JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH PÉRÈS

Sur la détermination des vitesses en fonction des tourbillons dans un fluide incompressible

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 113-125.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__113_0>

Sur la détermination des vitesses en fonction des tourbillons dans un fluide incompressible ;

PAR JOSEPH **PÉRÈS**.

I. — Préliminaires.

1. Soient u, v, w les composantes de la vitesse du fluide, qui remplit un volume (V) limité par la surface *fixe* (S). Le problème de la détermination des vitesses par les tourbillons consiste dans la résolution du système

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\eta, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

avec, sur la surface limite (S), la condition

$$(3)\qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Dans ces équations, ξ, η, ζ sont les composantes du vecteur-tourbillon, donné en fonction du point $M(x, y, z)$; elles vérifient la relation

$$(4)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale *extérieure* en un point de (S).

2. Soit connue une solution particulière u_1, v_1, w_1 des seules équations (1) (et la détermination d'une telle solution ne dépend que de quadratures). u, v, w seront alors de forme

$$u = u_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad v = v_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y}, \qquad w = w_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

θ étant une fonction de x, y, z qu'il faut déterminer par les conditions suivantes : $\Delta\theta$ est *connu* dans (V), comme le montre un calcul simple, et il en est de même sur (S) de la dérivée normale $\frac{d\theta}{dn}$. La détermination des vitesses est donc réduite à un problème connu (problème de Neumann).

Stekloff, à qui est due la remarque précédente ([1]), a indiqué une autre méthode pour la détermination des vitesses ([2]) : il prend pour point de départ l'examen du cas particulier simple pour lequel les données ξ, η, ζ vérifient au contour la condition

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = 0, \tag{5}$$

et peut ramener ainsi la question à l'intégration par quadratures d'une équation aux dérivées partielles, puis à la résolution d'un problème de Neumann.

3. Si la solution ainsi obtenue est théoriquement parfaite, elle laisse assez dans le vague la forme fonctionnelle de la relation qui lie les u, v, w aux données ξ, η, ζ, et il s'en faut qu'elle soit toujours la mieux adaptée aux applications. Cela donne un prix particulier à la simple et élégante solution donnée récemment par M. H. Villat, en partant d'un point de départ tout différent ([3]).

Nous en rappellerons le principe. D'après (2), on peut évidemment toujours considérer u, v, w comme le rotationnel d'un vecteur (PQR), et Poincaré a montré que l'on peut adopter, pour PQR, les valeurs

---

([1]) *Sur la Théorie des tourbillons* (*Ann. Fac. Sciences de Toulouse*, 2e série, t. X, 1908, p. 293).

([2]) *Ibid.*, p. 273-279.

([3]) *Comptes rendus Acad. Sciences*, t. 188, 1929, p. 837. *Cf.* aussi J. Delsarte, *Ibid.*, p. 1655. *Voir* H. Villat, *Leçons sur la Théorie des tourbillons* (Gauthier-Villars, 1929, Chap. II).

suivantes :

$$(6)\qquad P(M) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\xi'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int_S \frac{\gamma' v' - \beta' w'}{r}\,d\sigma', \qquad \ldots,$$

où les quantités accentuées sont relatives au point M′ qui décrit les domaines d'intégration et où r est la distance MM′. Tout revient alors à obtenir les vitesses *sur la paroi*, et M. Villat montre qu'on y arrive par résolution d'équations intégrales du type de Fredholm. J'ai indiqué ailleurs (1) comment, par une légère modification des équations de M. Villat, on peut éviter toute difficulté provenant des infinis des noyaux et obtenir un système de Fredholm auquel s'applique immédiatement la théorie classique.

4. Les vitesses au contour ayant été déterminées par la résolution de ce système de Fredholm, il est tout à fait évident que les fonctions P, Q, R peuvent prendre la forme suivante :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\xi'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int (a\,\xi' + b\,\eta' + c\,\zeta')\,d\tau', \\ Q(M) &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\eta'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int (a_1\xi' + b_1\eta' + c_1\zeta')\,d\tau', \\ R(M) &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\zeta'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int (a_2\xi' + b_2\eta' + c_2\zeta')\,d\tau', \end{aligned}\right.$$

où le tableau

$$\left\{\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\}$$

représente un certain tenseur, dont les éléments a, b, ... sont des fonctions des deux points M et M′ *régulières* à l'intérieur du volume (V) (2).

Nous nous proposons, dans la suite, l'étude de la détermination directe des fonctions a, b, c, ... Nous sommes ainsi conduits à quelques propriétés et rapprochements intéressants. De plus, bien que la méthode qui en résulte pour le calcul des vitesses soit moins simple que

---

(1) *Comptes rendus*, t. 189, 1929, p. 681.

(2) Il y a quelque arbitraire dans les éléments a, b, ... du tenseur. L'arbitraire serait plus grand encore, si, au lieu de prendre pour PQR les fonctions de Poincaré, on leur laissait toute l'indétermination qu'ils comportent.

celle de M. Villat, elle est assez efficace comme on pourra le voir dans quelques cas particuliers. On nous excusera de revenir ainsi sur un sujet connu; il vaut bien que l'on en examine tous les aspects.

II. — La détermination du tenseur fondamental.

5. Tout d'abord, il n'est pas superflu d'indiquer comment on peut vérifier, par un calcul direct, que si u, v, w est la solution (existant évidemment et unique) des équations (1), (2), (3), et que l'on pose

$$u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

on peut prendre pour P, Q, R *les expressions* (6) *de Poincaré.*

Soit, en effet,

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{(V)} \frac{u'}{r}\, d\tau', \qquad \ldots,$$

on voit de suite que la divergence du vecteur (UVW) est nulle. Donc

$$\mathrm{rot}^2(UVW) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}(UVW) - \Delta(UVW) = (uvw).$$

On peut donc prendre

$$(PQR) = \mathrm{rot}(UVW),$$

ce qui donne, en particulier,

$$P = \frac{1}{4\pi}\iiint \left(v' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - w' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\tau',$$

d'où, enfin l'expression (6) après une intégration par parties.

6. Nous cherchons alors les éléments du tenseur de façon que

$$(8) \qquad 2\iiint (a\xi' + b\eta' + c\zeta')\, d\tau' = \iint \frac{\gamma' v' - \beta' w'}{r}\, d\sigma',$$

et formules analogues pour $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$.

Dans toute la suite, le *point* M *restera fixe et n'interviendra que comme paramètre :* c'est en fonction du point M' que nous déterminerons a, b, c.

La relation (8) s'écrit

$$\iiint \left\{ a\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right) + \dots \right\} d\tau' = \iint \frac{\gamma' v' - \beta' w'}{r}\, d\sigma',$$

et doit être satisfaite quelles que soient les fonctions u', v', w' du point M', vérifiant les conditions (2) et (3). D'où

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\iiint \left\{ u'\left(\frac{\partial c}{\partial y'} - \frac{\partial b}{\partial z'}\right) + \dots \right\} d\tau' \\ &= \iint \frac{\gamma' v' - \beta' w'}{r}\, d\sigma' - \iint [a(\beta' w' - \gamma' v') + \dots]\, d\sigma'. \end{aligned}$$

Nous pouvons évidemment retrancher au premier membre une intégrale telle que

$$\iiint \left(u' \frac{\partial h}{\partial x'} + v' \frac{\partial h}{\partial y'} + w' \frac{\partial h}{\partial z'}\right) d\tau',$$

nulle, d'après (2) et (3), quelle que soit la fonction $h(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$.

L'identité (9) entraîne tout d'abord l'existence d'une h telle que

$$(10) \qquad \operatorname{grad}' h = \operatorname{rot}'(abc) \ (^1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial h}{\partial x'} = \frac{\partial c}{\partial y'} - \frac{\partial b}{\partial z'}, \qquad \dots$$

Enfin, pour que l'intégrale double disparaisse, on est conduit à poser sur (S) des conditions de forme

$$(11) \qquad a = \mathrm{H}\alpha' - \frac{1}{r}, \qquad b = \mathrm{H}\beta', \qquad c = \mathrm{H}\gamma',$$

H étant une fonction de M et de M' (ce dernier point étant pris sur la surface (S).

7. Nous sommes donc réduits à déterminer les inconnues a, b, c (auxquelles sont venues se joindre h et H) par les conditions (10) avec les relations à la paroi (11).

Cette détermination peut être présentée de la façon suivante. Les formules de Stokes, appliquées à une portion de paroi (Σ), limitée par

---

(1) Les accents indiquent, bien entendu, des opérateurs relatifs au point M'.

la courbe (C), donnera, d'après (10) et (11),

$$\int\int_{\Sigma}\frac{dh}{dn'}d\sigma'=\int_{c}(a\,dx'+b\,dy'+c\,dz')$$
$$=-\int_{c}\frac{1}{r}dx'=-\int\int_{\Sigma}\left(\beta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}-\gamma'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\right)d\sigma',$$

c'est-à-dire identiquement, en tout point de la paroi,

$$\frac{dh}{dn'}=\gamma'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}-\beta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}.$$

h est, d'ailleurs, *harmonique;* on l'obtiendra donc par résolution d'un problème de Neumann.

h étant ainsi connue, la résolution des équations (10) ne dépend que de quadratures. On sait qu'il y a un gradient arbitraire dans la solution; $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ étant une solution particulière et $\theta(M, M')$ étant arbitraire, on a

$$a=\overline{a}+\frac{\partial\theta}{\partial x'},\qquad b=\overline{b}+\frac{\partial\theta}{\partial y'},\qquad c=\overline{c}+\frac{\partial\theta}{\partial z'}.$$

Il faut choisir θ de manière à vérifier les (11). Mais on a, sur (S),

$$\int_{(C)}\overline{a}\,dx'+\overline{b}\,dy'+\overline{c}\,dz'=\int\int\frac{dh}{dn'}d\sigma'=-\int_{C}\frac{1}{r}dx'$$

ou

$$\int_{C}\left(\overline{a}+\frac{1}{r}\right)dx'+\overline{b}\,dy'+\overline{c}\,dz'\equiv 0,$$

quelle que soit (C). Il en suit que $\left(\overline{a}+\frac{1}{r}\right)dx'+\overline{b}dy'+\overline{c}\,dz'$ pris sur (S) est la différentielle exacte (en M') d'une fonction $\Theta(M, M')$ définie lorsque M' est sur (S). Il suffira de prendre θ égale à $-\Theta$ lorsque M' est sur (S) pour être assuré que

$$\left(a+\frac{1}{r}\right)dx'+b\,dy'+c\,dz'\equiv 0$$

sur (S), ce qui implique les relations (11).

Les fonctions a, b, c sont ainsi déterminées [1]. Il reste en elles un certain arbitraire [gradient d'une fonction de M′ (et M) constante lorsque M′ est sur (S)] qui était évident *a priori*.

8. Pour les éléments des autres lignes du tenseur fondamental, on obtiendra de même des équations analogues aux (10), h étant remplacé par h_1, puis h_2. Les données aux limites, lorsque M′ vient sur (S), sont résumées par le tableau suivant :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{llll} a = -\dfrac{1}{r} + \mathrm{H}\alpha', & b = \mathrm{H}\beta', & c = \mathrm{H}\gamma' & \text{ou bien : } \dfrac{a+\dfrac{1}{r}}{\alpha'} = \dfrac{b}{\beta'} = \dfrac{c}{\gamma'}, \\ a_1 = \mathrm{H}_1\alpha', & b_1 = -\dfrac{1}{r} + \mathrm{H}_1\beta', & c_1 = \mathrm{H}_1\gamma' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_2 = \mathrm{H}_2\alpha', & b_2 = \mathrm{H}_2\beta', & c_2 = -\dfrac{1}{r} + \mathrm{H}_2\gamma' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

III. — Quelques remarques à propos du problème plan.

9. L'examen du cas plan, qui est très simple, amène à un rapprochement intéressant. Il faut remplacer alors $\frac{1}{r}$ par $\log\frac{1}{r}$, ... De plus, dans ce cas, P et Q disparaissent ainsi que a_2 et b_2. R est la fonction de courant à déterminer.

Les formules (10) sont remplacées par

$$\frac{\partial h_2}{\partial x'} = \frac{\partial c_2}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial h_2}{\partial y'} = -\frac{\partial c_2}{\partial x'}.$$

(1) On voit que le degré de difficulté est le même que pour le problème initial. Il en est de même lorsque, pour l'équation de Laplace, on cherche des fonctions de Green, et c'est bien une question tout analogue : le tenseur

$$\left\|\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{r} + a & b & c \\ a_1 & \dfrac{1}{r} + b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dfrac{1}{r} + c_2 \end{array}\right\|$$

jouant, pour le problème du début, le rôle de fonction de Green.

qui expriment que c_2 et h_2 sont deux fonctions harmoniques de M′ *conjuguées*. Enfin, la condition au contour pour h_2 s'écrit

$$\frac{dh_2}{dn'} = \beta' \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x'} - \alpha' \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y'} = \alpha' \frac{\partial c_2}{\partial y'} - \beta' \frac{\partial c_2}{\partial x'}.$$

Donc, en désignant par $\frac{d}{ds'}$ une dérivée prise suivant ce contour,

$$\frac{dc_2}{ds'} = -\frac{d \log \frac{1}{r}}{ds'} \qquad \text{ou} \qquad c_2 = -\log \frac{1}{r},$$

en négligeant une constante sans intérêt.

Enfin, dans le cas plan, on a donc

$$\mathrm{R}(\mathrm{M}) = \frac{1}{\pi} \int\int \zeta' \mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')\, dx'\, dy',$$

G étant la fonction de Green, pour l'équation de Laplace, du contour considéré.

10. C'est là un résultat *a priori* bien évident, puisque la fonction de courant R devait vérifier l'équation

$$\Delta \mathrm{R} = -2\zeta$$

et que, au contour, cette fonction doit être constante (et elle peut être prise nulle).

Il semble donc que le calcul du numéro précédent soit bien superflu. Mais il nous permettra, du moins, une comparaison entre les deux cas du plan et de l'espace.

On sait que dans le plan les deux problèmes (Dirichlet et Neumann) de la théorie des fonctions harmoniques se ramènent l'un à l'autre (*cf.* Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 11 et suiv.); ils constituent un seul et même problème si l'on envisage simultanément un couple de fonctions harmoniques conjuguées. Passant à l'espace, l'ensemble de h_2 et du vecteur $a_2 b_2 c_2$ donne la généralisation des fonctions conjuguées du plan : c'est le point de vue de M. Volterra dans ses *Leçons de Stockholm*, p. 26 [1]. Le problème auquel nous avons été conduit (résolution des équations)

$$\text{grad}' h_2 = \text{rot}'(a_2 b_2 c_2)$$

avec des données aux limites du genre de (11),

$$\frac{a_2 - \bar{a}_2}{\alpha'} = \frac{b_2 - \bar{b}_2}{\beta'} = \frac{c_2 - \bar{c}_2}{\gamma'} \tag{13}$$

[où $\bar{a}_2$, $\bar{b}_2$, $\bar{c}_2$ sont données lorsque M' est sur (S)] est alors l'équivalent pour l'espace des problèmes de Dirichlet et Neumann pour le plan; on peut scinder ce problème en deux (entièrement équivalents, et ce n'est là qu'un cas particulier des résultats généraux de M. Volterra), ou bien détermination de la fonction harmonique h_2 par des valeurs assignées de sa dérivée normale sur (S), ou bien détermination du vecteur $a_2 b_2 c_2$ par les équations

$$\Delta'(a_2 b_2 c_2) = \text{grad}' \,\text{div}'(a_2 b_2 c_2) \tag{14}$$

avec les conditions aux limites (13).

Bien entendu, il reste dans $a_2 b_2 c_2$ l'arbitraire déjà signalé : gradient d'une fonction constante sur (S). On peut profiter de cet arbitraire pour annuler la divergence de $a_2 b_2 c_2$ et les fonctions a_2, b_2, c_2, alors bien déterminées, vérifient

$$\Delta' a_2 = \Delta' b_2 = \Delta' c_2 = 0, \qquad \text{Div}'(a_2 b_2 c_2) = 0, \tag{14'}$$

avec les conditions (13).

IV. — Cas où la paroi est constituée par un plan.

11. Nous supposons, c'est le cas particulier le plus simple, que la paroi qui limite le liquide est constituée par le plan $x = 0$, le fluide remplissant toute la portion d'espace situé du côté positif.

Pour éviter toute difficulté relative à l'infini, nous supposerons que ξ, η, ζ (et aussi les fonctions cherchées u, v, w) tendent vers zéro assez vite. Inutile d'insister sur ce point, commun à toutes les questions analogues.

---

[1] Avec la différence minime que M. Volterra fait jouer le rôle essentiel aux fonctionnelles (flux du gradient de h_2 et circulation du vecteur).

La méthode de M. Villat pour la détermination des vitesses est alors infiniment simple. Si l'on écrit, en effet, dans ce cas, les équations intégrales (5) de la Note citée plus haut (p. 115, note 1), les noyaux sont identiquement nuls, de sorte que, au contour,

$$l = v\gamma - \beta w = 2F, \quad \ldots$$

avec les notations de cette Note. En posant

$$P_0 = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\xi'}{r}\,d\tau',$$
$$Q_0 = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\eta'}{r}\,d\tau',$$
$$R_0 = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\zeta'}{r}\,d\tau',$$

et tenu compte de ce que $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 0$, on a

$$(15) \qquad l = 0, \qquad m = -2\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y}\right), \qquad n = 2\left(\frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{\partial R_0}{\partial x}\right),$$

et les formules de Poincaré donnent alors

$$P = P_0, \qquad Q = Q_0 + \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{m'}{r}\,d\sigma', \qquad R = R_0 + \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{n'}{r}\,d\sigma'.$$

$m' = m(M')$, $n' = n(M')$ ayant les valeurs (15).

12. Les éléments du tenseur fondamental sont faciles à en tirer. a, b, c peuvent d'abord être pris nuls. Pour avoir a_1, b_1, c_1, par exemple, nous écrirons ($r'' = M'M''$),

$$\frac{1}{2}\int\int \frac{m'}{r}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\int\int d\sigma' \int\int\int d\tau'' \frac{1}{r}\left(\xi'' \frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r''} - \eta'' \frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{r''}\right)$$
$$= \int\int\int (a_1\xi' + b_1\eta' + c_1\zeta')\,d\tau',$$

d'où

$$(16) \qquad \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int \frac{1}{r(MM'')}\,\frac{\partial}{\partial y'}\,\frac{1}{r(M'M'')}\,d\sigma'', \\[2ex] b_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int \frac{1}{r(MM'')}\,\frac{\partial}{\partial x'}\,\frac{1}{r(M'M'')}\,d\sigma'', \\[2ex] c_1 = 0, \end{cases}$$

et des expressions analogues pour a_2, b_2, c_2.

13. Le tenseur est donc donné par le tableau suivant :

$$(17)\quad \begin{cases} a = 0, & b = 0, & c = 0, \\ a_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}, & b_1 = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}, & c_1 = 0, \\ a_2 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}, & b_2 = 0, & c_2 = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}, \end{cases}$$

φ étant une fonction de M et M′, dont la valeur, sous forme d'intégrale, résulte de ce qui précède.

La valeur de φ peut résulter aussi, très immédiatement, de la théorie développée au paragraphe II. En effet, φ étant harmonique et d'ailleurs quelconque, les équations (10) sont vérifiées par les diverses lignes du tableau (17), en prenant

$$h = 0, \qquad h_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z'}, \qquad h_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y'}.$$

Tenu compte des valeurs de α', β', γ', les conditions aux limites telles que (11) seront satisfaites pourvu que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{1}{r}$$

(pour M′ dans le plan $x = 0$); on peut donc prendre

$$(18)\qquad \varphi = \operatorname{Log}(x' - \bar{x} + \bar{r}),$$

où $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est le point symétrique de M par rapport au plan $x = 0$, et où $\bar{r} = \bar{M}M'$ [ce résultat est d'ailleurs d'accord avec les (16)].

V. — Cas d'un fluide remplissant un volume sphérique.

14. La paroi (S) est une sphère, de centre O, de rayon δ. Nous utiliserons encore la méthode du paragraphe II.

La forme du tenseur cherché n'est pas difficile à deviner si l'on prend la peine de donner, au tenseur qui a été obtenu au paragraphe précédent pour le cas du plan, une forme indépendante de la position particulière de ce plan.

Soient $\vec{N}$ le vecteur-unité normal au plan qui limite le fluide; $\vec{N}_1$,

$\overrightarrow{N}_2$, $\overrightarrow{N}_3$ les vecteurs-unités portés par les trois axes de coordonnées. Il suffit de regarder les formules (17) pour apercevoir que, dans le cas d'un fluide limité par un plan indéfini dont la normale est $\overrightarrow{N}$, les trois lignes du tenseur sont les composantes des trois vecteurs suivants :

$$(\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N}_1) \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}, \qquad (\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N}_2) \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}. \qquad (\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N}_3) \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}.$$

Il est à prévoir que pour passer de là au cas de la sphère, il suffira de remplacer le vecteur constant $\overrightarrow{N}$ par le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ de composantes x', y', z'.

On est ainsi conduit à essayer, pour le tenseur, les expressions suivantes :

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{lll} a = -y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} - z'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}, & b = y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}, & c = z'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}, \\ a_1 = x'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}, & b_1 = -z'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'} - x'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}, & c_1 = z'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}, \\ a_2 = x'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}, & b_2 = y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}, & c_2 = -x'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'} - y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}, \end{array}\right.$$

où φ est une fonction harmonique (en M') à déterminer.

On vérifiera sans peine que les (10) sont ainsi satisfaites avec

$$\begin{aligned} h &= z'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - y'\frac{\partial\varphi}{\partial z'}, \\ h_1 &= x'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} - z'\frac{\partial\varphi}{\partial x'}, \\ h_2 &= y'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - x'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}; \end{aligned}$$

reste à vérifier les conditions à la paroi (11). Si l'on remarque que

$$a = x'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - \frac{d\varphi}{dn'}\delta, \qquad b = y'\frac{\partial\varphi}{\partial x'}, \qquad c = z'\frac{\partial\varphi}{\partial x'},$$

la question est très simple.

On déterminera d'abord la fonction φ (harmonique en M') par la condition que sa dérivée normale ait les valeurs

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\delta}\right)$$

sur la sphère ; on trouve (la question est tout à fait classique)

$$\varphi = -\frac{1}{6}\,\text{Log}(\overline{R} + \overline{r} + R')(\overline{R} + \overline{r} - R'),$$

où $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ est le point inverse de M par rapport à (S), et où

$$R' = OM', \qquad \overline{R} = O\overline{M}, \qquad \overline{r} = \overline{M}M'.$$

La fonction φ étant ainsi obtenue, le tenseur est donné par le tableau (19) avec la très légère modification qui consiste à y retrancher $\frac{1}{6}$ aux valeurs de a, b_1, c_2.

Cette dernière modification n'influe d'ailleurs pas sur les valeurs de $(u, v, w) = \text{rot}(P, Q, R)$, car elle modifie P, Q, R de constantes. Elle n'a d'intérêt que si l'on tient absolument à prendre pour P, Q, R les valeurs données par les formules de Poincaré.