre cette équation, sans emprunt à la théorie des équations de Laplace ou de Moutard. En faisant $u = v$, on a nécessairement

$$V_1(u) \equiv U_1(u),$$

de sorte que V_1 et U_1 sont la même fonction; en faisant $v = -u$, on a l'identité

$$(6)\qquad u[f'(u) + f'(-u)] \equiv 3[f(u) - f(-u)],$$

où f désigne $U_1(u)$; en posant

$$(7)\qquad f(u) \equiv F(u^2) + u\,G(u^2),$$

l'identité (6) devient

$$(8)\qquad xG'(x) \equiv G(x), \qquad G(x) \equiv \lambda x,$$

où λ est une constante. On a donc

$$(7')\qquad f(u) \equiv F(u^2) + \lambda u^3,$$

et l'on constate, comme vérification, que λ disparaît de (5); il reste simplement

$$
(9)\quad \begin{aligned} & v\,\mathrm{F}''(v^2) - u\,\mathrm{F}''(u^2) \\ & + \frac{2\,\mathrm{F}'(u^2)(2u+v) + 2\,\mathrm{F}'(v^2)(2v+u)}{(u-v)(u+v)} + \frac{6[\mathrm{F}(v^2)-\mathrm{F}(u^2)]}{(u-v)^2(u+v)} \equiv 0. \end{aligned}
$$

Changeons dans (9) v en $-v$ et soit (9′) le résultat obtenu : (9) est équivalente aux deux équations que j'écris schématiquement

$$
\frac{(9)+(9')}{2u} \equiv 0, \qquad \frac{(9)-(9')}{2v} \equiv 0
$$

ou, en remplaçant u^2 par x, v^2 par y,

$$
(10)\qquad -\mathrm{F}''(x) + \frac{4\,\mathrm{F}'(x) + 2\,\mathrm{F}'(y)}{x-y} + \frac{6[\mathrm{F}(y)-\mathrm{F}(x)]}{(x-y)^2} \equiv 0,
$$

$$
(11)\qquad \mathrm{F}''(y) + \frac{2\,\mathrm{F}'(x) + 4\,\mathrm{F}'(y)}{x-y} + \frac{6[\mathrm{F}(y)-\mathrm{F}(x)]}{(x-y)^2} \equiv 0.
$$

D'ailleurs (10) et (11) se réduisent à une seule, car on passe de l'une à l'autre en échangeant les noms de x et y; or on voit sans peine que (10) et (11) s'écrivent

$$
(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{F}'(x)+\mathrm{F}'(y)}{(x-y)^2} - \frac{2[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(y)]}{(x-y)^3}\right] \equiv 0, \\ & \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mathrm{F}'(x)+\mathrm{F}'(y)}{(x-y)^2} - \frac{2[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(y)]}{(x-y)^3}\right] \equiv 0. \end{aligned} \right.
$$

On a donc, A étant constant, ainsi que B et C,

$$
(13)\qquad 2[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(y)] - (x-y)[\mathrm{F}'(x)+\mathrm{F}'(y)] \equiv -\mathrm{A}(x-y)^3.
$$

En dérivant en x, puis y, on a

$$
(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{F}''(x) - \mathrm{F}''(y) \equiv 6\,\mathrm{A}(x-y), \\ & \mathrm{F}''(x) \equiv 6\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}, \\ & \mathrm{F}'(x) \equiv 3\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}x + \mathrm{C}, \\ & \mathrm{F}\,(x) \equiv \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}, \end{aligned} \right.
$$

et l'on vérifie aussitôt que (13) est satisfaite, donc (10), (11), puis (9) et (5). De la sorte $\theta \equiv 0$ entraîne

$$
(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{U}_1 \equiv \mathrm{A}u^6 + \mathrm{B}u^4 + \mathrm{C}u^2 + \mathrm{D} + \mathrm{E}u^3, \\ & \mathrm{V}_1 \equiv \mathrm{A}\,v^6 + \mathrm{B}\,v^3 + \mathrm{C}\,v^2 + \mathrm{D} + \mathrm{E}\,v^3. \end{aligned} \right.
$$

Un autre moyen est de remarquer que $\theta \equiv 0$ entraîne nécessairement $z \equiv \lambda\omega$; or $u_1 \equiv u^4$, $v_1 \equiv v^4$ donne $z = 2\omega$; d'autre part augmenter u_1 et v_1 du *même* polynome de degré 2 (en u ou v) ne change pas l'intégrale z; donc prendre (λ, μ, ν, ρ constants)

$$(16)\qquad \begin{cases} u_1 \equiv \lambda u^4 + \mu u^2 + \nu u + \rho, \\ v_1 \equiv \lambda v^4 + \mu v^2 + \nu v + \rho \end{cases}$$

entraîne $z \equiv 2\lambda\omega$, $\theta = \frac{K}{\omega}$ où K est constant; on a alors (A, B, C, D, E, F constants)

$$(17)\qquad \begin{cases} U_1 = A u^6 + B u^4 + C u^2 + D + E u^3 + F, \\ V_1 = A v^6 + B v^4 + C v^2 + D + E v^3. \end{cases}$$

Pour $F = 0$ on retrouve $\theta = 0$; pour $F \neq 0$ on a

$$\theta = \frac{-24F}{\omega}.$$

Si l'on a des intégrales θ_1, θ_2, ..., θ_p, chacune correspond à un couple (U_i, V_i) indéterminé à un polynome (15) près. Le polynome U_1 défini par (15) est l'intégrale générale de l'équation

$$(18)\qquad u\left(\frac{U'_1}{u}\right)^{(4)} - \left(\frac{U'_1}{u}\right)''' = 0.$$

D'autre part le changement de u et v en λu, λv ne modifie pas l'équation $A_{3,2}$ ni l'équation différentielle (18); de la sorte si l'on a une relation

$$(19)\qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_p^2 = U + V,$$

cette relation n'est pas modifiée :

1° si l'on remplace u, v par λu, λv;

2° si l'on soumet l'ensemble des U_i à une substitution orthogonale, et les V à la même substitution orthogonale;

3° si l'on augmente U_i d'un polynome (15) (en u) et V_i du *même* polynome (en v), ces polynomes variant avec l'indice i.

Or dans ces diverses opérations, l'expression

$$(20)\qquad I \equiv \sum_1^p \left\{ u\left(\frac{U'_1}{u}\right)^{(4)} - \left(\frac{U'_1}{u}\right)''' \right\} \left\{ v\left(\frac{V'_1}{v}\right)^{(4)} - \left(\frac{V'_1}{v}\right)''' \right\}$$

est un invariant différentiel : il ne peut manifestement exister d'invariant différentiel plus simple. Or nous allons constater que $I \equiv 0$ et certaines équations complémentaires forment un ensemble *suffisant* pour que les intégrales $\theta_1, \ldots, \theta_p$ soient *quadratiques;* d'autre part p intégrales, *choisies au hasard*, ne sont pas quadratiques : l'ensemble de ces remarques et l'analogie avec l'équation E_n (pour laquelle je renvoie à mon Mémoire des *Annales de Jassy*) permettent de considérer comme plus que vraisemblable que cet ensemble est non seulement *suffisant*, mais *nécessaire*.

5. *Premier type de solutions.* — Supposons réalisée l'équation $I = 0$ que j'écrirai

$$\sum_1^p \mathfrak{U}_i \mathfrak{V}_i = 0. \tag{1}$$

Les quantités U_i ou $\mathfrak{U}_i$, ou V_i ou $\mathfrak{V}_i$ peuvent être soumises à la même substitution orthogonale; la relation (1) entraîne h relations linéaires et homogènes entre les $\mathfrak{V}_i$ et $p-h$ entre les $\mathfrak{U}_i$ $(0 \leqq h \leqq p)$; le point $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_p)$ décrit donc une variété linéaire à h dimensions plongée dans l'espace à p dimensions; par la substitution orthogonale annoncée on peut réduire le tableau des $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{V}_i$ à l'une des deux formes canoniques

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_2 & \ldots & \mathfrak{U}_h & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{V}_{h+1} & \mathfrak{V}_{h+2} & \ldots & \mathfrak{V}_p \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

ou

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{U}_1 & i\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_3 & i\mathfrak{U}_3 & \ldots & \mathfrak{U}_{2k-1} & i\mathfrak{U}_{2k-1} & \mathfrak{U}_{2k+1} & \ldots & \mathfrak{U}_l & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathfrak{V}_1 & i\mathfrak{V}_1 & \mathfrak{V}_3 & i\mathfrak{V}_3 & \ldots & \mathfrak{V}_{2k-1} & i\mathfrak{V}_{2k-1} & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{V}_{l+1} & \mathfrak{V}_{l+2} & \ldots & \mathfrak{V}_p \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Occupons-nous du premier type : on voit que V_1 égal à

$$A v^6 + B v^4 + C v^2 + D + E v^3$$

peut être réduit à zéro (en retranchant $Au^6 + \ldots + Eu^3$ de U_1); on a donc le tableau canonique suivant pour les U_i, V_i :

$$\left\| \begin{matrix} U_1 & U_2 & \ldots & U_h & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & V_{h+1} & V_{h+2} & \ldots & V_p \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Écrivons maintenant

$$(5)\qquad \theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_p^2=\mathrm{U}+\mathrm{V}$$

et remplaçons chaque fonction θ_i par son expression [formule (4) du paragraphe **2**] : la relation (5) fournit une équation

$$(5')\qquad \frac{24^2[\mathrm{V}_{h+1}^2+\ldots+\mathrm{V}_p^2+\mathrm{U}_1^2+\ldots+\mathrm{U}_h^2]}{(u-v)^4(u+v)^2}+\ldots=\mathrm{U}+\mathrm{V},$$

les termes non écrits contenant en dénominateur $u-v$ à la puissance 3 au plus : donc, en faisant $u=v$, on obtient immédiatement

$$(6)\qquad \mathrm{V}_{h+1}^2+\ldots+\mathrm{V}_p^2=f(v),\qquad \mathrm{U}_1^2+\ldots+\mathrm{U}_h^2=-f(u),$$

où f est une fonction inconnue; l'équation (5) devient

$$(5'')\qquad \frac{24^2[f(v)-f(u)]}{(u-v)^4(u+v)^2}+\frac{4.24\left[f'(v)\dfrac{2v+u}{v}+f'(u)\dfrac{2u+v}{u}\right]}{(u-v)^3(u+v)^2}$$
$$+\frac{16\left[\left(\dfrac{2v+u}{v}\right)^2\{\mathrm{V}_{h+1}'^2+\ldots+\mathrm{V}_p'^2\}+\left(\dfrac{2u+v}{u}\right)^2\{\mathrm{U}_1'^2+\ldots+\mathrm{U}_h'^2\}\right]}{(u-v)^2(u+v)^2}$$
$$+\frac{48\left[\dfrac{f''(v)}{2v}-\dfrac{f'(v)}{2v^2}-\dfrac{f''(u)}{2u}+\dfrac{f'(u)}{2u^2}-\dfrac{1}{v}\{\mathrm{V}_{h+1}'^2+\ldots+\mathrm{V}_p'^2\}+\dfrac{1}{u}\{\mathrm{U}_1'^2+\ldots+\mathrm{U}_h'^2\}\right]}{(u-v)^2(u+v)^2}+\ldots=\mathrm{U}+\mathrm{V}.$$

On voit aussitôt que

$$24^2[f(v)-f(u)]+4.24(u-v)\left[f'(v)\frac{2v+u}{v}+f'(u)\frac{2u+v}{u}\right],$$

si l'on pose $v=u+(v-u)$ et si l'on développe suivant les puissances croissantes de $v-u$, contient $(v-u)^3$ en facteur : donc dans (5″) les seuls termes contenant en dénominateur $(v-u)^2$ sont le produit de $(u-v)^{-2}$ par

$$\{\mathrm{V}_{h+1}'^2+\ldots+\mathrm{V}_p'^2\}\left[\frac{16\left(\dfrac{2v+u}{v}\right)^2}{(u+v)^2}-\frac{48}{v(u+v)}\right]$$
$$+\{\mathrm{U}_1'^2+\ldots+\mathrm{U}_h'^2\}\left[16\left(\frac{2u+v}{u}\right)^2-\frac{48}{u(u+v)}\right],$$

de sorte qu'en faisant $u=v$ on obtient la condition

$$(7)\qquad \mathrm{V}_{h+1}'^2+\ldots+\mathrm{V}_p'^2=\varphi(v),\qquad \mathrm{U}_1'^2+\ldots+\mathrm{U}_h'^2=-\varphi(u),$$

où φ est une nouvelle fonction inconnue; l'équation (5) s'écrit définitivement

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & \frac{24^2[f(v)-f(u)]}{(u-v)^4(u+v)^2}+\frac{4.24\left[f'(v)\dfrac{2v+u}{v}+f'(u)\dfrac{2u+v}{u}\right]}{(u-v)^3(u+v)^2} \\
&+\frac{16\left[\left(\dfrac{2v+u}{v}\right)^2\varphi(v)-\left(\dfrac{2u+v}{u}\right)^2\varphi(u)\right]}{(u-v)^2(u+v)^2} \\
&+\frac{48\left[\dfrac{f''(v)}{2v}-\dfrac{f'(v)}{2v^2}-\dfrac{\varphi(v)}{v}-\dfrac{f''(u)}{2u}+\dfrac{f'(u)}{2u^2}+\dfrac{\varphi(u)}{u}\right]}{(u-v)^2(u+v)} \\
&+\frac{8\left[\dfrac{2v+u}{v^2}\left\{\dfrac{\varphi'(v)}{2}-\dfrac{\varphi(v)}{v}\right\}+\dfrac{2u+v}{u^2}\left\{\dfrac{\varphi'(u)}{2}-\dfrac{\varphi(u)}{u}\right\}\right]}{(u-v)(u+v)}=\overline{U}+\overline{V},
\end{aligned}
$$

en posant

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\overline{U}&=U-\Sigma\left(\frac{uU_i''-U_i'}{u^2}\right)^2,\\
\overline{V}&=V-\Sigma\left(\frac{vV_i''-V_i'}{v^2}\right)^2.
\end{aligned}
\right.
$$

On remarque que l'équation fonctionnelle (8) est indépendante de p et h; elle sert à déterminer f et φ. D'ailleurs si $h=0$ ou p, on a évidemment $f\equiv\varphi\equiv 0$ (je rappelle que remplacer h par $p-h$ revient à échanger les noms de u et v); dans ce cas, si $p=3$ avec $h=3$, on a

$$U_1'^2+U_2'^2+U_3'^2=0,\qquad U_1''^2+U_2''^2+U_3''^2=0,$$

équations qui entraînent que la direction (U_1, U_2, U_3) soit une génératrice fixe du cône isotrope $x^2+y^2+z^2=0$; mais alors les trois intégrales sont égales au produit de $\frac{1}{(u-v)^2(u+v)}$ par trois nombres a, b, c tels que $a^2+b^2+c^2=0$ et ce cas n'a aucun intérêt (même résultat si $p=2$ avec $h=2$).

L'équation (8), si l'on fait $u=-v$ donne aussitôt en prenant les termes qui contiennent $(u+v)^2$ en dénominateur

$$(10)\quad 9[f(v)-f(-v)]-3v[f'(v)+f'(-v)]+v^2[\varphi(v)-\varphi(-v)]\equiv 0.$$

Cette égalité permet d'écrire :

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
f(x) &\equiv \mathrm{F}(x^2) + x\,\mathrm{G}(x^2),\\
\varphi(x) &\equiv \mathcal{F}(x^2) + x\,\mathcal{G}(x^2),\\
\mathcal{G}(x^2) &\equiv -\frac{6}{x^2}\,\mathrm{G}(x^2) + 6\,\mathrm{G}'(x^2),\\
\varphi(x) &\equiv \mathcal{F}(x^2) - \frac{6}{x}\,\mathrm{G}(x^2) + 6x\,\mathrm{G}'(x^2),\\
\frac{\varphi'(x)}{2} - \frac{\varphi(x)}{x} &\equiv x\,\mathcal{F}'(x^2) - \frac{\mathcal{F}(x^2)}{x} + \frac{9}{x^2}\,\mathrm{G}(x^2) - 9\,\mathrm{G}'(x^2) + 6x^2\,\mathrm{G}''(x^2).
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie aisément que le premier membre de (8), multiplié par $(u-v)^4$, contient $(v-u)^4$ en facteur quelles que soient les fonctions f et φ ou F, $\mathcal{F}$, G; de même multiplié par $(u+v)^2$ il contient $(v+u)^2$ en facteur; le premier membre de (8) n'admet donc ni le pôle $v=u$ ni le pôle $v=-u$.

Désignons maintenant, pour abréger, (8) par E. Dans E je change u et v simultanément de signe : le résultat obtenu, ajouté à E, donne une équation E_1 ; retranché, il donne une équation E'_1 ; il est clair que E peut être remplacée par E_1 et E'_1. J'écris maintenant E_1, réservant E'_1 pour plus tard. On a

$$
(\mathrm{E}_1)\quad
\begin{aligned}
&\frac{24^2[\mathrm{F}(v^2)-\mathrm{F}(u^2)]}{(u-v)^4(u+v)^2} + \frac{8.24[\mathrm{F}'(v^2)(2v+u)+\mathrm{F}'(u^2)(2u+v)]}{(u-v)^3(u+v)^2}\\
&+\frac{16\left[\left(\dfrac{2v+u}{v}\right)^2\mathcal{F}(v^2)-\left(\dfrac{2u+v}{u}\right)^2\mathcal{F}(u^2)\right]}{(u^2-v^2)^2}\\
&+\frac{48\left[2v\,\mathrm{F}''(v^2)-2u\,\mathrm{F}''(u^2)-\dfrac{\mathcal{F}(v^2)}{v}+\dfrac{\mathcal{F}(u^2)}{u}\right]}{(u^2-v^2)(u-v)}\\
&+\frac{8\left[\dfrac{2v+u}{v}\mathcal{F}'(v^2)-\dfrac{2v+u}{v^3}\mathcal{F}(v^2)+\dfrac{2u+v}{u}\mathcal{F}'(u^2)-\dfrac{2u+v}{u^3}\mathcal{F}(u^2)\right]}{u^2-v^2}\\
&=\frac{\overline{\mathrm{U}}(u)+\overline{\mathrm{U}}(-u)}{2}+\frac{\overline{\mathrm{V}}(v)+\overline{\mathrm{V}}(-v)}{2}.
\end{aligned}
$$

Dans cette identité (E_1) je change v de signe, seul; on obtient une équation (E_2); (E_1) peut être remplacée par $(\mathrm{E}_1)+(\mathrm{E}_2)$ et $(\mathrm{E}_1)-(\mathrm{E}_2)$.

On a aussitôt

$$(E_1)+(E_2)\quad \frac{36(x+y)[F(y)-F(x)]}{(y-x)^4}-\frac{12\{F'(y)(x+2y)+F'(x)(2x+y)\}}{(y-x)^3}$$
$$+\frac{\mathcal{F}(y)\left(\dfrac{x}{y}+4\right)-\mathcal{F}(x)\left(\dfrac{y}{x}+4\right)+3[2yF''(y)-2xF''(x)-\mathcal{F}(y)+\mathcal{F}(x)]}{(y-x)^2}$$
$$+\frac{\dfrac{\mathcal{F}(y)}{y}-\mathcal{F}'(y)+\dfrac{\mathcal{F}(x)}{x}-\mathcal{F}'(x)}{y-x}=X+Y,$$

où l'on a posé

$$(12)\quad u^2=x,\qquad v^2=y,\qquad X=\frac{U(u)+U(-u)}{32},\qquad Y=\frac{V(v)+V(-v)}{32}.$$

On simplifie beaucoup la forme de cette équation en faisant passer le groupe $\left[\dfrac{\mathcal{F}(y)}{y}+\dfrac{\mathcal{F}(x)}{x}\right]\dfrac{1}{y-x}$, qui figure au quatrième terme du premier membre, dans le troisième terme. On obtient ainsi

$$(E_1)+(E_2)\quad \frac{36(x+y)[F(y)-F(x)]}{(y-x)^4}-\frac{12\{(x+2y)F'(y)+(2x+y)F'(x)\}}{(y-x)^3}$$
$$+\frac{6[yF''(y)-xF''(x)]}{(y-x)^2}+\frac{2[\mathcal{F}(y)-\mathcal{F}(x)]}{(y-x)^2}-\frac{\mathcal{F}'(y)+\mathcal{F}'(x)}{y-x}=X+Y.$$

Un peu d'imagination suggère d'écrire

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ll} x+2y=\dfrac{3(x+y)}{2}+\dfrac{y-x}{2}, & y=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{2}, \\ 2x+y=\dfrac{3(x+y)}{2}+\dfrac{x-y}{2}, & x=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}, \end{array}\right.$$

et nous avons la forme définitive

$$(E_1)+(E_2)\quad 3(x+y)\left[\frac{12\{F(y)-F(x)\}}{(y-x)^4}-\frac{6\{F'(y)+F'(x)\}}{(y-\ )^3}+\frac{F''(y)-F''(x)}{(y-x)^2}\right]$$
$$-6\left[\frac{F'(y)-F'(x)}{(y-x)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{F''(y)+F''(x)}{y-x}\right]$$
$$+2\left[\frac{\mathcal{F}(y)-\mathcal{F}(x)}{(y-x)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{F}'(y)+\mathcal{F}'(x)}{y-x}\right]=X+Y,$$

qui ne fait intervenir que des expressions, de forme remarquable, déjà rencontrées ici ou dans l'étude de l'équation E_n. L'équation $(E_1) - (E_2)$ prend immédiatement la forme beaucoup plus simple, qui ne fait d'ailleurs encore intervenir que des expressions de même forme :

$$(E_1) - (E_2) \equiv 12\left[\frac{12\{F(y) - F(x)\}}{(y-x)^4} - \frac{6\{F'(y) + F'(x)\}}{(y-x)^3} + \frac{F''(y) - F''(x)}{(y-x)^2}\right]$$
$$+ \frac{2\left\{\dfrac{\mathfrak{F}(y)}{y} - \dfrac{\mathfrak{F}(x)}{x}\right\}}{(y-x)^2} - \frac{\left(\dfrac{\mathfrak{F}(y)}{y}\right)' + \left(\dfrac{\mathfrak{F}(x)}{x}\right)'}{y-x} \equiv 0.$$

L'équation $(E_1) - (E_2)$ est la clé de la question étudiée ici : nous savons, d'après une remarque qui a été faite précédemment [disparition automatique des pôles $v = \pm u$ de (8) ou (E)] que $(E_1) - (E_2)$ ne contient qu'en apparence le pôle $y = x$; remplaçons y par $x + (y - x)$ et développons le premier membre de $(E_1) - (E_2)$ suivant les puissances croissantes de $y - x$; posons, pour abréger, $\dfrac{F(y)}{y} \equiv \Phi(y)$; les termes en $(y-x)^{-4}$, $(y-x)^{-3}$, $(y-x)^{-2}$, $(y-x)^{-1}$ disparaissent; le terme en $(y-x)^0$ disparaît aussi; le terme en $y - x$ doit être nul, *quel que soit* x, ce qui donne

$$(14) \qquad \begin{cases} \Phi'''(x) = \dfrac{6}{5} F^{(5)}(x), \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{F}(x)}{x} = \dfrac{6}{5} F''(x) + P_2(x), \end{cases}$$

où $P_2(x)$ est un polynome arbitraire de degré 2 en x; en remplaçant $\dfrac{\mathfrak{F}(x)}{x}$ par cette expression dans $(E_1) - (E_2)$, le polynome P_2 disparaît automatiquement; il reste une équation ne contenant plus que F avec ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 :

$$(15) \qquad 144[F(y) - F(x)] - 72(y-x)[F'(y) + F'(x)]$$
$$+ \frac{72}{5}(y-x)^2[F''(y) - F''(x)] - \frac{6}{5}(y-x)^3[F'''(y) + F'''(x)] \equiv 0.$$

Par double dérivation en x et y, cette équation devient

$$(16) \qquad 12[F''(y) - F''(x)]$$
$$- 6[F'''(y) + F'''(x)](y-x) + [F^{(4)}(y) - F^{(4)}(x)](y-x)^2 \equiv 0.$$

Une double dérivation fournit de nouveau

$$(17) \qquad 2[F^{(4)}(y) - F^{4}(x)] - [F^{5}(y) + F^{5}(x)]((y - x) \equiv 0$$

et une double dérivation fournit

$$(18) \qquad F^{6}(y) - F^{6}(x) \equiv 0.$$

Nous avons ainsi retrouvé les expressions remarquables (16), (17) déjà signalées; l'équation (18) entraîne que F soit un polynome de degré 6; en raison de la forme linéaire de (15), si $F(x)$ est une solution, le changement de x en $x+a$ donne une nouvelle solution $F(x+a)$, puis $\frac{F(x+a)-F(x)}{a}$, puis $F'(x)$: il suffit donc de vérifier que $F \equiv x^6$ vérifie (15) pour être certain que le polynome *arbitraire* de degré 6 en x est solution de (15) : c'est la solution générale. On peut remarquer que l'on aurait pu, dans (15), donner à y une valeur arbitraire y_0, et l'on aurait obtenu une équation différentielle linéaire en $F(x)$, qui s'intègre sans difficulté et conduit au résultat déjà trouvé.

Cela posé nous devons revenir à l'équation $(E_1)+(E_2)$ qui pourrait s'intégrer directement; mais il y a lieu de tenir compte des résultats déjà obtenus. Puisque F est un polynome de degré 6, l'équation (15) nous donne

$$(19) \qquad \frac{12[F(y)-F(x)]}{(y-x)^4} - \frac{6[F'(y)+F'(x)]}{(y-x)^3} + \frac{F''(y)-F''(x)}{(y-x)^2}$$
$$\equiv -\frac{1}{5}\left[\frac{F''(y)-F''(x)}{(y-x)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\{F'''(y)+F'''(x)\}}{y-x}\right],$$

et puisque F'' est un polynome de degré 4, l'équation (16) nous donne

$$(20) \qquad \frac{F''(y)-F''(x)}{(y-x)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{F''(y)+F''(x)}{y-x} \equiv -\frac{1}{12}[F^{4}(y)-F^{4}(x)].$$

Le multiplicateur de $3(x+y)$ dans $(E_1)+(E_2)$ est donc égal à

$$(21) \qquad \frac{1}{60}[F^{4}(y) - F^{4}(x)].$$

Les équations fonctionnelles déjà obtenues nous ont appris que l'expression

$$(22) \qquad \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{(y-x)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\Phi'(y)+\Phi'(x)}{y-x}$$

est nulle si Φ est un polynome de degré 2, égale à

$$(23) \qquad -\frac{1}{12}[\Phi''(y) - \Phi''(x)]$$

si Φ est un polynome de degré 4 ou 3, et à

$$(24) \qquad -\frac{1}{10}[\Phi''(y) - \Phi''(x)] + \frac{1}{120}(y-x)[\Phi'''(y) + \Phi'''(x)]$$

si Φ est un polynome de degré 6 (ou 5).

De la sorte, en remplaçant dans $(E_1)+(E_2)$, $\mathcal{F}(x)$ par

$$\frac{6}{5}x\mathrm{F}''(x) + x\mathrm{P}_2(x),$$

on voit que le terme P_2 n'intervient que par son terme en x^2 et que F n'intervient que par les termes en x^6, x^5, x^4. Si P_2 était réduit au terme x^2, on obtiendrait d'après le résultat (23), appliqué à l'expression (22) pour Φ de degré 3, comme partie contributive de $P_2 \equiv x^2$ dans $(E_1)+(E_2)$: $-(y-x)$ ou

$$(25) \qquad -\frac{1}{2}[\mathrm{P}'_2(y) - \mathrm{P}'_2(x)].$$

Cette expression (25) représente, quel que soit le polynome P_2 de degré 2, la part contributive de P_2 au premier membre de $(E_1)+(E_2)$ Ensuite en réduisant F d'abord à x^6, puis x^5, puis x^4, on trouve aisément par les formules (21), (22), (23), (24) la part contributive de F. Si l'on a écrit

$$(26) \qquad \mathrm{F} \equiv \mathrm{A}_0x^6 + 6\mathrm{A}_1x^5 + 15\mathrm{A}_2x^4 + 20\mathrm{A}_3x^3 + 15\mathrm{A}_4x^2 + 6\mathrm{A}_5x + \mathrm{A}_6,$$

on trouve sans difficulté

$$(27) \qquad \mathrm{X}+\mathrm{Y} \equiv -36\mathrm{A}_0(y^3-x^3) - 72\mathrm{A}_1(y^2-x^2) - 36\mathrm{A}_2(y-x) - \frac{1}{2}[\mathrm{P}'_2(y) - \mathrm{P}'_2(x)].$$

Cette formule peut s'écrire

$$(27') \qquad \mathrm{X}+\mathrm{Y} = -\frac{1}{10}[y\mathrm{F}^{(4)}(y) - x\mathrm{F}^{4}(x)] - \frac{1}{2}[\mathrm{P}'_2(y) - \mathrm{P}'_2(x)].$$

Nous avons ainsi complètement résolu l'équation (E_1). Il reste à former E'_1, obtenue en retranchant de (E) ou (8) le résultat obtenu dans (E) en changeant u et v de signe. Cette équation est

$$
(E'_1)\quad \frac{72[vG(v^2)-uG(u^2)]}{(u-v)^4(u+v)^2}+\frac{12\left[\frac{2v+u}{v}\{G(v^2)+2v^2G'(v^2)\}+\frac{2u+v}{u}\{G(u^2)+2u^2G'(u^2)\}\right]}{(u-v)^3(u+v)^2}
$$
$$
+\frac{2\left[\left(\frac{2v+u}{v}\right)^2\left\{6vG'(v^2)-\frac{6}{v}G(v^2)\right\}-\left(\frac{2u+v}{u}\right)^2\left\{6uG'(u^2)-\frac{6}{u}G(u^2)\right\}\right]}{(u-v)^2(u+v)^2}
$$
$$
+\frac{3\left[4v^2G''(v^2)+11\frac{G(v^2)}{v^2}-8G'(v^2)-4u^2G''(u^2)-11\frac{G(u^2)}{u^2}+8G'(u^2)\right]}{(u-v)^2(u+v)}
$$
$$
+\frac{\frac{2v+u}{v^2}\left\{\frac{9}{v^2}G(v^2)-9G'(v^2)+6v^2G''(v^2)\right\}+\frac{2u+v}{u^2}\left\{\frac{9}{u^2}G(u^2)-9G'(u^2)+6u^2G''(u^2)\right\}}{(u-v)(u+v)}
$$
$$
=\frac{\overline{U}(u)-\overline{U}(-u)}{16}+\frac{\overline{V}(v)-\overline{V}(-v)}{16};
$$

E'_1 entraîne l'équation E'_2, obtenue en changeant v de signe, puis $E'_1+E'_2$ et $E'_1-E'_2$. Or $E'_1+E'_2$, en divisant par $2u$, et posant encore $y=v^2$, $x=u^2$ devient

$$
\frac{E'_1+E'_2}{2u}\quad \frac{72[2yG(y)-(x+y)G(x)]}{(y-x)^4}\quad \frac{12\left[3G(y)+6yG'(y)+\left\{2+\frac{y}{x}\right\}\{G(x)+2xG'(x)\}\right]}{(y-x)^3}
$$
$$
+\frac{8\left[6G'(y)-\frac{6}{y}G(y)\right]-\left(8+2\frac{y}{x}\right)\left[6G'(x)-\frac{6}{x}G(x)\right]}{(y-x)^2}
$$
$$
+\frac{3\left[4yG''(y)-8G'(y)+\frac{11}{y}G(y)-4xG''(x)+8G'(x)-\frac{11}{x}G(x)\right]}{(y-x)^2}
$$
$$
+\frac{\left[\frac{9}{y^2}G(y)-\frac{9}{y}G'(y)+6G''(y)+2\left\{\frac{9}{x^2}G(x)-\frac{9}{x}G'(x)+6G''(x)\right\}\right]}{(y-x)}
$$
$$
=\frac{\overline{U}(u)-\overline{U}(-u)}{16u}=3\lambda_1.
$$

L'équation $\frac{E'_1-E'_2}{2v}$ s'obtient en remplaçant, dans $\frac{E'_1+E'_2}{2u}$, x par y et inversement, et $\overline{U}$ par $(-\overline{V})$, ajoutons donc les deux équations $\frac{E'_1+E'_2}{2u}$

et $\frac{E'_1 - E'_2}{2v}$, en divisant tout par 3. On a le résultat

$$(28)\quad 24\frac{G(y)-G(x)}{(y-x)^3} - 4\frac{\frac{G(y)}{y} + 2\,G'(y) + \frac{G(x)}{x} + 2\,G'(x)}{(y-x)^2}$$

$$+\frac{-4\frac{x}{y}G'(y) - 4\frac{y}{x}G'(x) + 4\frac{x}{y^2}G(y) + 4\frac{y}{x^2}G(x)}{(y-x)^2}$$

$$-\frac{\frac{3}{x^2}G(x) - \frac{3}{y^2}G(y) + \frac{3}{y}G'(y) - \frac{3}{x}G'(x) - 2\,G''(y) + 2\,G''(x)}{y-x}$$

$$= \frac{U(u)-U(-u)}{48u} - \frac{V(v)-V(-v)}{48v} = X_1 - Y_1,$$

équation où l'on peut remplacer le second et le troisième terme par

$$\frac{4\left[\frac{G(x)}{x^2} - \frac{G(y)}{y^2}\right]}{y-x} - \frac{4\left[\left(2+\frac{y}{x}\right)G'(x) + \left(2+\frac{x}{y}\right)G'(y)\right]}{(y-x)^2}.$$

Elle s'écrit donc

$$(28')\quad 24\frac{G(y)-G(x)}{(y-x)^3} - 4\frac{\left[\left(2+\frac{y}{x}\right)G'(x) + \left(2+\frac{x}{y}\right)G'(y)\right]}{(y-x)^2}$$

$$+\frac{2[G''(y)-G''(x)]}{y-x}$$

$$+\frac{\frac{G(x)}{x^2} + \frac{3}{x}G'(x) - \left[\frac{G(y)}{y^2} + \frac{3}{y}G'(y)\right]}{y-x} = X_1 - Y_1$$

ou encore, de façon à faire intervenir les combinaisons remarquables déjà rencontrées,

$$(28'')\quad 24\frac{G(y)-G(x)}{(y-x)^3} - 12\frac{G'(x)+G'(y)}{(y-x)^2} + \frac{2[G''(y)-G''(x)]}{y-x}$$

$$+\frac{\frac{G'(y)}{y} - \frac{G(y)}{y^2} - \frac{G'(x)}{x} + \frac{G(x)}{x^2}}{y-x} = X_1 - Y_1.$$

Désignons par $K(x)$ la fonction

$$(29)\qquad K(x) = 2\,G''(x) + \frac{G'(x)}{x} - \frac{G(x)}{x^2}$$

et dérivons deux fois en y, puis x l'équation ($28''$) de façon à faire disparaître $X_1 - Y_1$: on a

$$(30)\quad 24\left[\frac{12\{G(y)-G(x)\}}{(y-x)^5} - \frac{6\{G'(y)+G'(x)\}}{(y-x)^4} + \frac{G''(y)-G''(x)}{(y-x)^3}\right] + 2\left[\frac{K(y)-K(x)}{(y-x)^3} - \frac{1}{2}\,\frac{K'(y)+K'(x)}{(y-x)^2}\right] = 0.$$

Nous reconnaissons l'équation qui a été résolue plus haut à propos de $(E_1)-(E_2)$: F est remplacé par $2G$, et $\frac{\mathcal{F}(x)}{x}$ par $K(x)$; on a

$$(31)\quad \begin{cases} K'''(x) = \frac{12}{5}G^{V}(x), \\ K(x) = \frac{12}{5}G''(x) + \Pi_2(x), \end{cases}$$

où Π_2 est un polynome arbitraire en x de degré 2. Si nous remplaçons dans (30) K par cette expression, le polynome Π_2 disparaît automatiquement, et il reste l'équation

$$(32)\quad \frac{12\{G(y)-G(x)\}}{(y-x)^5} - \frac{6\{G'(y)+G'(x)\}}{(y-x)^4} + \frac{6}{5}\,\frac{G''(y)-G''(x)}{(y-x)^3} - \frac{1}{10}\,\frac{G'''(y)+G'''(x)}{(y-x)^2} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (15) rencontrée plus haut : $G(x)$ est un polynome de degré 6 ou inférieur; il faut maintenant tenir compte de la seconde équation (31) en se rappelant la valeur (29) de $K(x)$:

$$(33)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{G(x)}{x}\right] - \frac{2}{5}G''(x) = \Pi_2(x) = \frac{d}{dx}\Pi_3(x).$$

Π_3 représente un polynome arbitraire de degré 3; on remplace (33) par

$$(34)\quad \frac{G(x)}{x} - \frac{2}{5}G'(x) \equiv \Pi_3(x).$$

Comme il existe un polynome $P_3(x)$ de degré 3 tel que

$$(35)\quad P_3(x) - \frac{2}{5}\,\frac{d}{dx}[x\,P_3(x)] \equiv \Pi_3(x),$$

l'intégrale générale de (34) est

$$(36)\qquad G(x) \equiv Cx^{\frac{5}{2}} + x\,P_3(x).$$

Comme $G(x)$ doit être un polynome de degré inférieur ou égal à 6, il n'y a d'autre solution acceptable ici que

$$(37)\qquad G(x) \equiv x\,P_3(x),$$

où P_3 est un polynome arbitraire de degré 3 en x. Si donc nous nous reportons à l'équation (28″), nous voyons, d'après ce qui a été dit sur les expressions remarquables déjà trouvées, que

$$(38)\qquad X_1 - Y_1 = \frac{P'_3(y) - P'_3(x)}{y - x} = \frac{1}{2}[P''_3(y) + P''_3(x)],$$

puisque xP_3 est de degré 4 et que P'_3 est de degré 2.

On peut donc prendre

$$(39)\qquad \begin{cases} X_1 \equiv \dfrac{1}{2}P''_3(x) + C, \\ Y_1 \equiv -\dfrac{1}{2}P''_3(y) + C, \end{cases}$$

où C est une constante. Or l'équation $\frac{E'_1 + E'_2}{2u}$ donne X_1 sans constante arbitraire. D'après ce qui a été expliqué plus haut, si l'on échange dans l'équation $\frac{E'_1 + E'_2}{2u}$ les variables x et y, le second membre $3X_1$ est remplacé par $\frac{-\overline{V}(v) + \overline{V}(-v)}{16v}$ ou $(-3Y_1)$: donc pour $x = y$, X_1 et Y_1 sont égaux et de signe contraire, de sorte que C est nul.

On a donc

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{\overline{U}(u) - \overline{U}(-u)}{48u} = \dfrac{1}{2}P''_3(u^2), \\ \dfrac{\overline{V}(v) - \overline{V}(-v)}{48v} = -\dfrac{1}{2}P''_3(v)). \end{cases}$$

Il reste à voir si l'équation E'_1 est vérifiée : nous le constatons immédiatement de la façon suivante. Si nous nous rappelons que l'intégrale générale θ de $A_{3,2}$, donnée par la formule (4) du paragraphe **2**, est nulle identiquement pour

$$(41)\qquad \begin{cases} U_1 = Au^6 + Bu^4 + Cu^2 + D + Eu^3, \\ V_1 = Av^6 + Bv^4 + Cv^2 + D + Ev^3, \end{cases}$$

nous voyons aussitôt que les deux intégrales θ_1, θ_2 correspondant à

$$(42)\qquad \begin{cases} U_1 = i(Au^6 + Bu^4 + Cu^2 + D + Eu^3), \\ V_1 = 0, \\ U_2 = 0, \\ V_2 = \quad Av^6 + Bv^4 + Cv^2 + D + Ev^3, \end{cases}$$

donnent manifestement

$$(43)\qquad -i\theta_1 + \theta_2 \equiv 0, \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 \equiv 0.$$

On a donc deux intégrales quadratiques particulières θ_1, θ_2, par ce procédé, qui rentrent dans le type canonique (2) de ce paragraphe avec $p = 2$, $h = 1$: elles ne sont pas intéressantes parce que non linéairement distinctes, mais elles sont précieuses pour vérifier tous nos calculs : avec elles $U \equiv V \equiv 0$, puis

$$(44)\qquad \begin{cases} f(v) \equiv (\ Av^6 + \ Bv^4 + \ Cv^2 + D + Ev^3)^2, \\ \varphi(v) \equiv (6Av^5 + 4Bv^3 + 2Cv + \quad 3Ev^2)^2, \\ F(x) \equiv (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^2 + E^2x^3, \\ G(x) \equiv 2Ex(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \end{cases}$$

et la fonction $G(x)$ correspondant à ce cas très particulier coïncide avec celle que nous avons obtenue, de sorte que la vérification est faite.

Il n'y a plus qu'à récapituler les formules définitives : P_6, P_3, P_2 sont des polynomes arbitraires de degré égal à leur indice et C est une constante

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_{h+1}^{2}+\ldots+V_{p}^{2} &= \quad P_6(v^2)+v^3 P_3(v^2),\\
U_{1}^{2}+\ldots+U_{h}^{2} &= -[P_6(u^2)+u^3 P_3(u^2)],\\
V_{h+1}'^{2}+\ldots+V_{p}'^{2} &= \quad \frac{6}{5}v^2 P_6''(v^2)+v^2 P_2(v^2)+6v^3 P_3'(v^2),\\
U_{1}'^{2}+\ldots+U_{h}'^{2} &= -\left[\frac{6}{5}u^2 P_6''(u^2)+u^2 P_2(u^2)+6u^3 P_3'(u^2)\right],\\
\overline{U} &= \quad \frac{8}{5}u^2 P_6^{\mathrm{iv}}(u^2)+8P_2'(u^2)+12u P_3''(u^2),\\
\overline{V} &= -\frac{8}{5}v^2 P_6^{\mathrm{iv}}(v^2)-8P_2'(v^2)-12v P_3''(v^2),\\
U &= \overline{U}+\sum_{1}^{h}\left(\frac{uU_i''-U_i'}{u^2}\right)^2+C,\\
V &= \overline{V}+\sum_{h+1}^{p}\left(\frac{vV_i''-V_i'}{v^2}\right)^2-C.
\end{aligned}
\right.
$$

formules obtenues en se rappelant que l'on a écrit

$$
f(x) = F(x^2)+x\,G(x^2) \equiv P_6(x^2)+x^3 P_3(x^2),
$$

$$
\varphi(x) \equiv \frac{6}{5}x^2 F''(x^2)+x^2 P_2(x^2)-\frac{6}{x}G(x^2)+6x\,G'(x^2),
$$

$$
(46)\quad \left\{
\begin{aligned}
&G(x) = x P_3(x), \qquad 6x\,G'(x^2)-\frac{6}{x}G(x^2) = 6x^3 P_3'(x^2),\\
&X = \frac{\overline{U}(u)+\overline{U}(-u)}{32}, \qquad Y = \frac{\overline{V}(v)+\overline{V}(-v)}{32},\\
&X_1 = \frac{\overline{U}(u)-\overline{U}(-u)}{48u}, \qquad Y_1 = \frac{\overline{V}(v)-\overline{V}(-v)}{48v},\\
&X = \quad \frac{u^2}{10}P_6^{\mathrm{iv}}(u^2)+\frac{1}{2}P_2'(u^2),\\
&Y = -\frac{v^2}{10}P_6^{\mathrm{iv}}(v^2)-\frac{1}{2}P_2'(v^2),\\
&X_1 = \quad \frac{1}{2}P_3''(u^2),\\
&Y_1 = -\frac{1}{2}P_3''(v^2).
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux intégrales particulières que nous avons obtenues précédemment [formules (42) et (43)] fournissent une vérification précieuse des résultats (45).

Quand on a choisi les polynomes $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_6(x)$, il faut *en général* que h soit au moins égal à 2, ainsi que $p-h$, car on a deux équations pour déterminer $U_1, \ldots, U_h$ et deux pour $V_{h+1}, V_{h+2}, \ldots, V_p$. Nous avons, par l'exemple (42), obtenu un choix particulier de P_5, P_2, P_4 pour lequel on peut prendre $p-h=1$, l'unique fonction V_{h+1} ou V_p étant égale à $Av^6+Bv^4+Cv^2+D+Ev^3$: mais nous savons alors que l'on peut remplacer le couple $(U_{h+1}=0,\ V_{h+1})$ en jeu par

$$(-Au^4-Bu^3-Cu^2-D-Du^3,\ V_{h+1}=0),$$

de sorte que l'on est ramené au cas où tous les V_i sont nuls (et alors $h=1$ ou 2 n'est pas intéressant).

D'ailleurs si les équations en V_{h+1}

$$(47)\qquad \begin{cases} V_{h+1}^2 = P_6(v^2)+v^3P_3(v^2), \\ V_{h+1}'^2=\dfrac{6}{5}\nu_2 P_6''(v^2)+v^2P_2(v^2)+6v^3P_3'(v^2) \end{cases}$$

ont une solution commune, on remarque que $h=1$ donne pour l'unique fonction U_1 la solution

$$U_1(u) \equiv \pm i V_2(u);$$

faire $h=2$ donnerait smplement

$$U_1(u) \equiv iV_3(u)\cos\alpha,$$
$$U_2(u) \equiv iV_3(u)\sin\alpha,$$

où α est une constante, de sorte que les deux intégrales θ_1, θ_2 ne seraient pas indépendantes : donc le nombre d'intégrales quadratiques données par ce premier type peut être 2, 4, 5, 6, ..., les valeurs 1 et 3 étant exclues (en écartant le cas d'intégrales non linéairement distinctes). D'ailleurs si les deux équations (47) ont une solution commune ou bien V_{h+1} est rationnel en v et l'on retombe sur la solution

$$Av^6+Bv^4+Cv^2+D+Ev^3$$

ou bien cette solution est de la forme $(v-a)^{\frac{3}{2}}P(v)$ où $P(v)$ est un polynome en v de degré 3 : or on constate aisément qu'il ne peut exister de telle solution commune, donc 2 aussi est à écarter. Ce type donne donc 4, 5, 6, ... intégrales quadratiques, 1, 2, 3 étant exclues.

On peut encore écrire pour U et V

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{u^2}\sum_{1}^{h} U_i''^2 + \frac{8}{5}u^2 P_6^{(4)}(u^2) + \frac{12}{5}P_6'''(u^2) + \frac{6}{5u^2}P_6''(u^2) \\ &\qquad + 10\,P_2'(u^2) + \frac{P_2(u^2)}{u^2} + 24\,u\,P_3''(u^2) + \frac{12}{u}P_3(u^2) + C, \\ V &= \frac{1}{v^2}\sum_{h+1}^{h} V_i''^2 - \frac{8}{5}v^2 P_6^{(4)}(v^2) - \frac{12}{5}P_6'''(v^2) - \frac{6}{5v^2}P_6''(v^2) \\ &\qquad - 10\,P_2'(v^2) - \frac{P_2(v^2)}{v^2} - 24\,v\,P_3''(v^2) - \frac{12}{v}P_3'(v^2) - C. \end{aligned}\right.$$

4. *Second type de solutions.* — Nous allons maintenant supposer que les fonctions

$$\mathfrak{U}_i \equiv u\left(\frac{U_i'}{u}\right)^{(4)} - \left(\frac{U_i'}{u}\right)''' \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{V}_i \equiv v\left(\frac{V_i'}{v}\right)^{(4)} - \left(\frac{V_i'}{v}\right)'''$$

admettant la réduction canonique (3) du paragraphe qui précède, les fonctions U_i et V_i admettent la réduction canonique

$$(1)\quad\left|\begin{matrix} U_1 & i(U_1 + A_1u^6 + B_1u^4 + C_1u^2 + D_1 + E_1u^3) & \ldots & U_{2k-1} & i(U_{2k-1} + A_{2k-1}u^6 + \ldots) & U_{2k+1} & \ldots & 0 \\ V_1 & iV_1 & \ldots & V_{2k-1} & iV_{2k-1} & 0 & \ldots & V_p. \end{matrix}\right|$$

Nous allons sans difficulté déduire les nouvelles formules de celles qui conviennent au cas

$$(2)\quad\left|\begin{matrix} U_1 & h_1(U_1 + A_1u^6 + \ldots) & U_3 & h_3(U_3 + A_3u^6 + \ldots) & \ldots & U_{2k+1} & \ldots & U_l & 0 & \ldots & 0 \\ V_1 & -\dfrac{V_1}{h_1} & V_3 & -\dfrac{V_3}{h_3} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & V_{l+1} & \ldots & V_p, \end{matrix}\right|$$

$h_1, h_3, \ldots$ étant des constantes dont aucune n'est égale à $+i$ ou $-i$.

Je pose

$$(3)\quad \begin{cases} \overline{U}_1 = U_1 + a_1 u^6 + b_1 u^4 + c_1 u^2 + d_1 + e_1 u^3, \\ \overline{V}_1 = V_1 + a_1 v^6 + b_1 v^4 + c_1 v^2 + d_1 + e_1 v^3, \\ \overline{U}_2 = U_2 + \alpha_1 u^6 + \beta_1 u^4 + \gamma_1 u^2 + \delta_1 + \varepsilon_1 u^3, \\ \overline{V}_2 = V_2 + \alpha_1 v^6 + \beta_1 v^4 + \gamma_1 v^2 + \delta_1 + \varepsilon_1 v^3, \end{cases}$$

de sorte que les intégrales θ_1 et θ_2 ne sont pas changées; U_2 signifie

$$h_1(U_1 + A_1 u^6 + B_1 u^4 + C_1 u^2 + D_1 + E_1 u^3)$$

et V_2 signifie $\dfrac{-V_1}{h_1}$: on détermine les constantes $a_1, b_1, \ldots, e_1, \alpha_1, \ldots, \varepsilon_1$ par les équations

$$(4)\quad a_1 = \frac{h_1^2 A_1}{h_1^2+1}, \qquad \alpha_1 = -\frac{h_1 A_1}{h_1^2+1}, \qquad b_1 = \frac{h_1^2 B_1}{h_1^2+1}, \qquad \beta_1 = -\frac{h_1 B_1}{h_1^2+1}, \qquad \ldots,$$

de façon à avoir

$$(5)\quad \overline{U}_2 = h_1 \overline{U}_1, \qquad \overline{V}_2 = -\frac{\overline{V}_1}{h_1},$$

avec un calcul semblable pour chaque système

$$[(U_3, V_3), (U_4, V_4)], \quad \ldots \quad [(U_{2k-1}, V_{2k-1}), (U_{2k}, V_{2k})],$$

on a transformé le tableau (2) en le nouveau tableau

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \overline{U}_1 & h_1\overline{U}_1 & \overline{U}_3 & h_3\overline{U}_3 & \cdots & \overline{U}_{2k-1} & h_{2k-1}\overline{U}_{2k-1} & U_{2k+1} & \ldots & U_l & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{V}_1 & -\dfrac{\overline{V}_1}{h_1} & \overline{V}_3 & -\dfrac{\overline{V}_3}{h_3} & \cdots & \overline{V}_{2k-1} & -\dfrac{\overline{V}_{2k-1}}{h_{2k-1}} & 0 & \ldots & 0 & V_{l+1} & \ldots & V_p \end{vmatrix}$$

qui ne diffère pas essentiellement du tableau canonique donné au paragraphe précédent, car par une substitution orthogonale sur $[(\overline{U}_1, \overline{U}_2), (\overline{V}_1, \overline{V}_2)]$ on réduit ce système à $\left[(\sqrt{1+h_1^2}\,\overline{U}_1, 0), \left(0, \sqrt{1+\frac{1}{h_1^2}}\,\overline{V}_1\right)\right]$ et de même pour chaque groupe

$$[(U_3, U_4), (V_3, V_4)], \quad \ldots \quad [(U_{2k-1}, U_{2k}), (V_{2k-1}, V_{2k})].$$

On a donc le résultat suivant :

$$
(7)\left\{
\begin{aligned}
&\overline{V}_1^2\left(1+\frac{1}{h_1^2}\right)+\overline{V}_3^2\left(1+\frac{1}{h_3^2}\right)+\ldots+\overline{V}_{2k-1}^2\left(1+\frac{1}{h_{2k-1}^2}\right)+V_{l+1}^2+\ldots+V_p^2=\left[P_6(v^2)+v^3P_3(v^2)\right],\\
&\overline{U}_1^2(1+h_1^2)+\overline{U}_3^2(1+h_3^2)+\ldots+\overline{U}_{2k-1}^2(1+h_{2k-1}^2)+U_{2k+1}^2+\ldots+U_l^2=-\left[P_6(u^2)+u^3P_3(u^2)\right],\\
&\overline{V}_1'^2\left(1+\frac{1}{h_1^2}\right)+\ldots+\overline{V}_{2k-1}'^2\left(1+\frac{1}{h_{2k-1}^2}\right)+V_{l+1}'^2+\ldots+V_p'^2=\frac{6}{5}v^2P_6''(v^2)+v^2P_2(v^2)+6v^3P_3'(v^2),\\
&\overline{U}_1'^2(1+h_1^2)+\ldots+\overline{U}_{2k-1}'^2(1+h_{2k-1}^2)+U_{2k+1}'^2+\ldots+U_l'^2=-\left[\frac{6}{5}u^2P_6''(u^2)+u^2P_2(u^2)+6u^3P_3'(u^2)\right],\\
&U=\frac{1}{u^2}\left[\overline{U}_1''^2(1+h_1^2)+\ldots+\overline{U}_{2k-1}''^2(1+h_{2k-1}^2)+U_{2k+1}''^2+\ldots+U_l''^2\right]+\frac{8}{5}u^2P_6^{\text{iv}}(u^2)+\frac{12}{5}P_6'''(u^2)\\
&\qquad+\frac{6}{5u^2}P_6'(u^2)+10P_2'(u^2)+\frac{P_2(u^2)}{u^2}+24uP_3''(u^2)+\frac{12}{u}P_3'(u^2)+C,\\
&V=\frac{1}{v^2}\left[\overline{V}_1''^2\left(1+\frac{1}{h_1^2}\right)+\ldots+\overline{V}_{k+1}''^2\left(1+\frac{1}{h_{2k+1}^2}\right)+V_{l+1}''^2+\ldots+V_p''^2\right]-\frac{8}{5}v^2P_6^{\text{iv}}(v^2)-\frac{12}{5}P_6'''(v^2)\\
&\qquad-\frac{6}{5v^2}P_6''(v^2)-10P_2'(v^2)-\frac{P_2(v^2)}{v^2}-24vP_3''(v^2)-\frac{12}{v}P_3'(v^2)-C.
\end{aligned}
\right.
$$

Remplaçons dans ces formules $\overline{U}_1, \overline{U}_3, \ldots, \overline{U}_{2k-1}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{2k-1}$ par les valeurs (3) et analogues. Le terme $\overline{U}_1^2(1+h_1^2)$ donne le total [seconde équation (7)]

$$
(8)\qquad U_1^2(1+h_1^2)+2h_1^2[A_1u^6+B_1u^4+C_1u^2+D_1+E_1u^3]U_1
$$
$$
+\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[A_1u^6+B_1u^4+C_1u^2+D_1+E_1u^3]^2.
$$

De même, dans la quatrième équation (7) le terme $\overline{U}_1'^2(1+h_1^2)$ donne le total

$$
(9)\qquad U_1'^2(1+h_1^2)+2h_1^2[6A_1u^5+4B_1u^3+2C_1u+3E_1u^2]U_1'
$$
$$
+\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[6A_1u^5+4B_1u^3+2C_1u+3E_1u^2]^2
$$

et enfin dans la cinquième équation (7) le terme $\frac{1}{u^2}\overline{U}_1''^2(1+h_1^2)$ donne le total

$$
(10)\qquad \frac{1}{u^2}\left\{U_1''^2(1+h_1^2)+2h_1^2[30A_1u^4+12B_1u^2+2C_1+6E_1u]U_1''\right\}
$$
$$
+\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[30A_1u^4+12B_1u^2+2C_1+6E_1u]^2\frac{1}{u^2}.
$$

Or nous savons, d'après la fin du paragraphe précédent, que l'on peut poser avec certains polynomes $p_{6,1}$; $p_{3,1}$; $p_{2,1}$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[A_1 u^6 + B_1 u^4 + C_1 u^2 + D_1 + E_1 u^3]^2 \equiv -[p_{6,1}(u^2) + u^3 p_{3,1}(u^2)],\\
&\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[6A_1 u^5 + 4B_1 u^3 + 2C_1 u + 3E_1 u^2]^2\\
&\quad\equiv -\left[\frac{6}{5}u^2 p''_{6,1}(u^2) + u^2 p_{2,1}(u^2) + 6u^3 p'_{3,1}(u^2)\right],\\
&\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[30A_1 u^4 + 12B_1 u^2 + 2C_1 + 6E_1 u]^2 \frac{1}{u^2}\\
&\quad\equiv -\left[\frac{8}{5}u^2 p_{6,1}^{(4)}(u^2) + \frac{12}{5}p'''_{6,1}(u^2) + \frac{6}{5u^2}p''_{6,1}(u^2)\right.\\
&\qquad\left. + 10p'_{2,1}(u^2) + \frac{p_{2,1}(u^2)}{u^2} + 24u\,p''_{3,1}(u^2) + \frac{12}{u}p'_{3,1}(u^2)\right] + \text{const.}
\end{aligned}\right.$$

Résultats analogues pour les termes

$$\overline{U}_3^2(1+h_3^2),\quad \ldots,\quad \overline{U}_{2k-1}^2(1+h_{2k-1}^2),\quad \overline{U}_3'^2(1+h_3^2),\quad \ldots,\quad \overline{U}_3''^2(1+h_3^2),\quad \ldots.$$

Mais alors, nous pouvons dans la seconde et la quatrième équation (7) faire passer au second membre les termes écrits en seconde ligne dans (9), (10), (et analogues) et en posant

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\Pi_6 &\equiv P_6 - p_{6.1} - p_{6.3} - \ldots - p_{6.2k-1},\\
\Pi_3 &\equiv P_3 - p_{3.1} - p_{3.3} - \ldots - p_{3.2k-1},\\
\Pi_2 &\equiv P_2 - p_{2.1} - p_{2.3} - \ldots - p_{2.2k-1};
\end{aligned}\right.$$

nous remarquons que Π_6, Π_3, Π_2 sont des polynomes *arbitraires*, de degré 6, 3, 2 respectivement, au même titre que P_6, P_3, P_2 : les équations obtenues ne contiennent plus le dénominateur h_1^2+1, ou $h_3^2+1, \ldots$, h_{2k-1}^2+1 : nous pouvons donc faire tendre h_1, h_3, $\ldots$, h_{2k-1} vers i et nous avons le résultant suivant [en y adjoignant la cinquième équation (7) où l'on a, au second membre, utilisé la troisième équation (11)] obtenu en supposant $h_1 = h_3 = \ldots = h_{2k-1} = i$:

$$(13)\quad \begin{aligned}
&-2U_1(A_1u^6 + B_1u^4 + C_1u^2 + D_1 + E_1u^3)\\
&\quad -2U_3(A_3u^6+\ldots) - \ldots - 2U_{2k-1}(A_{2k-1}u^6+\ldots) + U_{2k+1}^2 + \ldots + U_l^2\\
&\equiv -[\Pi_6(u^2) + u^3\Pi_3(u^2)]
\end{aligned}$$

et

$$(14)\quad \begin{aligned}&-2U'_1(6A_1u^5+4B_1u^3+2C_1u+3E_1u^2)\\ &\quad -2U'_3(6A'_3u^5+\ldots)-\ldots-2U'_{2k-1}(6A_{2k-1}u^5+\ldots)+U'^2_{2k+1}+\ldots+U'^2_l\\ &\equiv -\left[\frac{6}{5}u^2\Pi''_6(u^2)+u^2\Pi_2(u^2)+6u^3\Pi'_3(u^2)\right];\end{aligned}$$

$$(15)\quad \begin{aligned}U\equiv\ &\frac{1}{u^2}[-2U''_1(30A_1u^4+12B_1u^2+2C_1+6E_1u)\\ &\quad -2U''_3(30A_3u^4+\ldots)-2U''_{2k-1}(30A_3u^4+\ldots)+U''^2_{2k+1}+\ldots+U''^2_l]\\ &+\frac{8}{5}u^2\Pi_6^{(4)}(u^2)+\frac{12}{5}\Pi'''_6(u^2)+\frac{6}{5u^2}\Pi''_6(u^2)\\ &+10\Pi'_2(u^2)+\frac{\Pi_2(u^2)}{u^2}+24u\Pi''_3(u^2)+\frac{12}{u}\Pi'_3(u^2)+C,\end{aligned}$$

en appelant C une constante.

Prenons maintenant les termes $\mathrm{V}_1^2\left(1+\frac{1}{h_1^2}\right)$ et analogues : le terme explicité donne le total

$$(16)\quad \begin{aligned}&V_1^2\left(1+\frac{1}{h_1^2}\right)+2[A_1v^6+B_1v^4+C_1v^2+D_1+E_1v^3]V_1\\ &\quad+\frac{h_1^2}{h_1^2+1}[A_1v^6+\ldots]^2.\end{aligned}$$

Or en écrivant

$$\frac{h_1^2}{h_1^2+1}=h_1^2-\frac{h_1^4}{h_1^2+1},$$

on met l'expression (16) sous la forme

$$(17)\quad \begin{aligned}&V_1^2\left(1+\frac{1}{h_1^2}\right)+2[A_1v^6+B_1v^4+C_1v^2+D_1+E_1v^3]V_1+h_1^2[A_1v^6+\ldots]^2\\ &\quad-\frac{h_1^4}{h_1^2+1}[A_1v^6+B_1v^4+C_1v^2+D_1+E_1v^3]^2,\end{aligned}$$

et l'on voit aisément que le calcul précédent s'applique avec une très légère différence : on obtient les formules définitives

$$(18)\quad \begin{aligned}&2V_1(A_1v^6+B_1v^4+C_1v^2+D_1+E_1v^3)+2V_3(A_3v^6+\ldots)+\ldots\\ &\quad+2V_{2k-1}(A_{2k-1}v^6+\ldots)-[A_1v^6+B_1v^4+C_1v^2+D_1+E_1v^3]^2\\ &\quad-[A_3v^6+\ldots]^2-\ldots-[A_{2k-1}v^6+\ldots]^2+V_{l+1}^2+\ldots+V_p^2\\ &\equiv\Pi_6(v^2)+v^3\Pi_3(v^2)\end{aligned}$$

et

$$(19)\quad \begin{aligned}&2V'_1(6A_1 v^5 + 4B_1 v^3 + 2C_1 v + 3E_1 v^2) + 2V'_3(6A_3 v^5 + \ldots) + \ldots\\ &+ 2V'_{2k-1}(6A_{2k-1} v^5 + \ldots) - (6A_1 v^5 + 4B_1 v^3 + 2C_1 v + 3E_1 v^2)^2\\ &- (6A_3 v^5 + \ldots)^2 - \ldots - (6A_{2k-1} v^5 + \ldots)^2 + V'^2_{l+1} + \ldots + V'^2_p\\ &\equiv \frac{6}{5} v^2 \Pi''_6(v^2) + v^2 \Pi_2(v^2) + 6 v^3 \Pi'_3(v^2);\end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned}V \equiv \frac{1}{v^2}[&2V''_1(30A_1 v^4 + 12B_1 v^2 + 2C_1 + 6E_1 v)\\ &+ 2V''_3(30A_3 v^4 + \ldots) + \ldots + 2V'_{2k-1}(30A_{2k-1} v^4 + \ldots)\\ &- (30A_1 v^4 + 12B_1 v^2 + 2C_1 + 6E_1 v)^2\\ &- (30A_3 v^4 + \ldots)^2 - \ldots - (30A_{2k-1} v^4 + \ldots)^2 + V''^2_{l+1} + \ldots + V''^2_p]\\ &- \frac{8}{5} v^2 \Pi^{(4)}_6(v^2) - \frac{12}{5} \Pi'''_6(v^2) - \frac{6}{5v^2} \Pi''_6(v^2)\\ &- 10 \Pi'_2(v^2) - \frac{\Pi_2(v^2)}{v^2} - 24 v \Pi''_3(v^2) - \frac{12}{v} \Pi'_3(v^2) - C.\end{aligned}$$

Les formules (2), (13), (14), (15), (18), (19), (20) épuisent ce qui est relatif à ce second type de solutions.

On démontre exactement, comme je l'ai fait pour l'équation E_n, qu'on ne peut obtenir par ce procédé *trois* intégrales quadratiques. Nous savons *a priori* qu'il existe deux couples quadratiques déduits de

$$(21)\qquad z_1 = (u - v)^3\ (u + v)^2, \qquad z_2 = (u - v)^{-2}(u + v)^{-1}$$

et

$$(22)\qquad z'_1 = (u - v)^{-2}(u + v)^2, \qquad z'_2 = (u - v)^3\ (u + v)^{-1}.$$

Nous allons indiquer les solutions U_i, V_i correspondantes. La fonction z_1 correspond au couple

$$U_1 = -\frac{u^8}{8}, \qquad V_1 = -\frac{v^8}{8},$$

et la fonction z_2 au couple

$$U_2 = -\frac{1}{24}, \qquad V_2 = 0,$$

de sorte que les deux intégrales quadratiques

$$(23)\qquad \theta_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad \theta_2 = i\frac{z_1 - z_2}{2}, \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 = u^2 - v^2$$

correspondent aux fonctions

$$(24)\quad \begin{cases} U_1 = -\dfrac{u^8}{16} - \dfrac{1}{48}, & U_2 = i\left(U_1 + \dfrac{1}{24}\right), \\ V_1 = -\dfrac{v^8}{16}, & V_2 = iV_1, \end{cases}$$

et l'on a une solution des équations (13), (14), (15), (18), (19), (20) obtenue en supposant $k = 1$,

$$(25)\quad \Pi_6(x) \equiv -\frac{x^4}{8.24} - \frac{1}{24^2}, \qquad \Pi_3 \equiv 0, \qquad \Pi_2(x) \equiv \frac{3}{40}x'^2.$$

La fonction z'_1 correspond au couple

$$U_1 = -\frac{u^3}{6}, \qquad V_1 = \frac{v^3}{6};$$

ou encore au couple

$$U_1 = -\frac{u^3}{3}, \qquad V_1 = 0,$$

z'_2 au couple

$$U_2 = u^5, \qquad V_2 = v^5,$$

si nous prenons

$$(26)\quad \theta_1 = \frac{z'_2 + z'_1}{2}, \qquad \theta_2 = i\frac{z'_2 - z'_1}{2}, \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 = u^2 - v^2,$$

on peut prendre pour θ_1 et θ_2

$$(27)\quad \begin{cases} U_1 = \dfrac{u^5}{2} - \dfrac{u^3}{6}, & U_2 = i\left(U_1 + \dfrac{u^3}{3}\right), \\ V_1 = \dfrac{v^5}{2}, & V_2 = iV_1. \end{cases}$$

Cette fois on a

$$(28)\quad \Pi_6 \equiv \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{9}, \qquad \Pi_2 \equiv \frac{x^2}{5} - \frac{x}{5}, \qquad \Pi_3 \equiv 0.$$

On verrait sans peine que l'équation générale $A_{m,n}$ admet aussi des intégrales quadratiques, avec deux tableaux canoniques ; les formules s'obtiendraient par des procédés analogues ; la seule difficulté réside en la longueur des calculs.