JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

Sur les transformations infinitésimales et la géométrie différentielle

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 229-267.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__229_0>

Sur les transformations infinitésimales et la géométrie différentielle;

PAR E. VESSIOT.

1. Dans un Cours sur la Relativité générale, professé à la Sorbonne, en 1917-1918, j'avais introduit, pour établir les principes de la Géométrie de Riemann, au lieu du calcul formel de Ricci, la transformation infinitésimale

$$\mathcal{G}f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ih}^{k}\, dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx_k} \right), \tag{1}$$

où $\xi^1, \ldots, \xi^n$ sont les coordonnées d'un élément linéaire indéterminé de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$, tandis que les coefficients A_{ih}^{k} sont ceux du système différentiel des géodésiques

$$\frac{d}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} A_{ih}^{k} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_h}{ds}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Cette transformation laisse le ds^2 invariant et lui est covariante.

Je fondais ainsi la théorie sur une opération à signification géométrique, portant sur les éléments linéaires $(x_1, \ldots, x_n; dx_1, \ldots, dx_n)$ de l'espace ponctuel, et dont je donnais une interprétation au moyen des géodésiques issues d'un point. C'était, en fait, étendre simultanément à tout l'espace le *transport parallèle* que M. Levi-Civita avait défini, quelques mois auparavant, dans une publication que j'ignorais alors.

Formant $\mathcal{G}f$ pour deux systèmes $\xi^i = \xi^i_{(1)}$, $\xi^i = \xi^i_{(2)}$, et effectuant le crochet $(\mathcal{G}_1 f, \mathcal{G}_2 f)$ des deux transformations ainsi obtenues, j'obtenais une transformation infinitésimale nouvelle, *dérivée* de $\mathcal{G} f$,

$$\mathcal{G}' f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{(1)}^{i} \xi_{(2)}^{j} \cdot \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ij,h}^{k} \, dx_h \frac{\partial f}{\partial dx_k}, \tag{3}$$

qui laisse aussi le ds^2 invariant et lui est aussi covariante. Elle conduit immédiatement au covariant de *courbure* de Riemann, et donne la signification géométrique de la notion de courbure par la simple application de l'interprétation donnée par Sophus Lie pour le crochet de deux transformations infinitésimales quelconques.

On voit donc que la considération du groupe infini des transformations infinitésimales d'éléments linéaires, qui laissent le ds^2 invariant, joue un rôle capital dans la géométrie de Riemann : *pseudo-translations* dont une famille (caractérisée, du reste, par la symétrie $A_{ih}^{k} = A_{hi}^{k}$ de ses coefficients), à $\mathcal{G} f$ pour symbole, et groupe des *pseudo-rotations*, dont le symbole dérivé $\mathcal{G}' f$ fournit une famille qui se confond dans le cas général avec ce groupe des rotations.

Bien que l'idée de transformation infinitésimale soit intervenue, plus ou moins explicitement, dans certains des travaux qui ont, au cours de ces dernières années, enrichi et étendu le champ de la géométrie de Riemann, il ne me semble pas que la forme précise, rappelée ci-dessus, y ait été mise en évidence, ni que l'on ait tiré parti, comme j'avais essayé de le faire, des ressources que l'algorithme créé par Sophus Lie peut offrir. Aussi ai-je pensé qu'un exposé systématique de ma méthode pouvait encore présenter quelque intérêt, dût-il se limiter à un ensemble de résultats classiques ou connus, quant au fond, pour la plupart.

2. La géométrie différentielle générale ayant comme objets premiers de son étude les points et les éléments linéaires dans leurs rapports avec les multiplicités ponctuelles, il est dans la nature des choses d'essayer de la fonder sur la considération du groupe infini des transformations d'éléments linéaires qui ne dissocient ni les éléments linéaires appartenant à un même point, ni les éléments linéaires appartenant, en un même point, à une même multiplicité ponctuelle. Les transformations infinitésimales de ce groupe, qui seront à étudier d'abord, sont de la forme générale *linéaroïde*

$$(4)\qquad Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x_i, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A^k_h(x_1, \ldots, x_n)\, dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx_k}.$$

La première partie de notre exposition se rapportera donc à la théorie de telles transformations; la seconde contiendra les applications à la géométrie de Riemann. Voici quelques indications sur les notions qui s'introduisent dans cette étude.

La nécessité d'employer, pour assurer un sens géométrique à ces notions, des symboles analytiques ayant, vis-à-vis des changements de coordonnées, des lois de covariance simples, conduit à envisager séparément les transformations *locales* (n° **4**)

$$(\xi^1 = \xi^2 = \ldots = \xi^n = 0),$$

qui laissent chaque point en repos, et les familles de transformations ayant un symbole général du type (1), étant supposé que les ξ^i y sont indéterminés et que les A^k_{ih} y sont des fonctions données des x. Nous donnons à une telle famille (qui correspond à ce qu'on a nommé précédemment, en géométrie différentielle dite *affine*, *transport parallèle*, *Uebertragung*, etc.), le nom de *système transitif*, parce que le déplacement des points y est entièrement arbitraire (n° **5**). Un système transitif est dit *complet* (n^{os} **6** et **7**), quand son symbole, égalé à zéro, fournit un système complet d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles : cela revient à dire qu'il admet pour invariants n expressions de Pfaff indépendantes. Ces systèmes complets se rattachent à la géométrie de Riemann et fournissent la solution du problème du *parallélisme absolu* ou *parallélisme à distance* (*Fern-Parallelismus* de M. Einstein).

Un système transitif est dit *ponctuel*, s'il contient n transformations ponctuelles divergentes (prolongées). A chaque système transitif est associé son *réciproque*, qui s'en déduit en remplaçant A^k_{ih} par A^k_{hi} dans son symbole : il se confond avec lui s'il est *symétrique* ($A^k_{ih} = A^k_{hi}$). Le réciproque d'un système complet est ponctuel, et réciproquement, et il y a entre les éléments qui définissent deux systèmes réciproques dans ce cas (invariants et transformations infinitésimales) des relations remarquables.

Si un système transitif est à la fois complet et ponctuel, il en est de même de son réciproque, et ces deux systèmes sont respectivement issus des deux groupes paramétriques associés à une même structure de groupe continu fini. On est ainsi conduit aux éléments de la *géométrie des espaces de groupe*, créée par MM. Cartan et Schouten.

Les *trajectoires principales* d'un système transitif, qui deviennent les géodésiques pour le système transitif *géodésique* (1) dans la géométrie de Riemann, sont introduites et étudiées aux n^{os} **10** et **11**. Au n° **12** est défini et étudié le *dérivé* d'un système transitif, dont la définition a été donnée plus haut pour le système géodésique (1).

Toute cette théorie s'apparente, au fond, à la théorie des *connexions* due à M. Cartan, et il serait facile d'étendre à celle-ci l'application de notre méthode. Mais nous avons tenu à rester dans ce travail au point de vue strict des éléments linéaires. Notre méthode évite, du reste, l'introduction de systèmes de références auxiliaires attachés à chaque point de l'espace.

I. — Sur la géométrie différentielle.

1. *L'espace ponctuel et ses éléments différentiels.* — L'espace à n dimensions est un lieu de points dont chacun est individualisé par les valeurs numériques attribuées à n coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, le mode de définition de ces coordonnées restant, du reste, arbitraire. La notion de fonction permet d'y considérer, d'une part, les multiplicités (ou lieux analytiques) à 1, 2, 3, ..., $(n-1)$ dimensions, pour lesquelles les coordonnées sont des fonctions déterminées de certaines variables indépendantes, et, d'autre part, les fonctions de point, c'est-à-dire des fonctions déterminées des coordonnées (considérées comme des variables indépendantes).

La notion de dérivée conduit à adjoindre à chaque point de l'espace les éléments linéaires des lignes (multiplicités à une dimension), issues de ce point, et les gradients en ce point des diverses fonctions de point.

Les composantes [1], $dx_i = a^i$, de tout élément de ligne issu du point x_i et les composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i$ du gradient de toute fonction de point $f(x_1, \ldots, x_n)$, pris en ce même point, sont assujetties respectivement dans tout changement de coordonnées

$$(1) \qquad y_k = \Phi_k(x_1, \ldots, x_n), \qquad x_k = \Psi_k(y_1, \ldots, y_n),$$

aux formules de contrevariance et de covariance [2],

$$(2) \qquad b^k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} a^l, \qquad a^k = \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_l} b^l,$$

$$(3) \qquad q_k = \frac{\partial \Psi_l}{\partial y_k} p_l, \qquad p_k = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} q_l,$$

liées les unes aux autres par la loi de contragrédience qui exprime l'invariance de la différentielle totale

$$(4) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = p_l a^l.$$

Ces formules permettent, suivant la conception de S. Lie, de considérer des *éléments linéaires* a^i et des *éléments de gradience* p^i, associés à chaque point x_i, indépendamment des lignes ou des scalaires qui ont pu leur donner naissance.

L'invariant $p_i a^i$ pourra s'appeler le *produit absolu* des deux éléments p_i et a^i (d'espèces différentes).

On a ainsi introduit les éléments constitutifs de ce que l'on pourrait appeler l'*espace différentiel*.

2. *Transformations ponctuelles.* — On peut, d'autre part, considérer le système [(1), (2), (3)] comme faisant correspondre, dans un même système de coordonnées, à chaque point (x), à chaque élément

(1) Pour abréger, nous omettons ici l'indication ($i = 1, 2, n, \ldots, n$) et nous ferons de même dans la suite pour les cas analogues, tels que ceux des formules (1), (2), (3).

(2) Nous employons ici les dénominations du calcul absolu de Ricci ; nous utiliserons les indices supérieurs et inférieurs suivant l'usage de ce calcul; et les sommations seront indiquées par la répétition des indices [(par exemple, dans la formule (4)]. Il faut, cependant, observer que les indices des scalaires. tels que x_i, y_i, Φ_i, Ψ_i, ..., n'ont pas une signification de contrevariance.

linéaire (x, a), à chaque élément de gradience (x, p), respectivement un point (y), un élément linéaire (y, b), un élément de gradience (y, q). On a donc ainsi une transformation des points et des éléments différentiels de l'espace qui change les éléments linéaires de toute ligne en éléments linéaires d'une même ligne et les éléments de gradience de toute fonction en éléments de gradience d'une même fonction.

C'est, d'après S. Lie, une *transformation ponctuelle prolongée;* nous dirons, pour abréger, une *transformation ponctuelle.*

Une *transformation ponctuelle infinitésimale* (prolongée) aura pour symbole général, d'après les règles de calcul posées par S. Lie,

$$(5) \qquad \overline{X}f = \xi^i(x, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} a^k \frac{\partial f}{\partial a^j} - \frac{\partial \xi^h}{\partial x_l} p^h \frac{\partial f}{\partial p_l}.$$

Si on la limite, comme ce sera le cas le plus fréquent, à ce qui concerne les éléments linéaires, on aura le symbole, plus expressif,

$$(6) \qquad X^{(1)}f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + d\xi^i \frac{\partial f}{\partial dx_i},$$

où l'on a remis dx_i à la place de a^i.

Rappelons que le symbole de la transformation génératrice, uniquement ponctuelle,

$$(7) \qquad Xf = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

est invariant — comme étant du type différentielle totale — pour tout changement de coordonnées, c'est-à-dire que les ξ^i peuvent être considérés comme les composantes d'un élément linéaire attaché au point (x). Ce symbole correspond donc à un champ d'éléments linéaires.

3. *Transformations d'éléments.* — Pour sortir effectivement du cadre de la géométrie ponctuelle classique, on est conduit à considérer des transformations portant sur les éléments différentiels de l'espace, qui ne soient pas seulement des transformations ponctuelles prolongées. Nous nous limiterons à celles qui ne dissocient pas le système des éléments attachés à un même point. Nous nous imposerons, de plus, la condition que les éléments linéaires appartenant, en un point quelconque, à une même multiplicité — ayant un nombre quelconque k de dimensions, se transforment en éléments linéaires jouissant de la même propriété, et que les éléments de gradience appartenant, en un même point, à des fonctions de point liées par un nombre quelconque k de relations indépendantes se transforment en éléments de gradience jouissant de la même propriété. Nous postulerons enfin l'invariance du produit absolu $p_i a^i$.

En termes précis, les transformations considérées seront du type *linéaroïde* :

$$(8)\qquad y_k = \Phi_k(x_1, \ldots, x_n), \qquad x_k = \Psi_k(y_1, \ldots, y_n),$$

$$(9)\qquad b^k = \Phi_i^k(x_1, \ldots, x_n)a^i, \qquad a^k = \Psi_i^k(y_1, \ldots, y_n)b^i,$$

$$(10)\qquad q_k = \Psi_k^i(y_1, \ldots, y_n)p_i, \qquad p_k = \Phi_k^i(x_1, \ldots, x_n)q_i.$$

Dans ces systèmes, les équations de chaque colonne résultent de la résolution de celles de l'autre colonne : les matrices Φ_i^k et Ψ_k^i sont, par conséquent, réciproques l'une de l'autre.

Pour les transformations infinitésimales correspondant à ce type, on aura un symbole de la forme

$$\xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathrm{A}_h^k(x)a^h\frac{\partial f}{\partial a^k} + \mathrm{B}_l^j(x)p_j\frac{\partial f}{\partial p_l},$$

et l'invariance de $a^i p_i$ donne les conditions

$$\mathrm{B}_h^k = -\mathrm{A}_h^k.$$

On a donc à considérer le type

$$(11)\qquad \overline{\mathfrak{X}}f = \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathrm{A}_h^k(x)a^h\frac{\partial f}{\partial a^k} - \mathrm{A}_h^k(x)p_k\frac{\partial f}{\partial p_h}.$$

C'est l'étude de ces transformations infinitésimales que nous avons en vue; nous nous bornerons généralement à ce qui concerne les éléments linéaires,

$$(12)\qquad \mathfrak{X}f = \xi^i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathrm{A}_h^k a^h\frac{\partial f}{\partial a^k},$$

ou, avec la notation différentielle $a^i = dx_i$,

$$(13)\qquad \mathfrak{X}f = \xi^i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathrm{A}_h^k\,dx_h\frac{\partial f}{\partial\,dx_k}.$$

4. *Transformations locales.* — Nous dirons que la transformation (12) ou (13) est locale si les ξ^i sont nuls : chaque point est alors invariant et la transformation modifie seulement en chaque point les éléments linéaires issus de ce point. Son symbole est

$$(14)\qquad \mathfrak{A}f = \Lambda_h^k(x_1, \ldots, x_n)\, a^h \frac{\partial f}{\partial a^k} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{A}f = \Lambda_h^k\, dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx'_n},$$

et l'on remarquera que, par un changement de coordonnées (1), (2), on a

$$\frac{\partial f}{\partial a^k} = \frac{\partial f}{\partial b_i}\cdot\frac{\partial b^i}{\partial a^k} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial b^i};$$

de sorte que les $p'_k = \frac{\partial f}{\partial a^k}$ et les $q'_i = \frac{\partial f}{\partial b^i}$ sont liés par les formules (3). En d'autres termes, les Λ_h^k se transforment, par un changement de coordonnées, de manière à assurer l'invariance de la forme bilinéaire

$$(15)\qquad \mathfrak{A} = \Lambda_h^k\, a^h p'_k.$$

Imaginons qu'on applique $\mathfrak{A}f$ à un élément d'intégrale multiple d'ordre n, $\Omega = M(x_1, \ldots, x_n)[dx_1 dx_2 \ldots dx_n]$. Il viendra

$$(16)\qquad \mathfrak{A}(\Omega) = \Omega . \mathrm{H} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{H} = \Lambda_i^i.$$

Or, un changement de coordonnées multiplie Ω par un scalaire et laisse $\mathfrak{A}f$ invariant; donc $\mathrm{H} = \frac{\mathfrak{A}(\Omega)}{\Omega}$ est invariant.

On trouve ainsi l'invariant bien connu, $\mathrm{H} = \Lambda_i^i$, de la forme bilinéaire (15); de là, comme l'on sait, la règle classique de la *saturation des indices.* Nous en avons ici une interprétation simple par la formule (16), toute forme bilinéaire du type (15) pouvant être interprétée comme le symbole d'une transformation (14).

Remarquons que les $\frac{\partial f}{\partial p_h}$ se transforment, par un changement de coordonnées, comme les a^h; on peut donc aussi assimiler la forme (15), aux notations près, au symbole d'une transformation infinitésimale (locale),

$$\overline{\mathfrak{A}}f = \Lambda_h^k p_k \frac{\partial f}{\partial p_h},$$

opérant sur les éléments de gradience.

5. *Systèmes transitifs.* — Revenons à la transformation générale (12) et soumettons-la à un changement de coordonnées [(1), (2)]. La partie ponctuelle $\xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ prend une forme analogue $\eta^i \frac{\partial f}{\partial y_i}$, et l'on obtient l'expression

$$\mathfrak{X}f = \eta^i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \, \partial x_h} \xi^i a^h + \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \Lambda^i_h a^h \right) \frac{\partial f}{\partial b^k}, \tag{17}$$

où il resterait à remplacer les ξ^i par leurs valeurs

$$\xi^i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} \eta^j \tag{18}$$

et à tenir compte des équations (1) et (2), de manière qu'il n'y figure plus que les variables y_i et b^i.

Dans l'étude qui suivra, on considérera les ξ^i comme composantes d'éléments linéaires indéterminés. A ce point de vue, la transformation (17) ne serait plus du type (13). Pour assurer l'invariance de forme, nous mettrons partout les ξ^i en facteurs, en écrivant

$$\mathfrak{X}f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Lambda^k_{ih} \xi^i a^h \frac{\partial f}{\partial a^k} \tag{19}$$

ou encore

$$\mathfrak{X}f = \xi^i \mathfrak{X}_i f, \qquad \mathfrak{X}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Lambda^k_{ih} a^h \frac{\partial f}{\partial a^k}. \tag{20}$$

Les Λ^k_{ih} étant des fonctions (des x_j) données, et les ξ^i étant des fonctions (des x_j) indéterminées, on a ainsi un système de transformations d'éléments dans lequel la partie ponctuelle est arbitraire, mais où la variation des éléments linéaires est connue dès que l'on fixe la loi de déplacement des points.

Nous dirons que c'est un *système transitif de transformations d'éléments*, ou, par abréviation, un *système transitif*. Le symbole $\mathfrak{X}f$ de la formule (19) sera dit le symbole du système. Pour y marquer le caractère d'éléments linéaires de $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ et de $(a^1, \ldots, a^n)$, nous remplacerons souvent ξ^i par δx_i et a^i par dx_i. Nous aurons ainsi

$$\mathfrak{X}f = \delta x_i . \mathfrak{X}_i f, \qquad \mathfrak{X}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Lambda^k_{ih} \, dx_h \frac{\partial f}{\partial \, dx_k}, \tag{21}$$

ou encore

$$(22)\qquad \mathfrak{X}f = \delta f + A^k_{ih}\,\delta x_i . dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx_h}, \qquad \left(\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right).$$

En vertu de la formule (17), tout changement de coordonnées pourra se faire dans $\mathfrak{X}f$ séparément dans la partie ponctuelle et la partie différentielle, à condition d'ajouter ensuite à cette dernière la partie complémentaire

$$(23)\qquad \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i\,\partial x_h}\xi^i a^h \frac{\partial f}{\partial b^k}.$$

La symétrie de cette dernière, relativement aux rôles respectifs qu'y jouent les ξ^i et les a^i, $\left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_h} = \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_h \partial x_i}\right)$, entraîne la covariance à $\mathfrak{X}f$ de la transformation

$$(24)\qquad \mathfrak{X}_0 f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + A^k_{ih}\xi^h a^i \frac{\partial f}{\partial a^k},$$

qu'on en déduit en échangeant les rôles des indices inférieurs des coefficients A^k_{ih}. Les systèmes $\mathfrak{X}f$ et $\mathfrak{X}_0 f$ seront dits *réciproques* l'un de l'autre.

La somme et la différence de $\mathfrak{X}f$ et de son covariant $\mathfrak{X}_0 f$ fournissent deux autres transformations covariantes à $\mathfrak{X}f$, à savoir :

$$(25)\qquad \mathcal{S}f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}(A^k_{ih} + A^k_{hi})\xi^i a^h \frac{\partial f}{\partial a^k},$$

$$(26)\qquad \mathcal{Q}f = (A^k_{ih} - A^k_{hi})(\xi^i a^h - \xi^h a^i)\frac{\partial f}{\partial a^k}.$$

Il en résulte que la propriété éventuelle de symétrie des A^k_{ih}, par rapport aux indices inférieurs ($A^k_{ih} = A^k_{hi}$), est une propriété invariante pour $\mathfrak{X}f$. Dans ce cas, $\mathfrak{X}f$ est identique à son réciproque $\mathfrak{X}_0 f$, et l'on dira que le système $\mathfrak{X}f$ est *symétrique*.

6. *Équipollence et parallélisme.* — Pour un choix déterminé des fonctions $\xi^i(x_1, \ldots, x_n)$, la transformation (19) définit un groupe à un paramètre. Désignons le paramètre canonique de ce groupe par t. Lorsque t varie, le point x^i décrit une trajectoire du groupe $\xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, et les éléments linéaires a^i de ce point se déplacent le long de cette trajectoire suivant une loi déterminée; deux éléments qui dérivent ainsi l'un de l'autre seront dits *équipollents* vis-à-vis de la transformation $\mathfrak{X}f$ considérée et leurs directions seront dites *parallèles* relativement à cette transformation.

Si l'un d'eux est $[(x_i)_0, (a^i)_0]$, tous les éléments qui lui sont équipollents s'obtiennent par l'intégration des équations

$$(27) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \xi^i(x_1, \ldots, x_n), \qquad \frac{da^k}{dt} = \mathrm{A}^k_{ih}\xi^i a^h,$$

avec les conditions initiales

$$(28) \qquad x_i = (x_i)_0, \qquad a^i = (a^i)_0 \qquad \text{pour } t = 0,$$

et correspondent ainsi aux diverses valeurs de t.

On peut, du reste, d'une infinité de manières, choisir les ξ^i de manière que l'une des trajectoires soit une courbe donnée C,

$$(29) \qquad x_i = \varphi_i(t) \qquad \text{avec} \qquad x_i = (x_i)_0 \qquad \text{pour } t = 0,$$

et la variation des éléments linéaires, le long de cette courbe C, est définie par les équations, déduites de (27),

$$(30) \qquad \frac{da^k}{dt} = \mathrm{A}^k_{ih} a^h \frac{dx_i}{dt} = \mathrm{A}^k_{ih} a^h \varphi'_i(t) \qquad \text{avec} \qquad a^k = (a^k)_0 \qquad \text{pour } t = 0.$$

L'équipollence et le parallélisme sont ainsi définis, pour chaque courbe donnée C, par *cheminement* le long de cette courbe.

Supposons que cette équipollence et ce parallélisme aient un caractère *absolu* (¹) : elle s'exprimera par des formules en termes finis

$$(a^h)_0 = \mathrm{F}^h[x_1, \ldots, x_n; a^1, \ldots, a^n \,|\, (x_1)_0, \ldots, (x_n)_0],$$

et qui pourront s'écrire aussi, par raison de symétrie,

$$a^h = \mathrm{F}^h[(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0; (a^1)_0, \ldots, (a^n)_0 \,|\, x_1, \ldots, x_n].$$

Deux éléments équipollents à un troisième étant alors équipollents entre eux, la condition d'équipollence de (x_i, a^i) et de (y_i, b^i) pourra s'écrire, quels que soient $(x_1)_0, \ldots, (x_n)_0$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}^h[(x_1, \ldots, x_n; a^1, \ldots, a^n \,|\, (x_1)_0, \ldots, (x_n)_0] \\ &= \mathrm{F}^h[y_1, \ldots, y_n; b^1, \ldots, b^n \,|\, (x_1)_0, \ldots, (x_n)_0]. \end{aligned}$$

(¹) C'est le problème du *parallélisme à distance* (*Fern parallelismus*), étudié par M. A. Einstein (*Sitzungsberichte* de Berlin, 1928, p. 217).

Si l'on particularise (arbitrairement) les $(x_i)_0$, on obtiendra des conditions de la forme

$$(31) \qquad \mathcal{J}_h(x_1, \ldots, x_n; a^1, \ldots, a^n) = \mathcal{J}_h(y_1, \ldots, y_n; b^1, \ldots, b^n);$$

de sorte que $\mathfrak{X}f$ admettra, quels que soient les ξ^i, les invariants $\mathcal{J}_h$. Si, réciproquement, $\mathfrak{X}f$ admet, quels que soient les ξ^i, n invariants $\mathcal{J}_h$, fonctions des a^i indépendantes, les équations (31) définissent, en termes finis, l'équipollence de deux éléments linéaires relativement à toute transformation du système.

Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'un système transitif $\mathfrak{X}f$ définisse un parallélisme absolu, est que le système $\mathfrak{X}_i f = 0$ soit, au sens de Clebsch et de Mayer, un système complet. Cela revient à dire que le crochet de deux quelconques des $\mathfrak{X}f$ (pour deux choix des ξ^i) est encore de la forme $\mathfrak{X}f$, c'est-à-dire que $\mathfrak{X}f$ est, les ξ^i étant indéterminés, la transformation générale d'un *groupe infini* de transformations infinitésimales. Les équations finies de ce groupe seront, du reste, les Φ_i étant des fonctions arbitraires,

$$(32) \quad y_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad \mathcal{J}_h(x_1, \ldots, x_n; a^1, \ldots, a^n) = \mathcal{J}_h(y_1, \ldots, y_n; b^1, \ldots, b^n).$$

7. *Systèmes transitifs complets*. — Dans le cas auquel nous venons d'être conduits, où $\mathfrak{X}f$ définit un groupe, nous dirons que le système transitif $\mathfrak{X}f$ est *complet*. Les conditions analytiques, pour qu'il en soit ainsi, sont $(\mathfrak{X}_i f, \mathfrak{X}_k f) = 0$, c'est-à-dire d'après les expressions (20) des $\mathfrak{X}_i f$, les équations, dont la forme est bien connue,

$$(33) \qquad \frac{\partial A^k_{jh}}{\partial x_i} - \frac{\partial A^k_{ih}}{\partial x_j} + A^s_{ih} A^k_{js} - A^s_{jh} A^k_{is} = 0.$$

Elles expriment, naturellement, la condition pour que le système d'équations aux différentielles totales, associé au système $\mathfrak{X}_i f = 0$,

$$(34) \qquad da^k = A^k_{ih} a^h \, dx_i,$$

soit complètement intégrable.

Remarquons, d'autre part, que, d'après le n° **5**, les équations (32), étant un cas particulier des équations [(8), (9)], doivent être linéaires homogènes par rapport aux a^i et aux b^i. Donc, les invariants $\mathcal{J}_h$ doivent pouvoir être choisis linéaires et homogènes.

Cela résulte de la forme linéaire homogène des $\mathfrak{X}_i f$. On le vérifie, par exemple, en cherchant un invariant des $\mathfrak{X}_i f$ de la forme

$$J = p_k(x_1, \ldots, x_n)a^k. \tag{35}$$

Cela donne les conditions

$$\frac{\partial p_h}{\partial x_i} + \Lambda^k_{ih} p_k = 0, \tag{36}$$

qui s'intègrent par l'intégration du système homogène

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \Lambda^k_{ih} p_k \frac{\partial f}{\partial p_h} = 0, \tag{37}$$

dont les conditions d'intégrabilité sont précisément les équations (33). On remarquera, du reste, qu'il est l'adjoint du système $\mathfrak{X}_i f = 0$ et aussi que ses premiers membres donnent la transformation des éléments de gradience qui correspond aux $\mathfrak{X}_i f$.

Les systèmes transitifs complets sont donc caractérisés par l'existence de n invariants linéaires indépendants :

$$u^i = u^i_k(x_1, \ldots, x_n)a^k \qquad \text{ou} \qquad u^i = u^i_k(x_1, \ldots, x_n)\,dx_k. \tag{38}$$

Il en résulte que *tout système transitif complet laisse invariante une infinité de formes quadratiques différentielles* $g_{ij}\,dx_i\,dx_j$, dont l'expression générale est, avec les notations ci-dessus, $c_{ij}u^i u^j$, les c_{ij} étant des constantes arbitraires. La théorie précédente conduit donc à des géométries riemanniennes. La réciproque sera étudiée plus loin (§ II, n° **13**).

Les équations (36) montrent, de plus, que si $\mathfrak{X}f$ est symétrique ($\Lambda^k_{ih} = \Lambda^k_{hi}$), on a $\frac{\partial p_h}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_h}$, de sorte que ce cas est celui où les expressions de Pfaff u^i invariantes sont des différentielles totales exactes, $u^i = d\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Si l'on prend alors les $z_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ pour nouvelles coordonnées ponctuelles, le système $\mathfrak{X}f$ se réduira à la forme $\zeta^i \frac{\partial f}{\partial z_i}$, où les composantes des éléments linéaires dz_i ne figurent plus, et le parallélisme est alors euclidien (si l'on interprète les coordonnées z_i comme des coordonnées cartésiennes), puisque ces composantes demeurent constantes par les transformations du système. Les formes quadratiques invariantes sont ainsi devenues également du type euclidien $ds^2 = c_{ij}\, dz_i\, dz_j$, les c_{ij} étant constants.

Les systèmes transitifs symétriques et complets sont donc réductibles au type euclidien $\left(\mathfrak{X}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \mathfrak{X} f = \delta f\right)$ *par un changement de coordonnées convenablement choisi.*

La réciproque est évidente, les deux propriétés de symétrie et d'intégrabilité étant invariantes (n° **5**) par les changements de coordonnées.

8. *Systèmes transitifs ponctuels.* — Dans un système $\mathfrak{X} f$ peuvent figurer des transformations ponctuelles prolongées. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les ξ^i soient choisis de manière à satisfaire aux conditions [n° **2**, équation (6)]

$$A^k_{hi} \xi^h\, dx_i = d\xi^k. \tag{39}$$

Le cas ne se présentera donc pas, en général. Si toutefois ces équations (39) sont complètement intégrables, leur solution générale sera, en raison de leur caractère linéaire, de la forme

$$\xi^h = C_j \xi^h_j,$$

les ξ^h_j étant n solutions à déterminant non nul et les C_j étant des constantes arbitraires. Il y aura donc n transformations ponctuelles, $X_j f = \xi^h_j \frac{\partial f}{\partial x_h}$, qui, prolongées, feront partie du système $\mathfrak{X} f$, et elles suffiront à le définir. Toute autre transformation ponctuelle appartenant à $\mathfrak{X} f$ sera de la forme $C_j X_j f$, les C_j étant des constantes. Nous dirons, dans ce cas, que $\mathfrak{X} f$ est un *système transitif ponctuel.*

Les équations (39) ne diffèrent, du reste, des équations (34), les inconnues ξ^h remplaçant les inconnues a^h, que par l'intervention des indices inférieurs dans les coefficients A_{ih}. On conclut donc que, *pour qu'un système $\mathfrak{X} f$ soit un système ponctuel, il faut et il suffit que son réciproque soit complet.*

Pour préciser la liaison entre deux tels systèmes, supposons que $\mathfrak{X} f$ soit complet et soit u^i, équations (38), ses invariants. L'identité

$$df = u^i . Y_i f, \qquad Y_i f = \eta^j_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{40}$$

définit n transformations infinitésimales ponctuelles $X_i f$. Elles font partie du système transitif (ponctuel)

$$(41)\qquad \mathcal{Y}f = \partial f + u^i(\delta).d\eta_i^j \frac{df}{\partial\, dx_j};$$

car $u^i(\delta)$ indiquant qu'on a remplacé dans u^i les dx_i par δx_i, on a, d'après (40),

$$\delta f = u^i(\delta).Y_i f,$$

et, par suite,

$$\mathcal{Y}f = u^i(\delta)Y_i^{(1)}f$$

(notations du n° **2**).

Ceci posé, prenons les u^i comme variables à la place des dx_i dans $\mathfrak{X}f$: on obtient $\mathfrak{X}f = \delta f$ puisque les u^i sont des invariants de $\mathfrak{X}f$. Revenons ensuite aux variables dx_i : il suffit de se servir des formules, tirées de (40),

$$dx_j = u_i.\eta_i^j,$$

et d'appliquer aux deux membres l'opération $\mathfrak{X}f$. Cela donne

$$\mathfrak{X}\,dx_j = u^i.\mathfrak{X}\eta_i^j = u^i.\delta\eta_i^j,$$

puisque $\mathfrak{X}u^i = 0$. Il vient donc la formule

$$(42)\qquad \mathfrak{X}f = \delta f + u^i(d).\delta\eta_i^j \frac{\partial f}{\partial\, dx_j},$$

qui se déduit de (41) par l'échange de d et de δ dans le coefficient de $\dfrac{\partial f}{\partial\, dx_j}$.

On voit donc que $\mathfrak{X}f$ et $\mathcal{Y}f$ sont réciproques, c'est-à-dire que $\mathcal{Y}f$ n'est autre que le réciproque $\mathfrak{X}_0 f$ de $\mathfrak{X}f$.

En résumé, si les u^i sont les invariants linéaires d'un système transitif complet $\mathfrak{X}f$, l'identité (40) définit les transformations ponctuelles $Y_i f$ appartenant à son réciproque (qui est alors ponctuel), et inversement, si les $Y_i f$ appartiennent à un système transitif ponctuel $\mathcal{Y}f$, l'identité (40) définit les invariants u^i du système réciproque (qui est alors complet).

9. *Systèmes complets ponctuels.* — Si $\mathfrak{X}f$ est à la fois complet et ponctuel, il résulte de ce qui précède qu'il en est de même de son réciproque. Conformément aux notations du numéro précédent, supposons que celui-ci, $\mathfrak{Y}f$, soit défini par les transformations ponctuelles prolongées $Y_i^{(1)}f$. Comme il est complet, il contient aussi les transformations $(Y_i^{(1)}f, Y_j^{(1)}f)$. Or, celles-ci sont les prolongements des transformations ponctuelles (Y_if, Y_jf), et, comme toute transformation ponctuelle de $\mathfrak{Y}f$ est une combinaison à coefficients constants des Y_kf, on a des identités à coefficients c_{ij}^k constants

$$(Y_if, Y_jf) = c_{ij}^k Y_kf. \tag{43}$$

Donc, $\mathfrak{Y}f$ est issu d'un groupe continu fini, simplement transitif, $Y_1f, \ldots, Y_nf$, et, de même, son réciproque $\mathfrak{X}f$ est issu d'un groupe continu fini, simplement transitif, $X_1f, \ldots, X_nf$.

On va constater que ces deux groupes

$$X_kf = \xi_k^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad \text{et} \qquad Y_if = \eta_i^j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

sont, au sens donné à ce terme par S. Lie, deux groupes simplement transitifs réciproques.

Formons, en effet, le crochet des deux membres de l'identité (40) avec la transformation X_kf. On a, pour le premier membre, en utilisant l'identité (40),

$$(df, X_kf) = d\xi_k^j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = d\xi_k^j \cdot u_j^i Y_if = \left(d\xi_k^j \cdot \frac{\partial u^i}{\partial\, dx_j}\right) Y_if,$$

et l'on a, pour le second membre,

$$(u^iY_if, X_kf) = -X_ku^i . Y_if + u^i(Y_if, X_kf).$$

On obtient ainsi l'identité

$$\left(X_ku^i + d\xi_k^j \frac{\partial u^i}{\partial\, dx_j}\right) Y_if = u^i(Y_if, X_kf).$$

Le coefficient de Y_if au premier membre est $X_k^{(1)}u^i$; il est donc nul, et, comme les u^i sont indépendants, on conclut que les coefficients des u^i dans le second membre sont nuls. On a donc les identités

$$(Y_if, X_kf) = 0,$$

qu'il s'agissait de vérifier.

En résumé, *tout système $\mathfrak{X}f$ qui est à la fois complet et ponctuel est issu d'un groupe simplement transitif, et son réciproque qui est, lui aussi, complet et ponctuel, est issu du groupe simplement transitif réciproque du précédent.*

Rappelons que deux groupes simplement transitifs réciproques ont la même structure, et peuvent être considérés comme les deux *groupes paramétriques* de cette structure. On est donc ici conduit à la géométrie des espaces de groupes, étudiée par M. Cartan.

10. *Trajectoires principales.* — Toute courbe est trajectoire d'une infinité de transformations $\xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, mais ses éléments linéaires ne sont pas, en général, les diverses positions que prend l'un d'entre eux par l'une quelconque des transformations $\mathfrak{X}f$ correspondantes. En d'autres termes, le système des éléments linéaires d'une courbe ne se trouve pas, en général, constituer la *trajectoire*, au sens de Lie, d'une transformation d'éléments $\mathfrak{X}f$.

On dira qu'une courbe est une *trajectoire principale* du système transitif $\mathfrak{X}f$, si, considérée comme lieu de ses éléments linéaires (convenablement précisés), elle constitue une trajectoire de l'une des transformations infinitésimales $\mathfrak{X}f$. Cela revient à dire qu'il existe une transformation $\mathfrak{X}f$, vis-à-vis de laquelle les éléments linéaires de la courbe sont équipollents.

La condition à remplir pour cela est que la courbe soit définie par des équations $x_i = \varphi_i(t)$, telles que le système

$$(44) \qquad x_i = \varphi_i(t), \qquad dx_k = \varphi'_k(t)\,dt,$$

qui donne ses éléments linéaires soit invariant par une transformation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Lambda^k_{ih} \xi^i \,.\, dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx_k}.$$

Le système (44) devra donc avoir pour conséquences les équations

$$\xi^i = \varphi'_i(t), \qquad \Lambda^k_{ih} \xi^i\, dx_h = \varphi''_k(t)\,dt.$$

En éliminant les ξ^i, on a les équations de condition

$$\varphi''_k(t) = \mathrm{A}^k_{ih}\varphi'_i(t)\varphi'_h(t).$$

Les trajectoires principales de $\mathfrak{X}f$ sont donc les intégrales du système du second ordre

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_k}{dt} = \mathrm{A}^k_{ih}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_h}{dt}. \tag{45}$$

La variable t, paramètre canonique du groupe $\mathfrak{X}f$ qui a l'ensemble des éléments (44) pour trajectoire, est, quand la courbe est donnée, définie à une transformation linéaire près, $t' = \alpha t + \beta$, à coefficients constants; elle peut être considérée comme mesurant la *longueur* des arcs de la trajectoire principale considérée (à partir du point $t = 0$); l'unité de longueur reste arbitraire pour chaque trajectoire principale.

Il passe, par chaque point x^i, une trajectoire principale et une seule, tangente en ce point à une direction dx^i arbitraire donnée.

L'ensemble des trajectoires principales ne dépend que des coefficients $\frac{1}{2}(\mathrm{A}^k_{ih} + \mathrm{A}^k_{hi})$ des formes quadratiques figurant aux seconds membres des équations (45). Les trajectoires principales sont donc les mêmes pour tous les systèmes transitifs qui ont un même système symétrique associé $\mathfrak{S}f$ [équation (25)]. Elles sont, en particulier, les mêmes pour un système $\mathfrak{X}f$ et pour son réciproque $\mathfrak{X}_0 f$.

Si l'on se donne inversement un système (45), où l'on pourra supposer que les A^k_{ih} satisfont à la condition de symétrie $\mathrm{A}^k_{ih} = \mathrm{A}^k_{hi}$, on aura immédiatement le système transitif symétrique

$$\mathfrak{X}f = \partial f + \mathrm{A}^k_{ih}\,\partial x_i\,dx_h\frac{\partial f}{\partial\,dx_k}, \tag{46}$$

qui a pour trajectoires principales les courbes intégrales de ce système (45) donné.

11. *Transformations principales d'un système transitif.* — On peut appeler *transformations principales* du système $\mathfrak{X}f$ celles qui ont pour trajectoires (au sens de Lie) des trajectoires principales du système.

La condition, pour qu'il en soit ainsi, est que le système

$$(47) \qquad dx_k = \xi^k(x_1, \ldots, x_n)\,dt,$$

où t est une variable inaltérée par $\mathfrak{X}f$, admette $\mathfrak{X}f$. Les transformations principales sont donc définies par le système (de Kowalewski)

$$(48) \qquad \xi^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} = \Lambda^k_{ih} \xi^i \xi^h.$$

Il y en a donc dans tout système transitif, et l'on pourra même, en théorie, supposer que le système soit défini par n transformations principales; la transformation générale serait ainsi une combinaison, à coefficients arbitraires (fonctions des x^i) de ces n transformations principales. Si celles-ci avaient pour symboles

$$Z_j f = \xi^i_j \mathfrak{X}_i f,$$

on aurait, en désignant par λ^i_j la matrice réciproque de la matrice ξ^i_j,

$$\mathfrak{X} f = \lambda^j_i \,\delta x_i . Z_j f.$$

Remarquons que toute transformation ponctuelle qui appartient au système $\mathfrak{X}f$ est évidemment une transformation principale du système; et que si $\mathfrak{X}f$ admet un invariant $\mathfrak{J}(x_1, \ldots, x_n; a', \ldots, a^n)$, l'équation

$$(49) \qquad \mathrm{J}\left(x_1, \ldots, x_n; \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) = \text{const.}$$

sera une intégrale première du système différentiel (45) des trajectoires principales.

Si en particulier le système $\mathfrak{X}f$ est complet (n° **7**), ses trajectoires principales seront définies par le système

$$(50) \qquad u^j_i\,dx_i = C^j\,dt, \qquad C^j = \text{const.},$$

fourni par les invariants linéaires de $\mathfrak{X}f$.

On a vu (n° **8**) que, dans ce cas, le système $\mathfrak{Y}f$, réciproque à $\mathfrak{X}f$, est ponctuel. Comme il a mêmes trajectoires principales que $\mathfrak{X}f$, les transformations ponctuelles $Y_i f$ qui le définissent admettent pour trajectoires les trajectoires principales de $\mathfrak{X}f$: celles-ci sont donc, dans leur ensemble, les trajectoires du système de transformations infinitésimales $C^j . Y_j f$, les C^j étant des constantes arbitraires. Il est facile de vérifier qu'en définissant ainsi les trajectoires principales, on retomberait sur les équations (50).

En ce qui concerne, dans le même cas, les transformations principales de $\mathfrak{X}f$, on en a n, divergentes, par les formules

$$Z_j f = \eta_j^i \mathfrak{X}_i f \tag{51}$$

si, conformément aux notations du n° **8**, on a posé

$$Y_j f = \eta_j^i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Enfin, si l'on considère le cas, plus particulier encore, des systèmes complets ponctuels (n° **9**), il résulte immédiatement de ce qui précède que les trajectoires principales sont, dans leur ensemble, les diverses trajectoires de toutes les transformations infinitésimales, soit du groupe fini simplement transitif qui donne naissance au système, soit du groupe simplement transitif réciproque.

12. *Systèmes dérivés d'un système transitif.* — Le crochet de deux transformations quelconques d'un système transitif $\mathfrak{X}f$, correspondant à deux choix arbitraires $\xi^i = \delta x_i$, $\xi^i = \delta' x_i$ des indéterminées ξ^i, fournit un système de transformations infinitésimales, — du type transformations locales considéré au n° **4** — qui est covariant à $\mathfrak{X}f$, et que nous appellerons le *système dérivé* de $\mathfrak{X}f$.

Le calcul de ce crochet pour lequel les δx_i et $\delta' x_i$ sont des indéterminées constantes [1], est le suivant

$$(\delta x_i . \mathfrak{X}_i f, \delta' x_j \mathfrak{X}_j f) = \delta x_i \delta' x_j (\mathfrak{X}_i f, \mathfrak{X}_j f), \tag{52}$$

$$(\mathfrak{X}_i f, \mathfrak{X}_j f) = \Delta_{ij,h}^k a^h \frac{\partial f}{\partial a^k}, \tag{53}$$

avec

$$\Delta_{ij,h}^k = \frac{\partial A_{jh}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{ih}^k}{\partial x_j} + A_{ih}^s A_{js}^k - A_{jh}^s A_{is}^k. \tag{54}$$

[1] Si l'on traitait les δx_i et $\delta' x_i$ comme des fonctions des x_i, $\delta x_i = \xi^i(x)$, $\delta' x_i = \xi'^i(x)$, le crochet se composerait de la transformation du système $\mathfrak{X}f$ correspondant à la partie ponctuelle $\left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \xi'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ et de la transformation $\mathfrak{X}'f$ telle qu'elle est calculée dans le texte.

Le système dérivé a donc pour symbole général

$$(55)\qquad \mathfrak{X}'f = \Delta^{k}_{ij,h}\,\delta x_i \delta' x_j a^h \frac{\partial f}{\partial a^k},$$

ou, en introduisant les produits extérieurs,

$$(56)\qquad [\delta x_i \delta x_j] = \delta x_i \delta' x_j - \delta x_j \delta' x_i,$$

$$(57)\qquad \mathfrak{X}'f = \Delta^{k}_{[ij]h}[\delta x_i \delta x_j]\, dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx_k},$$

la sommation étant maintenant à effectuer relativement aux combinaisons $[ij]$ des deux indices i et j.

Sous cette dernière forme, on l'obtient facilement par le calcul symbolique suivant : on applique l'opération $\mathfrak{X}f$ au symbole $\mathfrak{X}f$ lui-même, avec les conventions

$$(58)\qquad \mathfrak{X}\delta x_i = 0, \qquad \mathfrak{X}\frac{\partial f}{\partial\, dx_k} = 0, \qquad \delta x_i \delta x_j = -\delta x_j \delta x_i.$$

On doit mettre d'abord dans $\mathfrak{X}f$ les δx_i au dernier rang, les δx nouveaux devant se placer devant eux. Voici donc le calcul : on part de

$$(59)\qquad \mathfrak{X}f = \delta f + \mathrm{A}^{k}_{ih}\, dx_h \delta x_i \frac{\partial f}{\partial\, dx_k},$$

$$(60)\qquad \mathfrak{X}\mathrm{A}^{k}_{ih} = \delta \mathrm{A}^{k}_{ih} = \frac{\partial \mathrm{A}^{k}_{ih}}{\partial x_j}\delta x_j, \qquad \mathfrak{X}\, dx_h = \mathrm{A}^{h}_{js}\, dx_s \delta x_j.$$

ce qui donne, pour le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial\, dx_k}$,

$$\frac{\partial \mathrm{A}^{k}_{ih}}{\partial x_j} dx_h . \delta x_j \delta x_i + \mathrm{A}^{k}_{ih} \mathrm{A}^{h}_{js}\, dx_s \delta x_j \delta x_i,$$

ou, en groupant les termes semblables et changeant à cet effet les lettres de sommation dans la seconde partie de cette somme,

$$\left[\left(\frac{\partial \mathrm{A}^{k}_{ih}}{\partial x_j} + \mathrm{A}^{k}_{is}\mathrm{A}^{s}_{jh}\right)\delta x_j \delta x_i + \left(\frac{\partial \mathrm{A}^{k}_{jh}}{\partial x_i} + \mathrm{A}^{k}_{js}\mathrm{A}^{s}_{ih}\right)\delta x_i \delta x_j\right] dx_h = \Delta^{k}_{[ij]h}[\delta x_i \delta x_j]\, dx_h.$$

La justification de ce calcul symbolique est donc acquise.

L'interprétation de la transformation dérivée générale (55) résulte immédiatement de l'interprétation donnée par S. Lie pour le crochet de deux transformations infinitésimales quelconques. Si l'on désigne par S et T les deux transformations

$$(61)\qquad S = Xf.\delta t, \qquad T = Yf.\delta t,$$

on a, aux infiniment petits près d'ordre supérieur,

$$(62)\qquad T^{-1}S^{-1}TS = (Xf, Yf)\,\delta t^2.$$

Dans le cas actuel,

$$(63)\qquad Xf.\delta t = \mathfrak{X}_i f.\left(\frac{\delta x_i}{\delta t}\right).\delta t, \qquad Yf.\delta t = \mathfrak{X}_j f.\left(\frac{\delta' x_j}{\delta t}\right).\delta t;$$

et la suite des déplacements infinitésimaux du point x^i, correspondant à S, T, S^{-1}, T^{-1}, le ramène à sa position initiale (les infiniment petits d'ordre supérieur au second devant être négligés), de sorte que ce point a décrit, en définitive, un circuit infiniment petit (parallélogramme infinitésimal) dans le plan des deux éléments δx_i et $\delta' x_i$. L'opération $\mathfrak{X}'f.\delta t^2$ exprime donc la *déformation* qui résulte, pour le système des éléments linéaires issus d'un même point, des modifications successives produites par l'opération infinitésimale $\mathfrak{X}f$ au cours de ce *cycle* : chaque élément étant transporté, suivant la loi donnée par $\mathfrak{X}f$, lorsque le point origine se déplace dans la direction δx_i qui détermine $\mathfrak{X}f$. Cette déformation finale est donc donnée par la transformation locale (57), qui ne dépend, comme on le voit, que de l'élément plan $[\delta x_i\,\delta x_j]$ dans lequel le cycle est décrit.

Si cette déformation est identiquement nulle, tout cycle, infiniment petit ou fini, ramène en place chaque élément linéaire; et l'on est dans le cas des systèmes transitifs complets et de l'équipollence absolue (n^{os} **6**, **7**).

Remarquons qu'on peut, du dérivé $\mathfrak{X}'f$, déduire un second dérivé $\mathfrak{X}''f$, en formant le crochet de la transformation $\mathfrak{X}f$, écrite avec des caractéristiques δ'', avec $\mathfrak{X}'f$, c'est-à-dire en appliquant l'opération symbolique $\mathfrak{X}f$, utilisée plus haut pour former $\mathfrak{X}'f$, à la transformation $\mathfrak{X}'f$ déjà obtenue; et ainsi de suite.

Les diverses transformations ainsi obtenues serviraient à résoudre le problème de l'équivalence des systèmes transitifs vis-à-vis du groupe ponctuel. Nous y reviendrons plus loin (n° **20**) dans le cas particulier des systèmes symétriques qui dominent la théorie des géométries riemanniennes, théorie dont nous allons nous occuper maintenant, en nous plaçant au point de vue des transformations infinitésimales d'éléments qui leur sont naturellement associées.

II. — Sur la géométrie de Riemann.

13. *Le groupe du ds^2 fondamental.* — La géométrie de Riemann repose sur l'introduction d'un ds^2, forme quadratique différentielle

$$ds^2 = \Sigma = g_{ij}\,dx_i\,dx_j, \tag{64}$$

qui permet de définir la longueur d'un arc de courbe et l'angle de deux courbes concourantes. Elle équivaut, en fait, à l'étude du groupe de transformations d'éléments qui laisse cette forme invariante; car ce groupe, comme nous le verrons, suffit à déterminer la forme considérée.

On se rend compte aisément de la nature de ce groupe en réduisant, *algébriquement*, Σ à une somme de carrés

$$\Sigma = u^h u^k, \qquad u^h = u_i^h\,dx_i, \tag{65}$$

et en prenant les expressions de Pfaff u^h comme variables nouvelles à la place des dx_i. Les transformations infinitésimales d'éléments, qui laissent Σ invariante, sont ainsi ramenées à la forme

$$\xi^i(x_1,\,\ldots,\,x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathrm{U}_h^k(x_1,\,\ldots,\,x_n)\,u^h\frac{\partial f}{\partial u_k}; \tag{66}$$

et les conditions pour l'invariance sont

$$\mathrm{U}_h^k u^h u^k = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{U}_h^k + \mathrm{U}_k^h = 0. \tag{67}$$

Les transformations cherchées sont donc des combinaisons linéaires arbitraires, à coefficients fonctions des x^i, des transformations

$$\mathrm{T}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \mathrm{R}_{hk} f = u^h\frac{\partial f}{\partial u_k} - u^k\frac{\partial f}{\partial u_h}. \tag{68}$$

Réciproquement, toute forme quadratique

$$\Sigma' = \gamma_{hk}\,u^h u^k, \tag{69}$$

admettant ces transformations, satisfait aux conditions

$$\frac{\partial \gamma_{hk}}{\partial x_i} = 0, \tag{70}$$

et est, relativement aux variables u^h, une fonction de $\Sigma = u^h u^h$, car les $n-1$ équations

$$u^n \frac{\partial f}{\partial u^i} - u^i \frac{\partial f}{\partial u^n} = 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]$$

forment un système complet et tous leurs invariants sont, dès lors, fonctions d'un seul.

On conclut donc que le groupe (68) n'admet pas d'autre invariant quadratique que Σ et les formes $m\Sigma$ qui s'en déduisent en multipliant Σ par un facteur m constant : remplacer Σ par $m\Sigma$ revient à changer l'unité de longueur; et il est donc juste de dire que la géométrie considérée est définie par le groupe (68).

Reste à revenir aux variables dx_i.

Pour les $T_i f$, qu'on peut grouper ensemble dans la combinaison

$$\mathfrak{X} f = \delta x_i . T_i f, \tag{71}$$

le calcul a été fait au nº **8**, et donne, avec les notations adoptées alors [équation (42)],

$$\mathfrak{X} f = \delta f + u^i . \delta \eta_i^j \frac{\partial f}{\partial\, dx_j}. \tag{72}$$

Pour les $\mathcal{R}_{hk} f$ qui constituent ce qu'on peut appeler le *groupe de rotation* de Σ, il est plus simple d'éviter le changement de variables en remarquant les solutions évidentes

$$\mathcal{R}_{ij} f = \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma}{\partial\, dx_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial\, dx_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma}{\partial\, dx_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial\, dx_i}, \tag{73}$$

qui, étant au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ indépendantes, peuvent remplacer les $\mathcal{R}_{ik} f$.

On peut, de plus, réunir ensemble les $\mathcal{R}_{ij} f$ dans le symbole invariant général

$$\mathcal{R} f = \delta x_i \delta' x_j . \mathcal{R}_{ij} f = [\delta x_i \delta x_j]\, \mathcal{R}_{(ij)} f, \tag{74}$$

ou

$$(75)\qquad \mathcal{R}f = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial\, dx_i}\delta x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial\, dx_j}\delta' x_j - \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial\, dx_i}\delta' x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial\, dx_j}\delta x_j.$$

Remarquons, d'autre part, les combinaisons suivantes, qui peuvent remplacer les $\mathcal{R}_{ij}f$,

$$(76)\qquad \mathcal{Q}^{kl} = g^{ik}g^{jl}\mathcal{R}_{ij} = \left(g^{jl}\frac{\partial f}{\partial\, dx_j}\right)dx_k - \left(g^{ik}\frac{\partial f}{\partial\, dx_i}\right)dx_l,$$

les g^{ij} étant le système de coefficients réciproque de celui des g_{ij}.

14. *Systèmes de parallélisme.* — La formule (72) donne, pour chaque décomposition de Σ en carrés, un système transitif complet laissant Σ invariante; et, par conséquent, un mode de parallélisme absolu (n° **6**) conservant les longueurs et les angles des éléments linéaires.

On obtient ainsi tous les systèmes transitifs complets qui laissent Σ invariante; car tout système transitif complet se met (n° **8**) sous la forme (72), où sont mis en évidence ses invariants linéaires u^i, et les seules formes quadratiques invariantes par le système sont les formes à coefficients constants (n° **7**) $C_{ij}u^iu^j$. Si donc (72) laisse Σ invariante, c'est que Σ est de ce type; mais on peut supposer que Σ est de la forme, plus particulière, u^iu^i, puisqu'il est loisible de remplaçer les invariants u^i, dans la formule (72), par des combinaisons linéaires à coefficients constants de ces u^i; et que cela permet de réduire $\Sigma = C_{ij}u^iu^j$ à la somme $\bar{u}^i\bar{u}^j$ des carrés de n telles combinaisons $\bar{u}^j = K_i^j u^i$.

En résumé, *tous les systèmes transitifs complets laissant Σ invariante sont donnés par la formule générale* (72), *où les formes de Pfaff u^i sont les éléments d'une décomposition algébrique quelconque $\Sigma = u^iu^i$ de Σ en une somme de carrés.*

Remarquons que le système transitif réciproque de $\mathfrak{X}f$ (celui-ci étant supposé défini comme il vient d'être dit) ne laissera pas, en général, Σ invariante; car il contient n transformations ponctuelles que Σ admettrait; et, en général, une forme quadratique différentielle $\Sigma = g_{ij}dx_i dx_j$ n'admet pas de transformation ponctuelle.

Il y a cependant, entre autres, un cas remarquable où la circonstance en question se présente : c'est celui des systèmes $\mathfrak{X}f$ complets et ponctuels, examiné au n° **9**. Supposons en effet que nous soyons dans ce cas, et reprenons les notations des n^os **8** et **9** : le système $\mathfrak{X}f$ est issu d'un groupe simplement transitif $X_1 f, \ldots, X_n f$; le système réciproque $\mathfrak{Y}f$ est issu, de même, du groupe simplement transitif $Y_1 f, \ldots, Y_n f$, réciproque du précédent; et l'on a l'identité (40), liant les $Y_i f$ aux invariants linéaires u^i de $\mathfrak{X}f$, que je récris

$$(77) \qquad df = u^i Y_i f, \qquad Y_i f = v_i^j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Je récris également les formules de structure (43)

$$(78) \qquad (Y_i f, Y_j f) = c_{ij}^k Y_k f.$$

Ceci rappelé, formons les crochets des deux membres de (77) avec $Y_j f$: le calcul, analogue à celui du n° **9**, donne, $Y_j^{(1)} f$ désignant la transformation $Y_j f$ prolongée et compte tenu de (78),

$$(79) \qquad Y_j^{(1)} u^k . Y_k f = u^i (Y_i f, Y_j f) = c_{ij}^k u^i . Y_k f;$$

d'où l'on conclut

$$(80) \qquad Y_j^{(1)} u^k = c_{ij}^k u^i.$$

Si donc on prend les u^i comme variables à la place des dx_i, les $Y_j^{(1)} f$ deviennent

$$(81) \qquad Y_j^{(1)} f = Y_j f + E_j f, \qquad E_j f = c_{ij}^k u^i \frac{\partial f}{\partial u^k}.$$

On reconnaît dans les $E_j f$ les transformations infinitésimales du groupe adjoint (Sophus Lie) de la structure c_{ij}^k. Or on sait [1] que ce groupe adjoint admet l'invariant quadratique

$$(82) \qquad \varphi(u^1 \ldots, u^k) = c_{ih}^k c_{jk}^h u^i u^j,$$

que le discriminant de cette forme est différent de zéro si la structure c_{ij}^k est *simple* ou *semi-simple*, et que le groupe adjoint n'a pas,

(1) *Voir*, par exemple, E. Cartan, *La géométrie des groupes de transformations* (*Journal de Mathématiques*, 4, 1927, p. 70, n° **66**).

à un facteur constant près, d'autre invariant quadratique, si cette structure est simple. Or la forme (82) est l'une de celles que $\mathfrak{X}f$ laisse invariantes, et il résulte des formules (81) que $\mathfrak{Y}f$ la laisse également invariante.

On conclut donc que *toute structure simple* ou *semi-simple de groupe continu fini fournit un ds^2 invariant par les deux systèmes transitifs réciproques* (complets et ponctuels), *issus des deux groupes paramétriques de cette structure.*

L'étude des géométries riemanniennes particulières, auxquelles on est ainsi conduit, est intimement liée à la théorie des groupes continus finis (¹).

15. *Le système transitif géodésique.* — En tant que servant à définir le groupe général du ds^2, les systèmes transitifs complets $\mathfrak{X}f$ du type (72) peuvent être remplacés par un système transitif quelconque laissant le ds^2 invariant. La considération des géodésiques du ds^2 en fournit un, dont l'importance dans la géométrie riemannienne est fondamentale, car il équivaut à la *dérivation tensorielle* de Ricci et au *transport parallèle* que Levi-Civita en a déduit. Voici comment on y est conduit.

L'intégration du système différentiel des géodésiques

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx_k}{ds}\right)+\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}=0, \tag{83}$$

dans lequel les coefficients sont les symboles de Christoffel

$$\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}=g^{kh}\begin{bmatrix}h\\ i\,j\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}h\\ i\,j\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{hj}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_h}\right), \tag{84}$$

est équivalente à celle de l'équation aux dérivées partielles

$$0=\mathrm{G}f=\frac{\partial f}{\partial s}+x'_i\frac{\partial f}{\partial x_i}-\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}x'_i x'_j\frac{\partial f}{\partial x'_k}\qquad\left(x'_i=\frac{dx_i}{ds}\right). \tag{85}$$

Or il est bien connu que le système (83) admet l'intégrale

(¹) On sait que M. E. Cartan a consacré à cette étude toute une série de beaux travaux, et que M. J.-A. Schouten y a aussi contribué. Pour la bibliographie qui s'y rapporte, je me permets de renvoyer au récent Mémoire de M. Cartan, publié dans ce Journal, 8, 1929, p. 1.

première $\overline{\Sigma} = g_{hk}\, x'_h x'_k$: cette forme $\overline{\Sigma}$ est donc un invariant de Gf. Pour faire la vérification, on est conduit à mettre Gf sous la forme

$$(86)\qquad Gf = \frac{\partial f}{\partial s} + x'_i \mathcal{G}_i f, \qquad \mathcal{G}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \begin{Bmatrix} k \\ i\,h \end{Bmatrix} x'_h \frac{\partial f}{\partial x'_k};$$

et l'on a

$$(87)\qquad \mathcal{G}_i \overline{\Sigma} = \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_i} x'_h x'_k - 2 g_{hj} x'_h \begin{Bmatrix} j \\ i\,k \end{Bmatrix} x'_k.$$

Le coefficient de $x'_h x'_k$ dans cette expression est, pour $k \neq h$,

$$2\left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_i} - g_{hj} g^{jl} \begin{bmatrix} l \\ i\,k \end{bmatrix} - g_{hk} g^{kl} \begin{bmatrix} l \\ i\,h \end{bmatrix}\right) = 2\left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_i} - \begin{bmatrix} h \\ i\,k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ i\,h \end{bmatrix}\right);$$

et, pour $k = h$.

$$\frac{\partial g_{hh}}{\partial x_i} - 2 g_{hj} g^{jl} \begin{bmatrix} l \\ i\,h \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{hh}}{\partial x_i} - 2 \begin{bmatrix} k \\ i\,h \end{bmatrix}.$$

L'une et l'autre expression sont nulles identiquement.

On conclut donc que les $\mathcal{G}_i f$ sont des transformations infinitésimales d'éléments qui laissent Σ invariante; et l'on a le système transitif annoncé, que nous appellerons le *système transitif géodésique* du ds^2 considéré,

$$(88)\qquad \mathcal{G} f = \delta x_i \mathcal{G}_i f, \qquad \mathcal{G}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \begin{Bmatrix} k \\ i\,h \end{Bmatrix} \delta x_i\, dx_h \frac{\partial f}{\partial\, dx_k}.$$

D'après les formules (84), les coefficients

$$(89)\qquad A^k_{ih} = -\begin{Bmatrix} k \\ i\,h \end{Bmatrix}$$

sont symétriques relativement aux indices i et h; on a donc là un système transitif symétrique; et, par conséquent, identique à son réciproque (n° **5**).

C'est, comme il est connu, le seul système transitif symétrique laissant Σ invariante. Pour le vérifier, il suffit de constater qu'il est impossible de choisir des coefficients ρ^s_{kl} tels que la transformation $(\rho^s_{kl} \mathfrak{Q}^{kl})\, \delta x_s$, formée en combinant n transformations quelconques du groupe des rotations de $\overline{\Sigma}$, présente la symétrie en question. Comme on a $\mathfrak{Q}^{kl} = -\mathfrak{Q}^{lk}$, on peut aussi supposer

$$(90)\qquad \rho^s_{kl} = -\rho^s_{lk},$$

et la transformation considérée s'écrit, en vertu de la formule (76) (n^o **15**) qui définit les $\mathfrak{Q}^{kl}$,

$$\rho^s_{kl}\delta x_s dx_k\left(g^{jl}\frac{\partial f}{\partial dx_j}\right).$$

La symétrie cherchée exigerait donc

$$(91)\qquad \rho^s_{kl}=\rho^k_{sl},\qquad \text{ou, d'après (90),}\qquad \rho^s_{kl}=-\rho^k_{ls}.$$

La permutation circulaire (kls) multipliant le coefficient ρ^s_{kl} par (-1), on conclut, en la répétant trois fois, $\rho^s_{kl}=-\rho^s_{kl}$, ce qui prouve que les ρ^s_{kl} ne peuvent être que nuls. La vérification est donc faite.

16. *Géodésiques et trajectoires principales.* — Si l'on compare le système (83) des géodésiques avec le système (45), qui définit en général les trajectoires principales d'un système transitif, on constate que *les trajectoires principales du système géodésique de Σ sont les géodésiques de* Σ; et que l'arc s peut remplacer, sur toutes ces trajectoires, la variable canonique t.

En raisonnant comme à la fin du numéro précédent, on trouve immédiatement que la formule

$$(92)\qquad \mathfrak{X}f=\mathfrak{G}f+\rho^s_{kl}\delta x_s\mathfrak{Q}^{kl}$$

définit le système transitif le plus général laissant Σ invariante et admettant les géodésiques pour trajectoires principales, pourvu que ρ^s_{kl} ne change pas de valeur par la permutation circulaire (kls) de ses indices.

Parmi les systèmes transitifs ainsi définis aucun n'est complet dans le cas d'un ds^2 quelconque; car si l'un d'eux était complet, ses invariants linéaires u^j fourniraient (n^o **11**) n intégrales premières (50) du système différentiel de ses trajectoires principales, c'est-à-dire ici des géodésiques du ds^2.

Or il est facile de voir que *l'existence d'une intégrale première linéaire du système des géodésiques équivaut à l'existence d'une transformation infinitésimale (ponctuelle) laissant le ds^2 invariant* [1].

---

[1] Ce théorème connu peut être considéré comme une conséquence d'un théorème de Maurice Lévy. *Voir*, par exemple, WITTAKER, *Treatise on the analytical dynamics.*

Si, en effet, Σ admet une transformation ponctuelle

$$\mathrm{T}f = \theta^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + d\theta^i \frac{\partial f}{\partial\, dx_i}, \tag{93}$$

on a, par hypothèse, l'identité

$$\theta^i \frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + d\theta^i \frac{\partial \Sigma}{\partial\, dx_i} = 0; \tag{94}$$

ce qui équivaut, puisque le premier membre est homogène par rapport aux différentielles, à l'identité

$$\theta^i \frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + \frac{d\theta^i}{ds} \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} = 0, \qquad \frac{d\theta^i}{ds} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x_j} \cdot x'_j, \tag{95}$$

où nous reprenons les notations du n° **15**.

La combinaison, obtenue en multipliant les équations des géodésiques,

$$\frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} - \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} = 0, \tag{96}$$

respectivement par θ_i et sommant, s'écrit donc

$$0 = \theta^i \frac{d}{ds} \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} - \theta^i \frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} = \theta^i \frac{d}{ds} \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} + \frac{d\theta^i}{ds} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} = \frac{d}{ds}\left(\theta^i \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i}\right),$$

et l'on a l'intégrale première annoncée

$$\theta^i \frac{\partial \Sigma}{\partial x'_i} = \text{const.} \tag{97}$$

Réciproquement, toute intégrale première linéaire du système (96) peut s'écrire sous cette forme (97). En reprenant le calcul précédent dans l'ordre inverse, on conclut que l'équation (95) est une conséquence des équations (96); et, comme elle est du premier ordre et homogène, cela exige qu'elle soit une identité. Il en est, dès lors, de même de (94), et Σ admet la transformation infinitésimale $\mathrm{T}f = \theta^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Remarquons que l'intégrale première (97) exprime que *la projection du vecteur θ^i, définissant la transformation infinitésimale, sur la tangente à une géodésique, est constante le long de cette géodésique;* le mot projection étant entendu au sens de la géométrie riemannienne considérée.

Revenant aux systèmes transitifs qui laissent Σ invariante et ont les géodésiques pour trajectoires principales, on conclut du théorème précédent que l'un d'eux ne saurait avoir une intégrale linéaire sans que Σ admît une transformation infinitésimale ponctuelle, ce qui est un cas exceptionnel; et si l'un d'eux était complet, Σ admettrait n transformations infinitésimales ponctuelles divergentes, et, par conséquent, un groupe ponctuel (fini) transitif.

Supposons que l'on soit dans ce cas, et reprenons les notations du n° **8**. $\mathfrak{X}f$ est complet, ses invariants linéaires sont $u^1, \ldots, u^n$, et l'on peut supposer que $\Sigma = u^i u^i$; de plus, les équations $u^i = C^i ds$ sont des intégrales premières du système des géodésiques. Cherchons la transformation infinitésimale Tf qui correspond à l'intégrale u^h. On a, d'après la formule (97),

$$\theta^i u^k u^k_i = u^h,$$

c'est-à-dire

$$\theta^i u^k_i = \varepsilon^k_h, \qquad \varepsilon^k_h = \begin{cases} 0 & h \neq k, \\ 1 & h = k. \end{cases}$$

Or, d'après l'identité (40), on a

$$\eta^j_h u^k_j = \varepsilon^k_h.$$

On conclut donc

$$\theta^j = \eta^j_h, \qquad Tf = Y_h f.$$

Les transformations infinitésimales ponctuelles de Σ, qui correspondent aux invariants de $\mathfrak{X}f$, sont donc celles qui figurent dans le système réciproque $\mathfrak{Y}f$ de $\mathfrak{X}f$.

On est donc dans le cas où Σ est invariante à la fois par $\mathfrak{X}f$ supposé complet, et par son réciproque (*cf.* n° **14**); et l'on voit que, dans ce cas, $\mathfrak{X}f$ et son réciproque $\mathfrak{Y}f$, qui est ponctuel, ont pour trajectoires principales les géodésiques de Σ; ces géodésiques sont les courbes intégrales du système $u^i = C^i ds$ (les u^i étant les expressions de Pfaff invariantes par $\mathfrak{X}f$), et sont les trajectoires des transformations ponctuelles qui appartiennent à $\mathfrak{Y}f$ (*cf.* n° **11**).

Enfin, dans le cas, plus particulier encore, où $\mathfrak{X}f$ est complet et ponctuel (n° **14**), les géodésiques sont les trajectoires des transformations infinitésimales de chacun des deux groupes simplement transitifs réciproques qui donnent naissance respectivement à $\mathfrak{X}f$ et à son réciproque $\mathfrak{Y}f$; et l'on a, pour ces géodésiques, deux systèmes d'intégrales premières linéaires $u^i = A^i ds$ et $v^i = B^i ds$, fournis respectivement par les invariants pfaffiens des deux groupes. Le système transitif géodésique est, de plus (*cf.* n° **15**), l'associé symétrique commun Sf (*cf.* n° **5**), de $\mathfrak{X}f$ et de $\mathfrak{Y}f$.

17. *Interprétation du parallélisme géodésique.* — La considération des géodésiques permet de donner, de la variation infinitésimale imprimée à un élément linéaire par l'une quelconque des transformations infinitésimales du système transitif géodésique, l'interprétation suivante :

Soit E un élément linéaire quelconque, d'origine M (coordonnées x), et de composantes a^i, auquel on applique la transformation infinitésimale géodésique $\mathcal{G}f.\delta t$, où

$$(98) \qquad \mathcal{G}f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + A_{ih}^k \xi^i a^h \frac{\partial f}{\partial a^k}, \qquad A_{ih}^k = -\left\{ \begin{matrix} k \\ i\,h \end{matrix} \right\}.$$

Celle-ci déplace M dans la direction du vecteur D de composantes ξ^i, et le déplacement a pour composantes $\xi^i \delta t$.

Toutes les géodésiques issues de M, dans toutes les directions $\xi^i + a^i u$ de l'élément plan défini par E et D, engendrent une surface S. Soit Γ celle qui part dans la direction de D : si l'on imagine l'élément linéaire variable Λ, dont l'origine décrit Γ, dont la longueur est constamment celle de E, et qui fait constamment avec Γ un angle égal à l'angle θ de E avec D, la variation infinitésimale de cet élément Λ, pour le déplacement $\xi^i \delta t$ de son origine à partir de M sur Γ, a même partie principale que la variation correspondante de l'élément E.

Comme $\mathcal{G}f$ laisse le ds^2 invariant, il déplace l'élément E de manière à conserver sa longueur ; de plus, puisque nous négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur, nous pouvons supposer que $\mathcal{G}f$ est une transformation principale, de sorte que sa trajectoire issue de M est Γ. Celle-ci est alors invariante par $\mathcal{G}f$, comme multiplicité d'éléments linéaires, et l'invariance du ds^2 entraîne ainsi la conservation de l'angle de E avec Γ. Il suffira donc, pour justifier l'interprétation précédente, de montrer qu'il y a un élément linéaire Λ', dont l'origine décrit Γ, qui est constamment tangent à S, et dont la variation a même partie principale que celle de E. Ce sera l'élément Λ lui-même.

Effectivement, le système différentiel des géodésiques étant

$$\frac{d}{ds}\cdot\frac{dx_k}{ds} = \Lambda^k_{ih}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}, \tag{99}$$

les géodésiques qui engendrent S ont pour équations générales

$$X_k = x_k + sx'_k + \frac{s^2}{2}\Lambda^k_{ih}x'_i x'_h + \ldots, \tag{100}$$

avec

$$x'_k = m\alpha^k, \qquad \alpha^k = \xi^k + a^k u, \qquad \frac{1}{m^2} = g_{ij}\alpha^i\alpha^j. \tag{101}$$

En remplaçant la variable s par la variable $t = ms$, ces équations s'écrivent

$$X_k = x_k + t\alpha^k + \frac{t^2}{2}\Lambda^k_{ih}\alpha^i\alpha^h + \ldots \tag{102}$$

et représentent la surface S avec les deux paramètres t et u.

Considérons alors l'élément linéaire d'origine X_k et de composantes

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial u} = a^k + t\Lambda^k_{ih}\alpha^i a^h + \ldots. \tag{103}$$

Il est tangent à S en son origine : si l'on fait $u = 0$, cette origine décrit Γ, et l'on a, pour $t = \delta t$, l'élément Λ annoncé

$$X_k = x_k + \delta t\,\xi^k + \ldots. \qquad \Lambda^k = a^k + \delta t\,.\Lambda^k_{ih}\xi^i a^h + \ldots. \tag{104}$$

Remarquons que cette interprétation pourrait se généraliser pour tout système transitif de transformations infinitésimales d'éléments, les trajectoires principales du système remplaçant les géodésiques du ds^2.

18. *La courbure.* — La considération du dérivé (n° **12**) du système géodésique $\mathcal{G}f$ conduit tout naturellement à la courbure riemannienne. Gardant les notations du n° **12**, avec les expressions (89) des Λ^k_{ih}, nous écrirons ce dérivé, $\mathcal{K}f = \mathcal{G}'f$,

$$\mathcal{K}f = \Lambda^k_{ij,h}\,\delta x_i\,\delta' x_j\,dx_h\,\frac{\partial f}{\partial\,dx_k}. \tag{105}$$

Les $\Delta^k_{ij,h}$ ne sont pas autre chose ici que les symboles à quatre indices $\{hk, ji\}$ de Christoffel.

Étant le crochet de deux transformations qui laissent le ds^2 invariant, $\mathcal{K}f$ possède la même propriété et appartient au groupe de rotations du ds^2 (n° **15**). C'est donc une combinaison à coefficients fonctions des x_i, soit des $\mathcal{R}_{ij}$ définis par les équations (73),

$$(106) \qquad \mathcal{R}_{ij}f = \sigma_i \frac{\partial f}{\partial\, dx_j} - \sigma_j \frac{\partial f}{\partial\, dx_i}, \qquad \sigma_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma}{\partial\, dx_k},$$

soit des $\mathfrak{Q}^{ij}$, définis par les équations (76),

$$(107) \qquad \mathfrak{Q}^{ij}f = \omega^i\, dx_j - \omega^j\, dx_i, \qquad \omega^k = g^{kh} \frac{df}{\partial\, dx_h} \quad (^1).$$

En se servant des identités, déduites des formules ci-dessus,

$$dx_h = g^{hi}\sigma_i, \qquad \frac{\partial f}{\partial\, dx_k} = g_{ki}\,\omega^i,$$

on obtient immédiatement les expressions

$$(108) \qquad \mathcal{K}f = g^{hl}\Delta^k_{ij,h}\,\delta x_i\,\delta' x_j\,\sigma_l \frac{\partial f}{\partial\, dx_k} = \Delta^{kl}_{ij}\,\delta x_i\,\delta' x_j\,\sigma_l \frac{\partial f}{\partial\, dx_k},$$

$$(109) \qquad \mathcal{K}f = g_{kl}\Delta^k_{ij,h}\,\delta x_i\,\delta' x_j\, dx_h\,\omega^l = \Delta_{ij,hl}\,\delta x_i\,\delta' x_j\, dx_h\,\omega^l,$$

de sorte que l'on a les combinaisons en question :

$$(110) \qquad \mathcal{K}f = \Delta^{[kj]}_{[ij]}\,[\delta x_i\,\delta x_j]\,\mathcal{R}_{[lh]},$$

$$(111) \qquad \mathcal{K}f = \Delta_{[ij],[hl]}\,[\delta x_i\,\delta x_j]\,\mathfrak{Q}^{[lh]},$$

dans lesquelles on a utilisé les notations du calcul tensoriel, en indiquant

---

(1) Remarquons ici que les ω^k sont les dérivées partielles de la forme

$$\Omega = g^{kh} \frac{\partial f}{\partial\, dx_k} \frac{\partial f}{\partial\, dx_h} \qquad \text{ou} \qquad \Omega = g^{kl} p_k p_h,$$

corrélative de Σ, qui servirait à définir la propagation des ondes correspondant au ds^2 [surface d'onde $\Sigma(a^1, \ldots, a^n) = 1$], et dont les géodésiques du ds^2 constituent les rayons. Sur ce point de vue de la géométrie riemannienne, qui est laissée de côté dans cet article, je renverrai à ma Note de 1918 : *Sur la proposition par ondes et sur la théorie de la relativité générale* (*C. R. Ac. Sc. de Paris*, t. 166, p. 349).

par des crochets [...] les sommations qui correspondent aux diverses combinaisons des indices ainsi encadrés.

On arrive à la notion riemannienne de la courbure en considérant la variation δV que subit, par le transport $\mathcal{G}f$ le long d'un cycle élémentaire situé dans l'élément plan $(\delta x_i, \delta' x_i)$, l'angle V de l'élément linéaire dx_i transporté avec un élément linéaire $d'x_i$ resté en place (*cf.* n° **12**). Appliquant l'opération $\mathcal{K}f$ à la formule

$$\cos V = g_{kl} \frac{dx_k}{ds} \frac{d'x_l}{d's},$$

on obtient, puisque ds est invariant, [par la formule (105)],

$$-\sin V \,\delta V = g_{kl} \frac{d'x_l}{d's} \cdot \Delta^k_{ij,h}\, \delta x_i\, \delta' x_j \frac{dx_h}{ds},$$

c'est-à-dire

$$-\sin V \,\delta V = \Delta_{ij,hl} \cdot \delta x_i\, \delta' x_j \frac{dx_h}{ds} \cdot \frac{d'x_l}{d's}. \tag{112}$$

Si le cycle, parallélogramme construit sur δx_i et sur $\delta' x_i$, se confond avec le parallélogramme construit sur dx_h et $d'x_l$, on a

$$-\sin V\, ds\, d's \,.\, \delta V = \Delta_{[ij],[hl]} \cdot [dx_i\, d'x_j] \cdot [dx_h\, d'x_l]; \tag{113}$$

et l'on a, d'autre part, pour le carré de l'aire A du parallélogramme,

$$A^2 = \sin^2 V \,.\, ds^2 \,.\, d's^2 = g_{hi} g_{hj} [dx_i \,.\, d'x_j][dx_h\, d'x_l], \tag{114}$$

d'où, par division, la courbure riemannienne

$$K = \frac{\delta V}{A} = -\frac{\Delta_{[ij],[kl]}\, [dx_i\, d'x_j][dx_k\, d'x_l]}{g_{hi} g_{lj} [dx_i\, d'x_j][dx_h\, d'x_l]}. \tag{115}$$

Si l'on prend $\mathcal{K}f$ sous la forme (108), on obtient de même

$$K = \frac{\Delta^{[kl]}_{[ij]} [dx_i\, d'x_j][\sigma_k \sigma'_k]}{[dx_i\, d'x_j][\sigma_i \sigma'_j]}, \qquad \sigma_i = g_{ih}\, dx_h, \qquad \sigma'_i = g_{ih}\, d'x_h, \tag{116}$$

qui donne, pour le *cas de la courbure constante*,

$$\Delta^{kl}_{ij} = K = \text{const.} \qquad \text{pour} \qquad k = i, \qquad l = j,$$

les autres Δ^{kl}_{ij} étant alors nuls. Ce cas est donc celui où l'on a, d'après

(110) et (74),

$$\mathcal{H}f = \mathrm{K}.\mathcal{R}f, \tag{117}$$

K étant une constante.

19. *Problèmes d'équivalence.* — Si la courbure K est nulle pour tout élément $[dx_i\, dx_j]$, le dérivé $\mathcal{H}f$ de $\mathcal{G}f$ est identiquement nul, et réciproquement. C'est donc le cas où $\mathcal{G}f$ est complet, et, puisqu'il est symétrique, c'est le cas où il est réductible, par un changement de coordonnées, à la forme non prolongée δf (*voir* n° **7**, *in fine*), et où, par conséquent, le ds^2 est réductible à la forme euclidienne.

D'une manière générale, la question de l'équivalence de deux ds^2, par rapport aux changements de coordonnées, se ramène à celle de l'équivalence des symboles qui représentent les systèmes de transformations attachés à ce ds^2. On aura à considérer successivement $\mathcal{R}f$ [formule (75)], puis $\mathcal{G}f$ [formule (88)], et les dérivés successifs de $\mathcal{G}f$, dont le premier est $\mathcal{H}f$ [formule (105)].

L'équivalence des $\mathcal{R}f$ associés respectivement aux deux ds^2 fournit les mêmes équations aux dérivées partielles du premier ordre, définissant les nouvelles coordonnées $y_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n)$ que l'équivalence des ds^2 eux-mêmes.

L'équivalence des deux $\mathcal{G}f$ donne, comme il est facile de le vérifier, toutes les équations du second ordre résultant des précédentes par différentiation, c'est-à-dire les formules de Christoffel qui donnent les expressions de toutes les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 y_h}{\partial x_i\, \partial x_j}$.

L'équivalence des deux dérivés (courbure) $\mathcal{H}f$ donne ensuite toutes les relations du premier ordre qui résultent des précédentes par différentiation et élimination des dérivées troisièmes. Et ainsi de suite.

Sans approfondir ces généralités, bornons-nous au cas de deux ds^2, dont l'un est à courbure constante K non nulle. Comme on aura l'identité (117), dont les deux membres sont des covariants du ds^2, même identité devra avoir lieu pour l'autre ds^2, qui doit donc être aussi à courbure constante K.

S'il en est ainsi, l'équivalence des $\mathcal{H}f$ résultera de celle des $\mathcal{R}f$, c'est-à-dire que toutes les équations du premier ordre résultant de la différentiation du système de Christoffel et de l'élimination des dérivées troisièmes seront des conséquences des équations du premier et du deuxième ordre déjà écrites. Celles-ci constituent donc un système complètement intégrable, formé de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations du premier ordre et des équations qui donnent toutes les dérivées du second ordre. Le nombre des fonctions inconnues et de leurs dérivées premières étant $n(n+1)$, la solution générale dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes arbitraires. Ainsi, l'équivalence a lieu et le ds^2 supposé doit admettre un groupe continu fini à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres.

Les transformations infinitésimales de ce groupe, prolongées, feront partie du groupe infini de transformations d'éléments, introduit au n° **13** par la condition de laisser le ds^2 invariant, et devront suffire pour construire les systèmes $\mathcal{G}f$ et $\mathcal{R}f$ relatifs à ce ds^2.

On aura un groupe ponctuel répondant à la question [1], en prenant le groupe de la quadrique

$$(118) \qquad 0 = \theta = x_i x_i + m.$$

Il est défini par les transformations infinitésimales

$$(119) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{m} x_i x_h \frac{\partial f}{\partial x_h}, \qquad x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

qui, prolongées, donnent

$$(120) \qquad \mathfrak{X}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{m} x_i x_h \frac{\partial f}{\partial x_h} + \frac{1}{m}(x_i a^h + a^i x_h)\frac{\partial f}{\partial a^h},$$

$$(121) \qquad \mathfrak{Z}_{ij} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + a^i \frac{\partial f}{\partial a_j} - a^j \frac{\partial f}{\partial a_i}.$$

Celles-ci laissent invariante la forme

$$(122) \qquad \Sigma = \frac{m}{\theta} a^i a^i - \frac{m}{\theta^2}(x_i a^i)^2,$$

---

[1] Il est bien connu que les géométries non euclidiennes donnent les types de ds^2 à courbure totale constante.

c'est-à-dire le ds^2,

$$ds^2 = \frac{m}{\theta} dx_i dx_i - \frac{m}{4\theta} d\theta^2. \tag{123}$$

On obtient un système transitif de ce ds^2 en formant la combinaison

$$m\,\delta x_i . \mathfrak{X}_i f + (x_i \delta x_j - x_j \delta x_i) \mathfrak{Z}_{ij} f,$$

puis, en divisant par θ, il vient

$$\mathcal{G} f = \delta f + \frac{1}{\theta}(x_i \delta x_i . a^h + x_i a^i . \delta x_h) \frac{\partial f}{\partial a^h} \tag{124}$$

ou

$$\mathcal{G} f = \delta f + \frac{1}{2\theta}(\delta\theta . dx_h + d\theta . \delta x_h) \frac{df}{\partial\, dx_h}. \tag{125}$$

Étant symétrique, ce système est le système géodésique du ds^2. En prenant son dérivé $\mathcal{K}f$ et calculant $\mathcal{R}f$ par la formule (74), on vérifie sans peine l'identité (117) pour $K = \frac{1}{m}$.

20. *Dérivation tensorielle. Identités de Bianchi.* — L'application de la transformation infinitésimale géodésique $\mathcal{G}f$ [n° **15**, équation (88)] aux formes différentielles, équivaut à la dérivation tensorielle de Ricci. En effet, si l'on se donne un tenseur quelconque $C^{hk\dots}_{ij\dots}$, et si l'on applique la transformation

$$\mathcal{G} f = \xi^s \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + A^k_{sh} a^h \frac{\partial f}{\partial a^k} - A^k_{sh} p_k \frac{\partial f}{\partial p_h} \right) \tag{126}$$

à la forme différentielle

$$C^{hk\dots}_{ij\dots} a^i_{(1)} a^j_{(2)} \dots p^{(1)}_h p^{(2)}_k \dots,$$

en opérant successivement sur les coordonnées des divers éléments linéaires a et des divers éléments de gradience p, on obtient une forme de degré supérieur d'une unité

$$C^{hk\dots}_{ij\dots|s} \xi^s a^i_{(1)} a^j_{(2)} \dots p^{(1)}_h p^{(2)}_k \dots,$$

et le système des coefficients $C^{hk\dots}_{ij\dots|s}$ constitue le tenseur dérivé du tenseur donné. On le vérifierait immédiatement.

Comme application de ce principe fondamental, nous nous bornerons à montrer que les identités, dites de Bianchi, se présentent, dans notre théorie, comme une simple application de l'identité de Jacobi, systématiquement utilisée par Sophus Lie,

$$(Xf, (Yf, Zf)) + (Yf, (Zf, Xf)) + (Zf, (Xf, Yf)) = 0. \tag{127}$$

Désignons, en effet, par $\mathcal{G}_1 f$ et $\mathcal{G}_2 f$ ce que devient le symbole $\mathcal{G} f$ quand on y remplace la caractéristique de différentiation δ par d'autres caractéristiques δ_1 et δ_2; et posons, dans (127),

$$Xf = \mathcal{G} f, \qquad Yf = \mathcal{G}_1 f, \qquad Zf = \mathcal{G}_2 f.$$

Il vient, d'après la définition du symbole dérivé $\mathcal{K} f$ [n° **18**, équation (105)],

$$(\mathcal{G}_1 f, \mathcal{G}_2 f) = \Delta^k_{ij,h}\, \delta_1 x_i . \delta_2 x_j . dx_h \frac{\partial f}{\partial dx_k}; \tag{128}$$

d'où une formule de la forme

$$(\mathcal{G} f, (\mathcal{G}_1 f, \mathcal{G}_2 f)) = M^k_{ij,hl}\, \delta x_l . \delta_1 x_i . \delta_2 x_j . dx_h \frac{\partial f}{\partial dx_k}, \tag{129}$$

et l'identité de Jacobi (127) donne

$$M^k_{ij,hl} + M^k_{li,hj} + M^k_{jl,hi} = 0. \tag{130}$$

En effectuant le crochet (129), on a appliqué la transformation infinitésimale $\mathcal{G} f$ à la transformation infinitésimale (128); pour déduire de $M^k_{ij,hl}$ la dérivée tensorielle $\Delta^k_{ij,hl}$, il faut donc lui ajouter les termes qui proviennent de l'application de $\mathcal{G} f$ dans le second membre de (128) aux $\delta_1 x_i$ et aux $\delta_2 x_i$.

Ce sont les sommes

$$\Delta^k_{sj,h} \Lambda^s_{li} + \Delta^k_{is,h} \Lambda^s_{lj} = \Delta^k_{sj,h} \Lambda^s_{li} - \Delta^k_{si,h} \Lambda^s_{jl}. \tag{131}$$

Or, si l'on y permute circulairement les indices l, i, j et si l'on ajoute, les sommes partielles se détruisent deux à deux. On conclut donc que la formule (130) entraîne les identités de Bianchi :

$$\Delta^k_{ij,hl} + \Delta^k_{jl,hi} + \Delta^k_{li,hj} = 0, \tag{132}$$

qu'il s'agissait d'établir.