JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Sur la notion générale de flux de Green et son application à l'étude du principe de Picard

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 93-111.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__93_0>

Sur la notion générale de flux de Green et son application à l'étude du principe de Picard;

PAR GEORGES **BOULIGAND**.

I. — But de ce Mémoire.

1. Soit, à distance finie, un domaine Ω de frontière Σ, pour lequel nous supposerons provisoirement le problème de Dirichlet résoluble au sens classique : étant donnée une distribution $f(Q)$ continue sur Σ, il existera donc une fonction $F(P)$, harmonique dans Ω, continue dans $\Omega + \Sigma$ et prenant sur Σ les valeurs $f(Q)$. Emplissons Ω d'une substance homogène et conductrice de la chaleur. Nous donnerons du principe de Picard l'énoncé suivant (qui peut être en défaut) :

Une source émissive étant placée en un point Q_0 de Σ, et les autres points périphériques étant portés au zéro, la distribution relative (c'est-à-dire, donnant les rapports) *des températures internes est bien définie.*

Autrement dit, une fonction harmonique dans Ω, positive dans ce domaine, devenant infinie en Q_0, *continue sur $\Sigma - Q_0$ en chaque point duquel elle a pour valeur limite zéro*, est déterminée à un facteur constant près (cet énoncé suppose d'ailleurs que l'on écarte l'accessibilité de Q_0 par plusieurs voisinages indépendants, ou sinon qu'on spécifie celui de ces voisinages pour lequel la fonction devient infinie, à l'exclusion des autres).

Lorsque Σ offre des points irréguliers, on aura le même énoncé, au remplacement près des mots en italique par : *attachée à la valeur zéro sur $\Sigma - Q_0$*.

2. Le mot *attaché* prend ici un sens qu'il importe de rappeler et qui provient du théorème d'existence de la solution du problème de Dirichlet *généralisé*, c'est-à-dire envisagé dans le cas d'un domaine ouvert Ω dont la frontière Σ est quelconque. M. Norbert Wiener a énoncé ce théorème sous la forme suivante [1] :

Considérons une suite $\{\Omega_k\}$ *de domaine tels que*

$$\Omega_{k+1} \supset \Omega_k, \qquad \lim_{K=\infty} \Omega_k = \Omega.$$

et construisons dans Ω *une* $\mathcal{F}(P)$ *qui soit continue dans* $\Omega + \Sigma$ *et se réduise à* $f(Q)$ *sur* Σ (sans plus). *Soit* $F_k(P)$ *la fonction harmonique dans* Ω_k, *qui prend sur sa frontière* Σ_k *les valeurs de* $\mathcal{F}(P)$; *la suite* $\{F_k(P)\}$ *tend vers une fonction harmonique limite* $F(P)$, *indépendante du choix des* Ω_k *et de l'indétermination interne de* $\mathcal{F}(P)$.

D'après quoi, il est donc légitime de dire que $F(P)$ est *attachée* à la distribution $f(Q)$ sur Σ. Je ne reviendrai pas sur la démonstration que j'ai exposée ailleurs [2]. Je rappelle seulement quelques résultats complémentaires qui nous seront utiles pour la suite :

1° Lorsqu'il est possible, d'après la donnée de $f(Q)$, de choisir $\mathcal{F}(P)$ de manière que cette fonction possède un laplacien continu dans $\Omega + \Sigma$, la solution $F(P)$ attachée aux valeurs périphériques $f(Q)$ peut s'écrire sous la forme

$$\text{(1)} \qquad F(P) = \mathcal{F}(P) + \int_\Omega \Delta\mathcal{F}(M) G(M, P)\, d\omega_M,$$

où $G(M, P)$ est la fonction de Green du domaine Ω, c'est-à-dire la

---

(1) J'insiste d'autant plus sur cette forme d'énoncé que j'ai commis, à cet égard, des incorrections qui m'ont été signalées par M. Vasilesco. Elles consistent dans le fait de chercher à déduire l'unicité de certaines solutions du fait qu'étant positives dans Ω, elles ont une limite inférieure nulle sur Σ; ces erreurs affectent les n°s 18 et 20 de mon Mémoire *Sur le Problème de Dirichlet* (A) (*Bulletin de la Société Polonaise de Mathématiques*, t. 4, 1926, p. 59-112). J'ai reproduit ces énoncés inexacts dans le *Mémorial*, fascicule XI, n° 38. La même erreur entache mon énoncé du principe de Picard au début de ma Communication à l'Académie du 14 mars 1927 (*Comptes rendus*, t. 184, p. 661), Communication (B) au sujet de laquelle j'aurai à faire, ici-même, d'autres réserves (n° 11, dernier alinéa et 15).

(2) Voyez (A), n° 11, p. 74.

fonction dépendant harmoniquement de M dans $\Omega - P$, devenant infinie en P comme $\frac{1}{MP}$ et attachée à la valeur zéro sur Σ : la fonction $G(M, P)$ est encore la limite des fonctions de Green des domaines Ω_k, lesquelles forment une suite croissante (dont la convergence vers une fonction harmonique découle du théorème d'Harnack). Il est clair, d'après le théorème d'existence précédent, que, dans l'équation (1), le rôle des valeurs internes de $\mathcal{F}(P)$ n'est qu'apparent.

2° Il est possible de transformer les données Ω, Σ en données $\Omega + I$, $\Sigma - I$, de manière que l'ensemble $\Omega + I$ ($\subset \Omega + \Sigma$) soit un domaine ouvert, de frontière $\Sigma - I$, cette transformation s'imposant par ce fait : les valeurs $f(Q)$ portées par l'ensemble I n'ont aucune influence sur le calcul de $F(P)$. Nous dirons que $\Sigma - I$ est la *frontière réduite* et nous supposerons toujours que la réduction a été opérée au préalable, c'est-à-dire que la frontière Σ du domaine Ω dont nous parlerons est *ipso facto* réduite.

En chaque point Q de la frontière Σ réduite, on a

$$\lim_{M \to Q} G(M, P) = 0.$$

3° On donne le nom de points *irréguliers* de Σ aux points Q pour lesquels la limite supérieure de $G(M, P)$ (lorsque P tend vers Q) n'est pas nulle. Aux points réguliers, on a par contre

$$\lim_{M \to Q} G(M, P) = 0.$$

On montre d'ailleurs que le point P n'a qu'un rôle apparent, et qu'on a en outre, aux points réguliers,

$$\lim_{M \to Q} F(M) = f(Q).$$

3. Ces préliminaires indispensables étant rappelés, nous consacrerons le présent travail à la discussion de l'exactitude du principe de Picard, envisagé dans sa généralité. Dans le fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques*, nous avons indiqué des cas étendus où cette exactitude est assurée : tel est le cas où, Σ étant une surface douée d'un champ continu de normales, on peut en outre affirmer l'existence au point Q_0 de la dérivée normale de la fonction de Green.

C'est alors cette fonction qui définit la répartition relative des températures internes. Le principe reste vrai aux points Q_0 où la frontière admet un cône des tangentes, pourvu que l'ensemble des rayons limites des demi-droites joignant Q_0 à un point infiniment voisin de Ω ne soit pas exclusivement formé de droites frontières : sinon, on peut obtenir des cas d'exception, comme il arrive lorsque Ω est l'ensemble des points compris entre deux sphères tangentes intérieurement, dont Q_0 est le point de contact.

Les raisonnements basés sur l'étude d'équations intégro-différentielles solidaires de l'équation de Laplace, qui m'ont conduit à ces conclusions, mettent en évidence ce fait : pour un point Q_0 de la frontière, l'exactitude du principe de Picard est une propriété locale, c'est-à-dire dépend seulement de la forme de la frontière à une distance arbitrairement petite de ce point.

Je me suis proposé d'entreprendre, à côté de l'étude locale du principe de Picard, une étude statistique. Pour cela, j'ai fait appel à la conservation du flux, propriété essentielle exprimée par l'équation de Laplace : j'ai été ainsi conduit à faire jouer un rôle important aux lignes de gradient suivant lesquelles s'écoule ce flux. Le flux apparaît ainsi comme une fonction d'ensemble (ensemble admettant ces lignes pour élément) dont la dérivée donne justement (en cas d'exactitude du principe) la distribution relative des températures internes. Mais contrairement à ce que j'avais affirmé aux *Comptes rendus* en communiquant mes premiers résultats (1), on n'en saurait déduire que le principe de Picard soit vérifié statistiquement dans tous les cas possibles. Quoi qu'il en soit, c'est l'étude du flux de Green, dans ses relations avec le principe de Picard, qui fera l'objet du présent exposé.

Avant d'entrer en matière, je dois rappeler que les recherches ici mentionnées découlent d'un théorème simple et fondamental de M. Émile Picard, donné depuis longtemps par lui à la Sorbonne (2), son nom s'attache ainsi, de la manière la plus naturelle, au principe de détermination relative des températures internes. Je ne veux pas man-

(1) Voyez (B).

(2) Par exemple, en 1910, lorsque j'étais élève de l'École Normale supérieure, M. Picard n'a publié ce résultat que plus tard (*C. R. Ac. Sc.*, t. 176, avril 1923, p. 933 et 1025, et *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 52, 1924, p. 162).

quer enfin de remercier M. Henri Villat, qui, de son côté, n'a cessé d'encourager mes recherches encore inachevées, sur ces questions difficiles et qui, par son *Mémorial*, m'a permis sous la forme la plus favorable de réaliser un premier exposé de mes vues d'ensemble.

II. — Les lignes de gradient et le flux de Green.

4. L'équation de Laplace exprime la conservation du flux d'un champ de gradients. A ce titre, l'étude d'une fonction harmonique tirera donc fréquemment parti de la considération des lignes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes au gradient de cette fonction. Il sera par suite opportun de considérer les lignes de gradient de la fonction de Green, celles d'un potentiel d'équilibre électrique, etc.

Présentons quelques remarques relatives aux lignes de gradient d'une fonction $F(P)$, harmonique dans une certaine région $\mathcal{R}$, où nous pouvons la considérer comme représentant une répartition de températures. Soit une sphère quelconque intérieure à $\mathcal{R}$. Par chaque point P contenu dans cette sphère, il passe une surface isotherme $F(P)=\lambda$ et une seule. Les surfaces ainsi obtenues sont analytiques et les lignes de gradient en sont les trajectoires orthogonales. Nous pouvons nous représenter ces trajectoires dans leur progression vers les températures décroissantes (par exemple). La seule difficulté consiste en ceci : il se peut que, dans la sphère considérée, le gradient s'annule; nous dirons que les points où cette particularité se produit sont les *points stationnaires* de $F(P)$; on doit alors se demander comment se comportent les lignes de gradient au voisinage de tels points.

Dans le cas de deux dimensions, la réponse est immédiate, car ces lignes sont les lignes de niveau de la fonction harmonique $G(P)$ conjuguée de $F(P)$. Alors si le mobile, en suivant une ligne de gradient $G(P)=\mu$, tend vers un point stationnaire A, non seulement, la tangente possède en ce point une direction limite bien déterminée, mais encore, on peut prolonger analytiquement au delà de A l'arc aboutissant en ce point, de manière que A soit un point, distinct d'une extrémité, d'un arc analytique partout régulier. Notons encore ceci : les points stationnaires, dans le cas de deux dimensions, sont les zéros de la dérivée de la fonction analytique ayant pour partie réelle F(P); par suite ils sont isolés.

5. Dans le cas de trois dimensions (ou de plus), les choses ne se passent pas aussi simplement. Notons d'abord que les points stationnaires ne sont plus nécessairement isolés. Ils peuvent former des variétés analytiques, d'un nombre de dimensions $\leq m-2$, m étant le nombre de dimensions de l'espace. Par exemple, si $m=3$, il est facile de citer des fonctions harmoniques admettant une droite ou une circonférence dont tous les points sont stationnaires (en supposant que leur valeur est invariante par une translation conservant la droite ou une rotation conservant la circonférence, on obtiendra des solutions immédiates). Mais voici une difficulté plus sérieuse : soient α, β, γ trois nombres réels dont la somme est nulle; supposons par exemple $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$. La fonction

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$$

est harmonique; ses lignes de gradient peuvent se représenter par les équations

$$x = x_0 e^{\alpha t}, \qquad y = y_0 e^{\beta t}, \qquad z = z_0 e^{\gamma t}.$$

Parmi celles-ci, passent par l'origine :

1° L'axe Oz pour $t = +\infty$;

2° Les courbes $x = x_0 e^{\alpha t}$, $y = y_0 e^{\beta t}$, $z = 0$ du plan xOy pour $t = -\infty$; elles ont des équations de la forme $y = \mathrm{K}x^{\mu}$ où $\mu\alpha = \beta$. Si μ est irrationnel, une telle courbe n'a pas de prolongement analytique réel au delà de l'origine (car la partie imaginaire de x^{μ}, qui est $\rho^{\mu} \sin \mu\omega$, ne s'annule pour aucune valeur de ω qui soit un multiple de π).

Cet exemple nous montre que si l'on adopte le point de vue *géométrie des variétés analytiques*, un point stationnaire sera en général un point d'arrêt pour une ligne de gradient s'acheminant vers ce point. Faute d'un prolongement analytique, on pourra chercher à prolonger la ligne étudiée, au delà du point d'arrêt, de manière que l'arc total obtenu soit une ligne de gradient à tangente continue. L'exemple précédent nous apprend encore que ce problème, lorsqu'il est possible, peut devenir indéterminé.

6. Nous venons de voir comment se comportent les lignes de gradient d'un polynome sphérique du second degré autour du centre. Il importerait d'étudier la même question pour un polynome sphérique de degré quelconque, car si F(P) est une fonction harmonique, nulle en O, et stationnaire en ce point, en posant $OP = r$ et désignant par p le point de la demi-droite OP tel que $Op = 1$, on aura

$$F(P) = r^n Y_n(p) + r^{n+1} Y_{n+1}(p) + \ldots \qquad (n \geqq 2).$$

Le système des lignes de gradient de F(P) est homothétique par rapport à O, dans le rapport ε, de celui des lignes de gradient de la fonction

$$F_\varepsilon(P) = r^n Y_n(p) + \varepsilon r^{n+1} Y_{n+1}(p) + \ldots,$$

laquelle tend vers le polynome sphérique $r^n Y_n(p)$ lorsque ε tend vers zéro. En caractérisant par un accent le gradient pris, par rapport au point p, sur la sphère unitaire, on peut écrire le système définissant les lignes de gradient de $F_\varepsilon(P)$ sous la forme symbolique

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{dr}{r}\left[\overrightarrow{\operatorname{grad}}' Y_n(p) + \varepsilon r \overrightarrow{\operatorname{grad}}' Y_{n+1}(p) + \ldots\right] \\ &\quad = [n Y_n(p) + (n+1)\varepsilon r Y_{n+1}(p) + \ldots]\, dp. \end{aligned}$$

Lorsque ε tend vers zéro, on obtient à la limite le système

$$(6)\qquad \frac{dr}{r}\overrightarrow{\operatorname{grad}}' Y_n(p) = n Y_n(p)\, \overrightarrow{dp},$$

qui définit les lignes de gradient du polynome sphérique $r_n Y_n(p)$, formé par les termes de plus bas degré du développement de F(P) : cette famille de lignes est invariante par une homothétie de centre O, elle se projette de O sur la sphère unitaire suivant les lignes de gradient (sphérique) de la fonction de Laplace $Y_n(p)$; en outre, elle comprend les droites joignant le point O aux points stationnaires de la fonction $Y_n(p)$ sur la sphère unitaire.

Dans l'état présent de la théorie des équations différentielles, il paraît difficile d'énoncer indépendamment de n les propriétés générales concernant la disposition, au voisinage de O, des lignes de gradient du polynome $r^n Y_n(p)$; il paraît également délicat de délimiter avec précision le parti qu'on pourrait tirer d'une telle étude du système (6) pour en déduire l'allure autour de O des intégrales de (5).

Cependant, et tel sera pour nous le point capital, les singularités que ces intégrales pourront présenter aux points stationnaires (isolés, ou groupés en lignes ou en variétés d'un ordre quelconque) seront telles qu'elles ne mettront jamais obstacle à la conservation du flux, exigée par l'équation initiale même du problème : l'équation de Laplace.

Sous une autre forme, nous pouvons encore énoncer le résultat suivant :

Étant donnée une fonction harmonique, le flux de son gradient devra être considéré comme une fonction additive d'un ensemble ayant pour éléments les lignes de gradient de cette fonction (1). *Il est entendu que la présence des points (ou variétés) stationnaires peut entraîner celle d'un système exceptionnel de lignes de gradient : en suivant une ligne de ce système, on tend vers un point stationnaire, il peut être impossible de prolonger analytiquement cette ligne au delà du point en question; d'autres modes éventuels de prolongement peuvent comporter des indéterminations. Mais du moins, par le fait que notre fonction est harmonique, sommes-nous assurés que* CE SYSTÈME DE LIGNES DE GRADIENT ACCIDENTELLES CORRESPOND A UN FLUX NUL.

Par cette remarque, nous préparons l'application de la théorie des fonctions d'ensemble aux questions dont nous allons nous occuper (2).

7. C'est sur la fonction de Green que va maintenant se porter notre attention. Reprenons le point A, intérieur à Ω, et les domaines Ω_λ tels que l'on ait

$$G(A, P) > \lambda.$$

---

(1) Cette conception joue aussi un rôle fondamental dans mes recherches récentes sur le problème de Neumann et sur divers points d'hydrodynamique. Les résultats en sont exposés au *Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 26e cahier, dans un Mémoire intitulé : *Sur la continuité et les approximations en Dynamique des liquides.*

(2) Plus généralement, les mêmes considérations pourront être appliquées aux systèmes différentiels admettant un invariant intégral analogue au flux, dans le cas actuel.

Considérons le champ $\overrightarrow{\operatorname{grad}_{P}} G(A, P)$ et ses lignes intégrales, qui partent de A dans toutes les directions et coupent orthogonalement les surfaces

$$G(A, P) = \lambda.$$

Prenons λ comme paramètre sur une de ces lignes et suivons-la dans le sens des λ décroissants. Il se peut que nous tendions vers un point stationnaire; mais du moins, avons-nous remarqué qu'il s'agit là d'une circonstance accidentelle, sans influence sur les évaluations de flux que nous aurons à faire (1).

Lorsque λ est très grand, les surfaces Σ_λ (frontières des domaines Ω_λ) sont d'abord sphéroïdales : tant que λ reste supérieur au maximum l_0 de $\overline{\lim}\, G(A, P)$ sur Σ, ces surfaces [tout en ayant une complexité topologique qui s'accroît au fur et à mesure qu'on franchit des valeurs de λ correspondant à des points stationnaires de G(A, P)] n'ont pas de point commun avec la frontière Σ de Ω. Pour $\lambda = l_0$, la surface Σ_{l_0} contiendra un certain ensemble de points irréguliers, appartenant à toutes les Σ_λ de $\lambda < l_0$, et jouant encore le rôle de points irréguliers pour ces dernières; λ continuant à décroître, il y aura ainsi captation

(1) Il y a lieu de chercher si l'on peut, par des considérations topologiques, délimiter d'avance l'importance plus ou moins grande du système des points ou lignes stationnaires (en prenant par exemple $m = 3$). Ce problème est en effet suggéré par les remarques suivantes, relatives au cas du plan :

Considérons l'une des courbes $G(A, P) = \lambda$ et le nombre n_λ des divers morceaux qui la composent. Lorsque λ est très grand, ces courbes sont d'abord ovales, puis, en raison de la monotonie de G, leur complexité topologique va en croissant. Un dédoublement se produit lorsque λ franchit, au cours de sa décroissance, une des valeurs fournissant des points stationnaires de G. On en déduit aisément que n_λ croît lorsque λ décroît. Notamment, si le domaine Ω est homéomorphe à un cercle (ouvert), il s'ensuit qu'il en est de même de tous les Ω et par suite (ainsi qu'il est bien connu dans la représentation conforme) il ne peut y avoir, dans un tel Ω, de point stationnaire de G(A, P). — J'insiste sur la difficulté d'étendre d'une manière immédiate des résultats de ce genre au cas de l'espace. Si la dilatation progressive des Ω_λ entraîne bien encore la croissance du nombre des parties connexes constituant l'une des surfaces $G(A, P) = \lambda$, on ne sait rien (à ma connaissance du moins) sur le sens d'évolution du *genre* de chacune de ces parties connexes. Or, au même titre que l'accroissement du nombre des morceaux, les modifications de genre font apparaître elles-mêmes des points stationnaires, ce qui explique la négation énoncée. Il n'est pas démontré qu'étant donné un domaine Ω homéomorphe à une sphère, les domaines Ω_λ le soient chacun !

progressive de points irréguliers par Σ_λ, de manière que l'ensemble capté aille constamment en s'enrichissant [1]. Le mécanisme de cette captation pourra présenter les modalités les plus variées; les valeurs de λ pour laquelle elle s'effectue ne sont pas nécessairement isolées à l'encontre de celles qui fournissent les points stationnaires de $G(A, P)$; nous allons donner un exemple où il y a captation continue dans tout un intervalle de variation de λ.

Il s'agira d'un domaine obtenu en enlevant d'une sphère une infinité de tores concentriques à celle-ci en même temps que coaxiaux et coéquatoriaux, et mutuellement extérieurs. Soit $\varpi\varpi'$ le diamètre de la sphère, axe commun de ces tores : considérons leurs cercles méridiens, d'un même côté de $\varpi\varpi'$; nous supposons que leurs rayons décroissent et que leurs centres convergent vers un point limite μ, tout cela assez rapidement pour que le tore limite dont la méridienne est le cercle de centre μ et de rayon nul soit un lieu de points irréguliers. Si le point A coïncide avec le centre O de la sphère, $\overline{\lim}\, G(A, P)$ aura mêmes valeurs en tous les points de cette circonférence; si A, distinct de O, se trouve dans le plan équatorial et à l'intérieur de ce cercle, $\overline{\lim}\, G(A, P)$ sera égal à l_0 et maximum au point de la circonférence le plus proche de A, minimum et égal à l_1 au point le plus éloigné. Alors, pour λ décroissant continûment de l_0 à l_1, la surface Σ_λ captera un arc de points irréguliers, emprunté à la circonférence de rayon $O\mu$, et grandissant continûment avec λ, de manière à embrasser, pour $\lambda = l_1$, la totalité de la circonférence [2].

---

(1) Les points de cet ensemble seront des points singuliers de la surface analytique Σ_λ. Chacun d'eux sera toujours limite de points réguliers de cette surface.

(2) En marge de notre sujet principal, notons encore la particularité topologique suivante : à l'encontre des surfaces Σ_λ d'indice $\lambda > l_0$ qui se composent d'un nombre fini de portions connexes ayant chacune un genre fini, les Σ_λ d'indice inférieur à l_0 peuvent avoir un ordre de connexion infini. Nous le montrerons par un exemple emprunté à la géométrie plane : il s'agira donc non plus de surfaces, mais de courbes $G(A, P) = \lambda$; nous prendrons pour domaine la section méridienne de celui qui est proposé en exemple dans le texte, la loi de décroissance des rayons des cercles étant telle que le point μ et son symétrique μ' par rapport à $\varpi\varpi'$ soient irréguliers. Prenons le pôle A confondu avec le point O et soit h la limite supérieure de $G(O, P)$ quand P tend vers μ ou vers μ'. D'après un théorème de M. Lebesgue, si le nombre des portions connexes de $G(A, P) = \lambda$, pour $\lambda < h$, restait fini, la frontière de Ω_λ n'aurait

8. Occupons-nous des lignes de gradient de $G(A, P)$ au voisinage de la frontière Σ. Soit une telle ligne, dont aucun point (intérieur à Ω) n'est stationnaire pour $G(A, P)$: elle constitue un arc régulièrement analytique, partant de A et progressant orthogonalement aux surfaces $G(A, P) = \lambda$ jusqu'à ce qu'il atteigne la frontière Σ. La limite de $G(A, P)$ obtenue en suivant ce chemin sera, ou un nombre $h > 0$, ou zéro. Dans le premier cas, la courbe sera tout entière dans Ω_h.

Cela posé, lorsque le mobile, décrivant l'arc précédent, tend vers Σ, deux circonstances sont possibles :

1° Il a sur Σ une position limite unique : on dit que la ligne de gradient *aboutit* [1];

2° L'ensemble des positions limites sur Σ est un continu de condensation : on peut dire alors que la ligne de gradient *se perd* [2]. Dans ce cas, elle est nécessairement de longueur infinie et *le continu de condensation est formé de points inaccessibles de* Σ (c'est-à-dire vers lesquels on ne peut tendre par aucune ligne uniterminale intérieure à Ω) [3]. Pour avoir un exemple d'une telle circonstance, il suffit d'imaginer que le domaine Ω est la portion de l'espace occupée par un serpent dont la queue, infiniment enroulée et sans cesse amincie, serait asymptote à une circonférence. De chaque point A intérieur à une telle région, part alors une ligne de gradient de $G(A, P)$ asymptote à cette circonférence.

En un point accessible de Σ, il aboutit nécessairement une ligne de gradient au moins admettant ce point pour point limite. Si un point

---

que des points réguliers. Or, nous savons que μ et μ' sont des points irréguliers avec $h - \lambda$ comme limite supérieure en ces points de la fonction de Green de pôle O. Donc, pour $\lambda < l_0$, la connexion du domaine Ω_λ sera bien ici d'ordre infini. Il résulte d'une remarque faite précédemment (note de la page précédente) que cela ne pourra se produire que si Ω est lui-même d'ordre de connexion infini.

[1] Cette circonstance se produit toujours quand la ligne considérée est de longueur finie. Mais elle n'est pas incompatible avec une ligne de longueur infinie.

[2] Si l'on sait à l'avance que les points limites d'une ligne de gradient doivent se trouver sur une portion punctiforme de la frontière, il est clair que cette ligne aboutit nécessairement.

[3] J'indique seulement ce résultat comme *vraisemblable*. L'épithète *uniterminale* appliquée à une ligne intérieure à Ω entend spécifier qu'elle n'a sur Σ qu'un seul point limite.

de Σ est inaccessible, il peut se faire, ou bien qu'une ligne de gradient l'admette pour point limite et possède de ce fait un continu de condensation (dont chaque point est inaccessible), ou bien qu'il n'y ait aucune ligne de gradient l'admettant pour point limite : tel serait le cas d'un point du segment (o, 1) de l'axe Oz, lorsque l'on considère le domaine Ω, de révolution autour de cet axe, dont la frontière admet pour méridienne un contour comprenant la portion $o \leqq 1$ de la courbe $z = \sin \frac{1}{x}$.

9. Nous allons maintenant montrer comment la solution du problème de Dirichlet conduit à la notion de *flux de Green*, identique à celle de *poids* de M. Norbert Wiener [1], mais offrant sur elle l'avantage de revêtir une forme plus imagée. En écrivant, au n° **2**, l'équation

$$F(P) = \mathcal{F}(P) + \frac{1}{4\pi} \int \Delta\mathcal{F}(M) G(M, P)\, d\omega_M, \tag{1}$$

nous avons fait observer que les valeurs internes de $\mathcal{F}(P)$ s'éliminent, $F(P)$ étant exclusivement une fonctionnelle linéaire des valeurs périphériques $f(Q)$ de $\mathcal{F}(P)$. Dans le cas où Σ est une surface, douée d'un champ continu de normales et en chaque point Q de laquelle existe la dérivée normale de la fonction de Green de pôle P, la relation (1) se ramène immédiatement à la forme

$$F(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma f(Q) \frac{dG}{d\nu_Q} (Q, P)\, d\sigma_Q, \tag{1'}$$

où le second membre est encore l'intégrale de la fonction $f(Q)$, par rapport à la fonction additive d'ensemble, qui pour l'élément $d\sigma_Q$, au facteur $\frac{1}{4\pi}$ près, représente précisément le flux du gradient de la fonction de Green de pôle P à travers cet élément. Cette fonction additive est encore la valeur en P de la fonction harmonique attachée à la valeur 1 sur l'élément $d\sigma_Q$ de la frontière, à la valeur o en tout autre point, soit donc le *poids* de l'élément $d\sigma_Q$.

Or, cette idée de poids s'étend au cas général d'un domaine Ω de

(1) *Certain notions in Potential Theory* (*Jour. Math. Massach. Inst. Technol.*, janvier 1924).

frontière Σ quelconque, comme l'a montré M. Norbert Wiener. Soit σ un sous-ensemble de Σ, constitué par les points de Σ non extérieurs à un polyèdre (qu'on peut prendre arbitrairement compliqué). Les fonctions harmoniques obtenues en résolvant le problème de Dirichlet avec une distribution continue $f(Q)$ sur Σ, s'annulant sur $\Sigma - \sigma$ et $\leqq 1$ sur σ, ont une borne supérieure elle-même harmonique $H_\sigma(P)$. Nous définissons ainsi une fonction additive de certains ensembles σ (qui sont des ensembles fermés d'une classe spéciale) : c'est justement le poids correspondant à ces ensembles : pour obtenir la solution du problème de Dirichlet, il suffit d'intégrer la fonction continue $f(Q)$ sur Σ par rapport à ce poids. Notons ici que nous n'avons pas défini le poids pour tout sous-ensemble σ de Σ : mais nous en avons atteint une classe suffisamment vaste pour donner un sens précis à l'intégration d'une fonction *continue* sur Σ par rapport à ce poids. On peut même se borner, avec M. Norbert Wiener, à supposer que le polyèdre découpant σ est obtenu par la juxtaposition de cubes d'un réseau, déduit d'un réseau initial après un nombre, qu'on pourra supposer d'ailleurs arbitrairement élevé, de subdivisions binaires. Prenons pour axes de coordonnées des parallèles aux directions principales du réseau. Le poids de la portion de Σ formée de ses points dont l'abscisse ne dépasse pas x (par exemple) est une fonction non décroissante $\varpi(x)$: l'ensemble de ses discontinuités éventuelles est donc dénombrable : par suite, l'arête des cubes du réseau initial étant prise égale à l'unité de longueur, on pourra s'arranger, en imprimant au besoin une translation le long de Ox au réseau initial, de manière que $\varpi(x)$ n'éprouve pas de discontinuité sur l'ensemble des valeurs fournissant l'abscisse d'un sommet du réseau initial ou des réseaux successifs auxquels il donne naissance; on pourra aussi faire en sorte que le réseau remplisse, vis-à-vis des autres axes, la même condition. Grâce à cette précaution, nous portons exclusivement notre attention sur le poids d'une portion quelconque de σ, intérieure à un cube d'un des réseaux divisionnaires, et ce poids sera bien déterminé avec une même valeur, que le cube soit considéré comme ouvert ou comme fermé; l'intégrale de $f(Q)$ par rapport au poids pourra donc se définir comme la limite d'une somme ayant pour terme général le poids de la portion de Σ intérieure à un cube du réseau divisionnaire d'ordre N (contenant des points de Σ)

par la valeur de $f(Q)$ en un point quelconque de cette portion, lorsque N croît indéfiniment; M. Wiener a démontré (*loc. cit.*) que cette intégrale coïncide avec la solution du problème de Dirichlet, elle coïncide donc aussi avec le second membre de (1), toutes les fois que cette formule est directement applicable, ou avec la série formée de termes analogues dans les autres cas.

10. Or, pour les frontières douées d'un champ continu de normales, nous avons noté l'équivalence du poids et du flux de Green : la conservation du flux dans les tubes de gradient étant un phénomène interne, sans rapport avec la structure plus ou moins complexe de Σ, l'interprétation du poids comme flux de gradient de la fonction de Green est générale. Si nous reprenons ce réseau cubique initial conforme aux conditions du n° **9** et la suite de ses réseaux divisionnaires, chaque cube de cette famille découpera sur Σ une portion σ à laquelle correspond un flux de Green bien déterminé, que le cube soit ouvert ou fermé. Ce flux pourra s'évaluer de la manière suivante : considérons, ou bien les lignes de gradient partant du pôle P de la fonction de Green et admettant un point de σ comme point limite, ou bien celles de ces lignes dont aucun point limite n'est étranger à σ; leurs demi-tangentes en P forment deux ensembles de directions qui sont mesurables, au sens de Lebesgue, en angle solide, et dont la mesure commune rapportée à la totalité de la sphère est présisément le flux de Green s'écoulant du pôle P à travers σ, ou encore le poids de $H_\sigma(P)$.

Ainsi non seulement, dans l'évaluation du flux de Green, les lignes de gradient passant par des points stationnaires n'ont aucune influence; mais encore, aucune perturbation n'est apportée par les lignes de gradient offrant le phénomène de perte : leurs directions initiales peuvent être entourées d'une suite (en général infinie) d'angles solides dont la somme est arbitrairement petite. En recourant à la correspondance établie par l'intermédiaire des lignes de gradient entre l'ensemble fermé Σ et une sphère infiniment petite de centre P, on peut dire que *les lignes de gradient aboutissent presque partout sur* Σ, ce qui signifie : les directions originelles de celles qui rencontrent des points stationnaires ou se perdent forment un ensemble ayant sa mesure (en angle solide) égale à zéro.

11. Pour terminer cette section, attirons l'attention sur les problèmes topologiques et statistiques s'attachant aux considérations qui précèdent : la correspondance non homéomorphe que les lignes de gradient établissent entre une sphère et l'ensemble fermé Σ mérite à elle seule toute une étude. A chaque point de la sphère, exception faite d'un ensemble de mesure nulle, correspond un point déterminé de Σ; la correspondance présente des discontinuités par rapport aux déplacements du point sur la sphère, sauf en l'absence de points stationnaires : les tubes de gradient, primitivement connexes, se fractionnent progressivement pour aller desservir les diverses parties connexes de Σ. Notamment, si certaines parties de Σ sont ponctiformes, le fractionnement se poursuivra indéfiniment dans leur voisinage; en même temps, ces ensembles appartiendront au dérivé de celui des points stationnaires. Par contre, si une portion de Σ est un continu, le tube qui le dessert, après s'être séparé des tubes qui vont aux portions non connexes de Σ, ne se fractionne plus, et les seules modifications qui viennent affecter à son intérieur (lorsqu'on le suit sur son parcours) les relations de situation mutuelle des lignes de gradient qu'il contient ne s'exercent que sur le genre de la section du tube, jusqu'à rendre finalement ce genre égal à celui de la section terminale, c'est-à-dire de la portion connexe de Σ considérée.

A chaque point de Σ, il ne correspond pas nécessairement (à supposer qu'il en corresponde au moins un) un seul point de la sphère : une hydre, munie de plusieurs tentacules aboutissant à un même point, donnerait un exemple de domaine où un point de Σ admettrait sur la sphère plusieurs images; prenons encore la région comprise entre deux sphères tangentes intérieurement (celle qui donne un exemple d'exception au principe de Picard) : il existe une infinité de lignes de gradient à un paramètre, partant d'un pôle intérieur à cette région pour aboutir au point de contact; si le pôle P est sur la ligne des centres, elles sont planes et se déduisent de l'une par rotation. Donc au point de contact correspond ici sur la sphère une ligne qui est une circonférence lorsque P est sur la ligne des centres.

Reste à savoir si cette circonstance singulière est toujours l'exception, comme dans l'exemple précédent ou si elle peut, par contre, devenir aussi probable que l'éventualité pour un point de Σ d'admettre sur la sphère un correspondant unique. Nous sommes ainsi conduits à cette question : *considérant les points de Σ qui possèdent une image unique sur la sphère, l'ensemble de leurs images recouvre-t-il la sphère à un ensemble de mesure près?*

C'est par la négative qu'il faut la résoudre. Nous le montrerons par un exemple emprunté à la géométrie plane et déjà invoqué par M. O. D. Kellogg pour attirer l'attention sur les aspects variés du problème de Dirichlet (1). Supposons que le domaine Ω soit obtenu en enlevant du cercle $x^2+y^2\leqq 4$ l'ensemble des points d'un ensemble triadique de Cantor construit sur le segment $(-1, +1)$ de l'axe $x'x$. Prenons le pôle P de la fonction de Green au centre O de la circonférence. On démontre avec M. Kellogg que tout point de l'ensemble triadique est régulier. Donc le flux de Green correspondant à cet ensemble n'est pas nul. Il y a donc des lignes de gradient qui partent de O et aboutissent aux points de l'ensemble considéré et il est clair qu'elles sont deux à deux symétriques par rapport à $x'x$. Or ces lignes correspondent sur la circonférence de centre O à un ensemble de mesure non nulle. Par conséquent, la correspondance entre Σ et cette circonférence n'est pas ici statistiquement biunivoque : au contraire, à un point de notre ensemble, correspondent (statistiquement) deux points de notre circonférence.

III. — Flux de Green en dépendance du pôle et principe de Picard.

12. A chaque point P, intérieur à Ω, correspond une fonction de Green avec un système de lignes de gradient. On peut donc définir le flux de Green relatif à un pôle P intérieur à Ω pour chaque portion de Σ découpée par une maille, d'ordre fixé, d'un réseau à subdivision binaire indéfinie, choisi comme nous l'avons expliqué au n° **9**. De tels sous-ensembles, on passe additivement à d'autres plus généraux : en définitive, d'après ce que nous avons vu au n° **10**, on peut associer à un sous-ensemble σ de Σ un flux de Green déterminé, relatif à un

(1) *An example in potential theory* (*Proc. Amer. Ac. Sc.*, vol. 58, juin 1923).

point donné P, pourvu que les lignes de gradient de $G(P, M)$ et ayant un point limite sur σ aient l'ensemble de leurs directions initiales mesurable en angle solide; sa mesure, rapportée à la totalité de la sphère, est alors le flux de Green correspondant.

Lorsqu'à un sous-ensemble σ de Σ, on ne peut faire correspondre un flux de Green déterminé, on est amené à lui faire correspondre un poids intérieur et un poids extérieur. Ce sont deux fonctions harmoniques du point P, dont la différence, de signe constant, ne peut s'annuler en aucun point intérieur sans s'annuler identiquement, comme il résulte du théorème de la moyenne.

On tire de cette remarque les conséquences suivantes :

1° Le choix fait au n° 9 d'un réseau cubique, opéré de manière que chaque portion de Σ découpée par une maille (ouverte ou fermée) du réseau initial ou d'un réseau divisionnaire, ait, relativement à P, un flux de Green déterminé, s'effectue indépendamment de la position occupée par P dans le domaine Ω.

2° Si à un sous-ensemble donné de Σ, il correspond un flux de Green bien déterminé émané du point P, il ne saurait y avoir indétermination pour le flux de Green émané d'un autre pôle et relatif au même sous-ensemble.

La question se pose donc d'étudier le flux de Green en dépendance du pôle, lorsque ce flux de Green se rapporte à un sous-ensemble σ donné de Σ, qui admet justement un tel flux, défini sans indétermination. Désignons par A une position particulière du pôle mobile P et considérons la représentation de Σ sur une sphère infiniment petite de centre A, définie au moyen des lignes de gradient issues de A. Elle fait correspondre à σ un ensemble dont la mesure α_A en angle solide est bien déterminée. Cet ensemble image (connu à un ensemble de mesure nulle près) sera désigné par $\overline{\alpha}_A$. Pareillement, nous aurons une représentation analogue de σ sur une sphère infiniment petite de centre P : ce sera un ensemble $\overline{\alpha}_P$ dont la mesure α_P en angle solide est elle-même bien définie.

Cela posé, nous pouvons envisager α_P comme une fonction additive de l'ensemble $\overline{\alpha}_A$: nous avons déjà noté que α_P est nulle ou infiniment petite en même temps que α_A. Donc, *la fonction additive α_P de l'ensemble $\overline{\alpha}_A$ est absolument continue.*

13. Les travaux de M. Henri Lebesgue permettent de déduire de l'absolue continuité d'une fonction additive l'existence d'une dérivée presque partout, pourvu qu'on suppose le passage à la limite effectué dans des conditions particulières, correspondant à l'utilisation de familles d'ensembles $\overline{\alpha}_A$ dites *régulières*. En modifiant les conditions du passage à la limite, on pourra modifier la dérivée, sauf un ensemble de mesure nulle. Toutefois (et contrairement à ce qu'indiquait l'esquisse publiée à ce sujet dans les *Comptes rendus*) ces considérations ne semblent pas s'appliquer immédiatement au problème qui nous occupe; il paraît en effet bien difficile de définir sur Σ les familles d'ensembles σ, que notre représentation transforme sur la sphère en familles régulières d'ensembles $\overline{\alpha}_A$.

Nous nous contenterons ici de présenter quelques remarques, montrant comment le principe de Picard se relie immédiatement aux considérations qui précèdent.

14. Supposons qu'en un point de la sphère infiniment petite de centre A (ou, si l'on préfère, pour une direction Δ issue de A) la fonction additive α_P admette une dérivée, dont la valeur ne dépende nullement de l'ensemble $\overline{\alpha}_A$ dont on fait tendre le diamètre angulaire vers zéro; supposons en outre que la ligne de gradient partie de A tangentiellement à Δ ne rencontre aucun point stationnaire et qu'elle aboutisse, en un point Q_0 de Σ, ceci se produisant exclusivement pour elle; la ligne de gradient tangente en A à Δ est donc la seule qui aboutisse au point Q_0. *Dans ces conditions, le principe des singularités positives de Picard sera vrai pour le point Q_0*, et la valeur en P de la *fonction de Picard* relative au point Q_0 sera la dérivée (prise au point correspondant de la sphère infiniment petite de centre A) de la fonction additive α_P de l'ensemble $\overline{\alpha}_A$: notons que la constante arbitraire figurant en facteur dans la fonction de Picard se trouvera justement déterminée ici de manière que cette fonction prenne la valeur 1 au point A.

En effet, l'existence de la dérivée de notre fonction d'ensemble, pour la direction Δ, est équivalente à celle d'une *fonction d'accumulation relative* unique (¹) des fonctions harmoniques attachées à des valeurs positives sur les portions de Σ découpées par les mailles σ_k de notre réseau de Wiener, s'emboîtant de manière à tendre vers Q_0, et à la valeur zéro sur $\Sigma - \sigma_k$; le raisonnement s'achève alors en remarquant qu'une fonction $\varphi(P)$, harmonique et positive dans Ω, devenant infinie en Q_0 tout en étant attachée à la valeur zéro sur $\Sigma - Q_0$ est nécessairement une fonction d'accumulation relative de l'ensemble précédent de fonctions harmoniques.

15. Les remarques précédentes nous ont permis de prévoir dans quels cas le principe de Picard est assuré pour un point Q_0 de la frontière. Elles nous montrent en outre que ce principe pourra se trouver en défaut, soit parce que la fonction additive α_P de l'ensemble $\overline{\alpha}_A$ n'admettrait pas une dérivée unique en un point image de Q_0 sur la sphère de centre A, soit que, sa dérivée existant, le point Q_0 aurait sur cette sphère plus d'une image. C'est cette dernière circonstance qui se produit (ainsi que nous l'avions montré au n° **11**, 2ᵉ alinéa) dans les cas d'exception que nos recherches antérieures avaient mis en évidence.

Notons enfin, qu'en vertu de l'exemple du n° **11**, dernier alinéa, l'exactitude statistique du principe de Picard ne saurait être admise, si l'on ne prend la précaution de soumettre la frontière à d'importantes restrictions.

(¹) Le mot *relatif* est, ici encore, spécifique de l'idée de rapport. Dire qu'une suite de fonctions $\{\varphi_k(P)\}$ possède une limite *relative* revient à dire : des fonctions $\varphi_k(P) : \varphi_k(A)$ ont une limite, au sens habituel. On définit pareillement la notion de fonction d'accumulation relative.