JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. HADAMARD

Le principe de Huyghens pour les équations à trois variables indépendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 197-228.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__197_0>

Le principe de Huyghens pour les équations à trois variables indépendantes;

PAR J. HADAMARD.

Dans deux Mémoires précédents, parus l'un au *Bulletin de la Société mathématique de France*, l'autre aux *Acta mathematica* (1), j'ai étudié ce que j'appelle la forme A du principe de Huyghens et qu'on peut en appeler la « majeure » (c'est-à-dire le fait que l'influence exercée par un premier état d'un phénomène physique sur un état ultérieur peut être considéré comme faisant intervenir l'état à un instant intermédiaire quelconque) et me suis occupé de former des équations intégrales qui expriment ce principe, tout d'abord lorsque le nombre m des variables indépendantes est supposé impair, puis, lorsque ce nombre est pris égal à quatre. Les formules obtenues pour le cas général de m impair présentent l'inconvénient de faire intervenir systématiquement l'emploi du symbole particulier d'intégration que j'ai été conduit à introduire dans l'étude de ces questions (2), de sorte que l'expression des résultats à l'aide des symboles classiques de l'Analyse exigerait l'application des règles de calcul que j'ai exposées dans mes publications antérieures (2).

Il y avait cependant un intérêt particulier à traiter la valeur $m = 3$, pour laquelle tout peut être figuré dans l'espace ordinaire, de sorte que les considérations géométriques auxquelles on est obligé de faire

(1) *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 52, 1924, p. 141-172; *Acta math.*, t. 49, p. 203-244. Ces Mémoires seront désignés respectivement par les lettres *B. S.* et *A. M.*

(2) *Voir* surtout nos *Lectures on Cauchy's problem*, Cambridge-New Haven, 1922. Cet ouvrage sera désigné par la lettre *Y.*

appel se présentent sous la forme la plus intuitive et la plus aisément accessible. Or [1], il existe un moyen d'écrire les formules de résolution du problème de Cauchy, même dans le cas de m impair, sans introduire les « parties finies » des intégrales généralisées; et, dès lors, on doit pouvoir en déduire un résultat analogue pour les relations intégrales qui expriment le principe ci-dessus mentionné de Huyghens : c'est ce que je me propose de faire ici.

Si je reviens, avec un intérêt que le lecteur pourra, au premier abord, trouver excessif, sur ce sujet, ce n'est pas seulement parce que le principe dont il s'agit a déjà fourni un certain nombre de « théorèmes d'addition intégraux » dignes d'être notés, et pourra sans doute en fournir d'autres. C'est aussi en ayant en vue l'étude des singularités auxquelles donne lieu la propagation des ondes. Les « caustiques », que l'expérience met sous nos yeux tous les jours, sont une de ces nombreuses circonstances où la nature semble se plaire à déconcerter nos méthodes, celles par lesquelles nous essayons de représenter ses manifestations les plus simples. Que deviennent, au niveau des caustiques, les formules d'intégration de l'équation aux dérivées partielles qui régit le phénomène étudié? Telle est la question qu'il convient sans doute, pour la raison ci-dessus indiquée, de considérer tout d'abord dans l'espace à trois dimensions, et qui reste assez délicate pour que je ne me propose pas de la traiter ici, mais simplement d'en préparer l'étude. Encore les opérations que nous allons avoir à effectuer dès le cas le plus simple, celui où l'on n'a pas à compter avec les singularités de l'onde et qui, théoriquement, relèvent toutes du calcul intégral classique (différentiation sous le signe intégral, interversion dans l'ordre des intégrations) se présenteront-elles déjà sous des formes assez compliquées, ainsi qu'il arrivait déjà dans le cas précédemment traité de $m = 4$.

La formule qui nous servira de point de départ, du moment que nous voulons éviter l'emploi du symbole $\lceil$, est celle que nous avons donnée au Livre IV de nos Leçons de Yale [2], savoir, pour $m = 3$

---

(1) *Y.*, Liv. IV, Chap. II, nos 164-165.

(2) *Y.*, no 164, formule (64). Nous nous bornons à l'équation sans second membre, le traitement des termes (intégrales triples) qui proviennent du second membre f se faisant sans difficulté d'une manière tout analogue.

(d'où $m_1 = 1$, ce qui supprime les différentiations par rapport à la variable γ)

$$2\pi u_0 = \int\!\!\int_{S_1} v_{01} u'_1 \, dS_1 + \int\!\!\int_{S_1} L_1 v'_{01} u_1 \, dS_1 - \frac{d}{d\nu_1} \int\!\!\int_{(S_1)} v'_{01} u_1 \, dS_1,$$

où (notation des Mémoires *B. S.*, *A. M.*) on désigne par le chiffre o le point en lequel on veut calculer la valeur de u; par le chiffre 1, un point variable sur une portion de surface S_1 découpée par le conoïde caractéristique Γ_0 de sommet o (la surface S_1 étant supposée avoir une orientation d'espace et, plus précisément, telle que l'aire ainsi découpée soit limitée en tous sens). Quant aux notations (S_1), v'_{01}, qui figurent au dernier terme, leur sens sera rappelé plus loin (n° **12**). Comme précédemment (cf. *A. M.*, 1), nous distinguerons les différents termes de cette formule, en l'écrivant :

$$(\mathrm{F}) \qquad \begin{cases} u_0 = (a) + (c) - (b), \\ (a) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\!\!\int_{S_1} v_{01} u'_1 \, dS_1, \qquad (c) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\!\!\int_{S_1} L_1 v'_{01} u_1 \, dS_1, \\ (b) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{d}{d\nu_1} \displaystyle\int\!\!\int_{(S_1)} v'_{01} u_1 \, dS_1, \end{cases}$$

formule que nous aurons à composer (cf. *A. M.*, n° 2), par un calcul analogue (à la commutativité près) à une multiplication de polynomes, avec celle que l'on en déduit en remplaçant le point o par le point 1 et le point 1 par un troisième point 2 assujetti à décrire une troisième aire S_2 également découpée, dans les mêmes conditions que S_1, par le conoïde Γ_1 de sommet 1.

Rappelons qu'au terme (b) figure l'intégrale (ici intégrale double) étendue à la portion découpée par Γ_0 sur la surface que l'on obtient en portant, à partir de chaque point de S_1, un segment ou arc transversal correspondant à une variation très petite du paramètre ν_1 et convenant de prendre pour u, en chaque point de cette nouvelle surface, la valeur donnée pour cette quantité au point correspondant de S_1. Le terme (a) est au contraire une intégrale prise sur S_1 elle-même, ainsi que (c). En ce qui concerne ce dernier terme, d'ailleurs, son étude ne diffère visiblement de celle des deux premiers qu'en ce qu'elle est plus simple : nous pourrons donc écrire sans autre explication les résultats qui concernent les termes de cette nature.

1. Avant de procéder aux intégrations dont il vient d'être question, nous traiterons d'abord deux points préliminaires.

Le premier est relatif au paramètre transversal ν. La direction transversale a reçu, on le sait, de M. Coulon une interprétation géométrique très simple : elle est celle du diamètre conjugué du plan tangent à la surface S, par rapport au conoïde caractéristique. Restait à définir en grandeur le paramètre infinitésimal $d\nu$. Cette question, que nous avions laissée sans réponse dans les Leçons de Yale, peut se résoudre de la manière suivante lorsqu'on suppose le plan tangent à S non caractéristique (cas qui est le seul auquel nous aurons affaire dans ce qui va suivre).

La définition du paramètre $d\nu$ dépend (*Y.*, 40) de celle de l'élément superficiel dS. Soit $G = 0$ l'équation de S, écrite sous une forme arbitraire jusqu'à nouvel ordre. Si l'on convient de définir dS à l'aide de l'élément de volume dT par la relation $dS = \frac{dT}{dG}$ (*loc. cit.*, 39) [1] on devra prendre, pour les paramètres π_i qui figurent dans les formules

$$(1) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i},$$

les dérivées partielles correspondantes de la fonction G.

Or, du moment que S n'est pas tangent à une caractéristique, nous pouvons définir G, en un point quelconque x voisin de S, comme étant la distance géodésique (relative à la métrique H qui correspond à l'équation donnée) de ce point x à S. Cette distance se compte, comme on sait, sur la géodésique transversale à S et satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \pi_3; x) = 1.$$

Il en résulte immédiatement, moyennant les formules (1), que *le paramètre $d\nu$ représente la distance géodésique* G *du point x à la surface.*

Il convient de compléter cette signification $d\nu$, conformément à ce qui précède, par celle de l'élément superficiel dS : celui-ci est tel que le produit $dS\,d\nu$ représente le volume du cylindre élémentaire engendré par l'élément dS, dans un déplacement transversal égal à $d\nu$.

---

(1) *Voir* aussi notre *Cours d'Analyse*, t. 1, p. 354.

2. En second lieu, je reviendrai sur un premier cas simple, que j'avais précédemment traité ([1]) du problème auquel est consacré le présent travail, c'est-à-dire du principe de Huyghens à trois variables : le cas dont il s'agit est relatif à l'équation la plus simple à trois variables, celle des ondes cylindriques,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Il se trouve, en effet, que les circonstances rencontrées dans ce premier cas sont déjà propres à nous servir de guide pour l'étude du cas général. La solution élémentaire de l'équation des ondes cylindriques étant

$$\begin{aligned} v(a, b, t; a', b', t') &= \frac{1}{\sqrt{(t-t')^2-(a-a')^2-(b-b')^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2-(a-a')^2-(b-b')^2}}, \end{aligned}$$

la différentiation $\frac{d}{d\nu}$ qui figure dans le terme (a) de la formule (F) peut se remplacer, au signe près, par une différentiation partielle par rapport à t ou à $t-t'=h$, ce qui conduit d'ailleurs immédiatement à la formule classique d'intégration elle-même, telle que l'a obtenue M. Volterra. L'application de notre méthode à la quantité v conduit alors à écrire ([2])

$$(2) \qquad 2\pi v_{02} = \frac{2\pi}{\sqrt{(h+h')^2-(a-a')^2-(b-b')^2}} = \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial h'},$$

en désignant par I l'intégrale

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I} &= \iint v_{01} v_{12}\, dx\, dy = \\ &= \iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{h^2-(a-x)^2-(b-y)^2}\sqrt{h'^2-(a'-x)^2-(b'-y)^2}} \end{aligned}$$

étendue à la région commune aux deux cercles

$$(4) \qquad \mathrm{C} = h^2-(a-x)^2-(b-y)^2 \geqq 0, \qquad \mathrm{C}' = h'^2-(a'-x)^2-(b'-y)^2 \geqq 0.$$

([1]) *Atti Soc. Italiana per il Progresso delle Scienze*, XIII^e Congrès, Naples, 1924.

([2]) Le facteur 2π a été omis par erreur dans le travail cité.

Telle est, dans ce cas, l'expression de notre principe de Huyghens. On voit que tout y est ramené au calcul de l'intégrale I; et c'est ce que nous arriverons également à obtenir dans le cas général.

La valeur de l'intégrale (3) se tire sans difficulté de la formule (2), considérée comme une équation aux dérivées partielles, aux variables indépendantes h et h' et qui fait connaître la dérivée totale $\frac{dI}{dh}$ lorsque h et h' varient simultanément en gardant entre eux une différence constante $h - h' = \delta$. Mais deux cas sont à distinguer, suivant que les deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre ou sécants.

La limite inférieure d'intégration par rapport à h est δ (correspondant à $h' = 0$) dans le premier cas; elle est d (cercles tangents extérieurement) dans le second, en désignant par $d = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$ la distance des centres. Il vient donc, suivant qu'on est dans l'un ou dans l'autre des deux cas cités,

$$\mathrm{I} = \pi \log \frac{h + h' + \sqrt{(h+h')^2 - d^2}}{h - h' + \sqrt{(h-h')^2 - d^2}}, \tag{5}$$

ou

$$\mathrm{I} = \pi \log \frac{h + h' + \sqrt{(h+h')^2 - d^2}}{d}. \tag{5'}$$

Le fait remarquable que ces deux expressions de I, différentes entre elles comme il est naturel, conduisent à la même expression analytique pour la combinaison $\frac{dI}{dh} + \frac{dI}{dh'}$, se retrouvera, bien entendu, dans le cas général.

3 Nous avions noté, dans le travail cité, qu'une méthode directe, propre au calcul de l'intégrale double (3) n'apparaissait pas immédiatement. Ce calcul peut cependant s'effectuer par un changement de variables relativement simple, lequel consiste, une fois choisis comme axes coordonnés la ligne des centres et l'axe radical, à conserver la variable x, la première famille de lignes coordonnées étant ainsi formée par des parallèles à l'axe radical, et à constituer la seconde famille avec des cercles du faisceau (C, C'). L'équation générale d'un tel cercle étant

$$c + 2\xi x - x^2 - y^2 = 0; \tag{6}$$

celles de C, C',

$$c + 2ax - x^2 - y^2 = 0, \qquad c + 2a'x - x^2 - y^2 = 0,$$

on trouve ainsi

$$\mathrm{I}=\int\int\frac{d\xi\,dx}{|y|\sqrt{(\xi-a)(\xi-a')}}=\int\frac{\psi\,d\xi}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-a')}},$$

2ψ étant l'angle au centre correspondant à l'arc du cercle (6) compris dans l'aire (4) : soit, dans le premier cas (C' intérieur à C : $c<0$), et en prenant $a<a'<0$,

$$\mathrm{I}=\pi\int\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-a')}},\tag{7}$$

dans le second (cercles sécants : $c>0$)

$$\begin{aligned}\mathrm{I}=&\int_{a}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\xi}{l}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-a')}}\\&+\int_{-\infty}^{a'}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tang}\frac{\xi}{l}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{(a-\xi)(a'-\xi)}},\end{aligned}\tag{7'}$$

formule où nous avons supposé a supérieur (ou égal) à a' tant en valeur absolue qu'algébriquement (de sorte que $a>0$, tandis que a' peut être positif ou négatif) et où

$$l=\sqrt{c}$$

désigne la demi-longueur de la corde commune, les arc tang étant pris avec leurs déterminations principales. Dans (7), la primitive étant

$$\mathrm{F}(\xi)=2\log\left(\sqrt{\xi-a}+\sqrt{\xi-a'}\right),$$

l'intégration donne

$$\pi[\mathrm{F}(\alpha)-\mathrm{F}(a')]=2\pi\log\frac{\sqrt{\alpha-a}+\sqrt{\alpha-a'}}{\sqrt{d}},\tag{8}$$

$\alpha=\sqrt{-c}$ désignant la valeur de ξ qui correspond à un cercle de rayon nul. L'intégrale (7') se transforme, par une intégration par parties et une intégration dans le plan de la variable complexe ξ le long d'un contour L composé d'un très grand cercle entaillé par les lacets $(-\infty, a')$, $(a, +\infty)$, en

$$\frac{\pi}{2}[\mathrm{F}(il)-\mathrm{F}(-il)],$$

les radicaux $\sqrt{\xi-a}$, $\sqrt{\xi-a'}$, lesquels sont holomorphes dans l'aire S limitée par L, étant pris positifs sur le bord supérieur de la coupure $(a, +\infty)$ et la primitive F (qui est également holomorphe dans S) étant supposée réelle dans les mêmes conditions. Si l'on convient de prendre les radicaux $\sqrt{il-a}$, $\sqrt{il-a'}$

avec leurs arguments compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; les radicaux $\sqrt{-il-a}$, $\sqrt{-il-a'}$ imaginaires conjugués des premiers, il faudra alors écrire ([1])

$$\mathrm{I} = \pi \log \frac{\sqrt{il-a}+\sqrt{il-a'}}{\sqrt{-il-a'}-\sqrt{-il-a}}, \tag{8'}$$

quantité qui est bien réelle, grâce au fait que le produit

$$(\sqrt{-il-a'}-\sqrt{-il-a})(\sqrt{-il-a'}+\sqrt{-il-a})$$

est la quantité positive $a-a'$.

4. Comme l'exemple précédent nous y conduit, nous allons étudier des intégrales de la forme

$$\mathrm{I} = \int\int f v \underline{v}\, d\mathrm{S}, \qquad v = \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{\Gamma}}, \qquad \underline{v} = \frac{\underline{\mathrm{V}}}{\sqrt{\underline{\Gamma}}},$$

dans laquelle f est une fonction régulière et positive dans l'aire d'intégration. Celle-ci est définie par les inégalités

$$\Gamma \geqq 0, \qquad \underline{\Gamma} \geqq 0, \tag{9}$$

dont les deux frontières $\Gamma = 0$, $\underline{\Gamma} = 0$ *sont, pour v et $\underline{v}$ respectivement, des infinis* d'ordre $\frac{1}{2}$. Toutes les quantités qui figurent sous le signe $\int\int$ dépendront d'ailleurs de quatre paramètres ν_1, ν_2, ξ, η dont I sera,

---

([1]) L'identité de (8) avec (5), moyennant les relations

$$h^2 = a^2 - \alpha^2, \qquad h'^2 = a''^2 - \alpha^2,$$

se vérifie par la transformation du radical double

$$\sqrt{(h+h')^2 - d^2} = \sqrt{2[aa' - \alpha^2 + \sqrt{(a^2-\alpha^2)(a'^2-\alpha^2)}]}$$

en la somme des deux radicaux simples

$$\sqrt{aa' + \alpha(a-a') - \alpha^2} + \sqrt{aa' - \alpha(a-a') - \alpha^2} = \sqrt{(a-\alpha)(a'+\alpha)} + \sqrt{(a+\alpha)(a'-\alpha)}$$

avec transformation analogue au dénominateur.

On vérifiera de même (en tenant compte des conventions qui viennent d'être faites sur les divers radicaux $\sqrt{\pm il - a}$, $\sqrt{\pm il - a'}$) l'identité de (8') avec (5') moyennant les relations

$$h^2 = a^2 + l^2, \qquad h'^2 = a'^2 + l^2,$$

par conséquent, lui-même fonction. Nous écrirons cette dépendance sous la forme

$$I = I(\nu_1, \eta, \nu_2, \xi).$$

Elle sera régulière (sans autre caractère spécial que nous ayons à faire intervenir, au moins jusqu'à nouvel ordre) en ce qui concerne les variables ν_2 et ξ. Par contre, il conviendra d'ordonner les diverses quantités que nous allons considérer par rapport aux variables η et ν_1. Certaines d'entre elles seront nulles pour $\eta = \nu_1 = 0$; celles qui, au contraire, admettront, par rapport à η et à ν_1, des développements à termes constants différents de zéro, seront dites des *unités*, terminologie inspirée par la théorie des corps algébriques et déjà employée par plusieurs auteurs dans des cas analogues. Une telle fonction-unité [comme l'est, par exemple, la fonction f qui figure dans l'intégrale (1)] peut être élevée à une puissance quelconque d'exposant constant, le résultat obtenu étant à nouveau développable suivant les puissances de η, ν_1.

Nous supposerons la première frontière $\Gamma = 0$ fixe : cette supposition sera réalisée dans l'application qui nous intéressera et peut d'ailleurs se faire, en toute hypothèse, sans diminuer la généralité, moyennant une transformation ponctuelle effectuée dans l'intégrale. Nous prendrons sur S des coordonnées curvilignes x, y, dont la seconde s'annule sur la frontière en question, de sorte que, en convenant de relier par le signe $\sim$ deux quantités équivalentes entre elles à un facteur unité près, on peut écrire

$$\Gamma \sim y.$$

La seconde frontière $\underline{\Gamma} = 0$ sera, au contraire, variable. Pour

$$\eta = \nu_1 = 0,$$

elle sera tangente à la première, en un point qne nous pourrons, sans diminuer la généralité, supposer correspondre à $y = 0$, $x = \xi$.

Comme les facteurs unités peuvent évidemment être incorporés à la fonction f, on voit que l'intégrale I prend la forme

$$I = \int \frac{f\,dS}{\sqrt{y}\sqrt{\underline{\Gamma}}};$$

c'est la variabilité de la seconde frontière $\underline{\Gamma} = 0$ qui va constituer la difficulté essentielle, lorsque nous voudrons différentier I par rapport à ν_1 ou à ν_2. On sait, en effet, que les règles classiques à cet égard deviennent inapplicables lorsque la fonction qui figure avec le signe d'intégration admet une singularité mobile en fonction du paramètre par rapport auquel la différentiation est effectuée, celle-ci ayant alors pour effet d'élever l'ordre de la singularité.

5. Les aires définies respectivement par les deux inégalités (9) peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, des situations diverses. Dans la présente étude qui, nous l'avons dit, exclura encore la présence de caustiques dans les ondes considérées, nous admettrons que ces situations ne peuvent être autres, à une homéomorphie régulière près, que celles qui sont possibles pour deux cercles. Les deux aires (9) pourront donc être extérieures l'une à l'autre (I étant alors nul), intérieures ou sécantes, avec les cas limites du contact intérieur ou extérieur. Dans les cas qui nous intéressent, l'aire variable $\Gamma \geqq 0$ sera régulièrement homéomorphe à un cercle de rayon borné supérieurement et inférieurement, c'est-à-dire qu'on pourra la ramener à un tel cercle par une transformation ponctuelle dépendant des paramètres ν, ξ, η, mais dans laquelle les dérivées partielles du premier ordre admettront une borne supérieure et le jacobien une borne inférieure indépendantes de ces paramètres.

Soient $y = b$, $y = -b$ deux parallèles menées à la première ligne frontière, à une distance choisie une fois pour toutes, quoique aussi petite qu'on le veut, et comprenant entre elles une bande B autour de l'axe des x. Nous pourrons dire que l'aire variable $\Gamma \geqq 0$ est « franchement extérieure », « franchement intérieure » ou « franchement sécante » à l'aire fixe $y \geqq 0$ lorsqu'elle sera sans point commun avec la bande B ou que, au contraire, elle coupera les *deux* parallèles qui la limitent. Dans ce dernier cas, moyennant l'hypothèse faite plus haut sur Γ, elle coupera l'axe des x sous un angle borné inférieurement. L'intégrale I, nulle dans le premier des trois cas qui viennent d'être mentionnés, est, dans chacun des deux autres, une fonction parfaitement régulière de nos quatre paramètres : elle admet en particulier, par rapport à ν_1 et à ν_2, des dérivées premières et secondes bornées. On s'en assurera en transformant l'aire $\Gamma \geqq 0$ en un cercle fixe, ainsi qu'il a été expliqué il y a un instant. Si cette aire est « franchement intérieure » à $\Gamma \geqq 0$, le facteur v n'introduira plus de singularité *variable* et, dans ces conditions, la différentiation sous le signe $\int\int$ pourra s'effectuer sans élévation de l'ordre de singularité; quant au facteur v, il restera uniformément borné, ainsi que ses dérivées [1]. Si les deux aires sont franchement sécantes, l'aire S se composera de deux parties, l'une S_1 extérieure à la bande B, l'autre S_2 comprise dans cette bande : le raisonnement précédent s'appliquera encore à S_1, dont la frontière empruntée à $y = b$, laquelle sera devenue variable d'après la transformation, ne sera pas une singularité; et, d'autre part, l'intégrale relative à S_2 pourra être traitée comme il va être indiqué, la conclusion obtenue étant que cette intégrale restera bornée ainsi que ces dérivées partielles [2].

6. L'intégrale I peut, au contraire, présenter des singularités dans les cas intermédiaires entre ceux que nous venons de considérer, c'est-à-dire lorsque l'aire $\Gamma \geqq 0$ rencontre une et une seule des deux parallèles $y = \pm b$, et est, par conséquent, au voisinage du contact extérieur ou intérieur avec la ligne $\Gamma = 0$; ou encore, lorsque cette dernière est, en un sens analogue, voisine du contact intérieur avec $\Gamma = 0$. Ce dernier cas se ramènera à l'un des précédents, de sorte que nous n'aurons pas à le traiter spécialement.

Plaçons-nous d'abord dans l'un des deux premiers. $\nu_1 = \eta_1 = 0$ est supposé correspondre (quel que soit ν_2) au contact des deux contours, au point $y = 0$, $x = \xi$; et nous ordonnerons les diverses quantités sur lesquelles nous raisonnons par rapport aux puissances de $x - \xi, y, \eta_1, \nu_1$.

(1) On peut avoir à considérer le cas où la région $\Gamma \geqq 0$ est franchement intérieure à $\Gamma \geqq 0$ (l'écart entre les deux frontières ayant une borne inférieure fixe), cas auquel notre choix de coordonnées curvilignes ne conviendrait plus. Mais alors il suffirait, sans transformation aucune, de différentier directement sous $\int\int$, la singularité de v étant fixe et v restant uniformément borné.

(2) On se convaincra d'ailleurs aisément qu'une aire telle que S_1, c'est-à-dire celle qui est commune à deux aires telles que (9) régulièrement homéomorphes chacune à celle d'un cercle fixe et dont, d'autre part, des contours se coupent en deux points (et deux seulement) sous des angles bornés inférieurement, est elle-même régulièrement homéomorphe à un segment de cercle fixe.

Cela posé, notre évaluation de l'intégrale I reposera sur le théorème classique de « factorisation » de Cauchy, Poincaré et Weierstrass ou, ce qui revient au même, dans le cas ou nous nous plaçons en ce moment, sur le mode de calcul employé par Poincaré dans son Mémoire *sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes* (1). Appliqué à la variable x, ou plutôt $x-\xi$ (qui figure dans $\underline{\Gamma}$, en général par un terme du premier degré avec un coefficient nul en O, mais au second degré avec un coefficient nécessairement négatif en ce point), ce théorème donne, dans nos hypothèses géométriques,

$$\underline{\Gamma} \sim Q - x'^2, \tag{10}$$

où $x' = x - \xi - P$, en désignant par P une fonction de y, ν_1, η, ν_2, ξ nulle pour $y = \eta = \nu_1 = 0$, et où

$$Q = \alpha(\nu_1, \eta, \nu_2, \xi) + \beta(\nu_1, \eta, \nu_2, \xi)y + \ldots$$

désigne un développement également indépendant de x et nul en O pour $\eta = \nu_1 = 0$.

Décomposons, comme nous l'avons déjà fait tout à l'heure, l'aire d'intégration en deux parties, l'une S_1 (laquelle manque au voisinage du contact extérieur) située dans la région $y \geqq b$; l'autre S_2 comprise dans la bande B. La conclusion précédente s'applique à S_1, de sorte que l'intégrale correspondante est uniformément bornée ainsi que ses dérivées partielles premières et secondes par rapport à ν_1 et à ν_2. Dans S_2, et même dans une bande B' coaxiale à B et de largeur double, les développements ci-dessus mentionnés seront supposés valables, comme cela est légitime si b a été pris assez petit.

Le coefficient β du terme en y est nécessairement différent de zéro, si, comme nous le supposons, le contour de notre seconde aire est dépourvu de singularités.

L'équation $Q = 0$ définira donc une valeur

$$\nu = Y$$

de y, laquelle représentera (suivant le signe de β) le maximum ou le minimum de cette quantité, au voisinage de O, sur la courbe $\underline{\Gamma} = 0$,

(1) *Acta mathematica*, t. 22. Voir *Y.*, livre II, n° 72, note.

et l'on aura

$$Q \sim y - Y;$$

$Y = 0$ représente évidemment la condition de contact entre les deux lignes frontières $\Gamma = 0$, $\underline{\Gamma} = 0$. Pour $\nu_1 = 0$, cette condition équivaut donc à $\eta = 0$ et d'ailleurs, dans les applications qui nous intéresseront, Y sera du premier ordre en η, de sorte que l'on aura (toujours pour $\nu_1 = 0$)

$$Y \sim \eta.$$

Pour chaque valeur déterminée de ν_1 voisine de o, il sera possible, et il pourra être utile de faire en sorte que cette condition de contact soit indépendante de ν_2.

7. Quelle que soit la situation mutuelle de l'aire $\underline{\Gamma} \geqq 0$ et de la bande B, l'intégration double dans la partie commune à ces deux aires comportera d'abord, pour y constant, une intégration simple par rapport à x', de $-\sqrt{Q}$ à $+\sqrt{Q}$. La quantité à intégrer étant de la forme

$$(11) \qquad \frac{f}{\sqrt{Q - x'^2}}$$

(puisque les divers facteurs unités introduits dans ce qui précède peuvent être incorporés dans la fonction f), le résultat de cette intégration est, comme on le sait, borné. Plus précisément, si nous supposons d'abord les données analytiques, c'est-à-dire les quantités f, P, Q développables en séries entières convergentes par rapport aux variables y, η, ν_1, ν_2 et (pour f), $(x - \xi)$, ce résultat admettra lui-même un développement convergent analogue. Le plus simple, pour le constater, est de poser

$$x = \xi + P + x' = \xi + P + \sqrt{Q} \cos \varphi,$$

et de reporter la valeur de x ainsi définie en fonction de x' ou de φ dans l'expression (11), dont le numérateur f pourra être ainsi ordonné suivant les puissances de x'. L'intégration par rapport à cette dernière quantité se faisant de $-\sqrt{Q}$ à $+\sqrt{Q}$ ou, par rapport à φ, de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, les termes de degré impair ne donneront rien, de sorte que le résultat sera développable suivant les puissances *entières* de Q, les coefficients étant eux-mêmes holomorphes en y, ν_1, η, ν_2, ξ : il sera donc lui-même holomorphe par rapport à ces dernières quantités et admettra une dérivée partielle bornée par rapport à ν_1 et une dérivée partielle du second ordre bornée par rapport à ν_1 et à ν_2.

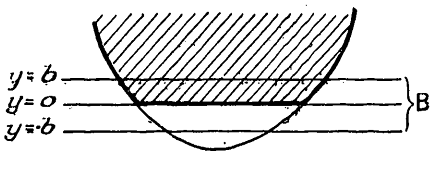
7 *bis*. On aura un calcul applicable même au cas non analytique en écrivant

$$f = f(x', y, \nu_1, \eta, \nu_2, \xi) = f(0, y, \nu_1, \eta, \nu_2, \xi) + x' f_1,$$

où le premier terme est indépendant de x', tandis que le second admet (comme il est aisé de s'en convaincre), par rapport à x', des dérivées jusqu'à un ordre quelconque k si f en admet lui-même jusqu'à l'ordre $k+1$. Le premier terme, intégré par rapport à x', donne $\pi f(0)$. Le second peut s'intégrer par parties puisque $\frac{x'}{\sqrt{Q - x'^2}} = -\frac{\partial}{\partial x'}\sqrt{Q - x'^2}$ et, dans ces conditions, après une différentiation par rapport à un paramètre tel que ν_1 ou y, redonnera une intégrale de même forme que I lui-même. On opérera à nouveau de même si l'on veut différentier par rapport à ν_2 l'expression ainsi obtenue.

8. Désignant par $i(y)$ le résultat auquel aboutit cette intégration par rapport à x et dont nous venons de constater qu'il est borné

Fig. 1.



ainsi que ses dérivées $\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ et $\frac{\partial^2}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}$, il reste à intégrer par rapport à y la quantité $\frac{1}{\sqrt{y}} i(y)$.

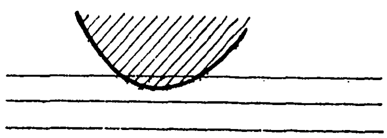
Ici, il faut distinguer entre les différents cas énumérés tout à l'heure.

Si les deux aires (9) sont sécantes, l'intégration devra être faite de o à b, que les deux aires en question soient franchement sécantes ou que l'on soit au voisinage du contact intérieur.

Dans ces conditions, l'intégrale ainsi obtenue et, par conséquent, l'intégrale totale seront bornées ainsi que leurs dérivées partielles.

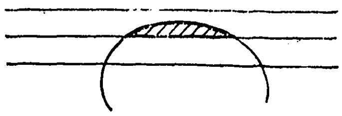
L'intégration aura lieu entre les limites Y et b au voisinage du contact intérieur, si les deux aires sont intérieures l'une à l'autre (*fig.* 2).

Fig. 2.



Elle aura lieu de o à Y dans le cas des aires sécantes au voisinage du contact extérieur (*fig.* 3).

Fig. 3.



Dans ces deux cas, l'intégrale est développable suivant les puissances de $\sqrt{Y}$ et non de Y.

On voit ainsi, ou encore directement, par différentiation sous $\int$ et compte tenu de la variabilité d'une des limites d'intégration, qu'alors la dérivée $\frac{\partial I}{\partial \nu_1}$ sera infinie de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{Y}}$, donc, pour $\nu_1 = 0$, de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$. Il en sera de même pour $\frac{\partial^2 I}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}$ si nous supposons que la variable ν_2 n'intervient pas dans la condition de contact $Y = 0$, de sorte que $\frac{\partial Y}{\partial \nu_2}$ (qui serait multiplié par $Y^{-\frac{3}{2}}$) s'annule avec Y.

Ainsi (et sous la condition énoncée en dernier lieu) les dérivées considérées, bornées en général, sont infinies de l'ordre $\frac{1}{2}$ et de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement au voisinage du contact intérieur, les deux aires étant intérieures l'une à l'autre; au voisinage du contact extérieur, les deux aires étant sécantes.

8 *bis*. Quant à l'intégrale elle-même, considérée pour des aires sécantes au voisinage du contact extérieur, nous voyons qu'elle est infiniment petite de l'ordre de $\sqrt{Y}$ ou, pour $\nu_1 = 0$, de $\sqrt{\eta}$. Il en est de même de sa dérivée par rapport à ν_2 si l'on admet encore que cette dernière variable n'intervient pas dans la condition de contact $Y = 0$.

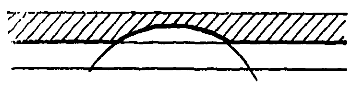
9. Pour être complets, examinons encore le cas où l'aire d'intégration serait définie, toujours dans le demi-plan $y \geqq 0$, comme *extérieure* à la ligne $\underline{\Gamma} = 0$. Pour qu'une telle région corresponde à $\Gamma \geqq 0$, nous aurons à prendre

$$\underline{\Gamma} \sim x'^2 + Q,$$

et, bien entendu, nous devrons aussi la limiter, du côté des y positifs ou des x très grands, par une ligne dont nous n'avons pas à préciser autrement le tracé, puisqu'elle n'intervient pas dans les singularités de l'intégrale. Dans la bande B, en particulier qui seule nous intéresse, cette limitation pourra être opérée par deux parallèles à l'axe des y placées de part et d'autre du point $x = \xi$, soit $x = \xi + a$, $x = \xi - a'$, en désignant par a et a' deux quantités dont le choix nous sera indifférent, pourvu qu'elles soient positives et non très petites.

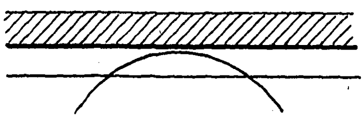
En réalité, cette seconde discussion n'est pas indispensable et nous

Fig. 4.



sommes sûrs *a priori* qu'elle doit donner les mêmes résultats que la précédente, au moins dans les conditions où nous aurions à nous placer.

Fig. 5.



Nous pourrons en effet toujours ramener l'une à l'autre par une transformation ponctuelle variable, mais uniformément régulière, dans laquelle ce sera la ligne $\underline{\Gamma} = 0$ et non plus $\Gamma = 0$, qui aura pour transformé l'axe des x. Les deux cas de figure possibles (*fig.* 4, 5) — il s'agit évidemment des cas voisins du contact intérieur — donneront des figures telles que 1, 2, c'est-à-dire relevant des n^{os} **7-8**.

Mais s'il est vrai que l'on pourrait se dispenser de considérer le cas dont il s'agit, il est clair également, *a priori*, que son étude ne doit pas offrir de difficulté et c'est ce qu'il est aisé de vérifier. Suivant la même marche que ci-dessus, nous aurons d'abord à effectuer l'intégration simple

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{x'^2+Q}},$$

soit entre les limites $-a'$ et $+a$ (pour $Q>0$), soit dans les intervalles $(-a', -\sqrt{|Q|})$, $(+\sqrt{|Q|}, +a)$, (pour $Q<0$). Le résultat se met d'ailleurs sous une forme commune aux deux cas, savoir

$$\log\{(a+\sqrt{a^2+Q})(a'+\sqrt{a'^2+Q})\} - \log|Q|.$$

Le premier terme, développable suivant les puissances positives et entières de Q et, par conséquent, de y, η_1, ν_1, ne donne lieu à aucune singularité. Il ne nous reste donc qu'à intégrer par rapport à y, après multiplication par $\frac{dy}{\sqrt{y}}$, le logarithme qui figure au second terme et dans lequel $|Q|$ peut se remplacer, à un facteur unité (donc à logarithme régulier) près par $|y-Y|$. Nous avons donc à considérer l'intégrale

$$\int_0^b \frac{-dy \log|y-Y|}{\sqrt{y}}. \tag{12}$$

Dans le cas de $Y>0$ (aires sécantes, *fig.* 4) cette intégrale est régulière : sa valeur, au facteur 2 près, est

$$\begin{aligned}&(\sqrt{b}-\sqrt{Y})\log(\sqrt{b}-\sqrt{Y})+(\sqrt{b}+\sqrt{Y})\log(\sqrt{b}+\sqrt{Y})-2\sqrt{b}\\ &=\sqrt{b}\left(2\log b-2-\frac{Y}{b}+\ldots\right).\end{aligned}$$

Il y a au contraire singularité pour le cas des aires intérieures ($Y<0$), comme nous pouvions le prévoir d'après nos résultats précédents : l'intégrale (12) est alors

$$2\sqrt{b}\,[\log(b-|Y|)-1]+2\sqrt{|Y|}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{|Y|}}{b}\right).$$

Son terme singulier en $\sqrt{|Y|}$ donne lieu aux mêmes considérations que tout à l'heure.

Nous avons, dans ce qui vient d'être dit, traité le numérateur f comme une constante. Pour tenir compte du fait qu'il dépend de x ou, ce qui revient au même, de x', on opérera comme il a été dit au n° **7** *bis*. On est ainsi conduit à une expression de la forme

$$(12') \qquad \int_0^b \frac{-dy \log|y - Y|}{\sqrt{y}} j(y),$$

différant de (12) par la présence, sous le signe $\int$, du facteur

$$j(y) = j(y, \nu_1, \eta, \nu_2, \xi).$$

Il conviendra encore, en raison de la présence de ce facteur, de tenir compte de la variabilité de Y, ce qu'on fera par la même méthode, c'est-à-dire en écrivant

$$j(y) = j(Y) + (y - Y) j_1,$$

ce qui est possible sous l'hypothèse de la dérivabilité de j. Une dérivation par rapport à ν_1 ramène alors à une expression de la forme (12') sur laquelle il n'y aura qu'à opérer de même lorsqu'on voudra différentier encore par rapport à ν_2.

10. Abordons maintenant notre objet principal. Comme dans les Mémoires *B. S.* et *A. M.* précédemment cités, la nappe de conoïde caractéristique Γ_0 ayant pour sommet le point o sera coupée par une première surface S_1, ayant partout une orientation d'espace et telle que, dans le volume qu'elle détermine avec le conoïde, la fonction Γ_0, carré de la distance géodésique au point o et la solution élémentaire $v_0(x)$ de pôle o, aient pu être définies et soient bien déterminées; puis, une seconde surface S_2 ayant également une orientation d'espace et qui possédera, par rapport à tout point 1 de S_1 (ou du moins de la portion utile de S_1, celle qui est comprise à l'intérieur de Γ_0), la même propriété que nous avons supposée à S_1 lui-même vis-à-vis du point o, savoir celle de délimiter, avec une nappe de conoïde du sommet 1, un volume déterminé dans lequel les quantités Γ_1, et $v_1(x)$ analogues à Γ_0 et à $v_0(x)$ auront pu être définies et seront bien déterminées. De plus, au moins jusqu'à nouvel ordre, nous supposerons que les portions de nappes comprises entre S_1 et S_2 sont exemptes de singularités. Les figures sur lesquelles nous raisonnerons auront la même disposition générale que dans les Mémoires cités; en particulier, on pourra utiliser les mêmes figures que dans *A. M.*, avec cette différence que les figures de gauche du Mémoire en question représenteront schématiquement des figures à trois (et non plus quatre) dimensions et que les figures de droite ne comporteront plus aucune réduction du nombre de dimensions, puisqu'elles représenteront des dessins tracés sur la surface ordinaire S_1.

Par ailleurs, et n'ayant pas en vue les cas les plus généraux de figure que l'on pourrait imaginer, mais seulement ceux qui offrent de l'intérêt pour les applications, nous supposerons, jusqu'à indication contraire, que tout se passe, topologiquement, comme dans le cas le plus simple, celui de l'équation à coefficients constants, nos figures étant par conséquent, en principe, homéomorphes à celles que l'on serait conduit à tracer si l'on raisonnait sur l'équation des ondes cylindriques.

Par contre, ce que nous allons dire s'appliquera si le conoïde Γ_0 est remplacé (comme on peut y être conduit par l'étude du problème mixte, c'est-à-dire de la réflexion) par n'importe quelle autre surface caractéristique exempte de singularités au voisinage de son intersection σ avec S_1, sur laquelle elle découpera encore une aire fermée. Cette même caractéristique coupera S_2 suivant une courbe analogue que nous supposerons provisoirement être aussi dépourvue de singularités (hypothèse qui sera maintenue en ce qui regarde S_1, mais non toujours en ce qui regarde S_2), et qui se déduira de la première par le principe des ondes enveloppes. De chaque point de σ comme sommet, soit décrit une nappe descendante de conoïde caractéristique, coupant S_2 suivant une ligne σ_2 : l'enveloppe de ces lignes sera la trace de la caractéristique sur S_2. Ainsi qu'il est bien connu depuis les travaux de M. Vessiot, ceci définit, entre les traces d'une même caractéristique sur S_1 et sur S_2, une transformation de contact par laquelle l'une de ces courbes correspond à l'autre.

Il y a lieu toutefois à une distinction. Par la tangente mt en un point quelconque m de la ligne σ, on peut mener, au cône caractéristique qui a ce point pour sommet, deux plans tangents. Entre ces deux plans ou, plus exactement entre les deux demi-plans situés au-dessus du plan tangent à S_1 (région située du côté de S où se trouve le point o), on peut distinguer celui qui est interne et celui qui est externe : à cet effet, on fera tourner autour de mt un demi-plan qui, initialement, fera partie du plan tangent à S_1 et sera du même côté de mt que l'aire fermée S_1 : le demi-plan tangent interne est celui que l'on rencontrera le premier dans cette rotation.

L'onde figurée par notre caractéristique sera supposée descendante (1) et arrivant du côté interne : dans la suite de sa propagation, c'est-à-dire au-dessous de S_1, elle sera donc tangente à un demi-plan tangent externe du cône caractéristique et donnera, par conséquent, une nappe unique, centrifuge, de surface intégrale de l'équation des caractéristiques $\mathbf{A} = 0$ des travaux cités.

Mais, dans les raisonnements qui vont suivre comme dans ceux qui se sont présentés dans nos travaux antérieurs sur le même sujet, la caractéristique considérée peut être le siège d'une discontinuité dans le phénomène physique étudié ou, analytiquement parlant, d'une discontinuité des valeurs de la fonction cherchée u (solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre) ou de ses dérivées. Si, en particulier, nous portons notre attention sur les données de Cauchy relatives à S_1, c'est-à-dire sur les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial \nu_1}$ (ν_1, transversale à S_1 dirigée du côté de la région où est situé le point o) aux divers points de S_1, ces valeurs pourront donner lieu (soit par elles-mêmes, soit en ce qui concerne leurs dérivées partielles par rapport à des coordonnées curvilignes prises sur S_1) à discontinuité le long de la ligne σ. Si maintenant nous considérions ces données de Cauchy comme définissant u dans tout l'espace compris entre S_1 et S_2, la discontinuité dont nous venons de noter l'existence le long de σ devrait, en thèse générale, se propager, dans l'espace dont il s'agit, non seulement suivant l'onde centrifuge précédente, mais aussi suivant l'onde centripète représentée par la deuxième nappe de caractéristique qu'on

(1) Les coordonnées étant choisies de telle sorte que x_3 soit une coordonnée temps c'est à dire que, en chaque point, la direction (o, o, 1) soit intérieure au cône caractéristique], cela signifie qu'il s'agit d'une nappe tournée dans le sens des x_3 décroissants.

peut mener par la ligne σ, celle qui, en chaque point m de σ, est tangente au demi-plan tangent inférieur et interne du conoïde caractéristique. En réalité, cette onde n'existe pas dans le cas actuel (cf. *A. M.*, n° **6**), en raison des relations particulières qui expriment la *compatibilité*, au sens d'Hugoniot, des deux mouvements (ou, en langage analytique, des deux solutions de l'équation aux dérivées partielles) en discontinuité l'un par rapport à l'autre le long de la caractéristique. Elle se présente cependant en apparence et l'on est obligé de la considérer, dans toutes les études relatives à la question qui nous occupe : nous lui donnerons le nom d'onde interne. On peut aussi l'appeler « pseudo-onde », puisque, en réalité, elle n'est le siège d'aucun phénomène particulier.

Sur S_2, la région intérieure à l'onde est formée des points 2 tels que le conoïde ayant pour sommet l'un de ces points ait des points communs avec l'aire fermée intérieure à Γ_0 ; la trace de l'onde véritable est le lieu des points tels que la nappe ascendante de conoïde caractéristique ayant pour sommet l'un de ces points coupe S_1 suivant une courbe $\underline{\sigma}$ tangente extérieurement à σ; la trace de l'onde interne est le lieu des points 2 tels que la courbe $\underline{\sigma}$ correspondante soit tangente à σ intérieurement.

11. La quantité Γ_0 est supposée avoir une expression connue sur S_1' ; mais on peut, au moins au voisinage de σ, être conduit à lui substituer une quantité γ équivalente, c'est-à-dire n'en différant que par un facteur unité.

Pour définir γ, menons la géodésique transversale en chaque point de S_1, ce qui nous permettra de définir, conformément à ce qui a été dit au n° **1**, la quantité ν_1, distance géodésique d'un point quelconque à S_1. La quantité γ sera, par définition, la longueur géodésique ainsi interceptée, sur la transversale en chaque point de S_1 voisin de σ, par notre caractéristique (dans le cas par lequel nous avons commencé, par le conoïde caractéristique de sommet o).

Cette quantité, qui est équivalente à Γ_0, au sens précédent, peut aussi évidemment être définie sur toute surface $\nu_1 = \text{const.}$, et ses valeurs se conserveront, à une constante près, par projection transversale de cette seconde surface S_1' sur S_1, c'est-à-dire si l'on fait correspondre entre eux les points des deux surfaces situés sur une même géodésique transversale. Il en résulte (et c'est là ce qui importe en raison des conditions où nous nous sommes placés au n° **8**) que les lignes $\gamma = \text{const.}$ tracées sur les deux surfaces dérivent les unes des autres par cette même projection transversale.

L'introduction de la quantité γ ainsi définie d'une manière précise (et qui est considérée comme positive dans la direction transversale tournée vers la région 1), outre qu'elle définit les surfaces S'_1 représentées par les équations $\nu_1 = \text{const.}$, établit entre chacune d'elles et S_1 une correspondance ponctuelle $\mathfrak{T}$, les points homologues étant ceux qui sont situés sur une même géodésique transversale.

Il nous sera éventuellement utile d'en considérer une seconde ou, ce qui revient au même, de définir d'une manière convenable un système de coordonnées curvilignes tant sur S'_1 que sur S_1. La seule condition à laquelle il nous importe d'assujettir ces coordonnées x, y sera que la seconde d'entre elles soit toujours égale à la valeur (définie comme il vient d'être dit) de γ. En associant un point de S'_1 au point qui a mêmes coordonnées sur S_1, nous définirons une nouvelle correspondance $\mathfrak{T}_1$ (nécessairement différente de la première, dans laquelle les deux valeurs de y diffèrent entre elles de ν_1).

Enfin la correspondance $\mathfrak{T}_2$ entre une surface S_1 ou S'_1 et la surface S_2 ou une surface S'_2 qui s'en déduit comme S'_1 se déduit de S_1 sera construite de la manière suivante. Sur S_1 tout d'abord, on mènera, en chaque point m_1, la ligne $y = \gamma = \text{const.}$, puis par cette ligne, la nappe caractéristique (externe ou interne, suivant qu'on est au voisinage de l'onde incidente ou de l'onde interne) et la bicaractérisque qui passe par m_1; c'est cette dernière qui déterminera sur S_2 (ou sur S'_2) le point correspondant à m_1 et dont nous définirons les coordonnées ξ, η comme respectivement égales aux coordonnées x, y du point correspondant y_1.

11 *bis*. Le système de coordonnées curvilignes $\mathfrak{S}$ ainsi défini est celui que nous adopterons, en principe, sur S_2 ou sur l'une quelconque des surfaces voisines S'_2, au voisinage de l'une de nos deux ondes issues de σ. Nous pourrons toutefois avoir éventuellement à lui en substituer un autre analogue $\mathfrak{S}'$ construit à partir de la surface S'_1 représentée par l'équation $\nu_1 = \text{const.}$ Soient prises comme coordonnées curvilignes d'un point m'_1 d'une telle surface, les coordonnées de sa projection transversale m_1 sur S_1. Dans ces conditions, les lignes $y = \text{const.}$ tracées sur S'_1 seront aussi des lignes $\gamma = \text{const.}$, en vertu de la manière dont nous avons défini ν_1 et γ. C'est à l'aide de ces lignes que nous définirons, de la même manière que tout à l'heure, une correspondance ponctuelle entre S'_1 et S_2 (ou S'_2) et, par conséquent, un système de coordonnées curvilignes sur cette dernière surface. Il n'y a pas de raison, bien entendu, pour que ce système coïncide avec le premier : dans le cas général, il dépendra de ν_1.

12. Ces préliminaires géométriques acquis, soient données sur S_2 une distribution de valeurs u_2 et u et de valeurs u'_2 de la dérivée transversale $\frac{du}{d\nu_2}$. Résolvant le problème de Cauchy ainsi posé pour notre équation aux dérivées partielles, on obtient, sur S_1, des valeurs u_1 de u et des valeurs u'_1 de la dérivée $\frac{du}{d\nu_1}$; et les valeurs ainsi obtenues seront dérivables par rapport aux déplacements effectués sur S_1 autant de fois qu'on voudra pourvu que u_2 et u'_2 le soient eux-mêmes sur S_2 un nombre suffisant de fois. Ce sont ces valeurs de u_1 et u'_1 qui, reportées dans (F), nous donneront une valeur de u_0. Celles de u_1 seront données par

$$(\text{F}_1)\quad u_1 = \frac{1}{2\pi}\int\int v_{12}\, u'_2\, dS_2 + \frac{1}{2\pi}\int\int L_2\, v_{12}\, u_2\, dS_2 - \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\nu_2}\int\int v_{12'}\, u_{2'}\, dS'_{2'}.$$

Celles de u'_1 s'en déduiront par dérivation, en imaginant qu'on donne au point 1 un petit déplacement de longueur géodésique ν_1 transversal à S_1, de manière à l'amener en $1'$: c'est en ce nouveau point $1'$ qu'on aura à former une valeur $u_{1'}$ et, par conséquent, avec ce point $1'$ et un point arbitraire 2 de S_2, ou $2'$ de S'_2, on devra former les quantités $v_{1'2}$ ou $v_{1'2'}$ analogue à celles qui figurent dans (F_1).

Par contre, dans le terme (a) de (F), observons que le point $1'$ n'intervient que par la quantité u'_1 et, par conséquent, par les quantités $v_{1'2}$ ou $v_{1'2'}$, dont nous venons de parler : la quantité v_{01} est calculée au point 1, projection transversale de $1'$, et *il en est de même de l'élément d'aire* de S_1, lequel est emprunté à la surface primitive S_1.

Il importe particulièrement de noter les remarques analogues qui s'appliquent (mais en sens contraire) au terme (b). La quantité v_{01} qui figure sous le signe $\int\int$ est calculée à l'aide d'un point $1'$ situé à une distance géodésique ν_1 de S_1; mais la quantité u_1 doit être calculée au point 1, projection transversale de 1′ [il en est donc de même de la quantité v_{12} ou $v_{12'}$ qui intervient dans l'expression (F_1) de u_1] et, ici encore, il en est également de même de l'élément d'aire. Seulement, cette fois, l'aire d'intégration, pour chaque valeur de ν_1 différente de o, n'est plus S_1 lui-même, mais bien l'aire (S_1) obtenue (*fig.* 6) en coupant S'_1 par l'onde incidente et projetant transversalement la section S'_1 ainsi obtenue (¹) sur S_1.

15. Désignant encore par (a), (c) et (au signe près) (b) les termes de (F_1) dans l'ordre où ils se présentent, nous nous proposons de calculer les quatre expressions obtenues en bornant chacune des deux formules (F), (F_1) soit à son terme (a), soit à son terme (b). Partons donc de la formule (F), dans laquelle

$$v_{01} = \frac{V_{01}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}$$

sera, soit la solution élémentaire de l'équation adjointe ayant le point o pour pôle, soit plus généralement une solution de cette équation adjointe infinie d'ordre $\frac{1}{2}$ le long de la caractéristique ou « onde incidente » (²) quelconque (pourvu qu'elle coupe S_1 suivant une courbe fermée et qu'elle soit centrifuge au sens indiqué plus haut) représentée par l'équation $\Gamma_0 = 0$ ou, ce qui revient au même, par $\gamma = 0$. Dans cette formule, ne tenons compte que du terme représenté par la notation (a), soit

$$(a) \qquad \frac{1}{2\pi}\int\int v_{01}\, u'_1\, dS_1.$$

(¹) Pour simplifier la notation, aucune confusion n'étant d'ailleurs à craindre de ce chef, nous employons le même symbole pour désigner l'une quelconque des surfaces S_1, S'_1, S_2, S'_2 et la portion de cette surface comprise à l'intérieur de Γ_0.

Nous n'avons pas jugé utile de créer une nouvelle notation pour les aires d'intégration qui interviennent au second membre de (F_1): ce sont les aires découpées sur S_2 ou S'_2 par le conoïde de sommet 1.

(²) L'expression est employée un peu abusivement, étant donné que, physiquement, il s'agira, nous le rappelons, d'ondes suivies à rebours, à l'inverse du cours du temps.

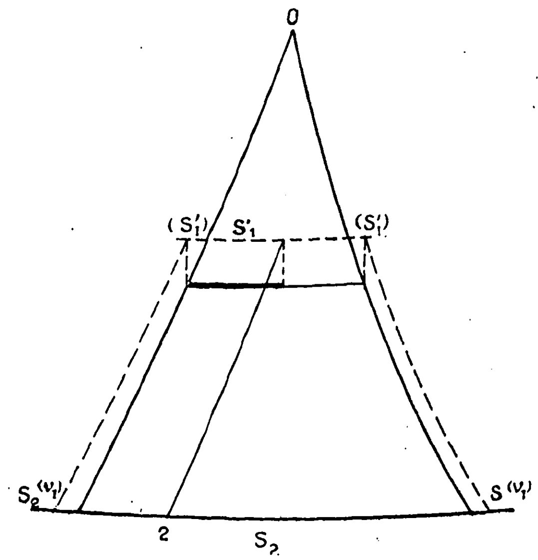
Du moment que la quantité u'_1 est supposée finie et continue, on peut appliquer à cette intégrale une première transformation (A) [1], consistant à l'écrire comme une dérivée par rapport à ν_1, soit

$$(a') \qquad \frac{1}{2\pi}\frac{dJ}{d\nu_1},$$

$$J = \int\int v_{01}\, u_{1'}\, dS_1.$$

Dans l'intégrale J ainsi écrite, l'aire d'intégration est toujours S_1, en chaque point de laquelle on doit former v_{01}; mais à chaque point de

Fig. 6.



cette aire en correspond un autre $1'$ situé sur la même géodésique transversale, à une distance géodésique ν_1, et qui sert à former $u_{1'}$: le lieu de ce point $1'$ est la portion (S'_1) de S'_1 (*fig.* 6) qui correspond transversalement (correspondance $\mathfrak{T}$) à S_1. En $1'$, on aura

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int\int v_{1'2}\, u'_2\, dS_2 + \frac{1}{2\pi}\int\int L_2 v_{1'2}\, u_2\, dS - \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\nu_2}\int\int v_{1'2'}\, u_{2'}\, dS'_2.$$

[1] Nous affectons une notation spéciale à chaque étape du calcul, afin d'en étudier plus aisément, s'il y a lieu, l'extension à des conditions plus générales que celles où nous nous plaçons dans le travail actuel.

Le terme (aa) de notre formule finale s'obtiendra en bornant à son tour cette expression $u_{1'}$ à son premier terme pour le substituer dans J et par suite dans (a'). L'intégrale J devient ainsi

$$J(a') = \frac{1}{2\pi}\int\int v_{01}\, dS_1 \int\int v_{1'2}\, u'_2\, dS_2.$$

Une seconde transformation (B) consiste à intervertir l'ordre des intégrations en faisant passer à l'intérieur celle qui a lieu sur S_1, donc à écrire

$$(13)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\int u'_2\, dS_2 \int\int v_{01}\, v_{1'2}\, dS_1 = \frac{1}{2\pi}\int\int \bar{I}_{02}\, u'_2\, dS_2.$$

Pour chaque position du point 2 sur S_2, le domaine auquel doit être étendue l'intégration intérieure du premier membre sera défini par les conditions suivantes :

1° Ce point $1'$ fera partie de (S'_1), c'est-à-dire que sa projection transversale 1 fera partie de S_1 ;

2° Ce point $1'$ sera en onde ou sous onde avec 2, de sorte qu'il fera partie de l'aire découpée sur S'_1 par le conoïde caractéristique $\underline{\Gamma}$ de sommet 2. Nous projetterons transversalement cette dernière aire sur S_1 : soit Σ_2 cette projection. Considérant, au lieu de $1'$, le point 1 correspondant, nous voyons (*fig.* 6) que *ce dernier doit décrire l'aire* $\bar{S}$ *commune à* S_1 *et à* Σ_2, de sorte que le coefficient de $u'_2\, dS_2$ sous le signe $\int\int$ extérieur dans (13) est

$$\bar{I}_{02} = \int\int_{\bar{S}} v_{01}\, v_{1'2}\, dS_1,$$

intégrale qui est fonction de la position du point 2 sur S_2 et dans laquelle le point $1'$ qui sert à définir $v_{1'2}$ est celui qui correspond par projection transversale à 1.

L'intégrale $\bar{I}_{02}$ appartient au type étudié dans ce qui précède. Pour $\nu_1 = 0$, l'aire d'intégration n'existe pas lorsque 2 est extérieur à l'onde incidente. Dans le cas contraire, les deux aires dont elle est la partie commune sont sécantes entre elles ou intérieures l'une à l'autre ; elles sont tangentes intérieurement lorsque 2 est sur la pseudo-onde (n° **10**) issue du contour de S_1.

Ce dernier cas se subdivise en deux, puisqu'il peut arriver soit que l'aire découpée par le conoïde de sommet 2 soit intérieure à celle qui est découpée par l'onde incidente, soit l'inverse. Nous avons vu que les conclusions sont analogues dans l'une et dans l'autre alternative. D'ailleurs on peut toujours, comme nous l'avons dit au n° **9**, se placer toujours dans le cas du n° **8** : il suffira d'amener, par une transformation ponctuelle, à coïncider avec l'axe des x non plus la trace de l'onde incidente, mais celle du conoïde $\underline{\Gamma}$. Le fait qu'une telle transformation soit variable avec la position du point 2 ne constitue pas une objection, puisqu'il est clair qu'elle est uniformément régulière, au moins au voisinage de la pseudo-onde. La circonstance en question peut d'ailleurs, si l'on veut, être évitée : 1° Si l'onde incidente est elle-même un conoïde de sommet o, en intervertissant au besoin l'ordre de ce point et du point 2; 2° en toute hypothèse, en prenant la surface S_2 suffisamment voisine de S_1, après quoi, s'il y a lieu, on répétera les calculs que nous indiquons en passant de la surface S_2 à une autre S_3, etc.

Nous supposerons d'ailleurs ici que les deux aires tangentes dont les contours sont tangents extérieurement en un point sont par ailleurs entièrement intérieures l'une à l'autre, et de même pour les contacts extérieurs : l'examen des hypothèses contraires est renvoyé à un travail ultérieur.

D'après les résultats des n^os^ **7-9**, l'intégrale $\bar{I}_{02}$ est finie et continue ainsi que sa dérivée par rapport à ν_1, cette dernière devenant au contraire infinie, d'ordre $\frac{1}{2}$, dans les deux circonstances suivantes :

1° Au voisinage du contact extérieur, c'est-à-dire pour ν_1 très petit et le point 2 voisin de la surface d'onde incidente;

2° Au voisinage du contact intérieur, c'est-à-dire pour ν_1 très petit et le point 2 voisin de la pseudo-onde.

Dans le premier cas, la dérivée en question passera de zéro à ∞ lorsque les deux aires extérieures deviendront sécantes; dans le second, elle passera d'une valeur bornée à l'infini lorsque les deux aires, de sécantes, deviendront intérieures.

Étant d'ordre $\frac{1}{2}$, ces deux infinis n'empêcheront point l'intégrale

$$(14) \qquad \frac{1}{2\pi}\iint u'_2 \frac{d\bar{I}_{02}}{d\nu_1} dS_2$$

d'avoir un sens, ni même d'être uniformément convergente quel que soit ν_1. Elle est donc fonction continue de ν_1. Elle représenterait la dérivée de l'intégrale (13) si celle-ci était étendue à une portion fixe de S_2.

En fait, l'intégrale (13) est étendue à une aire $S_2^{(\nu_1)}$ variable avec ν_1 : c'est seulement pour $\nu_1 = 0$ que cette aire se réduit à celle qui est découpée sur S_2 par l'onde incidente. Elle déborde un peu sur cette dernière pour ν_1 positif, le contour de (S'_1) étant alors extérieur à l'onde incidente; elle est au contraire en retrait pour ν_1 négatif. Mais on n'aura point, de ce fait, à écrire de termes à la frontière de $S_2^{(\nu_1)}$: car (cf **8** *bis*), pour toute position du point 2 sur cette frontière, l'intégrale $\bar{I}_{02}$ s'annule.

De même, $\bar{I}_{02}$ est, il est nécessaire de le noter, continu au voisinage de l'onde interne. S'il en était autrement, il aurait fallu, pour obtenir la dérivée de l'intégrale (13), ajouter une intégrale curviligne prise le long de la courbe, trace de cette onde interne sur S_2.

En l'absence de pareilles discontinuités, il résulte des considérations précédentes que notre dernière transformation (C) qui nous a conduits à l'intégrale (14), à savoir la différentiation sous le signe $\int\int$, *donne bien la dérivée de l'intégrale* (13).

14. Bornant toujours l'expression générale (F_1) de u_1 à son premier terme, c'est-à-dire continuant à opérer comme si u_2 était nul, u'_2 étant en général différent de zéro, prenons maintenant, dans l'expression (F), le terme (*b*). Écrivons donc

$$(ba) \qquad \frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{d\nu_1}\int\int v_{01'}\,dS_1\int\int v_{12}u'_2\,dS_2.$$

Le calcul va être tout semblable au précédent, à ceci près que la transformation A sera inutile : nous pouvons immédiatement raisonner sur l'intégrale

$$(15) \qquad \int\int v_{01'}\,dS_1\int\int v_{12}u'_2\,dS_2$$

ou (transformation B)

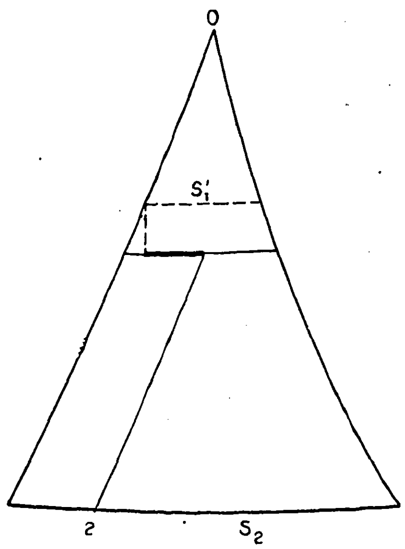
$$(16) \qquad \int\int u'_1 I_{02}\,dS_2, \qquad I_{02} = \int\int v_{01'}v_{12}\,dS_1.$$

Construisons, comme tout à l'heure, l'aire à laquelle doit être étendue l'intégrale $\underline{I}_{02}$ pour chaque position du point 2. Tout d'abord, le point 1' doit faire partie de l'aire S'_1 découpée par l'onde incidente. En second lieu, l'intégrale intérieure (15) devant représenter la valeur de u_1, le point 1 correspondant à 1' et notre point 2 devront être sous onde l'un avec l'autre, de sorte que 1 devra être à l'intérieur du conoïde caractéristique $\underline{\Gamma}$ de sommet 2. Finalement, l'intégrale

$$\underline{I}_{02} = \int\int_{\underline{S}} v_{01'} v_{12}\, dS_1$$

doit être étendue à la portion $\underline{S}$ de S_1 qui est intérieure à la fois : 1° au conoïde $\underline{\Gamma}$ de sommet 2; 2° à la projection transversale de S'_1 (*fig.* 7).

Fig. 7.



Remarquons immédiatement que cette construction est toute semblable à celle du numéro précédent exécutée en vue du calcul de l'intégrale $\underline{I}_{02}$: c'est celle qu'on en déduit en échangeant les deux points o et 2; et notre nouvelle intégrale $\underline{I}_{02}$ n'est autre que celle qu'on déduit de la première par la même permutation, combinée avec l'échange de l'équation donnée avec son adjointe.

Dès lors, les données que nous avons acquises sur la dérivée $\frac{d\overline{I}_{02}}{d\nu_1}$ se transportent immédiatement à la dérivée $\frac{d\underline{I}_{02}}{d\nu_1}$, le contour fixe étant, cette fois, celui qui appartient au conoïde $\underline{\Gamma}$. On peut donc, ici encore, différentier sous le signe $\int\int$ (sans introduction de terme de frontière), et le terme (ba) s'écrira

$$(17) \qquad \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{S_2} u'_2 \frac{d\underline{I}_{02}}{d\nu_1} dS_2.$$

15. Le terme (ca) se formant sans difficulté, soit

$$(ca) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int u'_2 \mathcal{J}_{02}\, dS_2, \qquad \mathcal{J}_{02} = \int\int_{\overline{S}} L_1 v_{01} v_{12}\, dS_1$$

(l'aire d'intégration étant la portion de S_1 intérieure à la fois à Γ_0 et à $\underline{\Gamma}$), on a ainsi tout ce qui, dans l'application de notre mode de calcul, contient les valeurs de u'_2. Le coefficient de $\frac{u'_2}{2\pi}$ sous les signes d'intégration étant, au total,

$$(18) \qquad v_{02} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\overline{I}_{02}}{d\nu_1} - \frac{d\underline{I}_{02}}{d\nu_1} + \mathcal{J}_{02}\right),$$

c'est cette quantité qui donne le prolongement analytique de notre solution infinie sur l'onde incidente; et, si celle-ci est, comme aux Mémoires précédents, issue directement (c'est-à-dire sans réflexion) d'un point unique, c'est cette quantité qui donne la valeur de la solution élémentaire.

La formule (17) relative au cas général est donc toute semblable à celle que nous avons étudiée au n° **2** pour l'équation des ondes cylindriques, et aussi simple, au terme $\mathcal{J}_{02}$ près qui dépend de l'expression L.

16. Ce calcul de v_{02} résout en un sens la question, et c'est ainsi que nous avions envisagé les choses dans notre Mémoire précédent des *Acta mathematica*. Il est cependant important d'aller plus loin. Il ne s'agit pas seulement, en effet, de prolonger la solution élémentaire : il faut s'assurer, et cela surtout, comme nous l'avons dit en commençant, en vue de passer à des circonstances plus générales qui feront l'objet d'un travail ultérieur, que la solution du problème de Cauchy relatif à S_2 se forme à l'aide de ces nouvelles valeurs comme, sur S_1, elle se formait à l'aide des anciennes; et, pour cela, il faut pousser jusqu'au bout la transformation de l'expression (F). C'est ce que la complication des calculs m'avait empêché de faire dans *A. M.* Ici, au contraire, on peut y parvenir aisément.

Le terme (b) de l'expression (F_1) est une dérivée par rapport à ν_2. Par hypothèse, les données, et particulièrement les valeurs de u_2, sont telles que cette dérivée existe et soit continue. On peut donc (transformation D) faire sortir ce signe de différentiation du signe d'intégration extérieur dans l'expression

$$\int\int v_{01'}\, dS_1 \frac{d}{d\nu_2}\int\int v_{12'} u_2\, dS_2, \tag{19}$$

qui figure (différentiée par rapport à ν_1) dans le terme (bb), et écrire ce terme

$$\frac{d}{d\nu_1}\cdot\frac{dK}{d\nu_2}, \qquad K = \int\int v_{01'}\, dS_1 \int\int v_{12'} u_2\, dS_2. \tag{19'}$$

Or l'expression $\mathbf{u}_1 = \int\int v_{12'} u_2\, dS_2$ est, quel que soit ν_2 (et, par conséquent, S'_2), dérivable par rapport aux déplacements effectués sur S_1 si les données de la question (savoir, outre les coefficients de l'équation, les formes de S_1, S_2 et la distribution des valeurs de u_2) sont elles-mêmes suffisamment régulières : elle représente la valeur, au point 1, de la solution d'un problème de Cauchy relatif à S'_2 avec des données $\mathbf{u}_2$ nulles et des données $\mathbf{u}'_2 = u_2 \frac{dS_2}{dS'_2}$. L'intégrale K aura donc une dérivée par rapport à ν_1, laquelle n'est autre que le terme (b) de la formule (F) en y remplaçant u_1 par $\mathbf{u}_1$, et l'on démontrera, à l'aide des principes développés dans nos leçons de Yale, que cette dérivée est continue par rapport à ν_1 et à ν_2. Dans ces conditions, comme il est bien connu depuis Schwarz, on peut intervertir l'ordre des différentiations (transformation E) dans (19'). On trouve donc la dérivée par rapport à ν_2 d'une quantité qui ne diffère de (15) que par le changement de u'_2 en u_2 et à laquelle on donnera dès lors la forme correspondant à (17).

Le terme (ab) est

$$\int\int v_{01}\,dS_1 \frac{d}{d\nu_1}\frac{d}{d\nu_2}\int\int v_{12'}u_2\,dS_2,$$

le coefficient de $v_{01}\,dS_1$ représentant une valeur de u'_1. Pour des raisons toutes semblables aux précédentes, on pourra (transformation E′) intervertir les deux différentiations, puis (l'intégrale extérieure étant uniformément convergente quel que soit ν_2) faire sortir la différentiation $\frac{d}{d\nu_2}$ des signes d'intégration (transformation D′).

En résumé, la somme des termes (ab), (bb) et, de même, (cb) sera la dérivée par rapport à ν_2 d'une expression qui n'est autre que celle sur laquelle nous avons raisonné tout à l'heure, au remplacement près de u'_2 par u_2. On trouvera donc bien, pour cette somme, la valeur

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\nu_2}\int\int u_2 v_{02}\,dS_2, \tag{20}$$

v_{02} ayant l'expression (18), ainsi que nous voulions l'établir.

Au reste, les calculs des nos **7** et suivants montrent bien comment la différentiation (20) peut être exécutée directement sous le signe $\int\int$. La seule question, à cet effet, est le choix d'un système de coordonnées convenable sur les surfaces S_2, S'_2. Or en choisissant les coordonnées comme il est dit au n° **11** *bis* (pour chaque valeur de ν_1), l'une s'annulera le long du contour, tant sur S_2 que sur S'_2. On sait que cette condition est suffisante pour l'application de la différentiation sous le signe $\int\int$ et, de fait, pour que la quantité $\frac{d^2 1}{d\nu_1\,d\nu_2}$, par exemple, ne soit infinie que d'ordre $\frac{1}{2}$, nous avons vu (nos **7-8**) qu'il suffisait de s'assurer que $\frac{dY}{d\nu_2}$ s'annule avec Y, ainsi qu'il est réalisé au n° **11** *bis*.