JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. GOURSAT

# Sur un problème de la théorie des surfaces (second mémoire)

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 9 (1930), p. 207-229.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__207_0>

# *Sur un problème de la théorie des surfaces* (¹)

(SECOND MÉMOIRE)

PAR E. GOURSAT

Ce nouveau Mémoire qui fait suite au Mémoire publié antérieurement dans ce même Journal est divisé en deux parties distinctes. Dans la première partie, je discute complètement le cas particulier du problème traité par G. Darboux, et je montre que ce problème n'admet pas d'autre solution que celle qui avait été obtenue à l'aide de considérations géométriques. Dans la seconde partie, je reprends le problème traité dans le premier Mémoire pour le compléter sur certains points, et examiner quelques cas particuliers intéressants.

## I.

**12.** Je reprends d'abord la formule générale de Darboux (8) (p. 4)

$$d\Sigma^2 = \Omega + \frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

où $\Omega$ est une forme quadratique en $du$, $dv$, dont les coefficients ne dépendent que de E, F, G et de leurs dérivées, dont la formation a été expliquée. Il résulte des notes de G. Darboux que l'on peut, pour certaines formes spéciales de l'élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, déterminer $\lambda$ et $\mu$ de façon que les trois coefficients de la forme $\Omega$ soient nuls. Pour traiter la question d'une manière générale, il est

(¹) Voir *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 7, 1928, p. 1-27.
J'ai conservé, pour plus de commodité, le numérotage des formules et des paragraphes.

nécessaire de calculer explicitement les coefficients de la forme $\Omega$. Afin de simplifier les formules, nous prendrons pour courbes coordonnées les *courbes minima* de $(\theta)$, et nous écrirons l'élément linéaire

$$ds^2 = 2e^{\omega}\,du\,dv; \tag{33}$$

les formules (2) et (3) deviennent alors

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = e^{\omega}, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 0,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = e^{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v}, \qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = e^{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u},$$

et l'on en déduit aisément les expressions des dérivées du second ordre

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D}{H}c, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{D'}{H}c, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial \omega}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D''}{H}c,$$

les dérivées de $y$ et de $z$ se déduisant aisément de celles-là, en remplaçant $x$ par $y$, ou par $z$, $c$ par $c'$ ou $c''$. On tire de ces formules

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\lambda D + \mu D'}{H}c,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(1 + \frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\lambda D' + \mu D''}{H}c;$$

$$d\Sigma^2 = S\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right)^2.$$

En développant les calculs, et tenant compte des relations précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
d\Sigma^2 = {}& 2e^{\omega}\left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)\frac{\partial \mu}{\partial u}du^2 \\
&+ 2e^{\omega}\left\{\left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)\left(1 + \frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial u}\right\}du\,dv \\
&+ 2e^{\omega}\left(1 + \frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}dv^2 + \frac{D'^2 - DD''}{H^2}(\mu\,du - \lambda\,dv)^2 \\
&+ \frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2).
\end{aligned}$$

Dans le cas actuel, on a d'après les formules générales de la théorie des surfaces [1],

$$DD'' - D'^2 = e^{3\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}, \qquad H^2 = -e^{2\omega}, \qquad \frac{D'^2 - DD''}{H^2} = -e^{\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},$$

et l'on obtient pour $\Omega$ la forme suivante :

$$(34)\quad \begin{aligned}\Omega = {} & e^{\omega}\left[2\frac{\partial\mu}{\partial u}\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)-\mu^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right]du^2\\ & + e^{\omega}\left[2\frac{\partial\lambda}{\partial v}\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial v}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)-\lambda^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right]dv^2\\ & + 2e^{\omega}\left[\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial v}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u}+\lambda\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right].\end{aligned}$$

Cette forme sera identiquement nulle pourvu que $\lambda$, $\mu$, $\omega$ vérifient les trois relations

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\frac{\partial\mu}{\partial u}\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=\mu^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},\\ & 2\frac{\partial\lambda}{\partial v}\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial v}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\lambda^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},\\ & \left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial v}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u}=-\lambda\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}.\end{aligned}\right.$$

Ce système paraît difficile à intégrer, mais on peut en déduire une conséquence importante, qui permet de le mettre sous une forme intégrable.

En effet, si le produit $\lambda\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}$ n'est pas nul, les équations (35) prouvent qu'il en est de même de $1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $1+\frac{\partial\mu}{\partial v}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial v}$, et ces équations résolues donnent immédiatement les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\lambda\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=0,\\ \lambda\frac{\partial\mu}{\partial u}+\mu\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial v}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=0,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit aussi

$$(36)\qquad \lambda\mu\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}-\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)+\lambda\mu^2\frac{\partial\omega}{\partial v}-\lambda^2\mu\frac{\partial\omega}{\partial u}+\lambda^2\frac{\partial\mu}{\partial u}-\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0.$$

---

[1] G. DARBOUX, t. III, p. 246.

Pour interpréter cette condition, considérons sur la surface $(\Theta)$ les courbes $(\Gamma)$ dont la tangente en chaque point $m$ coïncide avec la droite $m\mathrm{M}$ qui joint le point $m$ de $(\Theta)$ au point correspondant M de $(\Sigma)$. Ces courbes sont définies par l'équation différentielle

$$\frac{dv}{du} = \frac{\mu}{\lambda}, \tag{37}$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{\lambda\frac{\partial\mu}{\partial u} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{\lambda^2} + \frac{\lambda\frac{\partial\mu}{\partial v} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\lambda^2}\frac{\mu}{\lambda},$$

et la relation (36) exprime précisément que les courbes intégrales de l'équation (14) satisfont à l'équation différentielle des lignes géodésiques de $(\Theta)$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d\omega}{\partial u}\frac{dv}{du} - \frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2. \tag{38}$$

Les courbes $(\Gamma)$ forment donc une famille de géodésiques de la surface $(\Theta)$.

**13.** Pour achever la résolution du problème, il est tout indiqué de prendre maintenant un autre système de courbes coordonnées, les courbes $(\Gamma)$ elles-mêmes et leurs trajectoires orthogonales. On peut supposer l'élément linéaire de $(\Theta)$ mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{1''}$$

et les formules (5) qui définissaient la surface $(\Sigma)$ deviennent elles-mêmes

$$\mathrm{X} = x + \lambda\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \mathrm{Y} = y + \lambda\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \mathrm{Z} = z + \lambda\frac{\partial z}{\partial u}.$$

On a dans ce cas, comme il résulte des formules générales de la théorie des surfaces,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}c, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}c, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}c', \qquad \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{D}'^2 - \mathrm{DD}''}{\mathrm{H}^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial u^2} - \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\right)^2}{\mathrm{G}},$$

et

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D\lambda}{H}c,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \left[1 + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \log G}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D'\lambda}{H}c.$$

En effectuant les calculs, on trouve, pour expression de $\Omega$,

$$\begin{aligned}(39)\qquad \Omega = {} & \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial \lambda}{\partial v}\left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)du\,dv \\ & + \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + G + \lambda\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]dv^2.\end{aligned}$$

Pour que cette forme soit identiquement nulle, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + G + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 0.$$

De la première condition, on conclut que $\lambda$ est de la forme $\lambda = V - u$, $V$ étant une fonction arbitraire de $v$, et la seconde montre que $G$ est une intégrale particulière de l'équation différentielle linéaire

$$(40)\qquad \frac{(u - V)^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - (u - V)\frac{\partial G}{\partial u} + G + V'^2 = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$G = V_1(u - V)^2 + V_2(u - V) - V'^2,$$

$V_1$ et $V_2$ étant deux fonctions arbitraires de $v$. Le coefficient $G$ est donc un binome du second degré en $u$

$$(41)\qquad G = au^2 + bu + c,$$

$a$, $b$, $c$ étant des fonctions de $v$. Inversement, quelles que soient ces trois fonctions de $v$, les trois coefficients de la forme $\Omega$ sont nuls, quand on prend $\lambda = V - u$, $V$ étant une fonction de $v$ seulement, qui satisfait à l'équation différentielle

$$(42)\qquad V'^2 + aV^2 + bV + c = 0.$$

La solution ainsi obtenue est identique à la solution donnée par

Darboux. Remarquons en effet que l'élément linéaire

$$du^2 + (au^2 + bu + c)\,dv^2,$$

où $a$, $b$, $c$, sont des fonctions quelconques de $v$, convient à une infinité de surfaces réglées dont les courbes $(v)$ sont les génératrices. En cherchant à déterminer V de façon que la ligne $u = V(v)$ soit une ligne de longueur nulle, on est conduit précisément à l'équation (42). Les courbes minima d'une surface réglée interviennent donc dans la solution du problème.

D'une façon générale, considérons sur une surface réglée (R) une courbe (C), autre qu'une génératrice, et soit M le point de rencontre de cette courbe (C) avec une génératrice rectiligne $(\Delta)$. Ce point M est situé dans le plan tangent à (R) en un point quelconque $m$ de $(\Delta)$; on peut donc associer ce point M à un point quelconque de la génératrice qui passe par ce point. Cela posé, soit $(\Theta)$ une surface non réglée applicable sur (R), et soit $(g)$ la géodésique de $(\Theta)$, qui correspond à la génératrice $(\Delta)$ de (R). Si la surface réglée (R) roule sur la surface $(\Theta)$ de façon que la génératrice rectiligne $(\Delta)$ roule sur la géodésique correspondante $(g)$, le point M décrit une développante de $(g)$. Chaque point M de (C) engendre donc une développante d'une géodésique de $(\Theta)$.

Quand on passe de la surface réglée (R) à la surface $(\Theta)$ applicable sur (R), la construction expliquée antérieurement (n° **2**) remplace donc la courbe (C) par une surface $(\Sigma)$, engendrée par des développantes des géodésiques de $(\Theta)$ qui sont les images des génératrices rectilignes de (R).

Soient $(x, y, z)$ les coordonnées rectangulaires d'un point de $(\Theta)$ exprimées au moyen des coordonnées curvilignes orthogonales $u$ et $v$, où les courbes $(v)$ sont les géodésiques $(g)$. L'élément linéaire de $\Theta$ étant mis sous la forme $du^2 + (au^2 + bu + c)\,dv^2$, les formules

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x + (V - u)\frac{\partial x}{\partial u},\\ Y &= y + (V - u)\frac{\partial y}{\partial u},\\ Z &= z + (V - u)\frac{\partial z}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

définissent une surface $(\Sigma)$, obtenue par la construction précédente. La fonction V de $v$ définit la courbe (C) de (R) d'où l'on déduit $(\Sigma)$. Soient

$$x = \alpha_1 u + \beta_1, \qquad y = \alpha_2 u + \beta_2, \qquad z = \alpha_3 u + \beta_3,$$

les équations qui représentent une surface réglée (R) admettant l'élément linéaire $du^2 + (au^2 + bu + c)dv^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont des fonctions de $v$ satisfaisant aux relations

$$\Sigma\alpha_i^2 = 1, \qquad \Sigma\alpha_i\beta_i' = 0, \qquad \Sigma\alpha_i'^2 = a, \qquad 2\Sigma\alpha_i'\beta_i' = b, \qquad \Sigma\beta_i'^2 = c.$$

Les formules (43) deviennent, quand on remplace la surface $(\Theta)$ par (R),

$$X = \alpha_1 V + \beta_1, \qquad Y = \alpha_2 V + \beta_2, \qquad Z = \alpha_3 V + \beta_3.$$

Ce sont les équations de la courbe (C), et le carré de l'élément linéaire $d\sigma$ de (C) a pour expressions, d'après les relations précédentes,

$$d\sigma^2 = [V'^2 + aV^2 + bV + c]\,dv^2.$$

Dans le cas particulier que nous étudions, la fonction V est une intégrale de l'équation (42), et par suite la courbe (C) est une ligne de longueur nulle de la surface réglée (R). Nous retrouvons ici le résultat obtenu par Darboux à l'aide de quelques considérations qui rendent le résultat presque intuitif.

Soit en effet $(\Sigma)$ une surface déduite de cette façon d'une surface $(\Theta)$ applicable sur une surface réglée (R). On a, avec les courbes coordonnées choisies,

$$d\Sigma^2 = \Omega + \frac{D\lambda^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

les coefficients de la forme $\Omega$ ne dépendent que de G et de $\lambda$. Si en particulier la surface $(\Theta)$ se réduit à la surface réglée elle-même, on a $D = 0$, puisque les génératrices $(v)$ sont aussi des asymptotiques. D'ailleurs la surface $(\Sigma)$ se réduisant à une courbe (C) de longueur nulle, on a $d\Sigma = 0$ pour cette valeur de D. La forme $\Omega$, qui reste la même quand on fait subir à $(\Theta)$ une déformation quelconque, est donc identiquement nulle.

Ce raisonnement ne diffère pas au fond de celui de Darboux, mais le calcul qui a été fait plus haut prouve (sauf les restrictions qui seront examinées plus loin) que c'est la seule solution.

En résumé, *si $x, y, z$ sont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface* $(\Theta)$ *dont l'élément linéaire a la forme*

$$ds^2 = du^2 + (au^2 + bu + c)\,dv^2,$$

*où $a, b, c$ sont des fonctions quelconques de la seule variable $v$, et si $V$ est aussi une intégrale de l'équation* (42), *indépendante de $u$, les formules* (43) *représentent une surface* $(\Sigma)$ *pour laquelle on a*

$$(44)\qquad d\Sigma^2 = \frac{D(V-u)^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2).$$

En remplaçant dans les formules (44) $V$ par une autre intégrale $V_1$ de l'équation (42), on obtient une nouvelle surface $(\Sigma_1)$ pour laquelle

$$(44')\qquad d\Sigma_1^2 = \frac{D(V_1-u)^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2).$$

On a donc

$$\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma} = \left|\frac{V_1-u}{V-u}\right|,$$

de sorte que ces deux surfaces se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits, et le rapport de similitude se conserve quand on remplace la surface $(\Theta)$ par une autre surface applicable sur $(\Theta)$.

Quoique le raisonnement fasse intervenir des éléments imaginaires, les surfaces $(\Sigma)$ ne sont pas nécessairement imaginaires. Si l'on a, par exemple, pour la surface $(\Theta)$, $ds^2 = du^2 + (u^2 - l^2)dv^2$, $l$ étant constant, l'équation (42) admet les deux intégrales $V = \pm l$. Les deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ correspondantes à ces deux valeurs de $V$, sont normales, comme le prouve un calcul facile, à la droite $MM_1$. Elles sont donc parallèles et, comme elles se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits, ce sont des surfaces à courbure moyenne constante [1].

**14.** Lorsque la surface $(\Theta)$ n'est pas applicable sur une quadrique,

---

[1] G. DARBOUX, t. II, p. 245.

le $ds^2$ ne peut être mis sous la forme $du^2+(au^2+bu+c)dv^2$ que d'une seule façon, et l'intégration de l'équation (42) donne toutes les valeurs de V. Les points correspondants M, $M_1$ de deux surfaces ($\Sigma$), ($\Sigma_1$) sont en ligne droite avec le point $m$, et le rapport de similitude se conserve dans une déformation de ($\Theta$).

Si la surface ($\Theta$) est applicable sur une quadrique (Q), sans être une surface développable, le $ds^2$ peut être ramené de deux façons différentes à la forme $du^2+(au^2+bu+c)dv^2$, et il y a deux familles de surfaces ($\Sigma$), correspondant aux deux systèmes de générations de (Q). Les points correspondants M, M' de deux surfaces ($\Sigma$), ($\Sigma'$), appartenant à deux familles différentes, ne sont pas situés sur la même tangente en $m$ à ($\Theta$). Chaque courbe minima de (Q) fournit deux surfaces ($\Sigma$), pour toute surface ($\Theta$) applicable sur (Q).

En particulier, les génératrices isotropes de (Q) donnent naissance à des surfaces isothermiques, comme le prouve le raisonnement géométrique de Darboux.

Dans le cas plus particulier où la surface ($\Theta$) est développable, le $ds^2$ peut être ramené d'une infinité de façons à la forme

$$du^2+[u+f(v)]^2\,dv^2.$$

On peut supposer que la surface (R) est un plan, et les courbes minima sont les droites isotropes de ce plan. Les surfaces ($\Sigma$) sont engendrées par le déplacement d'une de ces droites isotropes quand le plan roule sur une développable. Il est évident, d'après ce qui précède, que ces surfaces sont des développables isotropes. En effet, on a $\Omega=0$, et $D'^2-DD''=0$, puisque la surface ($\Theta$) est développable. Le $d\Sigma^2$ est donc un carré parfait.

Ce résultat se vérifie facilement en partant des formules (35). Si la surface ($\Theta$) est développable, on a $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=0$, et l'on peut mettre le $ds^2$ sous la forme $du\,dv$, c'est-à-dire supposer $\omega=0$. Les conditions (35) deviennent

$$\frac{\partial\mu}{\partial u}\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)=0,\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v}\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)=0,\qquad \left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\left(1+\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u}=0;$$

on y satisfait en posant : 1° $\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0$, $1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}=0$; 2° $\frac{\partial\mu}{\partial u}=0$, $1+\frac{\partial\mu}{\partial v}=0$.

La seconde solution se déduisant de la première en permettant $u$ et $v$, $\lambda$ et $\mu$, il suffit de considérer la première solution, qui donne

$$\lambda = C - u, \qquad \mu = f(u, v).$$

La surface $(\Theta)$ étant appliquée sur un plan, au point $m$ de $(\Theta)$ correspond le point de coordonnées $x + iy = u$, $x - iy = v$; au point M de $(\Sigma)$ correspond de même un point P du plan de coordonnées

$$X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial u};$$

on en déduit

$$X + iY = x + iy + \lambda \frac{\partial (x + iy)}{\partial u} + \mu \frac{\partial (x + iy)}{\partial v} = C.$$

Le lieu de ce point P est donc une droite isotrope.

**15.** Pour achever l'étude du système (35) il nous reste à examiner le cas où le produit $\lambda\mu$ est nul, sans que $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v}$ soit nul. Supposons par exemple $\mu = 0$, le système (35) se réduit à deux équations

$$(35') \qquad 2 \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v}, \qquad 1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0.$$

La condition d'intégrabilité de l'équation

$$d\lambda = -\left(1 + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial u}\right) du + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} dv,$$

est

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial u^2 \, \partial v} - \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Cette équation du troisième ordre admet une intégrale intermédiaire du second ordre

$$e^{-\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = F(v),$$

qui se ramène à l'équation classique de Liouville. Après un calcul bien facile, on trouve pour déterminer $\omega$ une relation de la forme

$$e^{\omega} = \frac{U' V_1}{(U + V)^2},$$

U étant une fonction arbitraire de $u$, V, $V_1$ deux fonctions arbitraires de $v$. En prenant pour paramètres U et $\int V_1 \, dv$ à la place de $u$ et de $v$, l'élément linéaire de $(\Theta)$ a pour expression

$$(45) \qquad ds^2 = \frac{2\,du\,dv}{(u+V)^2},$$

on a, avec ce choix des paramètres, $\omega = -2\log(u+V)$, et l'intégrale générale du système (35) est

$$(46) \qquad \lambda = \frac{(u+V)(u+C)}{C-V},$$

C désignant une constante arbitraire. La forme (45) de l'élément linéaire convient à une infinité de surfaces réglées *à génératrices isotropes*. Soit en effet (R) la surface représentée paramétriquement par les formules

$$(47) \qquad x = \frac{a_1}{u+V} + b_1, \qquad y = \frac{a_2}{u+V} + b_2, \qquad z = \frac{a_3}{u+V} + b_3,$$

$a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ étant des fonctions de $v$. Le carré de l'élément linéaire est donné par l'expression (45), pourvu que l'on ait

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} & S a_i^2 = 0, \qquad S\left(\frac{\partial a_i}{\partial v}\right)^2 = -2V', \qquad S a_i \frac{\partial b_i}{\partial v} = -1, \\ & \qquad S \frac{\partial a_i}{\partial v}\frac{\partial b_i}{\partial v} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial b_i}{\partial v}\right)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières relations ne renferment que $a_1$, $a_2$, $a_3$; on peut donc choisir l'une d'elles arbitrairement. Les trois dernières équations donnent ensuite $\frac{\partial b_1}{\partial v}$, $\frac{\partial b_2}{\partial v}$, $\frac{\partial b_3}{\partial v}$, et l'on aura ensuite $b_1$, $b_2$, $b_3$ par des quadratures (1).

---

(1) Inversement, l'élément linéaire de toute surface réglée à génératrices isotropes peut être ramené à la forme (45). Soient en effet

$$x = \alpha_1 t + \beta_1, \qquad y = \alpha_2 t + \beta_2, \qquad z = \alpha_3 t + \beta_3,$$

les équations paramétriques de cette surface $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ étant des fonctions de $v$ qui satisfont à la condition $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$. Le carré de l'élément linéaire a

Soit (R) une de ces surfaces réglées. Si dans les formules générales

$$X = x + \lambda\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y = y + \lambda\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z = z + \lambda\frac{\partial z}{\partial u},$$

on remplace $x$, $y$, $z$ par les expressions (47), $\lambda$ par la valeur (46), il reste

$$X = b_1 + \frac{a_1}{V - C}, \qquad Y = b_2 + \frac{a_2}{V - C}, \qquad Z = b_3 + \frac{a_3}{V - C}.$$

Le point (X, Y, Z) décrit donc une courbe située sur (R) et, en tenant compte des relations (48), on vérifie immédiatement que c'est une courbe minima.

Le résultat est donc le même que pour les surfaces réglées à génératrices non isotropes et se démontre *a priori* de la même façon.

Dans le cas particulier où l'on a $ds^2 = \frac{K\,du\,dv}{(u+v)^2}$, la surface est applicable sur une sphère, et le problème admet encore deux familles de solutions.

## II.

**16.** Les formules (24) et (27) font connaître toutes les solutions des équations (14), (15), (16) et par suite donnent la solution du problème étudié dans le premier Mémoire. Mais on peut se proposer bien d'autres questions. Par exemple, étant donné *a priori* l'élément linéaire d'une surface, que nous écrirons, pour éviter toute confusion,

$$(49) \qquad ds^2 = \mathcal{E}\,dp^2 + 2\mathcal{F}\,dp\,dq + \mathcal{G}\,dq^2,$$

---

pour expression

$$ds^2 = 2\,\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial\beta_1}{\partial v}\,dt\,dv + \mathrm{S}\left(t\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v}\right)^2 dv^2.$$

La seconde famille de courbes minima est donnée par l'intégration d'une équation de Riccati

$$2\,\mathrm{S}\,\alpha_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\frac{dt}{dv} + \mathrm{S}\left(t\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v}\right)^2 = 0,$$

dont l'intégrale générale est de la forme $t = \frac{Cf_1(v) + f_2(v)}{C\varphi_1(v) + \varphi_2(v)}$; en posant $t = \frac{uf_1 + f_2}{u\varphi_1 + \varphi_2}$, l'élément linéaire $ds^2$ est ramené à la forme (45).

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont des fonctions connues des paramètres $p$ et $q$, on peut se proposer de trouver, sur une surface (S) admettant l'élément linéaire, un réseau de courbes orthogonales $(u)$ et $(v)$ pouvant jouer le rôle des courbes coordonnées dans les formules que nous venons d'obtenir. En d'autres termes, il s'agit de ramener par un changement de variables l'élément linéaire donné (49) à l'une des formes

$$(\mathrm{I})\qquad ds^2 = \left[\frac{e^{\alpha}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}}{\operatorname{sh}\beta}\right]^2 du^2 + \frac{dv^2}{\operatorname{sh}^2\beta} - \left[\frac{e^{\alpha}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}\right]^2 dv^2,$$

$\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ vérifiant la relation (23), ou

$$(\mathrm{II})\qquad ds^2 = \left[\frac{e^{\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}}{\operatorname{ch}\beta}\right]^2 du^2 + e^{2\alpha}dv^2 - \left[\frac{e^{\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}\right]^2 dv^2,$$

$\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ satisfaisant à la relation (26). Dans le premier cas, nous avons vu (n° **8**) que la forme (I) du $ds^2$ peut aussi s'écrire

$$(50)\qquad ds^2 = \frac{dv^2 + d\beta\, d\gamma}{\operatorname{sh}^2\beta},$$

où

$$d\gamma = e^{2\alpha}\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}du - \frac{\partial\beta}{\partial v}dv\right).$$

Nous pouvons supposer que les fonctions $\beta$ et $\gamma$ sont distinctes. Pour qu'elles ne soient pas distinctes, il faudrait que l'on eût $\dfrac{\partial\beta}{\partial v} = 0$, et la relation (23) prouve que l'on aurait aussi $\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = 0$; les coefficients de l'élément linéaire ne dépendraient que de $u$. Dans ce cas, la surface (S) est applicable sur une surface de révolution, les courbes $(v)$ correspondant aux méridiens. Ce cas particulier a été traité plus haut. Nous pouvons donc supposer $\dfrac{\partial\beta}{\partial v} \neq 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial u} \neq 0$, et par suite $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions distinctes de $(u, v)$. On a donc identiquement, dans ce cas,

$$\operatorname{sh}^2\beta\, ds^2 = dv^2 + d\beta\, d\gamma,$$

$\beta$ et $\gamma$ étant deux fonctions distinctes. Or lorsque la forme quadratique $\mathcal{E}\,dp^2 + 2\mathcal{F}\,dp\,dq + \mathcal{G}\,dq^2$ peut se mettre sous la forme précédente

$dv^2 + d\beta\, d\gamma$, $\beta$ est une fonction de paramètres $p$, $q$, qui doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du second ordre de Monge-Ampère ([1]). Il suffira de remplacer dans cette équation $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ par $\mathcal{E}\,\mathrm{sh}^2\beta$, $\mathcal{F}\,\mathrm{sh}^2\beta$, $\mathcal{G}\,\mathrm{sh}^2\beta$ respectivement pour obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre $E_1$ à laquelle doit satisfaire la fonction $\beta(p, q)$. La connaissance d'une intégrale particulière de cette équation $E_1$ permet de ramener le $ds^2$ donné à la forme

$$\frac{dv^2 + d\beta\, d\gamma}{\mathrm{sh}^2\beta},$$

d'une infinité de manières. Si l'on connaît l'une d'elles, on en déduit aisément toutes les autres, car on peut écrire

$$dv^2 + d\beta\, d\gamma = [d(v + k\beta)]^2 - d\beta\, d[\gamma + 2kv + k^2\beta],$$

quelle que soit la constante $k$.

Supposons donc le $ds^2$ donné sous la forme (50). Sans changer les courbes ($v$), choisissons pour les courbes ($u$) les trajectoires orthogonales des courbes ($v$). Ceci étant fait, le produit $d\beta\, d\gamma$ ne doit pas renfermer de terme en $du\, dv$. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial\gamma}{\partial u} = 0.$$

On peut donc poser

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u} = e^{2\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial v} = -e^{2\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial v},$$

et l'on a

$$ds^2 = \frac{dv^2 + e^{2\alpha}\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 du^2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2 dv^2\right]}{sh^2\beta}.$$

D'ailleurs $e^{2\alpha}$ est un facteur intégrant pour $\frac{\partial\beta}{\partial u}du - \frac{\partial\beta}{\partial v}dv$, et par suite la condition (26) est vérifiée. L'élément linéaire (49) est donc bien ramené à la forme (I).

---

([1]) Voir G. DARBOUX, t. III, p. 261. Dans le cas particulier où l'élément linéaire donné est de la forme $4\lambda^2 dp\, dq$, l'équation avait été obtenue par Ossian Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, 42e cahier, p. 3).

**17.** Nous avons vu plus haut (n° **9**) que la forme (II) peut aussi s'écrire

$$(51) \qquad ds^2 = e^{2\alpha}[dv^2 + d\alpha^2 - d\mu^2],$$

où l'on a posé

$$d\mu = \operatorname{tangh}\beta \frac{\partial\alpha}{\partial u} du + \operatorname{coth}\beta \frac{\partial\alpha}{\partial v} dv.$$

On a donc

$$e^{-2\alpha} ds^2 - d\alpha^2 = dv^2 - d\mu^2 = d(v+\mu)d(v-\mu),$$

et par conséquent $e^{-2\alpha}ds^2 - d\alpha^2$ est l'élément linéaire d'un plan. En écrivant que la courbure totale est nulle, on a donc une équation aux dérivées partielles du second ordre $E_2$ à laquelle doit satisfaire la fonction $\alpha(p, q)$ des variables $(p, q)$ qui figurent dans l'élément linéaire donné (49).

Toute intégrale particulière de $E_2$ permet encore de ramener l'élément linéaire (49) à la forme (51) d'une infinité de manières, puisque

$$dv^2 - d\mu^2 = d(v \operatorname{ch}\varphi + \mu \operatorname{sh}\varphi)^2 - d(v \operatorname{sh}\varphi + \mu \operatorname{ch}\varphi)^2,$$

quelle que soit la constante $\varphi$.

Supposons l'élément linéaire donné ramené à la forme (51). Si l'on a choisi les variables $u$ et $v$ de façon que les courbes $(u)$ et $(v)$ soient orthogonales, le second membre ne doit pas renfermer de terme en $du\,dv$, et les fonctions $\alpha$ et $\mu$ satisfont à la condition

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v}.$$

On peut donc poser

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = \operatorname{tangh}\beta \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \operatorname{coth}\beta \frac{\partial\alpha}{\partial v},$$

et l'expression

$$\operatorname{tangh}\beta \frac{\partial\alpha}{\partial u} du + \operatorname{coth}\beta \frac{\partial\alpha}{\partial v} dv$$

doit être une différentielle exacte, ce qui exige que $\alpha$ et $\beta$ vérifient la relation (26). Les fonctions $\alpha$ et $\beta$ étant déterminées de cette façon, le second membre de la formule (51) est bien de la forme (II).

*Remarque.* — Dans le cas particulier où le $ds^2$ (49) convient à une surface développable ou à une surface à courbure totale constante, on peut former les équations aux dérivées partielles dont dépend le problème d'une façon un peu différente. Dans la forme (50) on peut prendre pour variables $v$ et $\gamma$, et écrire le $ds^2$ sous la forme $\frac{dv^2 + du\,d\beta}{\mathrm{sh}^2\beta}$, $\beta$ étant une fonction de $(u, v)$. En écrivant que cet élément linéaire convient à une surface développable ou à une surface à courbure totale constante, on a une équation aux dérivées partielles dont l'intégration permettrait de ramener le $ds^2$ du plan ou de la sphère à la forme (I).

De même on peut, dans l'élément linéaire (51), considérer $\alpha$ comme une fonction de $(u, v)$, et écrire que cet élément convient au plan ou à une surface à courbure constante.

On a vu plus haut (nº 4) comment on peut déterminer tous les cas où le $ds^2$ est celui d'une surface développable.

**18.** Les surfaces $(\Sigma)$ et $(\Sigma_1)$ peuvent être assujetties à d'autres conditions. Nous examinerons quelques-unes des plus simples. Si le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ est constant, la surface $(\Sigma_1)$ est applicable sur une surface homothétique à $(\Sigma)$. Ceci ne peut avoir lieu dans le premier cas examiné, car $\beta$ devrait être constant (nº 8). Dans le second cas, $e^{2\beta}$ peut se réduire à une constante; nous écarterons d'abord le cas où l'on aurait $e^{2\beta} = -1$. La condition (42) devient alors $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\,\partial v} = 0$. La fonction $e^{\alpha}$ est donc le produit d'une fonction de $u$ par une fonction de $v$, et ne peut se réduire à une fonction de $v$, car on aurait alors $E = 0$. On peut donc supposer, grâce à un simple changement de notations, que l'on a $e^{\alpha} = u f(v)$, et le coefficient G est de la forme $u^2 \varphi(v)$; en remplaçant $v$ par $\int \sqrt{\varphi(v)}\,dv$, G sera égal à $u^2$. Quant à E, les formules (27) montrent qu'il se réduit à une fonction de $v$, et l'élément linéaire de la surface $(\Theta)$ a une expression de la forme

$$ds^2 = V\,du^2 + u^2\,dv^2, \tag{52}$$

V ne dépendant que de $v$. Quant à $\lambda$, $\lambda_1$, les formules (27) montrent aussi que l'on aura $\lambda = Ku$, $\lambda_1 = K_1 u$, K et $K_1$ étant des constantes, si l'on porte ces valeurs de E, G, $\lambda$, $\lambda_1$ dans les formules (14), (15), (16), on trouve qu'elles se réduisent à une seule

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{K_1} + 2 = 0. \tag{53}$$

*De toute surface* ($\Theta$) *admettant l'élément linéaire* (52), *on peut donc déduire deux surfaces* ($\Sigma$), ($\Sigma_1$) *pour lesquelles on a* $\left(\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}\right)^2 = \left(\frac{K_1}{K}\right)^2$, K *et* $K_1$ *étant deux constantes qui satisfont à la relation* (53), *en remplaçant successivement* $\lambda$ *par* $Ku$, $\lambda_1$ *par* $K_1 u$, $\mu$ *et* $\mu_1$ *par zéro dans les formules* (5).

En particulier, la surface ($\Theta$) est développable si V est constant ou égal au carré d'une fonction linéaire. Les transformations planes correspondantes (n° 4) sont des combinaisons d'homothéties et de rotations.

Pour que les deux surfaces ($\Sigma$) et ($\Sigma_1$) puissent être applicables l'une sur l'autre, avec correspondance des points M, $M_1$, il faut et il suffit que l'on ait $\lambda + \lambda_1 = 0$, et les formules (27) se présentent sous forme indéterminée. Mais si l'on suppose $\lambda_1 = -\lambda$ dans les formules (14), (15), (16), elles deviennent

$$\frac{\partial}{\partial u}(E\lambda^2) = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0.$$

On peut donc prendre $G = 1$, $\lambda = U$, $E = \frac{V}{U^2}$. En remplaçant $\int \frac{du}{U}$ par $u$, on peut énoncer le résultat comme il suit :

*Étant donnée une surface* ($\Theta$) *dont l'élément linéaire a pour expression*

$$ds^2 = V\,du^2 + dv^2, \tag{54}$$

*les formules* (5), *où l'on fait successivement* $\lambda = K$, $\mu = 0$, *puis* $\lambda_1 = -K$, $\mu_1 = 0$ (K *étant une constante arbitraire*), *représentent deux surfaces* ($\Sigma$), ($\Sigma_1$) *applicables l'une sur l'autre avec correspondance des points* M, $M_1$.

La surface ($\Theta$) est applicable sur une surface de révolution, et les droites $MM_1$ sont tangentes aux courbes de ($\Theta$) qui sont les images des parallèles. Si V est le carré d'une fonction linéaire de $v$ ([1]), la surface $(\Theta)$ est développable, et nous retrouvons des propriétés déjà signalées (n° **4**).

On obtiendrait de même tous les cas où le produit $\overline{mM} \times \overline{mM_1}$ est constant en supposant $\alpha$ constant dans les formules (24). La condition (23) se réduit à $\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v} = 0$. On vérifie facilement que l'élément linéaire de $(\Theta)$ peut être ramené à l'une des deux formes

$$ds^2 = K\frac{du^2 + dv^2}{\operatorname{sh}^2 u}, \qquad ds^2 = K\frac{du^2 + V\,dv^2}{\operatorname{sh}^2(u+v)}.$$

**19.** Cherchons encore si la distance $\overline{MM_1} = l_1 - l$ des deux points M, $M_1$ peut être égale à une constante $h$. Dans le premier cas examiné (n° **8**), l'équation linéaire (21) doit admettre l'intégrale particulière $h = l_1 - l$. On a donc $P(u, v) = 0$, et $l$, $l_1$ sont de la forme

$$l = f(u) + g(v), \qquad l_1 = f(u) + g(v) + h.$$

La fonction $f(u)$ ne peut se réduire à une constante, car on aurait $E = 0$, d'après la formule (22) qui donne la valeur de E. On peut donc, par un simple changement de notations, supposer $f(u) = -u$, et écrire

$$l = -u + g(v), \qquad l_1 = -u + g(v) + h.$$

Les formules (22) donnent alors $E = 1$,

$$G = \frac{4[u - g(v)][u - g(v) - h]}{h^2}\Psi(v) - [g'(v)]^2,$$

et l'élément linéaire de $(\Theta)$ est de la forme

$$(55) \qquad ds^2 = du^2 + \left[\frac{4[u - g(v)][u - g(v) - h]}{h^2}\Psi(v) - g'^2(v)\right]dv^2,$$

$\Psi(v)$ et $g(v)$ étant deux fonctions arbitraires de $v$. La surface $(\Theta)$ est

---

([1]) Quand on prend dans le plan deux familles de spirales logarithmiques orthogonales, ayant même foyer, on vérifie aisément que l'élément linéaire du plan est donné par une formule qui peut être ramenée à la forme

$$ds^2 = \frac{u^2\,dv^2}{\cos^2\varphi} + \frac{v^2\,du^2}{\sin^2\varphi}.$$

donc applicable sur une surface réglée, et les surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ sont représentées par les formules (43), où l'on remplace successivement $V$ par $g(v)$ et par $g(v)+h$. Mais $g(v)$ et $g(v)+h$ sont deux intégrales particulières de l'équation (42) correspondant à la forme (55) de l'équation linéaire (n° **13**). On est donc conduit au résultat suivant : Soit (R) une surface réglée telle qu'il existe sur cette surface deux courbes *minima* coupant les génératrices en deux points dont la distance est constante. Les transformées de ces deux lignes par la méthode de Darboux (n° **13**) quand on fait rouler la surface réglée (R) sur une surface applicable $(\Theta)$, sont deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ qui se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits, de telle façon que la distance de deux points correspondants soit constante. Les surfaces réglées satisfaisant à cette condition sont celles dont l'élément linéaire est de la forme (55). En particulier, si l'élément linéaire de $(\Theta)$ est de la forme

$$ds^2 = du^2 + (u^2 - a^2)\,dv^2,$$

les surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ sont deux surfaces parallèles à courbure moyenne constante.

On obtient le même résultat en supposant que l'on se trouve dans le cas examiné au n° **13**.

**20.** Cherchons encore si les plans tangents aux points $M$, $M_1$, aux deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ peuvent être parallèles, quand on déforme arbitrairement la surface $(\Theta)$. On peut éviter des calculs un peu longs en s'appuyant sur les propriétés démontrées au n° **4**. Les surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ sont alors des surfaces isothermiques et nous avons vu que les points focaux de la droite $MM_1$ étaient deux points $m$, $m_1$ conjugués harmoniques par rapport aux points $M$, $M_1$. Si les surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ ont toujours leurs plans tangents aux points correspondants parallèles, quand on déforme $(\Theta)$, lieu du point $m$, elles restent isothermiques et par suite le second point focal $m_1$ de la droite $MM_1$ est invariablement lié aux trois points $M$, $M_1$, $m$, et le segment $mm_1$ reste constant. Les courbes $(v)$ de la surface $(\Theta)$ doivent donc être telles que la distance des deux points focaux sur une tangente quelconque à l'une de ces courbes ne dépende que de l'élément linéaire de $(\Theta)$. Soient

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire de cette surface, X, Y, Z les coordonnées du second point focal de la tangente à la courbe ($v$) au point ($u$, $v$)

$$X = x + l\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y = y + l\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z = z + l\frac{\partial z}{\partial u}.$$

En écrivant que cette droite est tangente à la surface décrite par le point (X, Y, Z), on obtient la condition

$$\left[2D'\frac{\partial E}{\partial v} + D\frac{\partial G}{\partial u}\right] l = -2DG,$$

D, D' ayant la signification habituelle. Pour que $l$ ne dépende que de l'élément linéaire, il faut et il suffit que $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire que les courbes ($v$) forment une famille de géodésiques; nous avons traité le problème en détail dans ce cas particulier (n° **6**). Il faut de plus que ce second point focal soit conjugué harmonique de $m$ par rapport aux deux points M, $M_1$, c'est-à-dire que l'on ait $\frac{2}{l} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}$, condition qui devient

$$\frac{\partial \log G}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} = 0.$$

Nous avons vu que cette relation était vérifiée lorsque G ne dépend que de $u$. Si G est un trinome du second degré en $u$ [cas où ($\Theta$) est applicable sur une surface réglée], on doit avoir

$$\lambda = V - u, \qquad \lambda_1 = V_1 - u, \qquad G = V_2(V - u)(V_1 - u),$$

et si l'on compare avec l'expression générale de G, (n° **19**), on voit que V et $V_1$ doivent être constants. On peut donc supposer que G ne dépend que de $u$, et le $ds^2$ de ($\Theta$) est de la forme $du^2 + G(u)\,dv^2$, les points M et $M_1$ étant sur la tangente à la courbe ($v$). Les plans tangents aux deux surfaces ($\Sigma$), ($\Sigma_1$) étant supposés parallèles, représentons les paramètres directeurs de la normale par

$$p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial x}{\partial v} + rc, \qquad p\frac{\partial y}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial v} + rc', \qquad p\frac{\partial z}{\partial u} + q\frac{\partial z}{\partial v} + rc'';$$

les conditions d'orthogonalité

$$S\left(p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial x}{\partial v}+rc\right)\frac{\partial X}{\partial u}=0,\qquad S\left(p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial x}{\partial v}+rc\right)\frac{\partial X}{\partial v}=0,$$
$$S\left(p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial x}{\partial v}+rc\right)\frac{\partial X_1}{\partial u}=0,\qquad S\left(p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial x}{\partial v}+rc\right)\frac{\partial X_1}{\partial v}=0,$$

deviennent en développant

$$p[1+\lambda'(u)]+r\lambda D=0,\qquad p[1+\lambda'_1(u)]+r\lambda_1 D=0,$$
$$qG\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log G}{\partial u}\right]+rD'=0,\qquad qG\left[\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log G}{\partial u}\right]+rD'=0.$$

On déduit des deux dernières $q=r=0$, et par suite

$$\lambda'(u)=\lambda'_1(u)=-1.$$

On peut, sans diminuer la généralité, prendre $\lambda=a-u$, $\lambda_1=-a-u$, $G=u^2-a^2$.

Nous retrouvons ainsi les surfaces parallèles à courbure moyenne constante de Bonnet, qui admettent la surface $(\Theta)$ pour une des nappes de leur développée.

**21.** Cherchons encore s'il est possible de déterminer E, G, $\lambda$, $\lambda_1$ de façon que les plans tangents aux deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ soient invariablement liés au trièdre (T) formé par les tangentes aux courbes $(u)$ et $(v)$ de la surface $(\Theta)$ passant au point $m$ et la normale à la surface $(\Theta)$ au même point. Pour déterminer le plan tangent à la surface $(\Sigma)$ décrite par le point M de coordonnées $X=x+\lambda\frac{\partial x}{\partial u}$, ..., il est commode de représenter les paramètres directeurs de la normale à cette surface par

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial u}+\beta\frac{\partial x}{\partial v}+\gamma c,\qquad \alpha\frac{\partial y}{\partial u}+\beta\frac{\partial y}{\partial v}+\gamma c',\qquad \alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}+\gamma c''.$$

Ces paramètres sont déterminés par la condition

$$S\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u}+\beta\frac{\partial x}{\partial v}+\gamma c\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}du+\frac{\partial X}{\partial v}dv\right),$$

qui donne, en tenant compte des formules (3) et (4), deux relations distinctes

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha\left[\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)E+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right]+\frac{\beta}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+\gamma\lambda\frac{D}{H}=0,\\ &\alpha\left[E\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right]+\beta\left[G+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\gamma\lambda\frac{D'}{H}=0.\end{aligned}\right.$$

Pour que les rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ soient indépendants de D, D′, il est nécessaire que l'on ait $\gamma=0$, c'est-à-dire que les surfaces $(\Theta)$ et $(\Sigma)$ soient orthogonales aux points correspondants $m$ et M. Le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ doit alors satisfaire aux deux relations qui restent, et l'élimination de ce rapport conduit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle doit satisfaire la fonction $\lambda(u, v)$

$$(57)\quad \left[\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)E+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\left[G+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left[E\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right]=0.$$

Si le plan tangent à la surface $(\Sigma_1)$ est lui-même invariablement lié au trièdre (I), on aura aussi

$$(58)\quad \left[\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)E+\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\left[G+\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left[E\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}+\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right]=0.$$

Considérons d'abord le cas particulier où $\frac{\partial E}{\partial v}=0$; on peut alors supposer, comme on l'a déjà observé plusieurs fois, $E=1$, et les équations (57) et (58) deviennent

$$\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\left(G+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0,\qquad \left(1+\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}\right)\left(G+\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0.$$

On ne peut supposer $1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\neq 0$. En effet, on se trouverait alors dans l'un des deux premiers cas examinés au n° **6**, pour lesquels on a $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial\log G}{\partial u}=0$. Comme on devrait avoir aussi $G+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u}=0$, on aurait $\lambda_1=\lambda$. Pour la même raison on doit avoir aussi $1+\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}=0$, et nous retrouvons le cas étudié à la page 16, où la surface $(\Theta)$ est applicable sur une surface réglée.

Supposons $\frac{\partial E}{\partial v}\neq 0$. Si l'on a pris le signe $+$ dans le second membre de la formule (17) on déduit des formules (57) et (58)

$$G\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log E}{\partial u}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\log\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}{\partial v}=0.$$

En remplaçant $\lambda$, $\lambda_1$, E par les expressions tirées des formules (24) il vient

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\beta}\right)\left[G+\left(\frac{e^\alpha\frac{\partial\beta}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}\right)^2\right]=0.$$

On ne peut avoir $\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\beta}=0$, car on en déduirait $\frac{\partial E}{\partial v}=0$. Il faut donc prendre

$$G=-\left(\frac{e^\alpha\frac{\partial\beta}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}\right)^2,$$

et nous avons vu que dans ce cas les surfaces ($\Sigma$) et ($\Sigma_1$) sont deux développables isotropes engendrées par des droites parallèles (n° 8). Quand on prend le signe — dans le second membre de la formule (17) on trouve de même que l'on a $G=-\left[\frac{e^\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}\right]^2$, et les surfaces ($\Sigma$), ($\Sigma_1$) sont encore des développables isotropes (n° **9**).