// JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUBREIL

Recherches sur la valeur des exposants des composants primaires des idéaux de polynômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 231-309.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__231_0>

Recherches sur la valeur des exposants des composants primaires des idéaux de polynomes;

PAR P. DUBREIL.

INTRODUCTION.

Je me suis proposé, dans ce travail, d'apporter quelques précisions de nature géométrique sur les composants primaires de certains idéaux de polynomes. Il est connu depuis Nœther, qu'il faut et suffit pour qu'un polynome $F(x,y)$ soit de la forme

$$F(x,y) = A(x,y)f(x,y) + B(x,y)g(x,y),$$

où f et g sont deux polynomes donnés, A et B deux polynomes arbitraires, que l'on puisse déterminer pour chaque point d'intersection M_i, de coordonnées x_i, y_i, des courbes $f=0$, $g=0$, des polynomes $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$ tels que la différence

$$F - A_i f - B_i g,$$

développée suivant les puissances de $x - x_i$, $y - y_i$, commence par des termes d'ordre au moins égal à un certain nombre ρ_i (1). La théorie générale des idéaux met en évidence la vraie nature de cette proposition en la présentant comme un cas particulier du théorème général suivant :

(1) M. NOETHER, *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen* (*Math. Ann.*, t. 6, p. 351; t. 30, p. 140; t. 34, p. 450; t. 40, p. 140).

Dans un anneau (1) *satisfaisant à l'axiome des chaînes de diviseurs* (Teilerkettensatz), *tout idéal m est plus petit commun multiple d'un nombre fini d'idéaux primaires*

$$\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l].$$

Si l'on suppose que le plus petit commun multiple $[\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k]$ de deux composants primaires quelconques n'est plus primaire et qu'aucun des composants n'est superflu, le nombre l des composants et les idéaux premiers qui leur appartiennent sont déterminés d'une manière unique. Un composant primaire, $\mathfrak{q}_1$ par exemple, est lui-même déterminé d'une manière unique si l'idéal premier correspondant $\mathfrak{p}_1$ n'est diviseur d'aucun des idéaux $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l$ (2).

Pour les idéaux de polynomes, l'axiome des chaînes de diviseurs est équivalent à celui de l'existence d'une base, vérifié pour tout anneau de polynomes $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, dont les coefficients appartiennent à un corps K (3). Si l'on suppose le corps K algébriquement fermé et que l'on considère dans l'anneau $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un idéal ayant pour variété un système de points, chaque composant primaire $\mathfrak{q}_i$ correspond à un point $M_i(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$ de la variété, l'idéal premier correspondant étant

$$\mathfrak{p}_i = (x_1 - \xi_1^{(i)}, x_2 - \xi_2^{(i)}, \ldots, x_n - \xi_n^{(i)}).$$

En outre, chaque composant primaire est défini d'une manière unique.

Le théorème de Nœther, ainsi que plusieurs de ses généralisations (4) est un cas particulier de ce théorème général. La valeur

(1) Pour la terminologie et les notations, *voir* VAN DER WÆRDEN, *Zur Nullstellentheorie der Polynomideale* (*Math. Ann.*, t. **96**, p. 183).

Au lieu d'écrire, pour exprimer qu'un idéal a est multiple d'un idéal b,

$$a \equiv 0 \qquad (b),$$

nous emploierons la notation

$$a \subset b.$$

(2) E. NŒTHER, *Idealtheorie in Ringbereichen* (*Math. Ann.*, t. **83**, p. 24).

(3) D. HILBERT, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (*Math. Ann.*, t. **36**, p. 473).

(4) *Voir*, par exemple, SEVERI, *Su alcune Proprieta dei Moduli di forme algebriche* (*Atti di Torino*, t. **41**, p. 167). — TORELLI, *Sopra certe estensioni del teorema di Nœther* (*Ibid.*, p. 187).

du nombre ρ (minimum) de l'énoncé de Nœther n'est autre que l'*exposant* du composant primaire correspondant. La valeur de cet exposant était bien connue pour un idéal défini par deux courbes planes non tangentes (cas simple)

$$\rho = r + s - 1,$$

r et s désignant les ordres de multiplicité du point considéré pour ces courbes. Dans le cas général, différentes limites supérieures, et notamment le nombre

$$\beta = k - (r - 1)(s - 1),$$

où k désigne l'ordre de multiplicité de la racine correspondante du résultant, avaient été données. Étant donnée la simplification apportée dans la démonstration du théorème par la théorie générale des idéaux, on pouvait espérer déterminer en fonction d'éléments géométriques simples la valeur de cet exposant dans le cas le plus général et notamment d'une manière indépendante de toute réduction effectuée sur les singularités, ce qui peut être important pour certaines applications géométriques, celles, par exemple, qui font intervenir des courbes multiples.

Cette détermination est liée à celle du *sous-résultant*, c'est-à-dire du polynome d'une seule variable, x, de degré minimum, appartenant à l'idéal considéré : ce polynome est, en général, différent du résultant. A moins de particularités provenant du choix des axes (coordonnées *non normales*), l'exposant relatif à un point de la variété est égal à l'ordre de multiplicité de la racine correspondante du sous-résultant dans le corps algébriquement fermé contenant les coefficients des polynomes de base. Si l'on considère un corps parfait quelconque k contenant les coefficients des polynomes de base, la décomposition de l'idéal en idéaux primaires dans l'anneau $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ correspond à la décomposition du sous-résultant en puissances de facteurs irréductibles, l'exposant d'un composant primaire étant égal, en coordonnées normales, à la puissance avec laquelle le facteur irréductible correspondant figure dans le sous-résultant (Chap. I).

Le cas de deux polynomes à deux variables fait l'objet des Chapitres II et III ; le Chapitre II contient un certain nombre de théorèmes grâce auxquels les calculs se trouvent par la suite simplifiés ; ils permettent notamment de remplacer une des courbes par une courbe décomposée, ils conduisent à un procédé pratique pour le calcul de l'exposant, procédé souvent plus rapide que celui de M. Kapferer [1] et fournissent un critère de normalité des axes, ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour que la limite supérieure

$$k-(r-1)(s-1)$$

soit atteinte et pour que le sous-résultant soit identique au résultant.

Le Chapitre III est relatif à la détermination de l'exposant : étant donnée une courbe décomposée $g=g_1g_2$, il existe une relation simple entre les exposants des idéaux (fg_1, g_2), (fg_2, g_1), (f, g_1g_2) (théorème 8). D'autre part, le calcul direct de l'exposant se fait assez simplement lorsque l'une des deux courbes, g, constitue par rapport à l'autre, f, un *faisceau*, c'est-à-dire lorsque deux branches de g choisies d'une manière quelconque ont avec toute branche de f des contacts de même ordre. On décomposera donc, dans le cas général, l'une des deux courbes, g, en faisceaux, décomposition dans laquelle certains faisceaux, les *faisceaux principaux*, jouent un rôle important. On obtient finalement pour l'exposant une limite supérieure, s'exprimant d'une manière simple au moyen des ordres de multiplicité des deux courbes et de leurs ordres de contact au point considéré; il est possible de montrer que cette limite est toujours atteinte, sauf dans certains cas exceptionnels dont on peut préciser assez bien la nature. Enfin on peut, dans des cas étendus, étudier la normalité des axes [2].

Il est également possible de donner quelques résultats simples sur la valeur des exposants d'un idéal de polynomes à deux variables défini par *un nombre quelconque de polynomes de base :* ces résultats sont exposés au Chapitre IV; ils s'étendent, ainsi que les précédents, au

---

[1] KAPFERER, *Notwendige und hinreichende Multiplizitätsbedingungen zum Nœtherschen Fundamentalsatz der algebraischen Funktionen* (*Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wiss.*, 1927, 8. Abh., p. 61, et *Math. Ann.*, t. 97, p. 559). Le procédé donné par M. Kapferer a une signification théorique intéressante.

[2] Un certain nombre de ces résultats ont été résumés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 22 mai, 21 octobre 1929.

cas d'un idéal primaire de dimension $n - 2$ dans un espace à n dimensions.

Qu'il me soit permis enfin d'exprimer à M. Vessiot ma respectueuse reconnaissance pour les conseils et les encouragements qu'il m'a donnés au cours de mon travail. Je remercie aussi vivement M. Garnier du bienveillant intérêt qu'il m'a témoigné.

CHAPITRE I.

SOUS-RÉSULTANT.

1. Étant donné un corps K_0, considérons dans l'anneau de polynomes $K_0[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ h polynomes $f_1, f_2, \ldots, f_h$. L'ensemble commun à tous les sous-corps de K_0 qui contiennent les coefficients de ces polynomes constitue un corps k qui est le plus petit sous-corps de K_0 contenant ces coefficients. On l'obtient en adjoignant au sous-corps premier de K_0 les coefficients de $f_1, f_2, \ldots, f_h$.

Soit K un surcorps quelconque de k. L'ensemble des polynomes de la forme

$$f = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots + A_h f_h, \tag{1}$$

où les A sont des polynomes arbitraires de l'anneau $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ forme dans cet anneau un idéal que nous désignerons par $\mathfrak{m}_K$. Si K_1 est un sous-corps de K_2, l'idéal $\mathfrak{m}_{K_1}$ est, dans l'anneau $K_2[x_1, x_1, \ldots, x_n]$, un multiple de $\mathfrak{m}_{K_2}$. On démontre que l'ensemble commun à l'idéal $\mathfrak{m}_{K_2}$ et à l'anneau $K_1[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ est l'idéal $\mathfrak{m}_{K_1}$: autrement dit, si un polynome f admet une représentation de la forme (1) avec des A_i dont les coefficients appartiennent à un corps quelconque, il admet une telle représentation avec des A_i dont les coefficients appartiennent au plus petit corps contenant les coefficients de f et des polynomes de base $f_1, f_2, \ldots, f_h$.

Cela étant, considérons un polynome F par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ et à un paramètre t,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) = \sum_{i=1}^{\nu} t^i F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et soit k un corps (par exemple le plus petit), contenant les coefficients des polynomes de base et des polynomes F_i.

LEMME 1. — *Si* F *appartient à un idéal* $\mathfrak{m}_K$, *les polynomes* F_i *appartiennent à* $\mathfrak{m}_k$. — On peut supposer, en effet, d'après ce qui précède, que K est le corps $k(t)$. On a alors une relation de la forme

$$(2)\qquad Q(t)\sum_{i=1}^{\nu} t^i F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{h} A_j(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

identité dans laquelle les coefficients des polynomes Q et A_j appartiennent au corps k. En identifiant les termes de plus haut degré en t, nous obtenons

$$F_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{h} A_{j,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui, combinée avec (1), donne de nouveau

$$F_{\nu-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{h} A_{j,\nu-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et ainsi de suite.

Ce lemme s'étend immédiatement au cas d'un nombre quelconque de paramètres, $t_1, t_2, \ldots, t_r$.

Plaçons-nous dans le cas où le corps K_0 correspondant aux polynomes de base est *parfait*. (Il en sera ainsi si l'on suppose, comme on le fait ordinairement dans les applications géométriques, qu'il contient le corps des nombres rationnels, de caractéristique zéro.) Soit Ω le corps algébriquement fermé correspondant à K_0. Nous supposons les polynomes de base tels que la variété de l'idéal $\mathfrak{m}_\Omega$ dans l'espace $C(\Omega)$ soit de dimension zéro et tout entière à distance finie, ce qui exige $h \geqq n$. Cette variété se compose alors d'un certain nombre de points, M_1, $M_2, \ldots, M_l$, et l'on a

$$\mathfrak{m}_\Omega = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l],$$

$\mathfrak{q}_i$ étant l'idéal primaire correspondant au point $M_i(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$, auquel appartient l'idéal premier

$$\mathfrak{p}_i = (x_1 - \xi_1^{(i)}, x_2 - \xi_2^{(i)}, \ldots, x_n - \xi_n^{(i)}).$$

Soit ρ_i l'exposant de $\mathfrak{q}_i$; le polynome

$$P(x_1) = \prod_{i=1}^{\rho} (x_1 - \xi_1^{(i)})^{\rho_i}$$

appartient à l'idéal $\mathfrak{m}_\Omega$. Il existe donc des polynomes appartenant à $\mathfrak{m}_\Omega$ et à l'anneau $\Omega[x_1]$. Ces polynomes formant un idéal principal, sont par conséquent tous multiples de l'un d'entre eux, $R(x_1)$, défini à un facteur constant près. Nous appellerons ce polynome $R(x_1)$ *sous-résultant* de l'idéal $\mathfrak{m}_\Omega$. Si $\mathfrak{n}_\Omega$ est un multiple de $\mathfrak{m}_\Omega$, son sous-résultant $S(x_1)$ est multiple de $R(x_1)$. Si l'on a

$$\mathfrak{m}_\Omega = [\mathfrak{m}_\Omega^{(1)}, \mathfrak{m}_\Omega^{(2)}, \ldots, \mathfrak{m}_\Omega^{(\alpha)}],$$

le sous-résultant de $\mathfrak{m}_\Omega$ est le p.p.c.m. des sous-résultants de $\mathfrak{m}_\Omega^{(1)}, \ldots, \mathfrak{m}_\Omega^{(\alpha)}$.

Étant donné un sous-corps quelconque ω de Ω, nous pourrions définir de même le sous-résultant de l'idéal $\mathfrak{m}_\omega$, qui, *a priori*, serait un multiple de $R(x_1)$. Mais nous verrons que $R(x_1)$ appartient à l'anneau $K_0[x_1]$ et, par suite, peut être considéré comme le sous-résultant de l'un quelconque des idéaux $\mathfrak{m}_\omega$. Démontrons d'abord le théorème suivant :

Théorème 1. — *En général, c'est-à-dire pour un choix convenable toujours possible des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, on a*

$$R(x_1) = P(x_1)$$

(*chaque racine du sous-résultant a un ordre de multiplicité égal à l'exposant de l'idéal primaire correspondant*).

A partir d'un système de coordonnées fixes quelconques $X_1, X_2, \ldots, X_n$, effectuons la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_n X_n, \\ x_2 = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = X_n. \end{array} \right.$$

Considérons le sous-résultant par rapport à la variable transformée x_1

$$R(x_1) = (x_1 - \xi_1^{(1)})^{\sigma_1} S(x_1)$$

avec $S(\xi_1^{(1)}) \neq 0$, c'est-à-dire $S \not\subset \mathfrak{p}_1$ (¹).

Nous avons

$$(x_1 - \xi_1^{(1)})^{\sigma_1} = [X_1 - \Xi_1^{(1)} + t_2(X_2 - \Xi_2^{(1)}) + \ldots + t_n(X_n - \Xi_n^{(1)})]^{\sigma_1} \subset \mathfrak{q}_1,$$

d'où résulte, d'après le lemme 1, que chaque monome de degré σ_1 par rapport aux différences $X_i - \Xi_i^{(1)}$ appartient à l'idéal $\mathfrak{q}_1$. On a donc

$$\sigma_1 \geqq \rho_1.$$

Mais $R(x_1)$ étant, par définition, un diviseur de $P(x_1)$, on a

$$\sigma_1 \leqq \rho_1$$

et, par suite,

$$\sigma_1 = \rho_1.$$

Particularisons les axes en attribuant aux paramètres t des valeurs particulières (appartenant au corps Ω). Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda$ les polynomes de base de $\mathfrak{q}_1$. On a une identité de la forme

$$(3) \qquad [X_1 - \Xi_1^{(1)} + t_2(X_2 - \Xi_2^{(1)}) + \ldots + t_n(X_n - \Xi_n^{(1)})]^{\rho_1} = \sum_{k=1}^{\lambda} A_k \varphi_k(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

les A_k étant des polynomes en $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients rationnels par rapport aux t. D'après ce qui précède, si les t restent indéterminés, aucun des systèmes de polynomes A_k satisfaisant à l'identité (3) n'est tel que les polynomes de ce système soient tous divisibles par

$$X_1 - \Xi_1^{(1)} + t_2(X_2 - \Xi_2^{(1)}) + \ldots + t_n(X_n - \Xi_n^{(1)}).$$

(¹) Il existe des valeurs particulières des t pour lesquelles un deuxième point M_i se trouve dans le plan $x_1 = \xi_1$. Pour ces valeurs, on a $S \subset \mathfrak{p}_1$. La relation $S \not\subset \mathfrak{p}_1$ fait intervenir l'hypothèse que les t sont des paramètres indéterminés. Par la suite, dans l'attribution de valeurs particulières aux t, nous exclurons toujours les valeurs pour lesquelles un plan $x_1 =$ const. contiendrait plus d'un point M.

Si, par l'attribution de valeurs *particulières* aux t, une telle divisibilité devient possible, auquel cas on a pour le sous-résultant dans le système d'axes correspondants

$$\sigma_1 < \rho_1,$$

ce ne peut être que pour certains systèmes exceptionnels de valeurs des t. Les coordonnées seront dites *normales* au point M si l'on a $\sigma_1 = \rho_1$, *non normales* si l'on a $\sigma_1 < \rho_1$. Il importe de remarquer que la définition du nombre σ_1 et de la normalité des axes est relative : à un point de la variété (à un composant primaire de l'idéal), à une variable particulière x_1, à un choix particulier des coordonnées. Pour l'idéal $\mathfrak{w} = \mathfrak{q} = (x, y^2)$, on a par exemple

$$\rho = 2, \qquad \sigma_x = 1, \qquad \sigma_y = 2.$$

Les axes, normaux pour la variable y, ne le sont pas pour la variable x.

2. Supposons les coordonnés normales. Soit K un corps compris entre Ω et K_0 et pouvant coïncider avec ce dernier. Soit $\mathfrak{m}_K$ l'idéal défini dans l'anneau $K[x_1, x_2, \ldots, x_n] = R_K$ par la base $f_1, f_2, \ldots, f_h$. Nous allons montrer que le sous-résultant $R(x_1)$ de l'idéal $\mathfrak{m}_\Omega$ appartient à l'anneau $K[x_1, x_2, \ldots, x_n] = R_K$.

Soit dans l'anneau R_K l'idéal $\mathfrak{m}_K = [\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_\alpha]$ décomposé en idéaux primaires. Soient $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\alpha$ les idéaux premiers correspondants. A $\mathfrak{Q}_i$ et à $\mathfrak{P}_i$ correspondent dans l'anneau $R_\Omega = \Omega[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ des idéaux $\mathfrak{Q}'_i$, $\mathfrak{P}'_i$ de même base, mais qui, en général, ne sont pas primaires, ni premiers. Par exemple, l'idéal $(x^2 - 2)$, premier dans l'anneau des polynomes à coefficients rationnels, ne l'est plus dans un anneau de polynomes contenant $\sqrt{2}$. Mais il résulte d'un théorème important ([1]) que dans l'anneau R_Ω, la décomposition de chaque

([1]) VAN DER WÆRDEN, *Eine Verallgemeinerung des Bezoutschen Theorems* (*Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 517, Satz 25).

La démonstration donnée par M. Van der Wærden fait intervenir deux hypothèses : l'idéal $\mathfrak{P}$ est de première espèce et Ω est une extension normale (ou de Galois) de K. Ces hypothèses sont une conséquence de celles que nous avons faites (K parfait, Ω algébriquement fermé).

idéal $\mathfrak{P}'$ en idéaux primaires ne fait intervenir que des idéaux *premiers* formant un système d'idéaux conjugués par rapport au corps K, soit
$$\mathfrak{P}' = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l]$$
avec
$$\mathfrak{p}_j = (X_1 - \Xi_1^{(j)}, X_2 - \Xi_2^{(j)}, \ldots, X_n - \Xi_n^{(j)}),$$
$\Xi_j^{(1)}, \Xi_j^{(2)}, \ldots, \Xi_j^{(l)}$ formant pour chaque valeur de j un système de nombres conjugués par rapport au corps K.

Cela étant, on a
$$\mathfrak{Q}' = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l],$$
l'idéal premier attaché à $\mathfrak{q}_i$ étant $\mathfrak{p}_i$. En effet, $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{P}'$ ont dans l'espace $C_n(\Omega)$ la même variété, en vertu des relations
$$\mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{P}', \qquad \mathfrak{P}'^{\rho} \subset \mathfrak{Q}',$$
qui sont une conséquence des relations analogues entre $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{P}$, puisque ces dernières ne font intervenir que les polynomes de base; ρ désigne l'exposant de l'idéal primaire $\mathfrak{Q}$.

En outre, *les exposants* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_l$ *des idéaux* $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l$ *dans l'anneau* R_Ω *sont tous égaux à* ρ.

Ils sont d'abord tous égaux à un même nombre λ. Pour l'établir, il suffit de montrer qu'une relation telle que
$$\mathfrak{p}_1^{\lambda} \subset \mathfrak{q}_1$$
entraîne les relations
$$\mathfrak{p}_i^{\lambda} \subset \mathfrak{q}_i \qquad (i = 2, \ldots, l).$$

Soit σ un entier supérieur ou égal au plus grand des exposants $\rho_2, \ldots, \rho_l$. Posons
$$P_i = x_1 - \xi_1^{(i)} = X_1 - \Xi_1^{(i)} + t_2(X_2 - \Xi_2^{(i)}) + \ldots + t_n(X_n - \Xi_n^{(i)}),$$
où les t sont des indéterminées. Nous avons
$$F_1 = P_1^{\lambda} P_2^{\sigma} P_3^{\sigma} \ldots P_l^{\sigma} \subset \mathfrak{Q}',$$
c'est-à-dire, en désignant par $\psi_1, \ldots, \psi_s$ une base de $\mathfrak{Q}'$ (base con-

tenue dans l'anneau $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$),

$$(4) \qquad F_1 = \sum_{j=1}^{\beta} B_j^{(1)} \psi_j.$$

les $B_j^{(1)}$ dépendent des Ξ comme F_1. On passe de F_1 au polynome

$$F_i = P_1^{\sigma} \ldots P_{i-1}^{\sigma} . P_i^{\lambda} . P_{i+1}^{\sigma} \ldots P_t^{\sigma}$$

en permutant le système $\Xi_1^{(1)}, \ldots, \Xi_n^{(1)}$ avec le système conjugué $\Xi_1^{(i)}, \ldots, \Xi_n^{(i)}$. Cette permutation, effectuée dans les deux membres de l'identité (4), donne une identité de même forme,

$$(4') \qquad F_i = \sum_{j=1}^{\beta} B_j^{(i)} \psi_j,$$

d'où résulte

$$F_i \subset \mathfrak{Q}',$$

et comme

$$P_1^{\sigma} \ldots P_{i-1}^{\sigma} . P_{i+1}^{\sigma} \ldots P_t^{\sigma} \not\subset \mathfrak{p}_i,$$

on a

$$P_i^{\lambda} \subset \mathfrak{q}_i,$$

d'où, les t étant des indéterminées,

$$\mathfrak{p}_i^{\lambda} \subset \mathfrak{q}_i.$$

Considérons alors le polynome

$$F = P_1 . P_2 \ldots P_t.$$

Ce polynome appartient à l'idéal $\mathfrak{P}'$, donc à l'idéal $\mathfrak{P}$, car, étant identique à tous ses conjugués par rapport au corps K, il appartient à l'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]$. Nous voyons ainsi que le sous-résultant de $\mathfrak{m}_\Omega$, qui, en coordonnées normales, est le produit de facteurs de la forme F^λ, appartient à l'anneau $K[x_1]$. On a enfin $\lambda = \rho$. En effet, le polynome F^ρ appartient à $\mathfrak{Q}'$, donc est multiple de F^λ en raison même de la définition du sous-résultant, par suite, $\lambda \leqq \rho$. D'autre part, il existe un polynome f de l'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que

$$f \subset \mathfrak{p}^{\rho-1}, \quad f \not\subset \mathfrak{Q}.$$

Il en résulte, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$, ayant la même base, ainsi que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$:

$$f \subset \mathfrak{P}'^{\rho-1}, \qquad f \not\subseteq \mathfrak{Q}',$$

c'est-à-dire

$$f \subset \mathfrak{p}_i^{\rho-1} \qquad (\text{pour chaque valeur de } i),$$
$$f \not\subseteq \mathfrak{q}_i \qquad (\text{pour au moins une valeur de } i).$$

On a donc $\lambda \geqq \rho$, et finalement $\lambda = \rho$. Enfin il est clair que le polynome

$$F = (x_1 - \xi_1^{(1)}).(x_1 - \xi_1^{(2)}) \ldots (x_1 - \xi_1^{(l)}),$$

où les $\xi_1^{(i)}$ constituent un système unique de nombres conjugués par rapport au corps K, est irréductible (¹) dans l'anneau $K[x_1]$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, généralisant le théorème 1.

Théorème 1'. — *En coordonnées normales le sous-résultant de l'idéal $\mathfrak{m}_\Omega = (f_1, f_2, \ldots, f_h)$ est un polynome dont les coefficients appartiennent à tout corps K contenant les coefficients des polynomes de base. Sa décomposition en puissances de facteurs irréductibles dans l'anneau $K[x_1]$ correspond à la décomposition de l'idéal $\mathfrak{m}_K$ en idéaux primaires, l'exposant d'un tel facteur irréductible étant égal à l'exposant de l'idéal primaire correspondant.*

En particulier, pour que l'idéal $\mathfrak{m}_K$ soit premier (primaire), il faut et il suffit que son sous-résultant en coordonnées normales soit irréductible (égal à une puissance d'un facteur irréductible).

Pour des coordonnées qui ne sont pas normales, on voit sans peine, par un raisonnement analogue au précédent, que les ordres de multiplicité, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ des racines du sous-résultant qui correspondent aux idéaux $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l$ conjugués par rapport au corps K, sont égaux à un même nombre σ, qui, cette fois, est *inférieur* à ρ. Le sous-résultant appartient encore à l'anneau $K[x_1]$, sa décomposition en facteurs irréductibles dans cet anneau correspond à la décomposition de $\mathfrak{m}_K$ en idéaux primaires, mais on n'a plus l'égalité des exposants.

3. *Cas de deux polynomes de base, à deux variables x et y.* — Con-

(¹) Il y a un cas d'exception, mais que nous avons exclu une fois pour toutes : celui des valeurs de t pour lesquelles plusieurs des $\xi^{(i)}$ deviennent égaux.

sidérons en particulier deux courbes algébriques planes

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0.$$

Posons

$$f(x, y) = H_m(x) + H_{m-1}(x).y + \ldots + H_0(x).y^m,$$
$$g(x, y) = K_n(x) + K_{n-1}(x).y + \ldots + K_0(x).y^n,$$

où nous supposerons que l'un au moins des polynomes $H_0(x)$, $K_0(x)$, par exemple H_0, est une constante.

Considérons un polynome en x seul appartenant à l'idéal

$$(5) \qquad P(x) = U(x, y) f(x, y) + V(x, y) g(x, y).$$

Dans une telle relation, on peut prendre pour V un polynome de degré $m-1$ au plus en y

$$V(x, y) = v_{m-1}(x) + v_{m-2}(x).y + \ldots + v_0(x).y^{m-1}.$$

Car, s'il n'en était pas ainsi, la division suivant les puissances de y

$$V(x, y) = f(x, y).Q(x, y) + V_0(x, y),$$

où Q et V_0 sont des polynomes en y *et en* x (puisque H_0 est une constante), donnerait un reste V_0 satisfaisant à cette condition et l'on aurait

$$P(x) = [U(x, y) + Q(x, y) g(x, y)] f(x, y) + V_0(x, y) g(x, y).$$

Le polynome V dans l'équation (5) ayant par rapport à y un degré $\leqq m-1$, le polynome U a par rapport à y un degré $\leqq n-1$:

$$U(x, y) = u_{n-1}(x) + u_{n-2}(x).y + \ldots + u_0(x).y^{n-1}$$

et avec de tels polynomes, l'identité (5) n'est possible que d'une seule manière.

Soit en particulier

$$R(x) = A(x, y) f(x, y) + B(x, y) g(x, y)$$

le sous-résultant, B′ étant de degré inférieur à n par rapport à y. Nous avons

$$P(x) = R(x) S(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &U(x, y) f(x, y) + V(x, y) g(x, y) \\ &\quad = S(x) A(x, y) f(x, y) + S(x) B(x, y) g(x, y), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S(x) A(x, y) &= U(x, y), \\ S(x) B(x, y) &= V(x, y). \end{aligned}$$

D'autre part, si l'un des polynomes $U(x, y)$, $V(x, y)$ s'évanouit pour une valeur de x, il en est nécessairement de même de l'autre. On obtient donc le sous-résultant à partir d'un polynome P quelconque de l'idéal ne contenant que x (par exemple à partir du résultant) en mettant le polynome P sous la forme (5) et en divisant les polynomes U et V, choisis comme il a été dit, par le polynome $S(x)$ plus grand commun diviseur des polynomes $u(x)$ ou des polynomes $v(x)$. Nous retrouvons ainsi, dans le cas de deux polynomes de base à deux variables, le résultat établi plus haut : le sous-résultant appartient à l'anneau $K_0[x]$, K_0 étant le plus petit corps contenant les coefficients des polynomes f et g. En effet, le résultant qui s'obtient par des opérations rationnelles (par exemple au moyen du déterminant de Sylvester dont les polynomes u et v sont des mineurs) appartient ainsi que les polynomes u et v à l'anneau $K_0[x]$. Il en est de même du plus grand commun diviseur $S(x)$ des polynomes u ou v, et par conséquent du sous-résultant (1).

(1) Le procédé que nous venons d'indiquer pour obtenir le sous-résultant se trouve effectivement en défaut si H_0 et K_0 ne se réduisent ni l'un ni l'autre à des constantes, cas d'exception qu'un changement de l'axe des y permet toujours d'éviter. Soient, par exemple,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -x^2 + y^2(x^2+1), \\ g(x, y) &= x - x^2 + x^3 + y^2(x^2+1); \end{aligned}$$

on a

$$f(x, y) - g(x, y) = -x(x^2+1).$$

Mais ce polynome, pour lequel $U(x, y) = 1$, $V(x, y) = -1$ n'est cependant pas le sous-résultant $R(x)$, car on a

$$(x + y^2 - 1) f(x, y) - (y^2 - 1) g(x, y) = x.$$

CHAPITRE II.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

1. Avec des coordonnées normales, le sous-résultant permet de calculer l'exposant d'un composant primaire de l'idéal $m=(f, g)$. Il importe donc d'avoir un critère pour la normalité des axes.

Définition. — Nous dirons qu'un système d'axes est *régulier* pour l'idéal $m=(f, g)$ au point O, si les coefficients H_0, K_0 des plus hautes puissances de y dans f et dans g sont des constantes ([1]), et si de plus Oy n'est parallèle à aucune des droites joignant O aux autres points d'intersection des courbes de base ([2]), ou tangentes en O soit à f, soit à g ([3]).

Il y a des cas où tout système d'axes régulier est normal. Supposons par exemple que le point O correspondant à l'idéal primaire $\mathfrak{q}$ soit un point simple pour l'une des deux courbes de base, par exemple pour g. Soient r l'ordre de multiplicité du même point pour la courbe f, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ les ordres de contact (positifs ou nuls) des branches de f avec la branche unique de g passant par O. Le *résultant* des polynomes f, g est de la forme

$$P(x)=x^k Q(x)=Uf+Vg \qquad [Q(0)\neq 0]$$

avec

$$k=r+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r \quad ([4]).$$

Nous avons donc, quels que soient les axes,

$$\sigma \leqq r+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r.$$

Mais on a aussi l'inégalité inverse, car si l'on considère y comme la

---

([1]) *Voir* Chapitre I, § 3, p. 242.

([2]) *Voir* Chapitre I, § 1, note 1, p. 238.

([3]) *Voir* Chapitre II, § 2, Théorèmes 3 et 3', p. 253, 254.

([4]) HALPHEN, *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (*Œuvres*, I, p. 216-311, art. 1).

fonction de x définie au voisinage de O par l'équation

$$g(x, y) = 0$$

et si l'on remarque que, les axes étant réguliers, la fonction $f(x, y)$ est, pour cette valeur de y, d'ordre $r + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$ par rapport à x (¹), on voit que tout polynome en x appartenant à l'idéal est au moins de cet ordre. On a donc

$$\sigma = r + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = k = \rho,$$

puisque

$$\sigma \leqq \rho \leqq k.$$

Ainsi :

En un point d'intersection simple pour l'une au moins des deux courbes, on a $\rho = k$, et tout système d'axes régulier est normal.

Dans le cas général, nous allons démontrer la condition nécessaire et suffisante suivante :

Pour qu'un système d'axes régulier soit normal au point O, il faut et il suffit que les polynomes A, B dans l'identité

$$R(x) = Af + Bg,$$

où R désigne le sous-résultant, soient d'ordres (²) $l' = s - 1$, $l = r - 1$, r et s étant les ordres respectifs de f et g. En outre, on a, que les axes soient ou non normaux,

$$\rho = \sigma + r - 1 - l.$$

Nous devons d'abord établir quelques lemmes.

Considérons une courbe algébrique f d'équation

$$f(x, y) = H_m(x) + H_{m-1}(x).y + \ldots + H_0(x)y^m = 0,$$

où H_0 est une constante (par exemple $H_0 = 1$). Nous supposons que la courbe f admet l'origine O comme point multiple d'ordre r, possède en ce point et aux autres points d'intersection avec Oy, μ' systèmes circulaires d'ordres $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu'}$.

(¹) Halphen, *loc. cit.*

(²) Nous dirons par la suite, pour plus de simplicité, qu'un polynome $f(x, y)$ est d'ordre α au point $M(a, b)$ lorsque, développé suivant les puissances croissantes de $x - a$, $y - b$, ce polynome commence par des termes d'ordre égal à α.

Lemme 1. — La courbe f satisfaisant aux conditions précédentes, on peut, étant donné un entier positif α arbitraire, déterminer un polynome $f_0(x,y)$ ne s'annulant pas en O et des polynomes $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, de la forme

$$f_i(x, y) = \alpha_{r_i}(x) + \alpha_{r_i-1}(x).y + \ldots + y^{r_i}$$

tels que l'on ait

$$(1) \qquad f - f_0.f_1.f_2 \ldots f_\mu \subset \mathfrak{p}^\alpha \qquad [\mathfrak{p} = (x, y)].$$

Sur une branche de f appartenant, au voisinage de $x = 0$, au $i^{\text{ième}}$ système circulaire, d'ordre r_i, y est développable en série entière suivant les puissances de ξ_1, ξ_1 satisfaisant à l'équation

$$(2) \qquad \xi^{r_i} = x.$$

Soit $y_1^{(i)}$ cette série. On passe de ce développement à ceux des $r_i - 1$ autres branches du système circulaire en remplaçant dans $y_1^{(i)}$ la racine ξ_1 par les $r_i - 1$ autres racines $\xi_2, \ldots, \xi_{r_i}$ de l'équation (2) : $y_1^{(i)}$ se change alors en $y_2^{(i)}, \ldots, y_{r_i}^{(i)}$. Le produit

$$P^{(i)} = (y - y_1^{(i)})(y - y_2^{(i)}) \ldots (y - y_{r_i}^{(i)})$$

est un polynome en y dont chaque coefficient est un polynome symétrique en $y_1^{(i)}, \ldots, y_{r_i}^{(i)}$, donc peut se mettre sous la forme d'une série de polynomes symétriques en $\xi_1, \ldots, \xi_{r_i}$, c'est-à-dire sous la forme d'une série entière en x, et l'on peut choisir x_0 de telle manière que les séries-coefficients de $P^{(i)}$ soient convergentes dans l'intervalle $-x_0, +x_0$. Si on limite *à un même rang*, par exemple au terme en $\xi_i^{r_i\alpha}$, les séries $y_1^{(i)}, \ldots, y_{r_i}^{(i)}$ et qu'on remplace ainsi ces fonctions dans $P^{(i)}$ par des développements approchés $\eta_1^{(i)}, \ldots, \eta_{r_i}^{(i)}$, on obtient un produit

$$\Pi^{(i)} = (y - \eta_1^{(i)})(y - \eta_2^{(i)}) \ldots (y - \eta_{r_i}^{(i)})$$

qui, en vertu du raisonnement précédent, est un *polynome* en x et en y.

Soit Π le produit des polynomes $\Pi^{(i)}$ correspondant aux différents systèmes circulaires de la courbe $f = 0$ aux points d'abscisses $x = 0$. Le produit des expressions correspondantes $P^{(i)}$ n'est autre, dans un intervalle convenable $-x_0$, $+x_0$, que le polynome $f(x, y)$. Posons

$$\theta_k^{(l)} = y_k^{(l)} - \eta_k^{(l)}.$$

$\theta_k^{(l)}$ est, au voisinage de $x = 0$, une fonction d'ordre au moins égal à α par rapport à x.

Nous avons, dans l'intervalle $-x_0$, $+x_0$,

$$f - \Pi = (y - \eta_1^{(1)} - \theta_1^{(1)}) \ldots (y - \eta_{r_\mu}^{(\mu)} - \theta_{r_\mu}^{(\mu)}) - (y - \eta_1^{(1)}) \ldots (y - \eta_{r_\mu}^{(\mu)}).$$

Par suite la différence $f - \Pi$ est un polynome en y dont chaque coefficient est une fonction de x d'ordre au moins égal à α par rapport à x. Mais ces coefficients sont eux-mêmes des polynomes, de sorte que nous avons

$$f - \Pi \subset \mathfrak{p}^\alpha.$$

Si nous désignons dans Π par $f_1, \ldots, f_\mu$, les polynomes $\Pi^{(i)}$ correspondant aux systèmes circulaires relatifs *au point* O, par f_0 le produit des autres polynomes $\Pi^{(i)}$, nous avons bien une relation de la forme (1).

Considérons un polynome g et deux polynomes f et $\bar{f}$ tels que

$$f - \bar{f} \subset \mathfrak{p}^\alpha.$$

Désignons par $\mathfrak{q}$ le composant primaire, en O, de l'idéal

$$\mathfrak{m} = (f, g),$$

par $\bar{\mathfrak{q}}$ celui de l'idéal

$$\bar{\mathfrak{m}} = (\bar{f}, g).$$

Soient ρ et $\bar{\rho}$ leurs exposants, et

$$x^\sigma S(x) = R(x) = Af + Bg,$$
$$x^{\bar{\sigma}} \bar{S}(x) = \bar{R}(x) = \bar{A}\bar{f} + \bar{B}g,$$

leurs sous-résultants. Soit enfin r l'ordre en O de f et de $\bar{f}$ $(r = \bar{r})$, s celui de g.

Lemme 2. — Si α est assez grand, on a $\rho = \bar{\rho}$, $\sigma = \bar{\sigma}$, $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}}$; et si les polynomes $\bar{A}$, $\bar{B}$ sont d'ordres respectifs $s - \lambda$, $r - \lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq r, s)$ il en est de même des polynomes A, B.

a. Supposons donné le polynome f, et prenons $\alpha \geqq \rho + 1$. On a alors

$$P_\alpha = \bar{f} - f \subset \mathfrak{q}, \qquad \bar{\bar{f}} \subset \mathfrak{q}; \qquad \bar{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q} \qquad \text{et} \qquad \rho \geqq \bar{\rho}.$$

Soit $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l]$. Considérons un polynome T tel que

$$T \not\subset \mathfrak{p}, \qquad T \subset [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l].$$

Soit P_ρ un polynome quelconque d'ordre ρ

$$P_\rho \subset \mathfrak{p}^\rho \subset \mathfrak{q}.$$

Nous avons

$$TP_\rho \subset \mathfrak{m}, \qquad TP_\rho = Uf + Vg = U(\bar{f} + P_\alpha) + Vg,$$

d'où

$$TP_\rho - UP_\alpha \subset \bar{\mathfrak{q}}.$$

Le polynome $TP_\rho - UP_\alpha$ est d'ordre $\rho (\alpha \geqq \rho + 1)$; il appartient à $\bar{\mathfrak{q}}$ et son polynome homogène d'ordre ρ est arbitraire. On a donc

$$\rho \geqq \bar{\rho}$$

et, par suite,

$$\rho = \bar{\rho},$$

ce qui entraîne

$$\alpha \geqq \bar{\rho} + 1, \qquad f \subset \bar{\mathfrak{q}}, \qquad \mathfrak{q} \subset \bar{\mathfrak{q}} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}};$$

donc

$$\sigma = \bar{\sigma}.$$

b. Considérons les polynomes A et $\bar{A}$, ce dernier étant supposé d'ordre $s - \lambda$. On a

$$\begin{aligned} x^\sigma S\bar{S} &= S\bar{A}\bar{f} + S\bar{B}g \\ &= \bar{S}Af + \bar{S}Bg = \bar{S}A(\bar{f} + P_\alpha) + \bar{S}Bg. \end{aligned}$$

Or

$$\bar{S}P_\alpha \subset \bar{\mathfrak{m}}$$

et, par suite,

$$\bar{S}P_\alpha = u\bar{f} + vg,$$

où le polynome u s'annule à l'origine : en effet, d'après l'identité

$$x^\sigma \bar{S} = \bar{A}\bar{f} + \bar{B}g,$$

le polynome $\bar{f}$, lorsqu'on y remplace y par une des racines de $g(x, y) = 0$ au voisinage de l'origine, devient une fonction de x qui est d'ordre σ

au plus. Or

$$\alpha \geqq \rho + 1 \geqq \sigma + 1.$$

Le polynome u, dans les mêmes conditions, doit donc être une fonction d'ordre au moins égal à 1, par conséquent s'annuler à l'origine.

Cela étant, nous avons, en remplaçant P_α par sa valeur, une identité de la forme

$$x^\sigma S\bar{S} = S\bar{A}\bar{f} + S\bar{B}g = A(\bar{S} + u)\bar{f} + (S\bar{B} + Av)g,$$

qui exige

$$S\bar{A} - A(\bar{S} + u) = Qg.$$

Or $\bar{A}$ est par hypothèse d'ordre $s - \lambda$, S et $\bar{S}$ sont d'ordre 0, u est d'ordre 1 au moins, donc $\bar{S} + u$ d'ordre 0; cela exige que A soit aussi d'ordre $s - \lambda$. En outre les courbes $\bar{A} = 0$ et $A = 0$ ont en O les mêmes tangentes.

Dans l'identité

$$x^\sigma S(x) = Af + Bg,$$

les produits Af, Bg sont nécessairement du même ordre au plus égal à σ, si l'on suppose les axes réguliers, car alors Oy n'est tangent ni à f ni à g. Donc, *si le polynome* A *est d'ordre* $s - \lambda$, *le polynome* B *est d'ordre* $r - \lambda$ *et inversement.*

Remarque. — La courbe $\bar{\bar{f}}$ considérée plus haut admet, avec les différentes branches de la courbe g, les mêmes ordres de contact que la courbe f; on a en effet

$$\alpha \geqq \rho + 1;$$

or ν_i désignant l'ordre du contact d'une branche de g avec la $i^{\text{ième}}$ branche de f, nous avons

$$\rho \geqq r + \sum_{i=1}^{r} \nu_i > \nu.$$

ν étant le plus grand des ordres de contact d'une branche de g avec une branche de f. On a donc

$$\alpha > \nu + 1,$$

et les ordres de contact sont conservés.

Lemme 3. — Soient deux courbes quelconques $f=0$, $g=0$ ayant un point commun O, $f_0(x, y)=0$ une autre courbe ne passant pas par ce point. Considérons les idéaux

$$\mathfrak{m}=(f, g), \qquad \mathfrak{m}'=(f_0 f, g).$$

Soient $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ leurs composants primaires en O. On a

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}',$$

et si les polynomes A, B correspondant à l'idéal $\mathfrak{m}$ sont en O d'ordres $s-\lambda$, $r-\lambda$, il en est de même des polynomes A', B' correspondant à l'idéal $\mathfrak{m}'$.

1° Soit $\mathfrak{m}'=[\mathfrak{q}', \mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{l'}]$. Considérons un polynome F tel que

$$F \subset \mathfrak{q}'.$$

On a, U désignant un polynome tel que

$$U \not\subset \mathfrak{p}, \qquad U \subset [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{l'}],$$

$$UF \subset \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{q},$$

donc

$$F \subset \mathfrak{q} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}.$$

Inversement, soit $\mathfrak{m}=[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l]$. Considérons un polynome F tel que

$$F \subset \mathfrak{q},$$

U désignant un polynome tel que

$$U \not\subset \mathfrak{p}, \qquad U \subset [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l];$$

nous avons

$$UF \subset \mathfrak{m}$$

et

$$f_0 UF \subset \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{q}';$$

or

$$f_0 \not\subset \mathfrak{p}, \qquad f_0 U \not\subset \mathfrak{p};$$

donc

$$F \subset \mathfrak{q}' \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'.$$

donc

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}',$$

2° Considérons les sous-résultants

$$x^\sigma S(x) = Af + Bg, \qquad x^\sigma S'(x) = A'f_0 f + B'g,$$
$$S(o)\,S'(o) \neq o,$$

où A et B sont par hypothèse d'ordres $s-\lambda$, $r-\lambda$. On a

$$x^\sigma SS' = AS'f + BS'g = A'Sf_0 f + B'Sg,$$

d'où

$$AS' - A'Sf_0 = Qg,$$

et puisque $S(o)$, $S'(o)$, $f_0(o, o)$ sont différents de zéro, A' est nécessairement d'ordre $s-\lambda$ comme A et admet les mêmes tangentes.

Considérons deux courbes $f(x, y) = o$, $g(x, y) = o$ d'ordres r et s au point O. *Supposons les polynomes f, g de degrés r et s par rapport à y* (les axes sont alors nécessairement réguliers). Soit

$$x^\sigma S(x) = A(x, y) f(x, y) + B(x, y) g(x, y)$$

le sous-résultant, où A, par exemple, est de degré $s-1$ au plus en y. L'un au moins des polynomes en x coefficients des différentes puissances de y dans $A(x, y)$ ne contient pas x en facteur, sans quoi nous ne serions pas en présence du sous-résultant; $A(x, y)$ est donc d'ordre $s-\lambda$, avec $1 \leqq \lambda \leqq r, s$. B est d'ordre $r-\lambda$.

Cela étant, les lemmes 1, 2 et 3 nous permettent de remplacer des polynomes de base quelconques f et g par les polynomes

$$\overline{f} = f_1 . f_2 \ldots f_\mu, \qquad \overline{g} = g_1 . g_2 \ldots g_{\mu'}$$

avec les propriétés suivantes :

THÉORÈME 2. — *Étant donnés, en axes réguliers, deux polynomes f, g d'ordres r et s au point O, on peut trouver deux polynomes $\overline{f}$, $\overline{g}$ de degré en y égal à leur ordre au point O, le coefficient de la plus haute puissance de y étant l'unité, décomposés en autant de facteurs irréductibles que la courbe correspondante admet, en O, de systèmes circulaires, et tels que l'idéal $(\overline{f}, \overline{g})$ ait en O le même composant primaire que l'idéal (f, g), donc le même exposant ρ et le même ordre de multiplicité σ de la racine $x = o$ pour le sous-résultant. En outre, les polynomes $\overline{A}$, $\overline{B}$ sont en O respectivement de même ordre que les polynomes A et B, c'est-à-dire d'ordres $s-\lambda$, $r-\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq r, s)$.*

Remarque. — L'ordre de multiplicité k de la racine $x=0$ pour le résultant est aussi le même pour les polynomes $\bar{f}$ et $\bar{g}$ que pour les polynomes f, g; k s'exprime en effet en fonction de r, s et des ordres de contact $\nu_{i,j}$ des différentes branches de f avec celles de g, au point O

$$k = rs + \sum_{i=1,\, j=1}^{r,s} \nu_{i,j} \quad (^1);$$

or, dans le passage de f, g à $\bar{f}$, $\bar{g}$, les ordres de contact $\nu_{i,j}$ sont conservés.

2. Les polynomes $f(x, y)$, $g(x, y)$ étant nuls à l'origine et les axes réguliers, soit

$$R(x) = Af + Bg = x^{\sigma} S(x) \qquad [S(0) \neq 0],$$

un polynome de l'idéal $\mathfrak{m}$ ne dépendant que de x, *par exemple* le sous-résultant.

Théorème 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome* $F(x, y)$ *appartienne à l'idéal* $\mathfrak{q}$, *composant primaire de* $\mathfrak{m}$ *au point* O, *est que le reste* $T(x, y)$ *dans la division du produit* BF *par* f *suivant les puissances de* y, *soit divisible par* x^{σ} (²).

a. La condition est nécessaire.

Posons

$$\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l].$$

Nous avons

$$F(x, y) \subset \mathfrak{q}, \qquad S(x) \subset [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l];$$

donc

$$S(x)\, F(x, y) \subset \mathfrak{m},$$
$$S(x)\, F(x, y) = uf + vg.$$

Soit

$$B(x, y)\, F(x, y) = Q.f(x, y) + T(x, y)$$

(¹) Halphen, *ibid.*

(²) Ce théorème et le suivant reproduisent sous une forme un peu plus précise une démonstration classique du théorème de Nœther (*voir* par exemple Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, Chap. I, p. 1-7).

l'identité de la division de BF par f suivant les puissances de y. Nous avons

$$BFS = QSf + TS = Buf + Bvg.$$

d'où

$$S(x)\,T(x, y) = (Bu - QS)f + Bvg = (Bu - Av - QS)f + v.x^\sigma S(x),$$

et enfin, $f(x, y)$ n'étant, par suite de la régularité des axes, divisible par aucun polynome en x seul

$$T(x, y) = Q'f + vx^\sigma.$$

Supposons alors T divisible seulement par $x^{\sigma-h}$ $(0 < h \leqq \sigma)$

$$T(x, y) = x^{\sigma-h}\,T_1(x, y) \qquad \text{avec } T_1(0, y) \neq 0.$$

Nous avons

$$T_1(x, y) = Q''f + vx^h$$

et, h n'étant pas nul, le polynome $T_1(0, y)$ de degré $n - 1$ au plus en y, devrait être divisible par $f(0, y)$, qui est de degré n, ce qui est impossible.

b. La condition est suffisante.

Supposons

$$BF = Qf + x^\sigma T_1(x, y).$$

On en déduit

$$BFS = Q'f + BgT_1.$$

B divise le produit $Q'f$, donc Q' : si en effet $B(x, y)$ et $f(x, y)$ avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait aussi $R(x)$, donc serait un polynome en x seul, et f n'admet pas de tels diviseurs. Nous avons donc

$$FS = Q''f + T_1 g \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}$$

et, puisque $S \,\overline{\subset}\, \mathfrak{p}$,

$$F \subset \mathfrak{q}.$$

Soit, avec toujours les mêmes notations, l l'ordre du polynome B au point O.

Théorème 3'. — *On a* $\rho \leqq \sigma + r - 1 - l$.

Nous désignerons par α le nombre $\sigma + r - 1 - l$.

Utilisons une base f, g ayant les propriétés des polynomes $\overline{f}$, $\overline{g}$

considérés au théorème 2. En particulier, nous supposons les degrés de f et g en y égaux respectivement à r et s [1]. Nous allons montrer que si un polynome $F(x, y)$ est, en O, d'ordre supérieur ou égal à α, il appartient nécessairement à l'idéal $\mathfrak{q}$. D'après le théorème précédent, il suffit d'établir que le reste $T(x, y)$ correspondant est divisible par x^σ. On a

$$T(x, y) = B(x, y) F(x, y) - Q.f(x, y)$$

et le produit BF est en O d'ordre au moins égal à

$$\alpha + l = \sigma + r - 1 \geqq r.$$

$T(x, y)$ est donc divisible par x, sans quoi le polynome $T(0, y)$ de degré $r - 1$ au plus en y, devrait admettre, avec un ordre de multiplicité au moins égal à r, la racine $y = 0$. Soit

$$T(x, y) = x^\lambda T_1(x, y) \qquad \text{avec } T_1(0, y) \neq 0.$$

Supposons $\lambda < \sigma$. Le polynome $BF - Qf$ est divisible par x^λ; considérons-le sous forme d'une somme de polynomes homogènes en x et y : tous ces polynomes homogènes sont divisibles par x^λ. Donc les polynomes homogènes du produit Qf qui sont de degré inférieur à l'ordre $\sigma + r - 1$ de BF au point O sont divisibles par x^λ. Or le polynome homogène de degré minimum r, dans f ne contient pas x en facteur. Donc le polynome homogène de plus petit degré de Q est divisible par x^λ et, en poursuivant ce raisonnement, nous voyons que les polynomes homogènes de Q jusqu'au polynome de degré $\sigma - 2$ inclusivement sont divisibles par x^λ (ou identiquement nuls). Écrivons donc

$$Q = x^\lambda Q_1 + Q_2,$$

Q_2 étant d'ordre $\sigma - 1$ au moins. Le polynome

$$BF - Q_2 f = x^\lambda T_1 + x^\lambda Q_1 f = x^\lambda D(x, y)$$

est d'ordre $\sigma + r - 1$ au moins. Donc si λ est inférieur à σ, D est

[1] Cette hypothèse simplifie notablement la démonstration, surtout si l'on ne veut pas exclure le cas des courbes multiples.

d'ordre au moins égal à r. Mais ceci est impossible, car l'identité

$$T_1(x, y) = D(x, y) - Q_1 . f(x, y)$$

exigerait que le polynome $T_1(o, y)$, non identiquement nul, et de degré en y au plus égal à $r-1$, admette la racine $y = o$ avec un ordre de multiplicité au moins égal à r. On a donc $\lambda \geqq \sigma$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — La limite $\alpha = \sigma + r - 1 - l$ a une valeur indépendante du polynome $R(x)$ choisi, à condition toutefois que les polynomes A, B correspondants soient de degrés $s-1$, $r-1$ au plus en y (plus généralement $n-1$, $m-1$). S'il en est ainsi, en effet, on passe du sous-résultant à un polynome quelconque en x de l'idéal en multipliant le sous-résultant et les polynomes A et B par un même polynome en x, ce qui revient à ajouter un même nombre à l et à σ. Mais si l'on change la représentation du polynome considéré en ajoutant à A un polynome Qg et à B un polynome $-Qf$, on peut ramener l à la valeur r et obtenir ainsi pour α une valeur trop grande.

Prenons en particulier pour R le sous-résultant des polynomes f, g. Nous avons

$$\sigma \leqq \rho \leqq \sigma + r - 1 - l \qquad (\leqq \sigma + r - 1).$$

Par suite :

Théorème 4. — *Pour que des axes réguliers soient normaux, il suffit que le polynome* B *soit d'ordre* $r-1$.

En particulier, si le point d'intersection O considéré est simple pour l'une des deux courbes de base $(r = 1)$, tout système d'axes régulier est normal.

Théorème 5. — *Les axes étant réguliers, on a*

$$\rho = \sigma + r - 1 - l = \alpha.$$

Prenons comme polynome $R(x)$ le sous-résultant. Le théorème, d'après ce qui précède, est vrai si $l = r - 1$. Supposons donc $l \leqq r-2$ et montrons que l'on a

$$\rho > \sigma + r - 2 - l$$

et pour cela que les monomes

$$x^{\sigma-1}y^{r-1-l}, \quad x^{\sigma-2}y^{r-l}, \quad \ldots, \quad y^{\sigma+r-2-l}$$

n'appartiennent pas *tous* à l'idéal.

Supposons le contraire. Alors les polynomes $By^{r-2-l+h}$ $(h=1, 2, \ldots)$, divisés par f suivant les puissances de y donnent un reste divisible par x^h:

$$\begin{aligned} By^{r-1-l} &= Q_1 f + x\, R_1, \\ By^{r-l} &= Q_2 f + x^2 R_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ By^{\sigma+r-2-l} &= Q_\sigma f + x^\sigma R_\sigma, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} By^{r-1-l} &= Q_1 f + x R_1, \\ yR_1 &= q_2 f + x R_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ yR_{\sigma-1} &= q_\sigma f + x R_\sigma; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en multipliant ces dernières équations par $y^{\sigma-1}$, $y^{\sigma-2}x, \ldots, x^{\sigma-1}$ et ajoutant

$$(3) \qquad By^{\sigma+r-2-l} = f[Q_1 y^{\sigma-1} + q_2 x y^{\sigma-2} + \ldots + q_\sigma x^{\sigma-1}] + x^\sigma R_\sigma,$$

ce qui donne l'expression de Q_σ. Ce polynome est d'ordre $\sigma - 1$ au moins, f d'ordre r. Le premier membre de (3) est d'ordre

$$\sigma + r - 2 < \sigma + r - 1;$$

on a donc, en identifiant dans les deux membres de (3) les polynomes homogènes de moindre degré [1],

$$\{B\} y^{\sigma+r-2-l} = x^\sigma \{R_\sigma\},$$

ce qui exige que $\{B\}$ soit divisible par x^σ. Or, nous avons

$$l \leqq r - 2 < r \leqq \sigma.$$

Nous arrivons donc à une contradiction, et l'on a

$$\rho > \sigma + r - 2 - l,$$

donc

$$\rho = \sigma + r - 1 - l. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème entraîne :

---

[1] Nous désignons par $\{F(x, y)\}$ le polynome homogène de moindre degré de $F(x, y)$.

THÉORÈME 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour que des axes réguliers soient normaux est que le polynome* B *soit en* O *d'ordre* $l = r - 1$.

Considérons notamment le cas où les deux courbes de base f, g ne sont pas tangentes en leur point commun O (*cas simple*). Alors, dans l'identité

$$(4) \qquad x^{\sigma} S(x) = A(x, y) f(x, y) + B(x, y) g(x, y),$$

les polynomes homogènes de degrés r, s dans f, g n'ont aucun facteur commun, ce qui exige que l'on ait

$$\sigma = s + l,$$

d'où

$$\rho = r + s - 1.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat classique.

D'une manière plus générale, soit N la somme des ordres de contact d'une branche quelconque de g avec toutes les branches de f. Si l'on remplace dans l'identité (4) y par la fonction de x définie par cette branche de g, $f(x, y)$ devient une fonction de x d'ordre $r + N$, $A(x, y)$ une fonction de x d'ordre au moins égal à $s - 1$ si l'on suppose les axes normaux. On a, par suite,

$$\rho \geqq r + s - 1 + N.$$

3. Considérons trois courbes sans parties communes f, g_1, g_2 d'équations

$$f(x, y) = 0, \qquad g_1(x, y) = 0, \qquad g_2(x, y) = 0,$$

ayant en commun l'origine O. Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les exposants des composants primaires $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ en O des idéaux

$$\mathfrak{m} = (f, g_1 g_2), \qquad \mathfrak{m}_1 = (f, g_1), \qquad \mathfrak{m}_2 = (f, g_2).$$

Soit s_2 l'ordre de g_2 au point O.

THÉORÈME 7. — *On a*

$$\rho \geqq \rho_1 + s_2$$

et l'égalité a nécessairement lieu si les courbes f et g_2 ne sont pas tangentes en O.

Nous avons, en coordonnées transformées

$$x_1 = x + t y, \qquad y_1 = y,$$
$$x_1^{\rho - s_2} g_2 \subset \mathfrak{Q}.$$

En posant

$$\mathfrak{m} = [\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_l],$$

soit S un polynome tel que

$$S \subset [\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_l], \qquad S \not\subset \mathfrak{p} \qquad [\mathfrak{p} = (x, y)].$$

Nous avons

$$x_1^{\rho - s_2} g_2 S = U f + V g_1 g_2,$$

ce qui exige

$$x_1^{\rho - s_2} S = U' f + V g_1,$$

donc

$$x_1^{\rho - s_2} S \subset \mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{q}_1$$

et, puisque $S \not\subset \mathfrak{p}$,

$$x_1^{\rho - s_2} \subset \mathfrak{q}_1 ;$$

donc enfin, puisque nous sommes en coordonnées transformées,

$$\rho - s_2 \geqq \rho_1. \tag{5}$$

Supposons les courbes f et g_2 non tangentes en O, et choisissons des axes normaux pour les idéaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}_1$. Soit

$$R_1(x) = x^{\rho_1} S_1(x) = A_1 f + B_1 g_1,$$

le sous-résultant de l'idéal $\mathfrak{m}_1$, nous avons

$$\rho_2 = r + s_2 - 1 ;$$

donc

$$x^{s_2} B_1 \subset \mathfrak{q}_2$$

et S_2 désignant un polynome convenable non nul à l'origine

$$x^{s_2} B_1 S_2 = M f + N g_2.$$

Par suite,

$$x^{\rho_1 + s_2} S_1 S_2 = A_1 x^{s_2} S_2 f + (M f + N g_2) g_1 \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{Q},$$

d'où

$$x^{\rho_1 + s_2} \subset \mathfrak{Q}$$

et, les axes étant normaux,

$$\rho_1 + s_2 \geqq \rho,$$

ce qui entraîne, en vertu de l'inégalité (5),

$$\rho = \rho_1 + s_2.$$

4. Le théorème précédent fournit d'abord un procédé souvent commode pour le calcul pratique des exposants. Supposons $r \geqq s$, et divisons f par g suivant les puissances de y (les axes sont supposés réguliers). Le reste étant de degré $s-1$ au plus en y et d'ordre s au moins au point O admet x en facteur, donc est de la forme $x^{\alpha_1} g_1(x, y)$, où g_1 est de degré en y et d'ordre en O au plus égaux à $s-1$. On a

$$(f, g) = (g, x^{\alpha_1} g_1)$$

et, en désignant par ρ_1 l'exposant du composant primaire de l'idéal (g, g_1),

$$\rho = \alpha_1 + \rho_1.$$

Si les axes sont réguliers pour l'idéal (g, g_1), on divisera de même g par g_1. On obtiendra un reste de la forme $x^{\alpha_2} g_2$ et l'on aura, ρ_2 désignant l'exposant de l'idéal (g_1, g_2)

$$\rho = \alpha_1 + \alpha_2 + \rho_2.$$

Si les axes ne sont pas réguliers, on devra d'abord effectuer un changement d'axes. En poursuivant les opérations, on arrive à un polynome g_p tel que le reste $x^{\alpha_{p+1}} g_{p+1}$ de g_{p-1} par rapport à g_p ne contienne plus y. On a alors

$$\rho_p = s_p + \alpha_{p+1} - 1,$$
$$\rho = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p+1} + s_p - 1$$

s_p désignant l'ordre de g_p en O.

Reprenons l'exemple donné par M. Kapferer (1). Soient

$$f = x^3 + y^4, \qquad g = x^2 + y^3.$$

(1) Kapferer, *Notwendige und hinreichende Multiplizitätsbedingungen zum Nœtherschen Fundamentalsatz der algebraischen Funktionen* (*Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie: Math. Nat. Wiss. Klasse*, 1927, 8. Abhandlung, p. 61).

Nous ferons ici les divisions suivant les puissances de x. On a

$$(x^3+y^4,\ x^2+y^3) = (x^2+y^3,\ y^3(x-y)) \qquad (\alpha_1 = 3),$$
$$(x^2+y^3,\ x-y) = (x-y,\ y^2(y+1)) \qquad (\alpha_2 = 2;\ s_1 = 1),$$

d'où $\rho = 5$. Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu par M. Kapferer.

Le même procédé permet de reconnaître si un polynome donné $F(x, y)$ appartient au composant primaire $\mathfrak{q}$ de l'idéal (f, g) considéré. Supposons pour plus de simplicité que les axes soient réguliers pour les polynomes g_i obtenus par divisions successives, par exemple par rapport à la variable x. Divisons également, suivant les puissances de x, $F(x, y)$ par g : soit $y^{\lambda_1} F_1(x, y)\,[F_1(x, 0) \neq 0]$ le reste obtenu. Divisons de même F_1 par g_1 : soit $y^{\lambda_2} F_2$ le reste obtenu, etc.

Pour que F appartienne à l'idéal $\mathfrak{q}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 \geqq \alpha_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geqq \alpha_1 + \alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p+1} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p+1}. \end{array}\right.$$

En effet, il faut d'abord que $y^{\lambda_1} F_1(x, y)$ appartienne au composant primaire de l'idéal $(g, y^{\alpha_1} g_1)$. On aura alors, $S_1(y)$ désignant un polynome convenable non nul pour $y = 0$,

$$y^{\lambda_1} S_1(y) F_1(x, y) \doteq U g + V y^{\alpha_1} g_1,$$

relation qui exige $\lambda_1 \geqq \alpha_1$, sans quoi $F_1(x, 0)$ devrait être divisible par $g(x, 0)$ qui est de degré supérieur. Réciproquement, si $\lambda_1 \geqq \alpha_1$, le polynome $S_1 F$ appartient à l'idéal (f, g) si $y^{\lambda_1 - \alpha_1} S_1 F_1$ appartient à l'idéal (g, g_1), ou si $y^{\lambda_1 - \alpha_1 + \lambda_2} S_1 F_2$ appartient à l'idéal $(g_1, y^{\alpha_2} g_2)$, ce qui exige $\lambda_1 + \lambda_2 \geqq \alpha_1 + \alpha_2$. Et ainsi de suite. Pour qu'enfin le polynome $y^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p+1} - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_p)} F_{p+1}$ appartienne à l'idéal $(g_p, y^{\alpha_{p+1}})$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p+1} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p+1}.$$

Reprenons l'exemple de M. Kapferer et considérons le polynome

$$F(x, y) = y^4 - x y^3.$$

On a

$$y^{\lambda_1} F_1 = y^3(y - x), \qquad \lambda_1 = 3, \qquad F_1 = y - x = -g_1.$$

Le polynome F_2 est identiquement nul ($\lambda_2 = \infty$); F appartient à l'idéal $\mathfrak{q}$.

Soit encore le polynome $F(x, y) = xy^4$. On a

$$y^{\lambda_1}F_1 = xy^4, \qquad \lambda_1 = 4, \qquad F_1 = x.$$
$$y^{\lambda_2}F_2 = y, \qquad \lambda_2 = 1. \qquad F_2 = 1.$$

On a encore

$$F \subset \mathfrak{q}.$$

Considérons enfin le polynome $F(x, y) = y^4$. On a

$$\lambda_1 = 4, \qquad F_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0. \qquad F_2 = 1.$$

y^4 n'appartient pas à l'idéal, et nous voyons ainsi que les axes sont normaux (¹).

5. Proposons-nous de déterminer la condition nécessaire et suffisante pour qu'une limite supérieure classique de ρ

$$\beta = k - (r-1)(s-1)$$

soit atteinte. Calculons pour cela le sous-résultant à partir du résultant.

Soit en axes réguliers l'idéal (f, g), les polynomes f, g étant pris de la forme

$$f = H_r + H_{r-1}y + \ldots + H_1 y^{r-1} + y^r,$$
$$g = K_s + K_{s-1}y + \ldots + K_1 y^{s-1} + y^s,$$

où les polynomes $H_i(x)$, $K_j(x)$ ont en facteur une puissance de x au moins égale à leur indice. Le résultant $P(x)$ des polynomes f, g est donné par le déterminant de Sylvester

$$P(x) = U(x, y)f + V(x, y)g = \begin{vmatrix} H_r & H_{r-1} & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_r & \ldots & \ldots & H_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & H_r & \ldots & \ldots & \ldots & \\ K_s & K_{s-1} & \ldots & K_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & K_s & K_{s-1} & \ldots & \ldots & K_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(¹) La variable y joue ici le rôle attribué ordinairement à x.

Soient $u_{s-1}, u_{s-2}, \ldots, u_1, u_0; v_{r-1}, v_{r-2}, \ldots, v_1, v_0$ les mineurs, avec leurs signes, relatifs aux éléments de la première colonne. Nous avons les $r+s$ identités

$$\begin{aligned}
P(x) &= u_{s-1} H_r + v_{r-1} K_s, \\
0 &= u_{s-1} H_{r-1} + u_{s-2} H_r + v_{r-1} K_{s-1} + v_{r-2} K_s, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= u_1 + u_0 H_1 + v_1 + v_0 K_1, \\
0 &= u_0 + v_0,
\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned}
P(x) = {} & (u_{s-1} + u_{s-2} y + \ldots + u_1 y^{s-2} + u_0 y^{s-1}) \\
& \times (H_r + H_{r-1} y + \ldots + H_1 y^{r-1} + y^r) \\
& + (v_{r-1} + v_{r-2} y + \ldots + v_1 y^{r-2} + v_0 y^{r-1}) \\
& \times (K_s + K_{s-1} y + \ldots + K_1 y^{s-1} + y^s),
\end{aligned}$$

ce qui donne l'expression des polynomes U et V.

Désignons par x^τ la plus grande puissance de x en facteur dans tous les polynomes $u_{s-1}, u_{s-2}, \ldots, u_0$. Nous avons

$$\sigma = k - \tau.$$

Nous allons montrer que l'on a

$$\tau \geqq (r-1)(s-1)$$

et donner la condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit réalisée. Elle l'est visiblement, en axes normaux, si les courbes n'ont pas de tangentes communes

$$[k = rs, \; \rho = r+s-1 = k-(r-1)(s-1)]$$

ou si elles en ont une seule, simple pour l'une au moins des deux courbes

$$[k = rs + N, \; \rho = r+s-1+N = k-(r-1)(s-1)].$$

Nous allons voir qu'elle l'est seulement dans ces deux cas.

Nous utiliserons un artifice classique [1] qui consiste à multiplier,

---

[1] *Voir*, par exemple, Voss, *Ueber einen Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen* (*Math. Ann.*, t. 27, p. 533).

dans le déterminant de Sylvester, la première colonne par 1, etc., la $i^{\text{ième}}$ par x^{i-1}, la dernière par x^{r+s-1}. Soit dans le déterminant $\overline{P}$ ainsi transformé $\overline{u}_{s-i}$ le mineur correspondant à u_{s-i}. On a

$$\overline{u}_{s-i} = u_{s-i} \times x^{1+2+\ldots+r+s-1}.$$

Or, nous pouvons mettre en facteur dans la $h^{\text{ième}}$ ligne de $\overline{P}$ ($h = 1, 2, \ldots, s$), x^{r+h-1}, dans la $s+k^{\text{ième}}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$), x^{s+k-1}, soit en tout x à la puissance

$$r + r + 1 + \ldots + r + s - 1 + s + s + 1 + \ldots + r + s - 1,$$

et nous voyons finalement que le polynome u_{s-i} contient en facteur une puissance de x d'exposant

$$\begin{aligned} \tau_i = {} & r + r + 1 + \ldots + r + s - 1 + s + s + 1 + \ldots + r + s - 1 \\ & - (r + i - 1) - (1 + 2 + \ldots + r + s - 1) = rs - (r + i - 1) \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\tau_i \geqq rs - (r + s - 1) = (r-1)(s-1). \qquad \tau \geqq (r-1)(s-1).$$

$$\sigma \leqq k - (r-1)(s-1)$$

et, si nous considérons des axes normaux,

$$\rho \leqq k - (r-1)(s-1).$$

Remarque. — *D'après ce qui précède, pour que le sous-résultant coïncide avec le résultant, il faut que tout point commun aux deux courbes de base soit simple au moins pour l'une d'elles.* D'après ce que nous avons vu plus haut (Chap. II, n° **1**), *cette condition est aussi suffisante.*

Pour que τ soit exactement égal à $(r-1)(s-1)$, il faut, d'après ce qui précède, que le mineur u_0 soit *exactement* divisible par $x^{(r-1)(s-1)}$. Or, nous avons, en désignant par

$$\varphi = \{f\} = h_r x^r + h_{r-1} x^{r-1} y + \ldots + h_1 x y^{r-1} + y^r,$$
$$\gamma = \{g\} = k_s x^s + k_{s-1} x^{s-1} y + \ldots + k_1 x y^{s-1} + y^s,$$

les polynomes homogènes de degrés r et s dans f et g

$$\left[\frac{u_0(x)}{x^{(r-1)(s-1)}}\right]_{x=0} = \begin{vmatrix} h_{r-1} & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_r & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot & 1 & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & h_r & h_{r-1} & h_{r-2} & \cdot & \cdots & 1 & 0 \\ k_{s-1} & \cdots & k_2 & k_1 & 1 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ k_s & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & k_1 & 1 & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & k_s & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \vdots & \cdots & k_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h_{r-1} & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & 1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ h_r & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & h_r & h_{r-1} & h_{r-2} & \cdot & \cdot\cdot & 1 \\ k_{s-1} & \cdots & k_2 & k_1 & 1 & \cdot & \cdot\cdot & 0 \\ k_s & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & k_1 & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & k_s & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & k_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant δ est un mineur d'ordre $r+s-2$ du déterminant de Sylvester Δ des polynomes homogènes φ, γ. Or, si ces polynomes ont un diviseur commun de degré supérieur ou égal à deux, ce mineur est certainement nul. Donc :

Si les deux courbes de base ont en commun plusieurs tangentes ou une tangente multiple pour chacune d'elles, on a, pour tout système d'axes régulier,

$$\tau > (r-1)(s-1),$$

donc

$$\rho < \beta = k - (r-1)(s-1).$$

Par suite la condition nécessaire et suffisante pour que la limite β soit atteinte, est qu'au point considéré les deux courbes aient en commun au plus une tangente simple pour l'une d'elles.

Si les deux courbes ont en commun une tangente simple pour l'une d'elles, le déterminant δ n'est certainement pas nul. Donc dans ce cas, *tout système d'axes régulier est normal.*

Si enfin les deux courbes n'ont aucune tangente commune, $\delta \neq 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les axes soient normaux. On peut donc, Ox étant donné, trouver les positions non normales de Oy. Ces positions dépendent uniquement des nombres h_i, k_j, c'est-à-dire des faisceaux de tangentes des deux courbes au point O.

CHAPITRE III.

CALCUL DE L'EXPOSANT.

1. Considérons trois courbes sans partie commune

$$\varphi_1(x, y) = 0, \qquad \varphi_2(x, y) = 0, \qquad \varphi_3(x, y) = 0$$

admettant l'origine comme point multiple d'ordres r_1, r_2, r_3. Soient $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$, les idéaux :

$$\mathfrak{m}_1 = (\varphi_1, \varphi_2\varphi_3), \qquad \mathfrak{m}_2 = (\varphi_2, \varphi_3\varphi_1), \qquad \mathfrak{m}_3 = (\varphi_3, \varphi_1\varphi_2).$$

Soient enfin ρ_1, ρ_2, ρ_3 les exposants des composants primaires $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ des idéaux $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$.

Théorème 8. — *Un seul des nombres ρ_1, ρ_2, ρ_3 ne peut pas être supérieur aux deux autres : deux d'entre eux sont nécessairement égaux et leur valeur commune est supérieure ou égale au troisième.*

Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal $(\varphi_2\varphi_3, \varphi_3\varphi_1, \varphi_1\varphi_2)$. Nous avons

$$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_i$$

quel que soit i, et par conséquent

$$\mathfrak{m} \subset [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]$$

quels que soient i et j.

Inversement, considérons un polynome F appartenant à $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]$ par exemple. Nous avons

$$F = U_1\varphi_1 + V_1\varphi_2\varphi_3 = U_2\varphi_2 + V_2\varphi_3\varphi_1,$$

d'où

$$\varphi_1(U_1 - V_2\varphi_3) = \varphi_2(U_2 - V_1\varphi_3),$$

et, puisque φ_1 et φ_2 n'ont aucun diviseur commun

$$U_1 - V_2\varphi_3 = V_3\varphi_2,$$

d'où enfin

$$F = V_1\varphi_2\varphi_3 + V_2\varphi_3\varphi_1 + V_3\varphi_1\varphi_2 \subset \mathfrak{m}$$

et

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m},$$

donc

$$(1) \qquad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = \mathfrak{m} = [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3] = [\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_1].$$

Cela étant, soit $\mathfrak{q}$ le composant primaire de $\mathfrak{m}$ au point O. La relation (1) entraîne

$$(2) \qquad \mathfrak{q} = [\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j].$$

Soient alors $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et σ les ordres de multiplicité respectifs de la racine $x = 0$ pour les sous-résultants, en axes quelconques, des idéaux $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$, et $\mathfrak{m}$. En vertu de la relation (2), σ est égal au plus grand des deux nombres σ_i, σ_j. Soit alors, dans le cas où les σ_i ne sont pas tous égaux, σ_3 le plus petit d'entre eux (ou l'un des deux plus petits). σ est égal à σ_1 et à σ_2 : ces deux nombres ne peuvent donc pas être différents.

En prenant des axes normaux pour les trois idéaux $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$, nous obtenons le théorème énoncé. De plus supposons que l'on ait $\rho_2 > \rho_3$, et choisissons des axes normaux *pour l'idéal* $\mathfrak{m}_2$. Nous avons

$$\sigma_2 = \rho_2 > \rho_3 \geqq \sigma_3;$$

donc

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \rho_2 = \rho_1.$$

et, par suite, *les axes sont normaux aussi pour* $\mathfrak{m}_1$.

2. Supposons le polynome g décomposé d'une manière quelconque :

$$g = g_1 . g_2 \ldots g_k.$$

Considérons les idéaux

$$\mathfrak{m}'_i = (f . g_1 . g_2 \ldots g_{i-1} . g_{i+1} \ldots g_k, g_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

posons

$$\rho'_i = \rho(f . g_1 . g_2 \ldots g_{i-1} . g_{i+1} \ldots g_k, g_i) = r + s - 1 + M'_i,$$
$$\sigma'_i = \sigma(f . g_1 . g_2 \ldots g_{i-1} . g_{i+1} \ldots g_k, g_i) = r + s - 1 + P'_i,$$

et supposons les notations choisies de manière que l'on ait

$$M'_1 \geqq M'_2 \geqq \ldots \geqq M'_k.$$

Théorème 9. — 1° *Si* $M'_1 > M'_2$, *l'exposant* ρ *du composant primaire de l'idéal* (f, g) *en* O *a pour valeur*

$$\rho = r + s - 1 + M'_1 = \rho'_1;$$

si de même

$$P'_1 > P'_2 \geqq P'_3 \geqq \ldots,$$

on a

$$\sigma = r + s - 1 + P'_1 = \sigma'_1.$$

2° *Si*

$$M'_1 = M'_2 = \ldots = M'_\alpha > M'_{\alpha+1} \geqq \ldots,$$

on a

$$\rho \leqq r + s - 1 + M'_1 = \rho'_1.$$

1° Supposons $M'_1 > M'_2$. Posons

$$\rho_i = \rho(f.g_{i+1}.g_{i+2}\ldots g_k, g_1.g_2\ldots g_i).$$

Nous avons $\rho_1 = \rho'_1$. Supposons démontré $\rho_i = \rho'_1$, et montrons que l'on a aussi $\rho_{i+1} = \rho'_1$. Appliquons le théorème 8 aux courbes

$$\varphi_1 = f.g_{i+2}\ldots g_k, \qquad \varphi_2 = g_1.g_2\ldots g_i, \qquad \varphi_3 = g_{i+1};$$

nous avons les trois exposants

$$\rho_{i+1}, \qquad \rho_i = \rho'_1, \qquad \rho'_{i+1} < \rho'_1.$$

On a donc

$$\rho_{i+1} = \rho'_1,$$

d'où finalement

$$\rho = \rho'_1.$$

Le même raisonnement s'applique aux nombres σ. En particulier, si $M'_1 > M'_2$, on voit qu'un système d'axes normal pour l'idéal $\mathfrak{m}'_1$ est normal pour l'idéal $\mathfrak{m}$ car les relations

$$M'_1 > M'_i, \qquad P'_1 = M'_1, \qquad M'_i \geqq P'_i$$

entraînent

$$P'_1 > P'_i;$$

donc

$$\sigma = \sigma'_1 = \rho'_1 = \rho.$$

2° Supposons

$$M'_1 = M'_2 = \ldots = M'_\alpha > M'_{\alpha+1} = \ldots = M'_\beta > M'_{\beta+1} \ldots.$$

Comparons les nombres ρ'_1, ρ_2 et ρ'_2, en appliquant toujours le théorème 8. L'égalité $\rho'_1 = \rho'_2$ entraîne $\rho_2 \leqq \rho'_1$. Si α est plus grand que 2, et si l'on a $\rho_2 < \rho'_1$ on conclut $\rho_3 = \rho'_3 = \rho'_1$. Si $\rho_2 = \rho'_1$, on a seulement $\rho_3 \leqq \rho'_1$. En poursuivant le raisonnement, nous voyons que les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\alpha$ sont tout au plus égaux à ρ'_1, et qu'il n'y en a jamais deux de suite qui lui soient inférieurs. Si ρ_α est supérieur à $\rho'_{\alpha+1}$, nous aurons $\rho_{\alpha+1} = \rho_\alpha$; à partir de ce moment, tous les ρ_i seront égaux à ρ_α. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\rho = \rho'_1$ est que ρ_α soit égal à ρ'_1.

Si ρ_α est inférieur ou égal à $\rho'_{\alpha+1}$, la suite des nombres $\rho_{\alpha+1}, \ldots, \rho_\beta$ possède les mêmes propriétés par rapport à $\rho'_{\alpha+1}$ que la suite des nombres $\rho_1, \ldots, \rho_\alpha$ par rapport à ρ'_1. Et le raisonnement se poursuit ainsi de proche en proche.

3. Désignons par $D_1, D_2, \ldots, D_\lambda$ les droites (distinctes) dont se compose le faisceau des tangentes *communes* en O aux courbes f et g. Nous pouvons remplacer les polynomes f et g par des polynomes décomposés

$$f = f_0 . f_1 . f_2 \ldots f_\lambda, \qquad g = g_0 . g_1 . g_2 \ldots g_\lambda,$$

tels que les courbes f_0, g_0, comprennent respectivement toutes les branches de f et de g qui ne sont tangentes à aucune des droites D_i, les courbes f_i, g_i, toutes les branches de f et de g qui sont tangentes à la droite D_i. Posons

$$f'_i = f : f_i, \qquad g'_i = g : g_i$$

et désignons par r_i, s_i, les ordres de multiplicité du point O pour les courbes f_i, g_i. Soit

$$\rho(f_i, g_i) = r_i + s_i - 1 + M^{(i)},$$

d'où, en vertu du théorème 7,

$$\rho(f, g_i) = r + s_i - 1 + M^{(i)}, \qquad \rho(f g'_i, g_i) = r + s - 1 + M^{(i)}.$$

THÉORÈME 10. — *On a*

$$\rho(f, g) = r + s - 1 + M^{(1)},$$

si l'on suppose les notations choisies de manière que l'on ait

$$M^{(1)} \geqq M^{(2)} \geqq \ldots \geqq M^{(\lambda)}.$$

On a, toujours en vertu du théorème 7,

$$\rho(f, g_0 g_1) = r + s_0 + s_1 - 1 + M^{(1)};$$

supposons que l'on ait

$$\rho(f, g_0 g_1 \ldots g_i) = r + s_0 + s_1 + \ldots + s_i - 1 + M^{(1)}$$

et établissons l'égalité analogue pour l'indice $i+1$. On a

$$\begin{aligned} \rho(f g_{i+1}, g_0 g_1 \ldots g_i) &= \rho(f, g_0 g_1 \ldots g_i) + s_{i+1} \\ &= r + s_0 + s_1 + \ldots + s_{i+1} - 1 + M^{(1)}, \\ \rho(f g_0 g_1 \ldots g_i, g_{i+1}) &= r + s_0 + s_1 + \ldots + s_{i+1} - 1 + M^{(i+1)} \\ &\leqq r + s_0 + s_1 + \ldots + s_{i+1} - 1 + M^{(1)}, \end{aligned}$$

d'où, d'après le théorème 8,

$$\rho(f, g_0 g_1 \ldots g_i g_{i+1}) \leqq r + s_0 + s_1 + \ldots + s_i + s_{i+1} - 1 + M^{(1)}.$$

Mais on a aussi, d'après le théorème 7,

$$\begin{aligned} \rho(f, g_0 g_1 \ldots g_i g_{i+1}) &\geqq \rho(f, g_1) + s_0 + s_2 + \ldots + s_{i+1} \\ &= r + s_0 + s_1 + \ldots + s_i + s_{i+1} - 1 + M^{(1)}. \end{aligned}$$

En poursuivant le raisonnement par récurrence, nous arrivons à l'égalité

$$\rho(f, g) = r + s - 1 + M^{(1)}.$$

Ce théorème nous donne la valeur de ρ dans un cas particulier important :

THÉORÈME 11. — *Si chaque tangente commune aux deux courbes considérées est simple au moins pour l'une d'entre elles, on a*

$$\rho = r + s - 1 + N,$$

N désignant la plus grande des sommes des ordres de contact d'une de ces branches simples avec toutes les branches de l'autre courbe qui lui sont tangentes $[N = M^{(1)}]$.

En outre, si l'on a

$$N = N_1 > N_2 \geqq N_3 \geqq \ldots,$$

N_i désignant les sommes analogues pour les autres branches simples, *tout système d'axes régulier est normal.* En effet, l'une des courbes f_1, g_1, par exemple g_1, est d'ordre 1 au point O. Donc (p. 246) tout système d'axes régulier est normal pour les idéaux (f_1, g_1), (f, g_1), (fg'_1, g_1). Mais on a

$$\sigma(g'_1, fg_1) \leqq r+s-1+N_2 < \sigma(fg'_1, g_1) = r+s-1+N_1;$$

donc

$$\sigma(f, g_1 g'_1) = \sigma(fg'_1, g_1) = r+s-1+N_1 = \rho(f, g_1 g'_1).$$

D'une manière plus générale on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 12. — *Si l'on a*

$$M^{(1)} > M^{(2)} \geqq M^{(3)} \geqq \ldots$$

et si les courbes A_1, B_1 *définies par le sous-résultant*

$$x^{\rho_1} S_1 = A_1 f_1 + B_1 g_1$$

n'admettent pas en O *d'autre tangente que la droite* D_1, *tout système d'axes régulier normal pour l'idéal* (f_1, g_1), *est normal pour l'idéal* (f, g).

Il suffit de montrer que les axes sont normaux pour l'idéal

$$(f_1 \cdot f'_1 \cdot g'_1, g_1) = (fg'_1, g_1).$$

On a

$$\sigma(g'_1, fg_1) \leqq r+s-1+M^{(2)} < r+s-1+M^{(1)}.$$

Posons

$$\rho = \sigma + \varepsilon' \qquad (\varepsilon' \geqq 0),$$

on passe de l'idéal (f_1, g_1) à l'idéal $(f_1 f'_1 g'_1, g_1)$ en multipliant f_1 par un polynome $F = f'_1 g'_1$, d'ordre r_0, tel que les courbes $F = O$, $f_1 = O$ n'aient aucune tangente commune. Soit

$$\varphi = 0$$

l'équation de la droite D_1. Nous avons

$$\{f_1\} = \varphi^{r_1}, \qquad \{g_1\} = \varphi^{s_1}, \qquad \{B_1\} = \varphi^{r_1-1}$$

et $\{F\}$ n'est pas divisible par φ. Soient

$$\begin{aligned} R_0 &= x^{r_0+s_1-1-\varepsilon} S_0 = UF + V g_1, \\ \sigma_0 &= r_0 + s_1 - 1 - \varepsilon \qquad (\varepsilon \geqq 0), \\ R &= x^{\sigma} S(x) = AF f_1 + B g_1, \\ R_1 &= A_1 f_1 + B_1 g_1 = x^{\rho_1} S_1(x). \end{aligned}$$

les sous-résultants des idéaux (F, g_1), (Ff_1, g_1), (f_1, g_1). U est un polynome d'ordre $s_1 - 1 - \varepsilon$, et $\{U\}$ n'est pas divisible par φ. Le produit $R_0 R_1$ étant un multiple de R, le polynome A est défini par la division de $A_1 U$ par g_1, suivant les puissances de y

$$(3) \qquad A_1 U = Q g_1 + x^\alpha H(x) A(x, y) \qquad [H(0) \neq 0]$$

avec

$$\alpha = \rho_1 + \sigma_0 - \sigma = r_1 + s_1 - 1 + M^{(1)} + r_0 + s_1 - 1 - \varepsilon$$
$$- [r_0 + r_1 + s_1 - 1 + M^{(1)} - \varepsilon'] = s_1 - 1 - \varepsilon + \varepsilon'.$$

Supposons que l'on ait $\varepsilon' \geqq 1$.

Dans l'identité (3), les trois termes ont nécessairement le même ordre : si $A_1 U$ était d'ordre supérieur aux deux autres termes, $\{A\}$ qui est d'ordre $\leqq s_1 - 1$ devrait être divisible par φ^{s_1}. Si $Q g_1$ était d'ordre supérieur aux deux autres termes $\{A_1\}$ n'étant pas divisible par x, $\{U\}$ devrait l'être par x^α, ce qui est impossible puisque U est d'ordre $s_1 - 1 - \varepsilon < \alpha$. Enfin si $x^\alpha A(x, y)$ était d'ordre supérieur aux deux autres termes, le produit $\{A_1\}\{U\}$ devrait être divisible par φ^{s_1}, ce qui est impossible puisque $\{U\}$ n'est pas divisible par φ, et que $\{A_1\}$ l'est seulement par φ^{s_1-1}.

Cela étant, A est d'ordre

$$s_1 - 1 + s_1 - 1 - \varepsilon - \alpha = s_1 - 1 - \varepsilon';$$

mais d'autre part, en vertu toujours de l'identité (3), $\{A\}$ doit être divisible par φ^{s_1-1}, ce qui est impossible si $\varepsilon' \geqq 1$.

Remarque. — L'hypothèse relative aux tangentes aux courbes A_1, B_1 est vérifiée d'elle-même si O est point simple pour l'une des courbes f_1, g_1. Dans le cas général, on peut donner des exemples montrant que cette hypothèse est indispensable [1].

---

[1] Ainsi prenons

$$f_1 = y^2 + 2x^3 y - x^4, \qquad g_2 = y^2 - x^6,$$
$$F = f'_1 g'_1 = y^2 + 2xy + x^2(1 - x^4).$$

On a

$$A_1 = x(1 - x^2) + 2y, \qquad U = x - 2y,$$

$$(3) \qquad A_1 U = -4g_1 + x^2(1 - x^2 - 4x^4 + 2xy) = -4g_1 + x^2 A,$$

la courbe $A = O$ ne passe pas par l'origine et l'on a

$$\sigma = 6, \qquad \rho = 7.$$

4. On est ramené, par ce qui précède, à l'étude du cas où les courbes de base $f=0$, $g=0$, ont toutes leurs tangentes confondues avec une même droite. Un nouveau théorème permet de se limiter au cas plus particulier où l'une de ces courbes, ou même toutes les deux, n'ont en O que des systèmes circulaires d'ordre 1 : on peut alors les remplacer par des courbes décomposées en branches simples. Un changement de variables de la forme

$$x=\xi^\lambda, \qquad y=\eta,$$

où λ désigne le p. p. c. m. des ordres des différents cycles pour les deux courbes données, transforme ces courbes en deux autres n'ayant que des systèmes circulaires d'ordre 1. Désignons par ρ_x et ρ_ξ les nombres

$$\rho_x=\rho(f(x,y),\, g(x,y)), \qquad \rho_\xi=\rho(f(\xi^\lambda,\eta),\, g(\xi^\lambda,\eta)).$$

Théorème 13. — *Si les axes sont réguliers et normaux pour l'idéal* $(f(x,y), g(x,y))$ *on a*

$$\rho_\xi=\lambda\rho_x.$$

Soit

$$x^{\rho_x}S(x)=A(x,y)f(x,y)+B(x,y)g(x,y)$$

le sous-résultant de l'idéal $(f(x,y),\, g(x,y))$. Le polynome B est d'ordre $r-1$ et $\{B\}$ n'est pas divisible par x. Par suite $B(\xi^\lambda,\eta)$ est également d'ordre $r-1$ et l'on a

$$\{B(\xi^\lambda,\eta)\}=C\eta^{r-1},$$

C étant une constante. Le polynome

$$\xi^{\lambda\rho_x}S(\xi^\lambda)=A(\xi^\lambda,\eta)f(\xi^\lambda,\eta)+B(\xi^\lambda,\eta)g(\xi^\lambda,\eta)$$

est donc le nouveau sous-résultant, les axes sont encore normaux et nous avons

$$\rho_\xi=\lambda\rho_x.$$

Remarque. — Si les axes ne sont pas normaux, on a

$$\rho_\xi<\lambda\rho_x;$$

en effet, nous avons toujours

$$\sigma_\xi=\lambda\sigma_x<\lambda\rho_x;$$

le polynome $B(x,y)$ est d'ordre $l=r-1-(\rho-\sigma)$. Le polynome

$B(\xi^{\prime}, \eta)$ est d'ordre au moins égal (supérieur si $\{B\}$ est divisible par x). Nous avons donc

$$\rho_\xi - \sigma_\xi \leqq \rho_x - \sigma_x$$

et

$$\rho_\xi \leqq (\lambda - 1)\sigma_x + \rho_x < \lambda\rho_x.$$

5. Supposons que *toutes les tangentes des courbes f et g au point* O *soient confondues avec une même droite* D ; et que g admette seulement des systèmes circulaires d'ordre 1. Nous pouvons décomposer g en branches simples,

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_s;$$

si N_i, Θ_i désignent les sommes des ordres de contact de g_i avec f et $g_1 g_2 \ldots g_{i-1} g_{i+1} \ldots g_s$, nous avons, avec les notations du théorème 9,

$$M'_i = P'_i = N_i + \Theta_i.$$

Par suite :

Théorème 14. — *Si l'un des nombres* $\gamma_i = r + s - 1 + N_i + \Theta_i$ *est supérieur à tous les autres, il donne la valeur de* ρ, *et les axes sont normaux. Dans tous les cas, le plus grand*, γ, *des nombres* γ_i *donne une limite supérieure de* ρ.

Cette limite γ peut effectivement ne pas être atteinte : il en est ainsi, notamment, lorsque g possède des branches multiples, car alors certains des nombres Θ_i sont infinis, et il en est de même de γ. Nous allons voir qu'on peut remplacer la limite γ par une autre meilleure, généralement atteinte, toutes les fois que plusieurs branches de g ont, avec toute branche de f, des contacts de même ordre.

6. Nous supposons maintenant que les *deux* courbes n'admettent que des systèmes circulaires d'ordre 1.

Nous dirons qu'une courbe γ forme un *faisceau* par rapport à une courbe f lorsque deux branches quelconques de γ ont, avec n'importe quelle branche de f, des contacts de même ordre. Soit ν l'ordre maximum de contact d'une branche (quelconque) du faisceau avec une branche de f : le contact de deux branches du faisceau est d'ordre au moins égal à ν. Inversement, si nous adjoignons à un faisceau γ une branche Γ ayant avec *une* branche de γ un contact d'ordre θ *supérieur* *à* ν, $\gamma\Gamma$ constitue encore un faisceau par rapport à f. Il peut n'en être plus de même si θ est *égal à* ν.

Nous pouvons distinguer dans f l'ensemble φ des branches qui ont avec une branche quelconque de γ un contact d'ordre maximum ν; s'il contient plusieurs branches, φ forme un faisceau par rapport à γ. Nous dirons encore que φ forme un faisceau s'il ne contient qu'une branche, réservant le terme de faisceau *véritable* au cas d'un faisceau contenant plusieurs branches. Nous dirons que le faisceau φ est le faisceau *conjugué* de γ dans f et que les faisceaux φ et γ sont *séparés* si l'ordre du contact de deux branches quelconques de φ ou de deux branches quelconques de γ est *supérieur* à l'ordre ν du contact d'une branche quelconque de φ avec une branche quelconque de γ. Deux faisceaux conjugués ayant chacun une seule branche doivent être considérés comme séparés.

Soient, par exemple, les courbes

$$
\begin{aligned}
&f = y^2 - x^{2n} = 0 && (y = \pm x^n),\\
&g = y^2 - 2x^p y + x^{2p}(1 - x^2) = 0 && (y = x^p \pm x^{p+1});
\end{aligned}
$$

f et g forment deux faisceaux conjugués si $p \neq n$; dans le cas $p < n$ et seulement dans ce cas, les deux faisceaux sont séparés. Si $n = p$, g forme encore un faisceau par rapport à f, mais le faisceau conjugué φ ne se compose plus que de la branche $y = + x^n$; φ et g ne sont pas séparés.

Étudions d'abord le cas dans lequel *la courbe g constitue un faisceau (véritable) par rapport à f.* Nous supposons la droite D avec laquelle coïncident toutes les tangentes de f ou de g, prise pour axe des x, et les équations de f et de g mises sous la forme

$$
\begin{aligned}
f &= a_0 + a_1 y + \ldots + a_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0,\\
g &= b_0 + b_1 y + \ldots + b_{s-1} y^{s-1} + y^s = 0,
\end{aligned}
$$

où les a et les b sont des polynomes en x. Soient ν l'ordre de contact maximum d'une branche de g avec les différentes branches de f, r_1 l'ordre du faisceau conjugué φ de g dans f, N la somme des ordres de contact d'une branche de g avec les branches de f.

Une transformation de la forme

$$y = \mathrm{Y} + \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ est un polynome nul pour $x = 0$, ne change pas le sous-résultant des polynomes f et g; elle ne change pas non plus, dans les polynomes A et B, les coefficients des monomes qui ne contiennent que y; en particulier, elle laisse subsister la normalité ou la non-normalité des axes. Par une telle transformation, on peut se ramener au cas où l'une des branches de la courbe $g = 0$ coïncide avec la droite D : le polynome $b_0(x)$ dans l'équation de g est alors identiquement nul. En outre, on peut mettre, dans b_i, x en facteur à une puissance au moins égale à $(s-i)(\nu+1)$, certainement supérieure si g et φ sont deux faisceaux séparés. Posons

$$b_i = x^{(s-i)(\nu+1)} b'_i. \tag{4}$$

De même a_0 contient x en facteur à une puissance exactement égale à $r + \mathrm{N}$. a_i est la somme des produits $r-i$ à $r-i$ des racines de l'équation $f = 0$ considérée comme équation en y. Chacun de ces produits est au moins d'ordre $\mathrm{N} + r - i(\nu+1)$ si $i \leqq r_1$, d'ordre supérieur si $i > r_1$; nous pouvons donc poser

$$a_i = x^{\mathrm{N}+r-i(\nu+1)} a'_i, \tag{5}$$

a'_i étant un polynome, nul pour $x = 0$ si $i > r_1$.

Soit

$$\mathrm{R}_1(x) = x^k \mathrm{S}_1(x) = \mathrm{A}_1(x, y) f(x, y) + \mathrm{B}_1(x, y) g(x, y)$$
$$[\mathrm{S}_1(0) \neq 0,\ k = s(r + \mathrm{N})],$$

le résultant des polynomes f, g; nous avons

$$\mathrm{R}_1(x) = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & . & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_0 & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & . & . & \ldots & 1 \\
0 & b_1 & \ldots & b_{s-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & b_{s-2} & b_{s-1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & b_1 & . & \ldots & 1
\end{vmatrix}.$$

En désignant par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$, les mineurs (avec leurs signes) relatifs aux éléments de la première colonne, nous avons

$$\begin{gathered}
A_1(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots + \alpha_{s-1} y^{s-1}, \\
B_1(x, y) = \beta_0 + \beta_1 y + \ldots + \beta_{r-1} y^{r-1}, \\
R_1(x) = \alpha_0 a_0,
\end{gathered}$$

et nous obtenons le sous-résultant

$$R(x) = x^\sigma S(x) = A(x, y) f + B(x, y) g \qquad [S(0) \neq 0]$$

en divisant $R_1(x)$ par le p.g.c.d. des polynomes α_i. Si x^τ est la puissance de x qui se trouve en facteur dans ce p.g.c.d., nous avons

$$\sigma = k - \tau.$$

Pour avoir une limite inférieure de τ, remplaçons dans R_1 et dans ses mineurs les a et les b par leurs expressions (4) et (5) en fonction des a' et des b'. Multiplions la première colonne par 1, la deuxième par $x^{\nu+1}, \ldots$, la $p^{\text{ième}}$ par $x^{p(\nu+1)}, \ldots$. Désignons par α'_i le mineur déduit de α_i par la substitution des a' et des b' aux a et aux b. On voit sans peine, comme au n° 5 du Chapitre II, que α_i est égal au produit de α'_i par une puissance de x d'exposant

$$\tau_i = (s-1)(N + r - \nu - 1) + (s - 1 - i)(\nu + 1).$$

Nous avons donc

$$\tau \geqq (s-1)(N + r - \nu - 1),$$

d'où

$$\sigma \leqq N + r + (s-1)(\nu + 1) = r + s - 1 + N + (s-1)\nu.$$

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la normalité des axes. En les prenant normaux, nous obtenons pour ρ la limite *supérieure*

$$\rho \leqq \delta = r + s - 1 + N + (s-1)\nu,$$

limite qui est, comme on le voit, indépendante des ordres de contact mutuels des différentes branches du faisceau g. Si deux branches quelconques de g ont un contact d'ordre seulement égal à ν, la limite δ

coïncide avec la limite précédemment donnée

$$\gamma = r + s - 1 + N + \Theta,$$

et il est intéressant de remarquer que ce nombre δ reste limite supérieure de ρ lorsque le faisceau g « se resserre » d'une manière quelconque.

Une condition suffisante pour que la limite δ soit atteinte est que le polynome $\alpha_{s-1}(x)$ soit divisible exactement par $x^{(s-1)(N+r-\nu-1)}$, ou encore que le nombre

$$\omega = \alpha'_{s-1}(0)$$

ne soit pas nul. S'il en est ainsi, les axes sont nécessairement normaux (¹) et la courbe $A=0$ (ou $B=0$) n'a pas d'autre tangente que Ox.

Cette condition est également nécessaire. Supposons, en effet, que l'on aït, k ayant toujours la même valeur (²), $\alpha'_{s-1}(0)=0$. Si l'ordre du polynome A est encore $s-1$, les axes sont normaux et l'on a $\rho=\sigma<\delta$. Si le polynome A est d'ordre $q<s-1$, il contient un terme en $x^{\lambda}y^{q-\lambda}(0 \leqq \lambda \leqq q)$; le polynome $\alpha_{q-\lambda}(x)$ étant divisible au moins par

$$x^{(s-1)(N+r-\nu-1)+(s-1-q+\lambda)(\nu+1)},$$

nous avons

$$\sigma \leqq \delta - [(s-1-q+\lambda)(\nu+1)-\lambda]$$

et, par suite,

$$\rho = \sigma + s - 1 - q \leqq \delta - (s-1-q)(\nu+1) - \lambda\nu < \delta.$$

Remarque. — On voit notamment que, *lorsque la limite δ est atteinte, tout système d'axes régulier est normal.*

Nous avons, en désignant par $\overline{a'}$, $\overline{b'}$ les valeurs de a', b' pour $x=0$,

---

(¹) Les axes sont nécessairement normaux tant que α_{s-1} est divisible par une puissance de x au plus égale à $(s-1)(N+r-\nu-1)+\nu$.

(²) Il suffit pour cela que l'ordre du contact d'une branche quelconque de g, avec une branche quelconque de f, conserve la même valeur lorsqu'on attribue aux coefficients des valeurs telles que $\alpha'_{s-1}(0)=0$.

et en remarquant que $\bar{a}'_i = 0$ pour $i > r_1$,

$$\omega = (-1)^{s-1}\left|\begin{array}{cccccccccc}
\bar{a}'_1 & \bar{a}'_2 & \dots & \dots & \bar{a}'_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\bar{a}'_0 & \bar{a}'_1 & \dots & \dots & \dots & \bar{a}'_{r_1} & \dots & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .\\
0 & \dots & \bar{a}'_0 & \bar{a}'_1 & \bar{a}'_2 & \dots & \bar{a}'_{r_1} & \dots & \dots & 0\\
\bar{b}'_1 & \dots & \bar{b}'_{s-2} & \bar{b}'_{s-1} & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \dots & \dots & \bar{b}'_{s-2} & \bar{b}'_{s-1} & 1 & \dots & \dots & \dots & 0\\
. & \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots & \dots & \dots & .\\
0 & \dots & 0 & \bar{b}'_1 & \dots & . & \dots & \dots & \dots & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}s-1\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}r\end{array}$$

$$= (-1)^{s-1}\left|\begin{array}{cccccccccc}
\bar{a}'_1 & \bar{a}'_2 & \dots & \dots & \dots & \bar{a}'_{r_1} & 0 & \dots & \dots & 0\\
\bar{a}'_0 & \bar{a}'_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \bar{a}'_{r_1} & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .\\
0 & \dots & \bar{a}'_0 & \bar{a}'_1 & . & \dots & \dots & \dots & \dots & \bar{a}'_{r_1}\\
\bar{b}'_1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots & .\\
0 & \dots & \dots & \dots & \bar{b}'_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}s-1\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}r_1\end{array}$$

Nous pouvons remplacer la courbe f par une autre décomposée en r courbes simples d'équations

$$y + P_1(x) = 0, \quad y + P_2(x) = 0, \quad \dots, \quad y + P_n(x) = 0.$$

Dans le système d'axes primitifs [avant la transformation $y = Y - \varphi(x)$], $P_1, P_2, \dots, P_r$ désignent les différences $Y - Y_1, \dots, Y - Y_r$ où les Y_i et Y sont les fonctions correspondant aux diverses branches de f et à la branche de g considérée. Posons

$$P_{r_1+1} . P_{r_1+2} \dots P_r = V(x) = x^{N+r-r_1(\nu+1)} v(x),$$

nous avons $v(0) = v \neq 0$. Si $r = r_1$, on doit prendre $v = V = 1$. Si nous désignons par

$$\varphi = u_0 + u_1 y + \dots + u_{r_1-1} y^{r_1-1} + y^{r_1},$$

l'équation du faisceau φ conjugué de g dans f, et si nous posons

$$u_i(x) = x^{(r_1-i)(\nu+1)} u'_i(x), \qquad \bar{u}'_i = u'_i(0),$$

nous avons

$$\overline{a}'_i = \overline{u}'_i \rho,$$

et, par suite, en désignant par ω' le nombre ω relatif aux courbes g et φ,

$$\omega = \rho^{s-1} \omega'.$$

Ainsi, *lorsque g forme un faisceau par rapport à f, il faut et il suffit pour que la limite δ soit atteinte pour l'idéal (f, g), que la limite analogue δ' soit atteinte pour l'idéal (φ, g), φ étant le faisceau conjugué de g dans f.*

Il en est ainsi lorsque l'un des faisceaux g ou φ possède une seule branche, et plus généralement, comme nous allons le montrer, lorsqu'ils sont *séparés*.

Dans ce cas, on a, en effet,

$$\overline{b}'_1 = \overline{b}'_2 = \ldots = \overline{b}'_{s-1} = 0$$

et, si nous supposons d'abord $s < r_1$,

$$\omega' = (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} \overline{u}'_1 & \overline{u}'_2 & \ldots & \ldots & \overline{u}'_{s-1} \\ \overline{u}'_0 & \overline{u}'_1 & \ldots & \ldots & \overline{u}'_{s-2} \\ 0 & \overline{u}'_0 & \ldots & \ldots & \overline{u}'_{s-3} \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \ldots \\ 0 & \cdot\cdot & \ldots & \overline{u}'_0 & \overline{u}'_1 \end{vmatrix}.$$

Or, tous les polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_{r_1}$ ont même partie principale, $ux^{\nu+1}$, donc

$$\overline{u}'_i = C^i_{r_1} u^{r_1 - i},$$

$$\omega' = (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} C^1_{r_1} u^{r_1-1} & C^2_{r_1} u^{r_1-2} & \ldots & C^{s-1}_{r_1} u^{r_1-s+1} \\ u^{r_1} & C^1_{r_1} u^{r_1-1} & \ldots & C^{s-2}_{r_1} u^{r_1-s+2} \\ \cdot\cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots & u^{r_1} & C^1_{r_1} u^{r_1-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{s-1} u^{(r_1-1)(s-1)} D_{r_1, s-1},$$

en posant

$$D_{r_1, n} = \begin{vmatrix} C^1_{r_1} & C^2_{r_1} & \ldots & C^n_{r_1} \\ 1 & C^1_{r_1} & \ldots & C^{n-1}_{r_1} \\ 0 & 1 & \ldots & C^{n-2}_{r_1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdot & 1 & C^2_{r_1} \end{vmatrix}.$$

Ce qui précède est encore valable dans le cas $s \geqq r_1$, à condition de poser $C_m^n = 0$ pour $n > m$.

On voit sans peine que l'on a

$$D_{r_1,n} = D_{r_1+1,n} - D_{r_1+1,n-1},$$

ce qui, en remarquant que l'on a

$$D_{r_1,1} = C_{r_1}^1, \qquad D_{1,n} = 1,$$

donne

$$D_{r_1,n} = C_{r_1+n-1}^{r_1-1},$$

et finalement,

$$\omega' = (-1)^{s-1} n^{(r_1-1)(s-1)} C_{r_1-1+s-1}^{r_1-1}.$$

Dans le cas où f se réduit au faisceau φ et forme avec g un couple de faisceaux séparés, nous avons

$$\lambda = r\nu, \qquad \rho = (r+s-1)(\nu+1),$$

expression particulièrement simple, dont la forme est facile à expliquer. Considérons le cas où f est une courbe r-uple, g une courbe s-uple dont on peut ramener les équations à la forme

$$(y - X)^r = 0, \qquad y^s = 0,$$

où X est un polynome en x d'ordre $\nu + 1$. Si nous considérons X comme une variable indépendante, nous obtenons deux droites multiples, pour lesquelles l'exposant a la valeur $r + s - 1$ et le sous-résultant l'expression

$$X^{r+s-1} S(X) = A(X, x)(y - X)^r + B(X, x) y^s,$$

et l'on peut vérifier (¹) que les axes sont normaux. En remplaçant X par sa valeur en fonction de x, on obtient le nouveau sous-résultant, de sorte que l'on a

$$\rho = (r+s-1)(\nu+1).$$

Si les faisceaux φ et g ne sont pas séparés, la limite δ peut ne pas

---

(¹) En réalité, cette vérification reproduit, dans un cas particulier simple, le calcul précédent.

être atteinte. Considérons, par exemple, les courbes

$$f = y^r - x^{nr} = 0, \qquad g = y^s = 0;$$

posons

$$x^n = X, \qquad F = y^r - X^r = 0, \qquad G = y^s = 0.$$

En considérant X comme variable indépendante, nous avons, pour l'idéal (F, G),

$$P = r + s - 1,$$

d'où ne résulte pas

$$\rho = (r + s - 1)n,$$

mais seulement

$$\rho \leqq (r + s - 1)n,$$

car les axes, en général, ne sont pas normaux pour l'idéal (F, G). En posant

$$s = pr + s_1 \qquad (1 \leqq s_1 \leqq r),$$

on a l'identité

$$X^{(p+1)r} = -[X^{pr} + X^{(p-1)r}y^r + \ldots + y^{pr}](y^r - X^r) + y^{r-s_1}y^s,$$

ce qui donne, pour l'idéal (f, g),

$$\sigma = (p+1)nr, \qquad \rho = \sigma + s_1 - 1 = (r + s - 1)n - (s_1 - 1)(n - 1).$$

Par suite, la limite δ est atteinte, et les axes sont normaux si l'on a

$$s \equiv 1 \qquad (\bmod r)$$

et seulement dans ce cas. Si

$$s \equiv 0 \qquad (\bmod r),$$

on a

$$\rho = r + s - 1 + s(n - 1) = r + s - 1 + N,$$

où N est la somme des ordres de contact d'une branche de f avec les branches de g : la limite *inférieure* de ρ se trouve donc atteinte. Dans le même cas, σ a pour valeur

$$\sigma = ns = s + N.$$

Cependant, la limite supérieure δ est, *en général*, atteinte, c'est-à-dire qu'étant donné l'ensemble des ordres de contact respectifs des branches de f et de g, on peut toujours trouver des courbes f et g présentant ces ordres de contact et telles que l'on ait $\rho = \delta$.

Supposons d'abord en effet que, g et φ étant primitivement deux faisceaux séparés (véritables), on remplace dans g une branche par la courbe simple γ d'équation

$$y = -\lambda x^{\nu+1} + x^{\nu+2}(\quad);$$

on a alors

$$\overline{b}'_1 = \overline{b}'_2 = \ldots = \overline{b}'_{s-2} = 0, \qquad \overline{b}'_{s-1} = \lambda$$

et ω' a pour nouvelle valeur,

$$\omega' = (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} C^1_{r_1} u^{r_1-1} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & 1 & 0 & . & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & . & . & . & . \\ 0 & u^{r_1} & C^1_{r_1} u^{r_1-1} & . & . & . & 1 \\ 0 & \ldots & \lambda & 1 & . & . & 0 \\ . & \ldots & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & . & . & . & \lambda & 1 \end{vmatrix},$$

polynome $P(\lambda)$ de degré $r_1 - 1$, dont le terme constant est la valeur de ω' dans le cas des faisceaux séparés, et dont le terme en λ^{r_1-1} a pour coefficient, au signe près,

$$C^{s-2}_{r_1+s-3} u^{(s-2)(r_1-1)}.$$

Ce polynome admet donc $r_1 - 1$ racines différentes de 0 : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r_1-1}$; de plus, ces racines sont toutes différentes de u. En effet, pour $\lambda = u$ la branche γ de g aurait avec les branches de φ des contacts d'ordres $\nu + \mu_i (\mu_i \geqq 1)$. On aurait alors

$$k = s(N + r) + \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i.$$

D'autre part, ρ aurait pour valeur

$$r + s - 1 + N + (s-1)\nu + \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i,$$

car, en désignant par g' l'ensemble des branches de g autres que γ, nous avons

$$\begin{aligned} \rho(f\gamma, g') &\leqq r + s - 1 + N + \nu + (s-2)\nu \\ &< \rho(fg', \gamma) = r + s - 1 + N + (s-1)\nu + \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i; \end{aligned}$$

donc

$$\rho(f, \gamma g') = \rho(fg', \gamma);$$

on voit alors que la différence $\tau = k - \rho$ est toujours égale à

$$(s-1)(N+r-\nu-1),$$

ce qui exige $\omega' \neq 0$. Par suite, les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_1-1}$ de $P(\lambda)$ sont différentes de u et de 0; l'attribution de la valeur de l'une d'elles à λ ne modifie pas les ordres de contact et entraîne $\rho < \delta$. Pour toute autre valeur de λ (non nulle et non égale à u), ρ est égal à δ.

Si les faisceaux conjugués φ et g, véritables et non séparés, sont quelconques, l'un d'entre eux contient un couple C de branches ayant un contact mutuel d'ordre ν seulement; on peut supposer que ce faisceau est g et que les deux branches en question ont pour équations

$$y = 0, \qquad y = -\lambda x^{\nu+1} + x^{\nu+2}(\quad);$$

ω' est alors égal à un polynome $Q(\lambda)$ de degré $r_1 - 1$ au plus. En dehors du couple C, il peut exister dans g et dans φ d'autres couples de branches ayant un contact d'ordre ν; la différence des ordonnées correspondant aux branches de ces couples est alors de la forme $\mu x^{\nu+1} \ldots$. Les coefficients du polynome $Q(\lambda)$ dépendent de u et des paramètres μ; en prenant ces paramètres assez petits en valeur absolue, on peut rendre les coefficients, donc aussi les racines de $Q(\lambda)$, aussi voisins qu'on veut des coefficients et des racines du polynome $P(\lambda)$; $Q(\lambda)$ aura alors des racines différentes de zéro, de u et d'un quelconque des μ (ce qui est nécessaire, car autrement l'ordre de contact de deux branches de g pourrait se trouver modifié). On peut donc toujours choisir λ de manière que l'on ait, soit $\omega' \neq 0$, $\rho = \delta$, soit $\omega' = 0$, $\rho < \delta$.

Dans le sous-résultant, $x^\sigma S(x)$, considérons le coefficient $\varpi = S(0)$ du terme en x^σ. Nous aurons besoin par la suite de la valeur du quotient $\frac{\omega}{\varpi}$. Cette valeur est invariante par toute transformation de la forme

$$y = Y - \Phi(x) \qquad [\Phi(0) = 0].$$

Dans le cas des faisceaux séparés, on a, en supposant $b_0 = 0$,

$$x^\delta S(x) = a_0 \alpha'_0.$$

α'_0 est d'ordre $\delta - (N + r) = (s - 1)(\nu + 1)$, et l'on a

$$\alpha'_0(0) = \overline{a}'^{s-1}_0, \qquad \varpi = \overline{a}'^{s}_0 = (v u^{r_1})^s;$$

donc

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{(-1)^{s-1} C^{r_1-1}_{r_1-1+s-1}}{v u^{r_1+s-1}}.$$

Cette formule montre qu'il est possible de modifier la valeur de $\frac{\omega}{\varpi}$, sans l'annuler, en modifiant seulement, par exemple, les branches du faisceau φ, modification qui n'altère ni les ordres de contact, ni la valeur de v, mais seulement celle de u.

Il en est de même lorsque les faisceaux φ et g ne sont pas séparés. Si d'abord, dans φ et dans g deux branches seulement, appartenant par exemple à g et ayant les équations $y = 0$, $y = -\lambda x^{\nu+1} + \ldots$ ont un contact d'ordre ν, on a

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{(-1)^{s-1} P(\lambda)}{v u^{r_1(s-1)}(u - \lambda)^{r_1}},$$

et puisque $P(u) \neq 0$, $\frac{\omega}{\varpi}$ dépend effectivement de λ. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut montre que dans le cas de faisceaux non séparés, on peut modifier la valeur de $\frac{\omega}{\varpi}$, sans l'annuler, par une déformation des branches des faisceaux φ et g, n'altérant ni la valeur de v, ni les ordres de contact.

Enfin, nous devons encore examiner le cas où l'un des faisceaux φ ou g ne contient qu'une seule branche. Si par exemple $s = 1$, et si l'on ramène les équations des branches de g et de φ à la forme

$$g : y = 0, \qquad \varphi : y + x^{\nu+1}(u_i + \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r_1),$$

on obtient

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{1}{v . u_1 . u_2 \ldots u_{r_1}},$$

et nous voyons que, dans ce cas encore, les déformations considérées permettent de modifier la valeur du rapport $\frac{\omega}{\varpi}$.

7. Si la courbe g ne constitue pas un faisceau par rapport à f, nous pouvons la décomposer en faisceaux distincts $g_1, g_2, \ldots, g_k$ par rapport à f, tels que l'ensemble de deux quelconques d'entre eux ne soit plus un faisceau. Posons

$$g'_i = g_1 g_2 \ldots g_{i-1} . g_{i+1} \ldots g_k \qquad (g = g_i g'_i).$$

THÉORÈME 15. — *g_i forme un faisceau par rapport à la courbe $fg'_i = 0$.*

Il suffit de montrer qu'une branche quelconque γ' de g'_i a des contacts de même ordre avec toutes les branches de g_i.

Soit ν_i l'ordre de contact d'une branche de g_i avec une branche du système conjugué φ_i (1) dans f. Si γ' a avec *une* certaine branche, γ, de g_i un contact d'ordre μ *inférieur* à ν_i, toute branche γ_1 de g_i a avec γ' un contact d'ordre μ également. Si γ' a avec *toute* branche de g_i un contact d'ordre *au moins égal* à ν_i, cet ordre ne peut en aucun cas être effectivement supérieur à ν_i, car alors l'ensemble de g_i et du faisceau g_j contenant γ' constituerait un faisceau. Nous voyons ainsi que, dans tous les cas, γ' a avec toutes les branches de g_i des contacts de même ordre, au plus égal à ν_i.

Ce théorème va nous permettre d'obtenir la valeur de ρ par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour des courbes simples (théorème 9), puisque nous avons déterminé dans l'étude précédente une limite supérieure, généralement atteinte, des nombres

$$\rho'_i = \rho\,(fg'_i,\, g_i).$$

Mais afin d'obtenir des résultats plus précis, nous devons faire quelques remarques supplémentaires sur la décomposition de la courbe g en faisceaux.

Le système conjugué ψ_i de g_i dans fg'_i peut comprendre, outre φ_i, un certain nombre de branches de g'_i. Les systèmes conjugués φ_i, φ_j de deux faisceaux g_i, g_j différents peuvent avoir des branches communes. C'est ainsi que pour les courbes

$$f = (y - x^4)(y + x^4) = 0,$$
$$g = (y - x^2 - x^3)(y - x^2 + x^3)(y - x^3 - x^4)(y - x^3 + x^4) = 0,$$

---

(1) φ_i est un faisceau par rapport à g_i, mais non en général par rapport à g. Aussi parlons-nous maintenant de *systèmes* conjugués.

on a

$$g_1=(y-x^3-x^4)(y-x^3+x^4),\qquad \nu_1=2,\qquad \varphi_1=f,\qquad \psi_1=f;$$
$$g_2=(y-x^2-x^3)(y-x^2+x^3),\qquad \nu_2=1.\qquad \varphi_2=f.\qquad \psi_2=fg'.$$

Considérons deux faisceaux quelconques g_1, g_2 et leurs systèmes conjugués φ_1 et φ_2 dans f.

Théorème 16. — *Si deux systèmes conjugués φ_1 et φ_2 ont une branche commune Φ, l'un d'entre eux est contenu dans l'autre. Si l'on a par exemple $\nu_1 \geqq \nu_2$, on a $\varphi_1 \subset \varphi_2$ et $\nu_1 > \nu_2$. Enfin l'ordre de contact d'une branche de g_1 avec une branche de g_2 est égal à ν_2.*

Toute branche de g_2 a un contact d'ordre ν_2 avec Φ; d'autre part, deux branches quelconques de φ_1 ont entre elles un contact d'ordre au moins égal à $\nu_1 \geqq \nu_2$. Donc toute branche de φ_1 a avec toute branche de g_2 un contact d'ordre au moins égal à ν_2, mais par ailleurs au plus égal à ν_2, puisque aucune branche de f n'a avec g_2 un contact d'ordre supérieur à ν_2. Ainsi, toute branche de φ_1 ayant avec toute branche de g_2 un contact d'ordre ν_2, appartient à φ_2 : $\varphi_1 \subset \varphi_2$.

Cela étant, si l'on avait $\nu_1 = \nu_2$, on pourrait montrer de même $\varphi_2 \subset \varphi_1$, et par suite les systèmes φ_1, φ_2 coïncideraient. De plus, toute branche de g_1 ou de g_2 aurait avec toute branche de φ_1 ou de φ_2 un contact d'ordre $\nu_1 = \nu_2$, et avec une branche ψ de f n'appartenant pas à φ_1 un contact de même ordre $\mu (< \nu_1)$ qu'une branche (quelconque) de φ_1. Par suite, l'ensemble $g_1 g_2$ serait encore un faisceau. On a donc nécessairement $\nu_1 > \nu_2$. Enfin, une branche quelconque de g_2 ayant avec une branche de φ_1 $(\subset \varphi_2)$ un contact d'ordre $\nu_2 < \nu_1$, a avec toute branche de g_1 un contact d'ordre ν_2.

Nous dirons qu'un faisceau g_i est *principal* quand son conjugué φ_i dans f ne contient véritablement aucun autre conjugué et coïncide seulement, le cas échéant, avec des conjugués de faisceaux pour lesquels ν est inférieur à ν_i. Si un faisceau n'est pas principal, son conjugué contient au moins un conjugué de faisceau principal. Il existe donc toujours au moins un faisceau principal. Les conjugués dans f de deux faisceaux principaux de g n'ont aucune branche commune.

Lemme. — Si les conjugués φ_1, φ_2 dans f de deux faisceaux g_1, g_2

n'ont aucune branche commune, l'ordre de contact μ d'une branche Φ_1 de φ_1 avec une branche Φ_2 de φ_2 est inférieur à chacun des nombres ν_1, ν_2.

L'ordre de contact λ de Φ_1 avec une branche de g_2 est inférieur à ν_2, puisque Φ_1 n'appartient pas à φ_2. Et si l'on avait par exemple $\mu \geqq \nu_2$, il en résulterait $\lambda \geqq \nu_2$.

Théorème 17. — *Si le faisceau g_1 est principal, toute branche Γ_2 d'un autre faisceau g_2 a avec toute branche de φ_1 (ou de g_1) un contact d'ordre inférieur à ν_1.*

Le faisceau g_1 étant principal, ou bien φ_2 contient φ_1 sans lui être égal, ou bien il n'a avec lui aucune branche commune, ou bien φ_2 et φ_1 coïncident. Dans le premier cas, Γ_2 a avec toute branche de φ_1 un contact d'ordre $\nu_2 < \nu_1$. Dans le second cas, Γ_2 a avec toute branche Φ_2 de φ_2 un contact d'ordre ν_2; Φ_2 et une branche Φ_1 de φ_1 ont un contact d'ordre μ inférieur à ν_1 et à ν_2 d'après le lemme précédent : μ est donc aussi l'ordre de contact de Φ_1 et de Γ_2. Enfin, dans le troisième cas, on a encore $\nu_2 < \nu_1$ et Γ_2 a encore avec toute branche de $\varphi_1 = \varphi_2$ un contact d'ordre inférieur à ν_1.

Théorème 18. — *Le conjugué φ_1 dans f d'un faisceau principal g_1 est lui-même un faisceau, et un faisceau principal, par rapport à g. Son conjugué est g_1. Par suite f et g ont le même nombre de faisceaux principaux, associés en couples de faisceaux conjugués.*

Deux branches quelconques de φ_1 ont avec une branche de g_1 un contact de même ordre ν_1, et avec toute branche de g n'appartenant pas à g_1 un contact de même ordre inférieur à ν_1 en vertu du théorème précédent. φ_1 est donc un faisceau par rapport à g et son conjugué est g_1.

De plus, le faisceau $\varphi_1 = f_1$ est principal, car s'il en était autrement, g_1 contiendrait le conjugué γ_2 d'un faisceau f_2 de f, et l'ordre de contact ν_2 d'une branche de γ_2 avec une branche de f_2 serait supérieur à ν_1. Or il est impossible qu'une branche de g_1 ait avec une branche de f un contact d'ordre supérieur à ν_1.

Soient g_1 un faisceau principal, f_1 le faisceau conjugué dans f. Il résulte du théorème 17 que f_1 est aussi le conjugué de g_1 dans fg'_1. De même g_1 est le conjugué de f_1 dans gf'_1.

Théorème 19. — *g_1 étant un faisceau principal, les limites δ relatives aux idéaux (fg'_1, g_1) et (f_1, gf'_1) sont égales.*

Soient en effet r_1, s_1 les nombres de branches contenues dans f_1, g_1; N' la somme des ordres de contact d'une branche quelconque de f_1 ou de g_1 avec toutes les branches de g'_1, N'' la somme des ordres de contact d'une branche quelconque de f_1 ou de g_1 avec toutes les branches de f'_1. Nous avons

$$\delta(fg'_1, g_1) = r + s - 1 + N' + N'' + r_1\nu_1 + (s_1 - 1)\nu_1,$$
$$\delta(f_1, gf'_1) = r + s - 1 + N' + N'' + s_1\nu_1 + (r_1 - 1)\nu_1.$$

Théorème 20. — *La limite $\delta_i = \delta(fg'_i, g_i)$ relative à un faisceau non principal g_i est inférieure à la limite analogue relative à un faisceau principal g_1 dont le conjugué f_1 est contenu dans le conjugué f_i de g_i.*

D'une manière plus précise, g_1 étant un faisceau principal, soient $g_2, g_3, \ldots, g_h$ des faisceaux dont les conjugués $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_h$ contiennent f_1, les notations étant telles que l'on ait

$$f_1 \subset \varphi_2 \subset \varphi_3 \subset \ldots \subset \varphi_h.$$

Considérons les nombres

$$\delta_i = \delta(fg'_i, g_i), \qquad \delta_j = \delta(fg'_j, g_j).$$

Si l'on suppose

$$1 \leqq i < j \leqq h,$$

on a

$$\delta_i > \delta_j.$$

Soit en effet φ' l'ensemble des branches de f qui n'appartiennent pas à φ_j; l'ordre de contact de l'une d'elles et d'une branche de φ_j est inférieur à ν_j. Donc les sommes des ordres de contact d'une branche de g_i et d'une branche de g_j avec toutes les branches de φ' sont les mêmes. De même une branche de g_i et une branche de g_j ont avec une branche de $g_{j+\alpha}(j + \alpha = j + 1, \ldots, h)$ des contacts de même ordre $\nu_{j+\alpha}$. Soit g' l'ensemble des branches de g qui n'appartiennent pas à g_1, $g_2, \ldots, g_h$. Toute branche de g' a avec une branche de g_j un contact d'ordre ou bien inférieur à ν_j, et a par suite un contact de même ordre avec une branche de g_i, ou bien égal à ν_j, et alors elle a avec une branche de g_i un contact d'ordre supérieur ou égal à ν_j. Donc la somme des ordres de contact d'une branche quelconque de g_i avec g' est supérieure ou égale à la somme analogue relative à g_j. Il ne reste plus qu'à comparer dans δ_i, δ_j les termes t_i, t_j, correspondant au produit $\varphi_j g_1 \ldots g_j$. Soient s_k le nombre de branches de g_k, r_k le nombre de branches de φ_k. Nous avons

$$t_i \geqq (s_1 + \ldots + s_{i-1} + s_i - 1 + r_i)\nu_i + (r_j - r_i)\nu_j + s_{i+1}\nu_{i+1} + \ldots + s_j\nu_j = t,$$
$$t_j = (s_1 + \ldots + s_i + \ldots + s_j - 1 + r_j)\nu_j < t \leqq t_i.$$

8. La courbe g étant décomposée en *faisceaux* $g_1, g_2, \ldots, g_k$, appliquons à cette décomposition le théorème 9. Soit

$$\rho_i = r + s - 1 + \mu_i$$

l'exposant de l'idéal (fg'_i, g_i). Si l'un des nombres ρ_i, soit ρ_1, est supérieur à tous les autres, il donne la valeur exacte de ρ. Si plusieurs des nombres ρ_i sont égaux et supérieurs à tous les autres, leur valeur commune est limite supérieure de ρ. Or, en désignant par N_i, Θ_i les sommes des ordres de contact d'une branche de g_i avec f et g_i, par s_i l'ordre du faisceau g_i, nous avons

$$\rho_i \leqq \delta_i = r + s - 1 + N_i + \Theta_i + (s_i - 1)\nu_i.$$

Une limite supérieure δ de ρ est donc donnée par le ou les faisceaux *principaux* pour lesquels le nombre $M_i = N_i + \Theta_i + (s_i - 1)\nu_i$ est maximum. Cette limite peut n'être atteinte pour aucun des faisceaux principaux, si ceux-ci et leurs conjugués sont véritables, non séparés, et tels que $\omega' = 0$. Mais elle l'est en général, et il nous reste à voir, dans ce cas, à quelle condition elle est également atteinte par l'exposant ρ de l'idéal $\mathfrak{m} = (f, g)$.

9. Supposons donc la limite atteinte, donc les axes normaux, pour chacun des idéaux $\mathfrak{m}'_i = (fg'_i, g_i)$ correspondant aux faisceaux principaux $g_1, g_2, \ldots, g_\alpha$ donnant le nombre M_i maximum. Pour qu'elle soit atteinte pour l'idéal (f, g), il faut et il suffit qu'elle le soit pour l'idéal

$$(f.g_{\alpha+1}\ldots g_k, g_1\ldots g_\alpha) = (fg', g_1\ldots g_\alpha).$$

Soient ω'_i, ϖ'_i les nombres précédemment définis relatifs à l'idéal $\mathfrak{m}'_i$, $\omega'_1, \ldots, \omega'_\alpha$ sont différents de zéro. Désignons par ω_i, ϖ_i les nombres analogues pour l'idéal

$$\mathfrak{m}_i = (f.g'.g_{i+1}\ldots g_\alpha, g_1\ldots g_i) \qquad (i \leqq \alpha).$$

Supposons que l'on ait pour l'idéal $\mathfrak{m}_{i-1}$

$$\rho_{i-1} = \delta, \qquad \omega_{i-1} \neq 0 \quad \text{(axes normaux)},$$
$$\{ A_{i-1} \} = \omega_{i-1} y^{s_1+\ldots+s_{i-1}-1},$$

propriété vraie pour $i-1=1$, et voyons à quelle condition ces propriétés subsistent pour l'idéal $\mathfrak{m}_i$.

Considérons les sous-résultants

$$\begin{aligned}
B_{i-1}(x) &= x^\delta S_{i-1}(x) = A_{i-1} f.g'.g_i.g_{i+1}\ldots\ldots\ldots g_\alpha + B_{i-1}g_1\ldots g_{i-1},\\
B_i(x) &= x^{\sigma_i} \; S_i(x) = A_i \; f.g'.g_{i+1}\ldots\ldots\ldots\ldots g_\alpha + B_i \; g_1\ldots g_{i-1}.g_i,\\
B'_i(x) &= x^\delta \; S'_i(x) = A'_i \; f.g'.g_1\ldots g_{i-1}.g_{i+1}\ldots g_\alpha + B'_i g_i,\\
B''_i(x) &= x^{\rho''_i} \; S''_i(x) = A''_i \; f.g'.g_{i+1}\ldots\ldots\ldots\ldots g_\alpha + B''_i g_i.
\end{aligned}$$

Pour ce dernier idéal, les axes sont normaux, car le faisceau principal g_i a pour conjugué f_i dans $fg'g_{i+1}\ldots g_\alpha$, et les axes sont normaux pour l'idéal (f_i, g_i) puisque $\omega'_i \neq 0$.

Le produit $R_{i-1}R''_i$ est un multiple de R_i, et nous avons, en effectuant la division suivant les puissances de y,

$$B_{i-1}B''_i = Q_i.f.g'.g_{i+1}\ldots g_\alpha + x^{\delta+\rho''_i-\sigma_i}\frac{S_{i-1}S''_i}{S_i}B_i, \tag{6}$$

d'où

$$B_{i-1}B''_iA''_i = Q_i[x^{\rho''_i}S''_i - B''_ig_i] + \frac{S_{i-1}S''_i}{S_i}B_iA''_ix^{\delta+\rho''_i-\sigma_i},$$

ce qui donne, le polynome B''_i n'étant pas divisible par x

$$A''_iB_{i-1} + Q_ig_i = \lambda x^{\rho''_i}, \tag{7}$$

$$Q_iS''_i + x^{\delta-\sigma_i}\frac{S_{i-1}S''_i}{S_i}A''_iB_i = \lambda B''_i. \tag{8}$$

Supposons, comme nous pouvons toujours le faire, les polynomes fg', g_i de degrés en y égaux respectivement à leurs ordres $r' = r + s'$,

s_i en O. Les axes étant normaux, les polynomes B_{i-1}, B''_i, Q_i, A''_i ont respectivement pour termes de plus haut degré en y

$$\begin{array}{lll} B_{i-1}: & b_{i-1}(x)y^{r'+s_i+\ldots+s_\alpha-1} & \text{avec } b_{i-1}(0) = -\omega_{i-1} \neq 0, \\ B''_i: & b''_i(x)y^{r'+s_{i+1}+\ldots+s_\alpha-1} & \text{avec } b''_i(0) = -\omega''_i \neq 0, \\ Q_i: & b_{i-1}(x)\, b''_i(x)y^{r'+s_i+\ldots+s_\alpha-2} & \\ A''_i: & -b''_i(x)y^{s_i-1}. & \end{array}$$

Le degré de B_i par rapport à y est au plus égal à

$$r' + s_{i+1} + \ldots + s_\alpha - 1,$$

de sorte que l'équation (8) exige que λ soit de degré $s_i - 1$ au plus en y; (7) est donc l'identité de la division de $A''_i B_{i-1}$ par g_i suivant les puissances de y. Or, le reste de cette division est nécessairement le polynome

$$\frac{S''_i S_{i-1}}{S'_i} A'_i x^{\delta+\rho''_i-\delta}.$$

Nous obtenons ainsi l'expression de λ et l'équation (8) s'écrit

$$(8') \qquad Q_i S_i S'_i + A''_i B_i S'_i S_{i-1} x^{\delta-\sigma_i} = S_{i-1} S_i A'_i B''_i.$$

Le terme (¹) en $x^0 y^{r'+s_i+\ldots+s_\alpha-2}$ dans la différence $Q_i S_i S'_i - S_{i-1} S_i A'_i B''_i$ a pour coefficient

$$\varpi_i(\varpi'_i \omega_{i-1}\omega''_i + \varpi_{i-1}\omega'_i\omega''_i) = \varpi_{i-1}\varpi_i\varpi'_i\omega''_i\left(\frac{\omega_{i-1}}{\varpi_{i-1}} + \frac{\omega'_i}{\varpi'_i}\right).$$

Ce coefficient est nul si

$$(9) \qquad \frac{\omega_{i-1}}{\varpi_{i-1}} + \frac{\omega'_i}{\varpi'_i} = 0,$$

et seulement dans ce cas. Si donc la condition (9) n'est pas vérifiée, le produit $A''_i B_i S'_i S_{i-1} x^{\delta-\sigma_i}$ doit contenir un terme en $y^{r'+s_i+\ldots+s_\alpha-2}$, ce qui exige que l'on ait

$$\sigma_i = \delta = \rho_i;$$

la limite δ est donc atteinte pour l'idéal $\mathfrak{m}_i$, et les axes sont nécessairement normaux. Le polynome B_i est de la forme

$$b_i(x)y^{r'+s_{i+1}+\ldots+s_\alpha-1} + \ldots \qquad \text{avec } b_i(0) = -\omega_i = -\varpi_i\left(\frac{\omega'_i}{\varpi'_i} + \frac{\omega_{i-1}}{\varpi_{i-1}}\right),$$

(¹) Ce raisonnement suppose $r' \geq 2$. Pour $r' = 1$ on a évidemment $\rho = \delta$.

de sorte que l'on a

$$(10) \qquad \frac{\omega_i}{\varpi_i} = \frac{\omega'_i}{\varpi'_i} + \frac{\omega_{i-1}}{\varpi_{i-1}}.$$

En outre, on a

$$\{B_i\} = -\omega_i y^{r'+s_{i+1}+\ldots+s_\alpha-1}.$$

En effet, dans l'équation (6), $S_i B_{i-1} B''_i$ est d'ordre

$$s_i + 2(r' + s_{i+1} + \ldots + s_\alpha - 1);$$

et $x^{\delta+\rho''_i-\sigma_i} S_{i-1} S''_i B_i = x^{\rho''_i} S_{i-1} S''_i B_i$ d'ordre

$$\rho''_i + r' + s_{i+1} + \ldots + s_\alpha - 1,$$

et nous avons

$$\rho''_i > r' + s_i + s_{i+1} + \ldots + s_\alpha - 1,$$

puisque les courbes $fg' g_{i+1} \ldots g_\alpha$, g_i sont tangentes. Par suite on a

$$\{Q_i\} = \omega_{i-1}\omega''_i y^{r'+s_i+\ldots+s_\alpha-2}.$$

D'autre part,

$$\{A'_i\}\{B''_i\} = -\omega'_i\omega''_i y^{r'+s_i+\ldots+s_\alpha-2},$$

d'où, en vertu de l'équation (8') dans laquelle $\sigma_i = \delta$,

$$\begin{aligned}\{B_i\} &= -\varpi_i\left(\frac{\omega'_i}{\varpi'_i} + \frac{\omega_{i-1}}{\varpi_{i-1}}\right) y^{r'+s_{i+1}+\ldots+s_\alpha-1} \\ &= -\omega_i y^{r'+s_{i+1}+\ldots+s_\alpha-1}.\end{aligned}$$

Cela posé, considérons la somme

$$\sum = \frac{\omega'_1}{\varpi'_1} + \frac{\omega'_2}{\varpi'_2} + \ldots + \frac{\omega'_\alpha}{\varpi'_\alpha},$$

et distinguons deux cas suivant que cette somme est différente de zéro ou nulle.

1° $\Sigma \neq 0$. — Nous pouvons choisir les notations de manière que toute somme

$$\sum_i = \frac{\omega'_1}{\varpi'_1} + \frac{\omega'_2}{\varpi'_2} + \ldots + \frac{\omega'_i}{\varpi'_i}$$

soit aussi différente de zéro : il suffit pour cela que tout nombre $\frac{\omega'}{\varpi'}$ qui a le signe de Σ ait un indice inférieur à tout nombre $\frac{\omega'}{\varpi'}$ qui est de signe contraire. On aura alors

$$\Sigma_i \neq 0,$$

donc

$$\sigma_2 = \delta, \qquad \frac{\omega_2}{\varpi_2} = \Sigma_2 \neq 0, \qquad \{ B_2 \} = -\omega_2 y^{\rho'-1},$$

puis, de même,

$$\sigma_3 = \delta, \qquad \frac{\omega_3}{\varpi_3} = \Sigma_3 \neq 0, \qquad \{ B_3 \} = -\omega_3 y^{\rho'-1},$$

et ainsi de suite. Finalement,

$$\sigma_\alpha = \delta, \qquad \frac{\omega_\alpha}{\varpi_\alpha} = \Sigma_\alpha \neq 0, \qquad \{ B_\alpha \} = -\omega_\alpha y^{\rho'-1}.$$

La limite δ étant atteinte et les axes étant normaux pour l'idéal

$$\mathfrak{m}_\alpha = (f g', g_1 g_2 \ldots, g_\alpha),$$

il en est de même pour l'idéal

$$\mathfrak{m} = (f g'; g_1 \ldots g_\alpha);$$

comme on le voit en décomposant la courbe g' en faisceaux $g'_1, \ldots, g'_\beta$: on a, quel que soit i,

$$\sigma(f \cdot g_1 \ldots g_\alpha \cdot g'_1 \ldots g'_{i-1} \cdot g'_{i+1} \ldots g'_\beta;\ g'_i) < \delta;$$

donc

$$\sigma' = \sigma(f \cdot g_1 \ldots g_\alpha;\ g') < \delta = \sigma(f g';\ g_1 \ldots g_\alpha)$$

et, par suite,

$$\sigma(f;\ g_1 \ldots g_\alpha \cdot g') = \sigma(f \cdot g';\ g_1 \ldots g_\alpha) = \delta.$$

De plus,

$$\{ B \} = -\omega y^{\rho'-1} \qquad \text{avec } \frac{\omega}{\varpi} = \frac{\omega_\alpha}{\varpi_\alpha}.$$

Posons, en effet,

$$\begin{aligned}
R_\alpha(x) &= x^\delta\, S_\alpha(x) = A_\alpha f g' + B_\alpha g_1 g_2 \ldots g_\alpha, \\
R\ (x) &= x^\delta\, S\ (x) = A\ f + B g_1 \ldots g_\alpha g', \\
R'(x) &= x^{\sigma'} S'(x) = A' f g_1 \ldots g_\alpha + B' g' \qquad (\sigma' \leqq \rho' < \delta), \\
R''(x) &= x^{\sigma''} S''(x) = A'' f + B'' g'.
\end{aligned}$$

On a, comme précédemment,

$$B_\alpha B'' = Q f + x^{\sigma''} \frac{S_\alpha S''}{S} B,$$

d'où

$$A'' B_\alpha + Q g' = \lambda x^{\sigma''},$$

$$Q S'' + \frac{S_\alpha S''}{S} A'' B = \lambda B''.$$

Soit $r-1-\varepsilon\,(\varepsilon \geqq 0)$ le degré de B'' en y; celui de A'' est $s'-1-\varepsilon$, celui de Q, $r+s'-2-\varepsilon$, donc celui de λ est au plus $s'-1$, s' désignant l'ordre de g', et l'on a

$$\lambda = A' \frac{S_\alpha S''}{S'} x^{\delta-\sigma'},$$

donc

$$(11) \qquad QS'' + \frac{S_\alpha S''}{S} A'' B = A' B'' \frac{S_\alpha S''}{S'} x^{\delta-\sigma'};$$

on a d'autre part

$$\{B_\alpha\}\{B''\} = \{Q\}\{f\}.$$

car, en désignant par $r-1-\varepsilon''$, $s'-1-\varepsilon''$ les ordres de B'' et A'' en O, on a

$$\sigma'' > r + s' - 1 - \varepsilon'',$$

puisque les courbes f et g' sont tangentes. De là résulte

$$\{Q\} = -\omega_\alpha \{B''\} y^{s'-1} = \omega_\alpha \{A''\} y^{r-1}.$$

Soit $s'-1-\varepsilon'$ l'ordre de A'. Le second membre de (11) est d'ordre

$$\mu = s' - 1 - \varepsilon' + r - 1 - \varepsilon'' + \delta - \sigma';$$

or

$$\rho' = \sigma' + \varepsilon' < \delta;$$

donc

$$\mu > r + s' - 2 - \varepsilon'' = \text{ordre de } QS'',$$

et nous avons, d'après (11),

$$\{QS''\} + \left\{\frac{S_\alpha S''}{S}\right\}\{A''\}\{B\} = 0,$$

d'où

$$\{B\} = -\frac{\omega_\alpha}{\varpi_\alpha} \varpi y^{r-1} = -\omega y^{r-1}$$

en posant

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{\omega_\alpha}{\varpi_\alpha} \neq 0.$$

2° Supposons maintenant que l'on ait $\Sigma = 0$. Il en résulte, ω'_α étant différent de zéro,

$$\Sigma_{\alpha-1} = -\frac{\omega'_\alpha}{\varpi'_\alpha} \neq 0.$$

Par suite, la limite δ est atteinte pour l'idéal $\mathfrak{m}_{\alpha-1}$ et l'on a

$$\frac{\omega_{\alpha-1}}{\varpi_{\alpha-1}} = \Sigma_{\alpha-1} = -\frac{\omega'_\alpha}{\varpi'_\alpha}.$$

Il en résulte, d'après l'équation (8'), pour $i=\alpha$,

$$\delta - \sigma_\alpha > 0,$$

puisque le seul terme indépendant de x dans la différence

$$S_\alpha(Q_\alpha S'_\alpha - S_{\alpha-1} A'_\alpha B''_\alpha)$$

disparaît.

Cela étant, l'inégalité $\sigma_\alpha < \delta$ entraîne $\rho_\alpha < \delta$. Il en est évidemment ainsi si le polynome B_α est d'ordre $r'-1$ ($r'=r+s'$), car alors les axes sont normaux. Supposons donc B_α d'ordre $q=r'-1-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). B_α contient un terme en $x^\lambda y^{r'-1-\lambda-\varepsilon}$ ($0 \leqq \lambda \leqq r'-1-\varepsilon$). Donc, dans le polynome

$$T = A''_\alpha B_\alpha S'_\alpha S_{\alpha-1} x^{\delta-\sigma_\alpha} = -Q_\alpha S_\alpha S'_\alpha + S_{\alpha-1} S_\alpha A'_\alpha B''_\alpha,$$

il y a un terme en $x^{\lambda+\delta-\sigma_\alpha} y^{r'+s_\alpha-2-\lambda-\varepsilon}$. D'autre part, $A'_\alpha B''_\alpha$ est un polynome d'ordre $r'+s_\alpha-2$, dont les termes de moindre degré se réduisent à $y^{r'+s_\alpha-2}$. De même, $B_{\alpha-1} B''_\alpha$ est d'ordre $2r'+s_\alpha-2$ et a pour termes de moindre degré $y^{2r'+s_\alpha-2}$, ce qui entraîne comme précédemment

$$\{Q_\alpha\} = \omega_{\alpha-1}\omega''_\alpha y^{r'+s_\alpha-2}.$$

Par suite, dans T, le polynome en x, coefficient de $y^{r'+s_\alpha-2-\lambda-\varepsilon}$ contient x en facteur à une puissance au moins égale à $\lambda+\varepsilon+1$, d'où résulte

$$\lambda+\delta-\sigma_\alpha \geqq \lambda+\varepsilon+1, \qquad \sigma_\alpha \leqq \delta-\varepsilon-1$$

et

$$\rho_\alpha = \sigma_\alpha + r' - 1 - q = \sigma_\alpha + \varepsilon \leqq \delta - 1 < \delta.$$

L'exposant de l'idéal (f, g) étant au plus égal au plus grand des nombres

$$\rho(fg_1\ldots g_\alpha, g'), \quad \sigma(fg', g_1\ldots g_\alpha) = \rho_\alpha,$$

l'un et l'autre inférieurs à δ, est donc, lorsque Σ est nulle, lui-même inférieur à δ.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 19. — *Étant données deux courbes f et g ayant en O toutes* *leurs tangentes confondues avec une même droite* D, *soit* δ *le maximum de la limite*

$$\delta_i = r + s - 1 + N_i + \Theta_i + (s_i - 1)\nu_i$$

relative à un faisceau principal de g; *soient* $g_1, g_2, \ldots, g_\alpha$ *les faisceaux principaux de* g *tels que cette limite soit atteinte pour l'idéal* (fg_i, g_i), $\frac{\omega'_i}{\varpi_i}$ *les nombres correspondants définis plus haut,* Σ *la somme de ces nombres; on a*

$$\rho(f, g) \leqq \delta$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité ait lieu est que Σ *soit différente de zéro. S'il en est ainsi, tout système d'axes régulier est normal et les courbes* A, B *définies par le sous-résultant n'ont pas en* O *d'autre tangente que la droite* D.

Ce théorème, combiné avec les théorèmes 10 et 12, permet de déterminer une limite supérieure aussi précise que possible de ρ et d'étudier la normalité des axes dans le cas de deux courbes f et g ayant en O des tangentes quelconques, et admettant seulement des systèmes circulaires d'ordre 1.

10. Nous avons supposé dans ce qui précède que les courbes considérées f, g n'admettaient que des systèmes d'ordre 1. Un changement de variables de la forme

$$(12) \qquad x = \xi^\lambda, \qquad y = \eta$$

transforme ces courbes en deux autres

$$f' = f(\xi^\lambda, \eta) = 0, \qquad g' = g(\xi^\lambda, \eta) = 0$$

qui, si λ a une valeur convenable, satisfont à cette condition. D'autre part, nous avons vu (théorème 13) que l'on a

$$\rho' = \rho(f', g') \leqq \lambda\rho$$

avec l'égalité ou l'inégalité suivant que les axes xOy sont, ou non, normaux pour l'idéal $(f(x, y), g(x, y))$.

Une fonction $U(x)$ d'ordre p par rapport à x est d'ordre λp par rapport à ξ. Si donc deux branches de courbe ont dans le plan x, y

un contact d'ordre ν, les branches transformées ont dans le plan ξ, η un contact d'ordre ν' tel que

$$(13) \qquad \nu' + 1 = \lambda(\nu + 1).$$

Comme d'autre part les définitions des faisceaux, faisceaux principaux, faisceaux séparés, sont valables pour des ordres de contact fractionnaires, on voit que la transformation change un faisceau en un faisceau, un couple de faisceaux principaux conjugués en un couple de faisceaux principaux conjugués, etc.

Cela étant, nous connaissons une limite supérieure δ' de ρ'

$$\delta' = r' + s' - 1 + N' + \Theta' + (\alpha' - 1)\nu',$$

limite correspondant au couple ou à l'un des couples de faisceaux principaux conjugués pour lesquels le nombre

$$M' = N' + \Theta' + (\alpha' - 1)\nu',$$

est maximum, α' désignant le nombre de branches du faisceau considéré. Or, en considérant les faisceaux conjugués correspondant dans le plan xy, nous avons, en vertu de (13),

$$\begin{gathered} N' + r' = \lambda(N + r), \\ s' - 1 + \Theta' + (\alpha' - 1)\nu' = s - 1 + (s - 1)(\lambda - 1) + \lambda[\Theta + (\alpha - 1)\nu], \\ \delta' = \lambda[r + s - 1 + N + \Theta + (\alpha - 1)\nu] \qquad (\alpha' = \alpha). \end{gathered}$$

Ce nombre δ' est une limite supérieure de ρ' dans tous les cas, en particulier lorsque les axes Ox, Oy sont normaux pour l'idéal (f, g). δ' est alors une limite supérieure de $\lambda\rho$ et, ρ' étant nécessairement entier, nous pouvons écrire

$$\rho \leqq r + s - 1 + E[N + \Theta + (\alpha - 1)\nu],$$

$E(u)$ désignant la partie entière de u.

Ainsi, *rien ne distingue essentiellement le cas où les courbes f, g présentent des systèmes circulaires d'ordre supérieur à 1 : il y a simplement lieu de remplacer les nombres* M *considérés par leurs parties entières*.

Considérons par exemple les courbes

$$\begin{gathered} f = y^2 - 2(x^2 + x^3)y - x^2(1 - 2x^2 - x^3) = 0, \\ g = y^2 - 2(x^2 - x^3)y - x^2(1 - 2x + 2x^2 - x^3) = 0. \end{gathered}$$

Le sous-résultant a pour expression

$$\begin{aligned} R(x) &= 2x^5(1-4x+4x^4) \\ &= (2y-x-2x^2+4x^3)f+(-2y+x+2x^2+4x^3)g \end{aligned}$$

et l'on a $\sigma=\rho=5$. Les courbes f et g admettent chacune en O un système circulaire d'ordre 2. Les développements en série sont:

$$\text{pour } f: \quad y=\varepsilon\, x^{\frac{3}{2}}+x^2+\frac{\varepsilon}{2}\, x^{\frac{5}{2}}+x^3-\frac{\varepsilon}{8}\, x^{\frac{7}{2}}+\ldots \qquad (\varepsilon=\pm 1);$$

$$\text{pour } g: \quad y=\varepsilon' x^{\frac{3}{2}}+x^2-\frac{\varepsilon'}{2}\, x^{\frac{5}{2}}-x^3-\frac{\varepsilon'}{8} x^{\frac{7}{2}}+\ldots \qquad (\varepsilon'=\pm 1).$$

Les branches f_1, g_1 obtenues en prenant $\varepsilon=\varepsilon'=+1$ constituent un couple de faisceaux principaux conjugués. Il en est de même des branches f_2, g_2 définies par $\varepsilon=\varepsilon'=-1$. Cet exemple montre qu'il n'y a pas, en général, de relation entre la décomposition d'une courbe en faisceaux et sa décomposition en systèmes circulaires. On a

$$r=s=2, \qquad N=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2, \qquad \Theta=\frac{1}{2}, \qquad \alpha=1;$$

par suite,

$$\delta=3+E\left(2+\frac{1}{2}\right)=5.$$

Nous avons donc ici $\rho=\delta$. Les axes étant normaux, le changement de variables $x=\xi^2$, $y=\eta$ conduit à un idéal (f', g') dont l'exposant ρ' a pour valeur $2\rho=10$. On a pour cet idéal

$$r'=s'=2, \qquad N'=4+2=6, \qquad \Theta'=2, \qquad \delta'=3+6+2=11.$$

La limite δ' n'est pas atteinte. Effectivement, lorsque le nombre $N+\Theta+(\alpha-1)\nu$ n'est pas entier, il peut très bien se faire que la limite δ soit atteinte pour l'idéal $\mathfrak{m}$, alors que la limite δ' ne l'est pas pour l'idéal $\mathfrak{m}'$: la présence de systèmes circulaires donne lieu, pour les coefficients des développements en série, à des particularités grâce auxquelles la relation $\sum \frac{\omega'}{\varpi'}=0$ se trouve vérifiée pour l'idéal $(f' g')$. C'est ainsi qu'ici nous avons

$$\frac{\omega'_1}{\varpi'_1}=1, \qquad \frac{\omega'_2}{\varpi'_2}=-1, \qquad \Sigma=0.$$

Considérons le cas particulier où les courbes f et g se composant chacune d'*un* système circulaire d'ordre plus grand que 1 constituent l'une par rapport à l'autre deux faisceaux séparés. On aura, dans le plan ξ, η, avec une valeur convenable de λ,

$$\rho' = (r' + s' - 1)(\nu' + 1) = \lambda(r + s - 1)(\nu + 1).$$

Or $\rho' = \lambda\rho$ si la transformation (1) est faite sur des coordonnées x, y normales. Nous obtenons donc

$$\rho = (r + s - 1)(\nu + 1),$$

ρ devant être entier, nous en concluons que, en raison des conditions imposées aux deux systèmes circulaires f, g considérés, ν ne peut pas être quelconque. On voit sans peine que, dans ces conditions, ν est nécessairement entier. En effet, il existe au début du développement de toute branche de f et de toute branche de g un terme en $x^{\nu+1}$ dont le coefficient doit avoir la même valeur pour toutes les branches de f, la même valeur (différente de la première), pour toutes les branches de g, l'une au moins de ces deux valeurs étant différente de zéro. Or, dans les développements correspondant aux différentes branches d'un système circulaire, seuls les coefficients des puissances entières de x peuvent avoir une valeur non nulle indépendante de la branche considérée.

Remarquons enfin qu'il existe des cas où la connaissance de δ et l'utilisation d'une limite inférieure de ρ donnent rapidement la valeur exacte de l'exposant. Reprenons l'exemple de M. Kapferer. Soient les courbes

$$f = y^3 + x^4 = 0, \qquad g = y^2 + x^3 = 0,$$

avec les développements :

pour f: $\quad y = -x^{\frac{4}{3}}, \quad y = -jx^{\frac{4}{3}}, \quad y = -j^2x^{\frac{4}{3}};$

pour g: $\quad y = +ix^{\frac{3}{2}}, \quad y = -ix^{\frac{3}{2}}.$

On a, en utilisant la courbe g,

$$N = 3 \times \frac{1}{3} = 1, \qquad \Theta = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 1, \qquad \delta = 4 + E\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 5.$$

Mais, d'autre part, nous avons

$$\rho \geqq r + s - 1 + N = 4 + 1 = 5;$$

donc

$$\rho = \delta = 5.$$

CHAPITRE IV.

COMPLÉMENTS.

1. Considérons un idéal $\mathfrak{m}$ de polynomes à deux variables défini par un nombre quelconque de polynomes de base $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sans diviseur commun

$$\mathfrak{m} = (f_1, f_2, \ldots, f_k).$$

Il peut se faire qu'en un point de la variété de cet idéal le composant primaire soit le plus petit commun multiple de composants primaires d'idéaux définis par *deux* polynomes de base. Il en est ainsi par exemple pour l'idéal

$$\mathfrak{m} = (f, g)^\lambda = (f^\lambda, f^{\lambda-1}g, \ldots, fg^{\lambda-1}, g^\lambda)$$

qui joue un rôle important dans différents problèmes de géométrie [1]; si l'on pose

$$\mathfrak{m}_i = (f^{\lambda-i+1}, g^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

on a

$$\mathfrak{m} = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda]. \tag{1}$$

En effet, il est d'abord évident que l'on a, quel que soit i, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_i$, donc

$$\mathfrak{m} \subset [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda].$$

Réciproquement, soit P un polynome de l'idéal $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda]$:

$$P = A_1 f^\lambda + B_1 g = A_2 f^{\lambda-1} + B_2 g^2 = \ldots = A_\lambda f + B_\lambda g^\lambda,$$

on a

$$(A_1 f - A_2) f^{\lambda-1} = (-B_1 + B_2 g) g,$$

[1] *Voir*, par exemple, Torelli, *Sopra certe estensioni del teorema di Nœther* (*Atti di Torino*, t. 41, p. 192). Torelli considère le cas où les polynomes de base sont d'ordre 1 en chacun de leurs points communs.

d'où, f et g n'ayant pas de diviseurs communs,

$$A_2 = A_1 f + U g$$

et

$$P = A_1 f^\lambda + U f^{\lambda-1} g + B_2 g^2.$$

Supposons que l'on ait

(2) $$P = A_{h+1} f^{\lambda-h} + B_{h+1} g^{h+1} = U_0 f^\lambda + U_1 f^{\lambda-1} g + \ldots + U_{h-1} f^{\lambda-h+1} g^{h-1} + B_h g^h,$$

on en déduit

$$(U_0 f^h + U_1 f^{h-1} g + \ldots + U_{h-1} f g^{h-1} - A_{h+1}) f^{\lambda-h} = (-B_h + B_{h+1} g) g^h,$$

c'est-à-dire

$$A_{h+1} = U_0 f^h + U_1 f^{h-1} g + \ldots + U_{h-1} f g^{h-1} + U_h g^h$$

et

$$P = U_0 f^\lambda + U_1 f^{\lambda-1} g + \ldots + U_h f^{\lambda-h} g^h + B_{h+1} g^{h+1},$$

ce qui démontre l'identité (2) pour l'indice $h+1$. Cette identité est donc valable quel que soit h, et elle donne, pour $h = \lambda$,

$$P \subset (f, g)^\lambda,$$

ce qui démontre la relation (1).

Désignons par $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\lambda$ les composants primaires des idéaux $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda$ relatifs à un même point O commun aux courbes f et g. La relation (1) entraîne

(3) $$\mathfrak{q} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\lambda],$$

car l'idéal du second membre, plus petit commun multiple d'idéaux primaires appartenant au même idéal premier, est primaire, et les composants primaires de $\mathfrak{m}$, étant isolés, sont définis d'une manière unique. Enfin, d'après (3), l'exposant ρ de l'idéal $\mathfrak{q}$ est égal au plus grand des exposants $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\lambda$ des idéaux $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\lambda$, ce qui permet de déterminer sa valeur.

Celle-ci a une expression particulièrement simple dans le cas où les courbes $f = 0$, $g = 0$, n'ont en commun en O que des tangentes simples pour chacune d'elles : $D_1, D_2, \ldots, D_\alpha$. Soit ν_i l'ordre de contact des branches de f et de g tangentes à D_i et soit ν le plus grand des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\alpha$. Les branches, respectivement $(\lambda - i + 1)$-uple et i-uple des courbes $f^{\lambda-i+1}=0$, $g^i=0$ qui sont tangentes à une même droite D, constituent deux faisceaux séparés. En désignant par r et s les ordres de multiplicité de f et de g, nous avons donc

$$\begin{aligned}\rho_i = \rho(f^{\lambda-i+1}, g^i) &= (\lambda-i+1)r+is-1+(\lambda-i+1)\nu+(i-1)\nu \\ &= (\lambda-i+1)r+is-1+\lambda\nu.\end{aligned}$$

Supposons par exemple $r \geqq s$; le plus grand des nombres ρ_i est

$$\rho_1 = \lambda r + s - 1 - \lambda\nu$$

et nous obtenons ainsi la valeur de ρ

$$\rho = \lambda r + s - 1 + \lambda\nu.$$

2. Dans le cas général d'une base quelconque de polynomes à deux variables, on peut encore énoncer quelques résultats simples. La remarque suivante va nous être utile :

Si un point d'intersection O de deux courbes $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ est *simple pour l'une de ces deux courbes*, g par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome $F(x,y)$ appartienne au composant primaire $\mathfrak{q}$, en O, de l'idéal (f,g) est que l'on ait

$$\rho(F, g) \geqq \rho(f, g)$$

ou encore

$$\chi + N' \geqq r + N,$$

χ, r désignant les ordres de multiplicité du point O pour F et f, N' et N les sommes des ordres de contact de g avec F et f.

Supposons en effet, comme nous pouvons le faire, le polynome g du premier degré en y. Soit

$$R = x^{r+N} S(x) = A(x) f(x, y) + B(x, y) g(x, y) \qquad [A(0) \neq 0],$$

le résultant des polynomes f, g. Dans l'identité de la division suivant les puissances de y,

$$A(x) F = Q g + x^{\lambda} T(x) \qquad [T(0) \neq 0],$$

on a

$$\lambda = \chi + N'.$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que $F \subset q(f, g)$ est

$$\lambda \geqq r + N,$$

Cela étant, parmi les polynomes de base de l'idéal $\mathfrak{m}$ considéré, soit g celui qui a, ou un de ceux qui ont, au point O (o,o) considéré, l'ordre minimum s. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ les autres polynomes de base; nous supposerons qu'aucun des polynomes f_i n'appartient au composant primaire en O de l'idéal défini par les autres polynomes f_i et par le polynome g, ce que nous exprimerons par la suite en disant que la base $f_1, f_2, \ldots, f_k, g$ est *réduite* au point O. Il convient de remarquer qu'alors le polynome g n'appartient pas non plus au composant primaire $\mathfrak{q}(f_1, \ldots, f_k)$ car une identité de la forme

$$S(x, y)\, g(x, y) = A_1 f_1 + \ldots + A_k f_k \qquad [S(o, o) \neq o],$$

si elle est possible, exige que l'un au moins des polynomes A, par exemple A_1, ne s'annule pas en O, ce qui entraîne

$$f_1 \subset \mathfrak{q}(f_2, \ldots, f_k, g).$$

Nous pouvons alors établir le théorème suivant :

Théorème 20. — *Si la base $f_1, f_2, \ldots, f_k$, g de l'idéal $\mathfrak{m}$ est réduite au point* O, *on a*

$$k \leqq s.$$

Supposons d'abord que la courbe g n'admette au point O que des systèmes circulaires d'ordre 1. Nous pouvons la remplacer par une courbe décomposée en courbes d'ordre 1, donc en une courbe d'ordre 1, g_1, et une courbe d'ordre $s - 1$, g_{s-1},

$$g = g_1 \cdot g_{s-1}.$$

Le théorème est vrai pour $s = 1$, car si f_1 par exemple est celui des polynomes f pour lequel la somme $r_i + N_i$ de l'ordre de f_i en O et de la somme des ordres de contact de la courbe simple g_1 avec les différentes branches de f_i, a la valeur minimum, tous les autres polynomes f, en vertu de la remarque précédente, appartiennent à l'idéal $\mathfrak{q}(f_1, g_1)$; on a donc

$$(4) \qquad S(x) f_i = A_i(x) f_1 + B_i g_1 \qquad [S(o) \neq o;\ i = 2, \ldots, k].$$

Supposons le théorème établi pour un ordre minimum des polynomes de base, inférieur ou égal à $s - 1$. Considérons l'idéal

$$\mathfrak{q}(f_1, B_2, \ldots, B_k, g_{s-1}),$$

B_i étant, d'après l'identité (4), d'ordre $s-1$ au moins, le polynome g_{s-1} dans la base $f_1, B_2, \ldots, B_k, g_{s-1}$ est encore un polynome d'ordre minimum. D'autre part, un polynome B, par exemple B_2, ne peut pas appartenir à l'idéal $\mathfrak{q}(f_1, B_3, \ldots, B_k, g_{s-1})$, car alors f_2 appartiendrait à l'idéal $\mathfrak{q}(f_1, f_3, \ldots, f_k, g_s)$. Donc f_1 tout au plus peut appartenir à l'idéal $\mathfrak{q}(B_2, \ldots, B_k, g_{s-1})$ et la base $B_2, \ldots, B_k, g_{s-1}$ est toujours réduite, ce qui exige

$$k-1 \leqq s-1.$$

On a donc bien

$$k \leqq s.$$

En outre, on voit que si $k=s$, la base $f_1, B_2, \ldots, B_s, g_{s-1}$ n'est sûrement pas réduite, ce qui entraîne

$$(5) \qquad f_1 \subset \mathfrak{q}(B_2, \ldots, B_s, g_{s-1}).$$

Nous avons supposé dans ce qui précède que la courbe $g=0$ ne possède au point O considéré que des systèmes circulaires d'ordre 1. S'il n'en est pas ainsi, on se ramène à ce cas par un changement de variable de la forme $x=\xi^n$. Le résultat précédent subsiste entièrement, car si un polynome $F(\xi^n, y)$ appartient à l'idéal

$$(f_1(\xi^n, y), \ldots, f_k(\xi^n, y)),$$

le polynome $F(x, y)$ appartient à l'idéal $(f_1(x, y), \ldots, f_k(x, y))$. Soit en effet

$$(8) \qquad F(\xi^n, y) = A_1(\xi, y) f_1(\xi^n, y) + \ldots + A_k(\xi, y) f_k(\xi^n, y),$$

tout polynome $A_i(\xi, y)$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$A_i = a_i^{(0)}(\xi^n, y) + \xi a_i^{(1)}(\xi^n, y) + \ldots + \xi^{n-1} a_i^{(n-1)}(\xi^n, y).$$

Dans l'identité (8), on a alors n catégories de termes : ceux dont le degré en ξ est multiple de n, ceux dont le degré est multiple de n plus 1, etc. L'ensemble des termes de chacune de ces catégories doit disparaître séparément, ce qui donne

$$F(\xi^n, y) = a_1^{(0)}(\xi^n, y) f_1(\xi^n, y) + \ldots + a_k^{(0)} f_k(\xi^n, y),$$

d'où

$$F(x, y) \subset (f_1(x, y), \ldots, f_k(x, y)).$$

3. Supposons de nouveau que la courbe $g = 0$ n'admette en O que des systèmes circulaires d'ordre 1 — et remplaçons-la par une courbe décomposée. Supposons la base $f_1, f_2, \ldots, f_k, g$ réduite : nous nous proposons de trouver une limite supérieure de ρ.

Lemme. — On a

$$y^{s-k+\alpha} f_i \subset \mathfrak{q}(x^\alpha f_1, x^\alpha f_2, \ldots, x^\alpha f_k, g).$$

Soit

$$y - a(x) = 0,$$

l'équation de g_1 : $a(x)$ est un polynome ayant au moins x en facteur.

Le lemme est évident pour $s = 1 (= k)$, car le reste de y^α par g_1 est divisible au moins par x^α. Supposons donc le lemme vrai pour $s - 1$. Nous avons, d'après les équations (4),

$$y^{s-k+\alpha} S f_i = A_i y^{s-k+\alpha} f_1 + B_i y^{s-k+\alpha} g_1.$$

Or, en divisant $y^{s-k+\alpha}$ suivant les puissances de y par g_1, on a

$$y^{s-k+\alpha} = (y^{s-k+\alpha-1} + x q_1 y^{s-k+\alpha-2} + \ldots + x^{s-k+\alpha-1} q_{s-k+\alpha-1}) g_1 + x^{s-k+\alpha} T,$$

les q_i et T étant des polynomes en x. On peut donc écrire

$$(9) \qquad \begin{aligned} y^{s-k+\alpha} S f_i &= A_i x^\alpha Q_1 f_1 + V_i g_1, \\ V_i &= Q_2 A_i f_1 + y^{s-k+\alpha} B_i, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} Q_2 &= \quad y^{s-k+\alpha-1} + x q_1 \quad y^{s-k+\alpha-2} + \ldots + x^{\alpha-1} \quad q_{\alpha-1} y^{s-k}, \\ Q_1 &= (q_\alpha y^{s-k-1} \quad + x q_{\alpha+1} y^{s-k-2} \quad + \ldots + x^{s-k-1} q_{s-k+\alpha-1}) g_1 + x^{s-k} T. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que l'on a

$$V_i \subset \mathfrak{q}(x^\alpha f_1, x^\alpha B_2, \ldots, x^\alpha B_k, g_{s-1}).$$

Nous devons ici distinguer deux cas :

1° Supposons d'abord

$$f_1 \subset \mathfrak{q}(B_2, \ldots, B_k, g_{s-1}),$$

donc

$$S' f_1 = \beta_2 B_2 + \ldots + \beta_k B_k + \beta g_{s-1} \qquad \text{avec } S'(0, 0) \neq 0.$$

Alors, puisque

$$B_i \not\subset \mathfrak{q}(f_1, B_2, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, g_{s-1}) \qquad (i = 2, \ldots, k),$$

on a nécessairement

$$(10) \qquad \beta_i(0, 0) = 0, \qquad f_1 \subset \mathfrak{q}(x\mathrm{B}_2, \ldots, x\mathrm{B}_k, y\mathrm{B}_2, \ldots, y\mathrm{B}_k, g_{s-1}).$$

Or, on a par hypothèse

$$y^{(s-1)-(k-1)+\lambda}\mathrm{B}_i \subset \mathfrak{q}(x^\lambda \mathrm{B}_2, \ldots, x^\lambda \mathrm{B}_k, g_{s-1})$$

et, d'après (9) et (10), $\mathrm{S}'\mathrm{V}_i$ se compose de termes de la forme $\mathrm{P}x^h y^{s-k+\alpha-h}\mathrm{B}_j$, ce qui entraîne

$$\mathrm{V}_i \subset \mathfrak{q}(x^\alpha \mathrm{B}_2, \ldots, x^\alpha \mathrm{B}_k, g_{s-1}) \subset \mathfrak{q}(x^\alpha f_1, x^\alpha \mathrm{B}_2, \ldots, x^\alpha \mathrm{B}_k, g_{s-1}).$$

2° Supposons

$$f_1 \not\subset \mathfrak{q}(\mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_k, g_{s-1});$$

alors on a

$$\left.\begin{array}{l} y^{s-1-k+\lambda} f_1 \\ y^{s-1-k+\lambda}\mathrm{B}_i \end{array}\right\} \subset \mathfrak{q}(x^\lambda f_1, x^\lambda \mathrm{B}_2, \ldots, x^\lambda \mathrm{B}_k, g_{s-1}),$$

ce qui entraîne encore

$$\mathrm{V}_i \subset \mathfrak{q}(x^\alpha f_1, x^\alpha \mathrm{B}_2, \ldots, x^\alpha \mathrm{B}_k, g_{s-1}).$$

Cela étant, considérons le sous-résultant, en coordonnées normales, de l'idéal (f_i, g) :

$$\begin{aligned} x^{\rho_i}\mathrm{S}(x) &= \mathrm{A}f_i + \mathrm{B}g \\ &= (a_0 x^{s-1} + a_1 x^{s-2}y + \ldots + a_{s-k}x^{k-1}y^{s-k} + \ldots + a_{s-1}y^{s-1})f_i + \mathrm{B}g, \end{aligned}$$

ce polynome, d'après le lemme précédent, appartient à l'idéal

$$\mathfrak{q}(x^{k-1}f_1, \ldots, x^{k-1}f_k, g).$$

On a donc

$$x^{\rho_i}\mathrm{S}'(x) = \mathrm{U}_1 x^{k-1} f_1 + \ldots + \mathrm{U}_k x^{k-1} f_k + \mathrm{U}g \qquad [\mathrm{S}'(0) \neq 0],$$

d'où

$$x^{\rho_i - k + 1} \subset \mathfrak{q}(f_1, \ldots, f_k, g)$$

et enfin

$$(11) \qquad \rho \leqq \rho_i - (k-1),$$

ce qui donne une limite supérieure de ρ.

4. Dans le cas plus particulier où la courbe g a en O toutes ses tangentes distinctes, on peut donner pour ρ une limite plus précise. Soient r_i l'ordre de multiplicité du point O pour la courbe f_i, N_{ij} la somme des ordres de contact de la branche g_j de g avec les différentes branches de f_i, ω_j la plus petite valeur des nombres $r_i + N_{ij}$ pour $i = 1, \ldots, k$, f_{α_j} le polynome pour lequel $r_{\alpha_j} + N_{\alpha_j j} = \omega_j$. Les u étant des constantes, on peut trouver un polynome

$$F = u_1 f_1 + \ldots + u_k f_k, \tag{12}$$

d'ordre r en O, et tel que N_j désignant la somme des ordres de contact de g_j avec les branches de la courbe $F = 0$, on ait

$$r + N_j = \omega_j. \tag{13}$$

Supposons en effet trouvé un polynome F_h de la forme (12) pour lequel l'égalité (13) est vérifiée pour $j = 1, \ldots, h$ (pour $h = 1$, il suffit de prendre $F = f_{\alpha_1}$) et montrons que l'on peut déterminer le polynome F_{h+1}. Posons

$$F_{h+1} = v F_h + v' f_{\alpha_{h+1}},$$

où v et v' sont des constantes. On peut toujours choisir ces constantes de manière qu'en remplaçant successivement y par les fonctions de x définies par les branches $g_1, g_2, \ldots, g_{h+1}$ de g, la partie principale de F_{h+1} soit d'ordre $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h+1}$ exactement

Le polynome F étant ainsi obtenu, supposons que la constante u_1, par exemple, soit différente de zéro. On a alors

$$\mathfrak{q}(F, f_2, \ldots, f_k, g) = \mathfrak{q}(f_1, f_2, \ldots, f_k, g).$$

Or, d'après l'inégalité (11),

$$\rho = \rho(F, f_2, \ldots, f_k, g) \leqq \rho(F, g) - (k-1)$$

et, en désignant par ω la valeur maxima des nombres ω_i,

$$\rho(F, g) = \omega + s - 1,$$

d'où

$$\rho \leqq \omega + s - k.$$

On a, d'autre part, visiblement

$$\rho \geqq \sigma \geqq \omega.$$

Par suite, si $k = s$, ω donne la valeur de ρ et l'on voit en outre que *tout système d'axes réguliers est normal.* On peut en outre montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome Φ appartienne à l'idéal $\mathfrak{q}(f_1, \ldots, f_s, g)$ est que l'on ait

$$\chi + \Theta_j \geqq \omega_j \qquad (j = 1, \ldots, s),$$

χ désignant l'ordre de Φ au point O, Θ_j la somme des ordres de contact de la branche g_j de g avec les différentes branches de la courbe $\Phi = 0$.

5. Nous nous limiterons à ces résultats. Remarquons pour terminer qu'ils peuvent s'appliquer à l'étude d'un idéal primaire admettant une variété (irréductible) à $n-2$ dimensions dans un espace à n dimensions. Il suffit de choisir un système de coordonnées tel que la variété considérée ne soit contenue dans aucun hyperplan $x_n = a$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$F(x_1, \ldots, x_n) \subset (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$$

est que, quel que soit le paramètre t,

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \subset (f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, t), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)).$$

Cette condition est évidemment nécessaire. Si elle est vérifiée, on a une relation de la forme

$$P(t)\,F(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) = A_1 f_1 + \ldots + A_k f_k,$$

où P est un polynome en t, les A des polynomes en $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et t; on peut remplacer t par x_n, et comme, d'après le choix des axes, le polynome $P(x_n)$ n'appartient pas à l'idéal premier correspondant à la variété de l'idéal considéré, on a

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \subset (f_1, f_2, \ldots, f_k).$$