JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Contact des courbes gauches. Théorème de Meusnier et généralisations. Équation intrinsèque d'une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 75-91.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__75_0>

Contact des courbes gauches. Théorème de Meusnier et généralisations. Équation intrinsèque d'une surface;

PAR BERTRAND GAMBIER.

---

1. *Introduction.* — Dans ce Tome consacré au jubilé scientifique de MM. Appell et Picard, il me sera permis de rappeler que tous deux choisirent, comme sujet de Thèse, une question de Géométrie :

P. Appell. Sur les cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1876).

E. Picard. Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1877).

Je présenterai ici quelques remarques géométriques simples sur le contact, *dans l'espace* d'abord, puis sur une *surface donnée*, de deux courbes; j'en déduirai une démonstration simple du théorème de Meusnier : *le théorème de Meusnier est vrai pour une surface quelconque parce qu'il est évident pour la sphère.*

Ce nom de Meusnier m'autorisera aussi à rappeler cette excellente tradition grâce à laquelle les Secrétaires perpétuels de l'Académie des Sciences, les Bertrand, les Darboux, les Picard nous ont donné tant de biographies intéressantes de savants illustres ([1]).

([1]) La biographie du général Meusnier (1754-1793), mort héroïquement en défendant Mayence, a été rédigée par Darboux (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. 51, 2e série, 1910); elle est suivie des Mémoires de Meusnier relatifs à l'aérostation. Meusnier a été admirable, soit comme géomètre, soit comme physicien, chimiste, ingénieur, constructeur de diverses machines, camarade et officier. Je donnerai, en outre, ce détail inédit que d'autres Mémoires de Meusnier, conservés aux Archives de la Guerre, ont aussi servi, en 1912, aux divers rapporteurs chargés à la Chambre des projets relatifs à l'aéronautique militaire.

2. *Si une droite* D *appartient à une surface* S, *toute courbe* C *tracée sur* S, *tangente à* D *en un point* M, *admet en ce point, comme plan osculateur, le plan tangent à* S.

Il s'agit d'une nappe de surface sur laquelle le point M est simple, de sorte que le lieu des tangentes à cette nappe en M est un plan.

Cette proposition n'est pas nouvelle; je la donne comme exemple du genre de démonstrations que je vais adopter, qui consiste uniquement en un simple rappel des définitions.

Au voisinage de M, prenons un point d sur D, un point c sur C; quand d et c se rapprochent indéfiniment de M suivant une loi *convenable*, la droite dc peut prendre, comme position limite, une droite *d'orientation quelconque* autour de M dans le plan qui est tangent en M à S (définition du plan tangent), ou qui est osculateur en M à C (définition du plan osculateur); la proposition est établie ([1]).

3. *Théorème de Meusnier.* — Prenons, *dans l'espace*, deux courbes C et C_1 tangentes entre elles en M; portons, sur elles, dans le même sens deux arcs MP, MP_1 *infiniment petits et équivalents :* la corde PP_1 est un infiniment petit du second ordre, relativement à MP et c'est ainsi qu'on reconnaît qu'il y a contact (simple). A cette étude *scalaire*, il y a lieu manifestement de joindre l'étude de *direction;* la droite PP_1 tend vers une position limite qui est une droite *d'orientation quel-*

([1]) Si l'on a pris comme paramètre l'arc $s = Mc$ de C, soit c_1 la projection de c sur D; avec des sens positifs convenables, on a

$$Mc_1 = s - \frac{s^3}{6R_0^2} + \ldots, \qquad c_1 c = \frac{s^2}{2R_0} + \ldots, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{c_1 c}{c_1 d},$$

R_0 étant le rayon de courbure de C en M, α l'angle de D et dc. Si donc le point d correspond à c par la loi analytique

$$Md = s + \frac{\lambda}{2} s^2 + \ldots,$$

la position limite de dc est une droite issue de M dans le plan tangent à S ou osculateur à C, faisant avec D l'angle ω défini par

$$\operatorname{tang}\omega = R_0 \lambda.$$

En faisant varier ensuite λ, on obtient une direction *quelconque*.

conque issue de M dans le plan tangent à *toute* surface Σ contenant C et C_1 (nappe admettant C, C_1 pour lignes simples, M pour point simple). Ce plan ne dépend manifestement que des termes du second degré en s ou S des coordonnées d'un point de C ou C_1, développées suivant les puissances croissantes de s ou S, arcs de C et C_1 respectivement. On peut donc substituer à C et C_1 leurs cercles osculateurs, puis prendre pour Σ *par exemple* la sphère contenant ces cercles Γ et Γ_1 : la normale à la surface passe par le point commun aux axes de Γ et Γ_1. Donc, sur une surface *quelconque*, toutes les courbes tangentes entre elles en un même point (simple sur la surface et sur chaque courbe) ont nécessairement comme axes de leurs cercles osculateurs des droites concourant en un même point de la normale : c'est le théorème de Meusnier [1]. Appliqué à la section normale, on trouve le centre de courbure de cette section normale.

4. *Conditions géométriques du contact d'ordre n de deux courbes gauches.* — Inutile d'insister sur le contact simple; à partir de l'ordre n, il est nécessaire et suffisant que les deux trièdres de Serret-Frenet au point de contact coïncident (trois conditions, quand ce point de contact est donné), puis que R et ses $(n-2)$ premières dérivées par rapport à l'arc aient les mêmes valeurs numériques sur les deux courbes au point de contact, avec mêmes conditions pour T et ses $(n-3)$ premières dérivées; R et T sont les rayons de courbure et torsion, faisant intervenir les éléments d'ordre 2 et 3 respectivement, de sorte que les $(n-1)+(n-2)$ nouvelles conditions ainsi obtenues épuisent bien tous les éléments d'ordre $1, 2, \ldots, n$ et l'on a bien obtenu le nombre classique de $2n$ conditions.

Supposons le point de contact pris pour origine et les courbes

[1] Dans toute démonstration basée sur la considération d'infiniment petits, il y a lieu de justifier par un calcul rapide les considérations employées, en particulier de vérifier que les ordres annoncés pour les parties conservées ou les parties supprimées sont bien les ordres indiqués. Ici cette vérification est faite, pour simplifier, en même temps pour le contact simple et le contact d'ordre n. Le théorème qui, pour l'ordre n, généralise celui de Meusnier, est un peu moins intuitif et c'est pour cela que j'ai préféré m'occuper d'abord du théorème de Meusnier non généralisé, quitte à faire quelques repétitions.

définies, *provisoirement*, avec des paramètres t et T *quelconques*

$$(C)\qquad \begin{cases} x = a_1 t + \dfrac{a_2 t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{a_n t^n}{n!} + \ldots, \\ y = b_1 t + \dfrac{b_2 t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{b_n t^n}{n!} + \ldots, \\ z = c_1 t + \dfrac{c_2 t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{c_n t^n}{n!} + \ldots; \end{cases}$$

$$(C_1)\qquad \begin{cases} X = A_1 T + \dfrac{A_2 T^2}{2!} + \ldots + \dfrac{A_n T^n}{n!} + \ldots, \\ Y = B_1 T + \dfrac{B_2 T^2}{2!} + \ldots + \dfrac{B_n T^n}{n!} + \ldots, \\ Z = C_1 T + \dfrac{C_2 T^2}{2!} + \ldots + \dfrac{C_n T^n}{n!} + \ldots \end{cases}$$

Supposons réalisées les $3n$ conditions

$$A_i = a_i, \qquad B_i = b_i, \qquad C_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où n est un entier supérieur ou égal à un. Ces conditions sont *suffisantes*, *mais non nécessaires*, pour qu'il y ait contact d'ordre n. Joignons en effet le point P donné par t sur C au point P_1 donné par T sur C_1; si t et T sont infiniment petits, d'ordre différent d'abord (ordre de T supérieur à celui de t), le segment PP_1 est de l'ordre de t [1]. Si t et T sont du même ordre, sans être équivalents, le résultat subsiste et, dans ces deux cas, la limite de la corde PP_1 est la tangente commune au point de contact. Prenons donc

$$(1)\qquad T = t + \lambda t^{p+1} + \ldots,$$

où p est un nombre positif, entier ou non, non nul, tous les autres termes du développement de T étant d'ordre supérieur à $p+1$. Écrivons les composantes du vecteur PP_1 :

$$(2)\quad a_1(T - t) + \frac{a_2}{2!}(T^2 - t^2) + \ldots + \frac{a_n}{n!}(T^n - t^n) + \frac{A_{n+1}T^{n+1} - a_{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

en nous bornant à la première; les ordres infinitésimaux respectifs des

---

(1) Il ne s'agit dans toute cette étude que de points simples, de sorte que a_1, b_1, c_1 ne sont pas nuls tous trois.

termes explicités sont :

$$(3) \qquad p+1, \quad p+2, \quad \ldots, \quad p+n, \quad n+1, \quad \ldots.$$

Si donc $p < n$, sans égalité, PP_1 est d'ordre $p+1$; si $p=n$, PP_1 est d'ordre $n+1$, la partie principale de chaque composante est le produit de t^{n+1} par

$$(4) \qquad a_1\lambda + \frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{(n+1)!}, \quad b_1\lambda + \frac{B_{n+1}-b_{n+1}}{(n+1)!}, \quad c_1\lambda + \frac{C_{n+1}-c_{n+1}}{(n+1)!},$$

de sorte que, si les deux lignes du tableau

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ A_{n+1}-a_{n+1} & B_{n+1}-b_{n+1} & C_{n+1}-c_{n+1} \end{vmatrix}$$

ne sont pas proportionnelles, on ne peut annuler simultanément les trois expressions (4) et que l'ordre *maximum* de PP_1 est bien $n+1$, le contact d'ordre n exactement [le cas $\lambda=0$, c'est-à-dire le cas où $T-t$ est d'ordre supérieur à $n+1$, se trouve donc traité automatiquement et ne modifie pas la conclusion]; de plus les expressions (4) donnent les paramètres directeurs de la position limite de la droite PP_1 ; le plan tangent au point de contact à *toute* surface Σ contenant C et C_1 est donc défini par les deux vecteurs indiqués par le tableau (5); le premier est la tangente commune; le second ne dépend que des termes de degré $n+1$ *et c'est la généralisation du théorème de Meusnier, comme nous allons le voir* (pour $n=1$, nous avons vu que c'est le théorème précis de Meusnier).

M étant le point courant d'une courbe $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, *l'hodographe* H_1 est le lieu du point $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; le *second hodographe* $H_2, \ldots,$ le p^{ieme} *hodographe* $H_p, \ldots$ peuvent être définis successivement comme lieu des points successifs

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^px}{dt^p}, \frac{d^py}{dt^p}, \frac{d^pz}{dt^p}\right), \quad \ldots,$$

et il y a analogie complète entre les hodographes successifs d'une courbe et les dérivées successives d'une fonction si l'on introduit les notations vectorielles

$$\mathbf{M},\quad \frac{d\mathbf{M}}{dt},\quad \frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^p\mathbf{M}}{dt^p}.$$

Il est donc *suffisant* que les deux courbes et leurs hodographes successifs aient des contacts respectifs d'ordre n, $n-1$, ..., 1, 0.

Les conditions ainsi exprimées sont surabondantes : $3n$ au lieu de $2n$ parce que, à chaque coup, on introduit, en forçant d'une unité l'ordre du contact, trois conditions nouvelles. Or, si l'on prend sur C l'arc s comme paramètre, on a

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{S}x'^2 \equiv 1, \\ \mathrm{S}x'x'' \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{S}x'x^{n+1} + \mathrm{C}^1_{n-1}\mathrm{S}x''x^n + \ldots + \mathrm{C}^p_{n-1}\mathrm{S}x^{p+1}x^{n-p+1} + \ldots \equiv 0. \end{cases}$$

On voit ainsi que, pour deux courbes C et C_1, *rapportées à leurs arcs respectifs* s et S, l'égalité des dérivées, jusqu'à l'ordre n précis, entraîne l'égalité des deux expressions $\mathrm{S}x'x^{n+1}$ ou $\mathrm{SX'X}^{n+1}$, dont la signification intrinsèque est évidente et il n'y a que deux conditions nouvelles à écrire pour obtenir la superposition des deux points décrivant l'hodographe suivant (celui de rang $n+1$).

Si l'on a pris comme origine le point de contact, les points de l'hodographe $n+1$, relatifs à $s = \mathrm{S} = 0$, sont dans le plan perpendiculaire à la tangente commune obtenu en portant sur cette tangente la longueur $\mathrm{S}x'x^{n+1}$. On vérifie sans peine tous ces résultats avec les développements bien connus de x, y, z suivant les puissances de s, le trièdre de Serret-Frenet au point de contact étant pris pour trièdre de référence. On a alors, si $n > 1$,

$$(7)\qquad \begin{cases} x = s - \dfrac{s^3}{6r_0^2} + \dfrac{a_4^0}{4!}s^4 + \ldots + \dfrac{a_n^0}{n!}s^n + \ldots, \\[2ex] y = \dfrac{s^2}{2r_0} + \dfrac{b_3^0 s^3}{3!} + \dfrac{b_4^0}{4!}s^4 + \ldots + \dfrac{b_n^0}{n!}s^n + \ldots, \\[2ex] z = \qquad - \dfrac{s^3}{6r_0 t_0} + \dfrac{c_4^0}{4!}s^4 + \ldots + \dfrac{c_n^0}{n!}s^n + \ldots, \end{cases}$$

en calculant les *fonctions* $a_n(s)$, $b_n(s)$, $c_n(s)$ par la loi de récurrence

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{n+1} \equiv \dfrac{da_n}{ds} - \dfrac{b_n}{r}, & a_1 \equiv 1, \\ b_{n+1} \equiv \dfrac{db_n}{ds} + \dfrac{a_n}{r} + \dfrac{c_n}{t}, & b_1 \equiv 0, \\ c_{n+1} \equiv \dfrac{dc_n}{ds} - \dfrac{b_n}{t}, & c_1 \equiv 0, \end{cases}$$

$r(s)$, $t(s)$ étant les rayons de courbure et de torsion donnés en fonction de s.

Les formules (8) ([1]) ne sont autres que celles qui donnent la vitesse *absolue* du point de coordonnées *relatives* (a_n, b_n, c_n) dans le trièdre mobile de Serret-Frenet, lequel a pour rotations $\left(\dfrac{-1}{t}, 0, \dfrac{1}{r}\right)$.

5. *Généralisation du théorème de Meusnier.* — Supposons les deux courbes C et C_1 rapportées à leurs arcs s et S, le contact étant d'ordre $n \geqq 2$. Les plans

$$(1)\qquad a_i^0 x + b_i^0 y + c_i^0 z = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

relatifs à C, coïncident avec les plans analogues relatifs à C_1. Les plans P_{n+1}, relatifs à C et C_1,

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{n+1}^0 x + b_{n+1}^0 y + c_{n+1}^0 z = 1, \\ A_{n+1}^0 x + B_{n+1}^0 y + C_{n+1}^0 z = 1 \end{cases}$$

sont distincts; nous savons déjà qu'ils coupent la tangente commune au même point; *de plus leurs traces sur le plan normal commun à* C *et* C_1 *se coupent sur la normale, au point* M *étudié, à la surface* Σ *contenant* C *et* C_1 ; *quand* C *reste fixe, la courbe* C_1 *variant sur* Σ *de façon à avoir toujours contact d'ordre n avec* C, *les traces sur ce plan,* $x = 0$, *du plan* P_{n+1} *relatif à* C_1, *concourent donc au même point de la normale à* Σ.

([1]) Pour $n = 1$ on supposerait simplement les deux courbes rapportées à un trièdre ayant la tangente commune pour axe des x. Quel que soit n, les coefficients a_n, b_n, c_n font intervenir r et ses dérivées jusqu'aux ordres respectifs $n-3$, $n-2$, $n-3$ et t jusqu'aux ordres $n-5$, $n-4$, $n-3$. Le coefficient a_{n+1} représente $\mathrm{S}x'x^{n+1}$.

Cela tient à ce que les coefficients du plan tangent sont les mineurs du tableau

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{n+1} - c_{n+1} & C_{n+1} - c_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Le plan

$$(4)\qquad (B_{n+1} - b_{n+1})y + (C_{n+1} - c_{n+1})z = 0$$

contient d'une part la normale à la surface, d'autre part l'intersection des deux plans P_{n+1} et ceci justifie notre proposition.

Autrement dit : *pour chaque valeur de l'entier* $n \geqq 1$, *on a obtenu deux points, l'un* T_{n+1} *sur la tangente à la courbe* C, *l'autre* N_{n+1} *sur la normale en* M *à* Σ, *intersections du plan* P_{n+1} *avec ces deux droites ; bien que le plan* P_{n+1} *dépende des éléments infinitésimaux d'ordre* $n+1$, *les deux points* T_{n+1} *et* N_{n+1} *ne dépendent que des éléments infinitésimaux jusqu'à l'ordre* n *inclus.*

Ceci explique pourquoi dans l'espace on a $2n$ conditions pour le contact d'ordre n (coïncidence des plans $P_1, \ldots, P_n$ *relatifs à l'arc* s), tandis que sur une surface donnée on a simplement n conditions : à chaque unité supplémentaire pour le contact s'introduit en effet un plan dont on connaît *a priori* non pas seulement un point mais une droite. D'ailleurs, dans l'espace, on a *deux* fonctions y, z par exemple de x, donc les éléments différentiels

$$(5)\qquad dy,\quad d^2y,\quad \ldots,\quad d^ny;\qquad dz,\quad d^2z,\quad \ldots,\quad d^nz,$$

tandis que sur une surface on a une fonction *unique* v de u, et les seuls éléments différentiels

$$(6)\qquad dv,\quad d^2v,\quad \ldots,\quad d^nv.$$

On voit aussitôt que les points T et N de rang quelconque n'ont aucun caractère invariant, au cours de la déformation de S. Pour N_2, c'est évident ; pour les points T, c'est évident aussi, parce que la courbe C peut prendre une configuration *arbitraire*.

6. *Expression analytique du théorème de Meusnier et de sa généralisation.* — Occupons-nous du point N_{n+1} ($n \geqq 1$). Soit $\frac{1}{\rho_{n+1}}$ la longueur du vecteur a^0_{n+1}, b^0_{n+1}, c^0_{n+1}, en désignant, en axes quelconques, par ces lettres les dérivées $\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)_0$, $\left(\frac{d^n y}{ds^n}\right)_0$, $\left(\frac{d^n z}{ds^n}\right)_0$; soient c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en M et R_{n+1} la valeur algébrique du vecteur MN_{n+1}. On a évidemment à prendre l'intersection du plan

$$(1) \qquad a^0_{n+1}(X - x_0) + b^0_{n+1}(Y - y_0) + c^0_{n+1}(Z - z_0) = 1,$$

avec la normale à la surface.

Les coordonnées de N_{n+1} sont

$$(2) \qquad x_0 + R_{n+1}c, \quad y_0 + R_{n+1}c', \quad z_0 + R_{n+1}c''.$$

On obtient donc immédiatement

$$(3) \qquad \frac{\cos\theta_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{1}{R_{n+1}},$$

θ_{n+1} étant l'angle de la direction $(a^0_{n+1}, b^0_{n+1}, c^0_{n+1})$ avec la normale à la surface; bien que θ_{n+1} et ρ_{n+1} dépendent tous deux des éléments d'ordre $n+1$, leur quotient ne dépend que de ceux d'ordre n. Pour $n=1$, on a l'expression classique du théorème de Meusnier. Le premier membre de (3) s'écrit, en laissant s variable,

$$(4) \qquad c\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} + c'\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}} + c''\frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}.$$

On peut remarquer que l'égalité

$$(5) \qquad \mathrm{S}c\,dx = 0,$$

différentiée 1, 2, ..., n fois successivement, met en évidence le théorème étudié ici : l'expression $\mathrm{S}c\,d^{n+1}x$ ne fera en effet intervenir que les éléments différentiels d'ordre n; c'est l'une des méthodes classiques suivies pour démontrer le théorème de Meusnier. Il me semble préférable d'écrire

$$(6) \quad d^2x = \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \delta c\right]du^2 + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \delta' c\right]du\,dv$$
$$+\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \delta'' c\right]dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v,$$

$$(7) \quad dc = \left[\frac{F\delta' - G\delta}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{F\delta - E\delta'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du + \left[\frac{F\delta'' - G\delta'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{F\delta' - E\delta''}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right]dv,$$

où l'on a posé

$$(8) \qquad H = \sqrt{EG - F^2}, \qquad \delta = \frac{D}{H}, \qquad \delta' = \frac{D'}{H}, \qquad \delta'' = \frac{D''}{H}.$$

Par différentiations successives on obtient aisément des formules de récurrence donnant $d^p x$, $d^p y$, $d^p z$ ordonnées suivant les puissances de du, dv, $d^2 u$, ..., le coefficient de chaque puissance étant lui-même réduit à la forme $L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + Nc$. La signification vectorielle est facile à mettre en évidence. On trouve ainsi sans difficulté

$$(9) \quad \begin{aligned} S c\, d^3 x = du^3 S c \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} + 3 du^2 dv\, S c \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} + 3\, du\, dv^2 S c \frac{\partial^3 x}{\partial u\, \partial v^2} \\ + dv^3 S c \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} + 3\,\delta\, du\, d^2 u + 3\,\delta'(du\, d^2 v + dv\, d^2 u) + 3\,\delta''\, dv\, d^2 v. \end{aligned}$$

Le genre de calcul de récurrence indiqué donne sans effort (il suffit de calculer les termes Nc) les expressions

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} S c \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta' + \frac{\partial \delta}{\partial u}, \\ S c \frac{\partial^3 x}{\partial u^2\, \partial v} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta'' + \frac{\partial \delta}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta' + \frac{\partial \delta'}{\partial u}, \\ S c \frac{\partial^3 x}{\partial u\, \partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta'' + \frac{\partial \delta'}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta' + \frac{\partial \delta''}{\partial u}, \\ S c \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta' + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta'' + \frac{\partial \delta''}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Remarquons en passant que la seconde ligne a été obtenue en calculant

$$S\left[c \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)\right] \quad \text{et} \quad S\left[c \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\right)\right].$$

De même pour la troisième ligne; on obtient, en passant et sans effort, les équations de Gauss-Codazzi [1].

---

[1] On remarquera que le calcul indiqué dans le traité classique de Darboux est au contraire assez long. J'ai montré dans le *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule XXVI, comment le calcul de Darboux conduit, *sans avoir besoin d'être renouvelé*, à démontrer que δ, δ', δ'' vérifient les équations de Codazzi où les symboles de Christoffel sont calculés pour l'élément linéaire de la représentation sphérique.

Comme vérification, $S c d^3 x$ est indépendant de $d^3 u$ et $d^3 v$. En divisant par ds^3, on a $\frac{1}{R_3}$, le calcul étant valable quelles que soient les variables indépendantes. L'équation $S c d^3 x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 en u, v qui généralise l'équation des asymptotiques.

En continuant, je crois que l'on pourrait trouver sujet de nombreuses recherches géométriques. Je dois ajouter à ce qui précède une remarque simple. On peut prendre comme point de départ l'équation $S c dx = 0$ qui est *une équation de Monge particulière* satisfaite par toutes les courbes de la surface.

Mais si l'on considère une équation de Monge *quelconque*

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

et toutes les courbes, solutions de cette équation, ayant entre elles en (x_0, y_0, z_0) un contact d'ordre n, la méthode de calcul employée réussira et conduira, pour $n = 1$, à un théorème analogue à celui de Meusnier, et pour $n > 1$ à des généralisations analogues.

7. *Équations intrinsèques d'une surface.* — C'est un fait bien connu que pour une surface donnée la *courbure de Meusnier* $\rho = \frac{\cos\theta}{R}$ et la *torsion géodésique* $\tau = \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ ne font intervenir que les éléments différentiels du premier ordre, bien que le première expression utilise les éléments θ et R qui sont du second ordre, et la seconde les éléments T et $\frac{d\theta}{ds}$ qui sont du troisième. Laguerre a donné un résultat analogue (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. 3, p. 358); Ossian Bonnet, Beltrami ont indiqué quelques résultats curieux qui peuvent se rattacher à la formule de Laguerre (DARBOUX, *loc. cit.*, p. 396-399). Il s'agit de montrer que l'expression nouvelle

$$(1) \qquad l = \operatorname{tang}\theta\left(\frac{2}{T} - 3\frac{d\theta}{ds}\right) - \frac{1}{R}\frac{dR}{ds},$$

qui, en apparence, fait aussi intervenir l'ordre 3, ne dépend que du premier ordre. Quelques mots d'explication indiqueront pourquoi, *a priori*, on peut découvrir de telles relations.

R et θ dépendent tous deux de u, v, u', u'', en appelant, pour abréger

$$(2)\qquad u'=\frac{du}{ds},\qquad u''=\frac{d^2u}{ds^2},\qquad \ldots,\qquad u^{(n)}=\frac{d^nu}{ds^n},$$

dérivées calculées sur un chemin *donné* de la surface. Il est inutile de faire figurer les dérivées analogues v', v'', ..., $v^{(n)}$, puisque la relation identique

$$(3)\qquad \mathrm{E}u'^2+2\mathrm{F}u'v'+\mathrm{G}v'^2=1$$

ramène v' au calcul de u' et que des différentiations successives donnent v'', ..., $v^{(n)}$ en fonction des dérivées de u (par des expressions qui, finalement, sont *rationnelles* relativement aux dérivées de u et à la quantité complémentaire v'.

Or, pour le second ordre, R et θ épuisent les éléments différentiels et sont donnés par les équations classiques

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}=\dfrac{\delta u'^2+2\delta' u'v'+\delta'' v'^2}{\mathrm{E}u'^2+2\mathrm{F}u'v'+\mathrm{G}v'^2}, \\ u'v''-v'u''=\dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{R}}+\dfrac{\Delta}{\mathrm{H}^2}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}=\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}, \\ \Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}u'^2+\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}u'v'+\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)v'^2 & \mathrm{E}u'+\mathrm{F}v' \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)u'^2+\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}u'v'+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}v'^2 & \mathrm{F}u'+\mathrm{G}v' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

L'élimination de u'' est déjà faite entre les deux équations (4) : on n'obtient, comme relation du type cherché, où n'entrent que u, v, u', que la relation de Meusnier. La seconde équation (4) peut d'ailleurs être considérée comme du premier degré en u'' (et rationnelle en u, v, u' et v', v' étant la seule irrationnelle quand on ne veut garder que u, v, u'). Par conséquent si nous différentions les deux équations (4) pour obtenir $\dfrac{d\mathrm{R}}{ds}$ et $\dfrac{d\theta}{ds}$, nous remarquons que la première donnera, au premier membre,

$$(6)\qquad -\left(\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}}\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}\right),$$

et au second membre, une expression ne dépendant que de u, v, u', u'', expression où, en tenant compte de la seconde (4), on ne gardera en plus de R et θ que u, v, u' (u, v, u', v' si l'on veut n'avoir aucune irrationalité). L'égalité des deux membres fournit précisément l'équation de Laguerre. Le troisième ordre est épuisé par l'adjonction de T; or le calcul classique livre T par l'intermédiare de $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ qui est du type que nous cherchons, ne contenant que u, v, u'.

Ce genre de calcul donne donc ainsi, quel que soit l'ordre, deux équations nouvelles à chaque coup, reliant les expressions

$$(7)\quad R,\ \theta;\quad \frac{dR}{ds},\ \frac{d\theta}{ds},\ T;\quad \frac{d^2R}{ds^2},\ \frac{d^2\theta}{ds^2},\ \frac{dT}{ds};\quad \ldots;\quad \frac{d^nR}{ds^n},\ \frac{d^n\theta}{ds^n},\ \frac{d^{n-1}T}{ds^n},$$

qui dépendent de l'ordre $n+2$ aux expressions u, v, u' seules; il est même remarquable que pour l'ordre 2 et 3 on ait pu *séparer* les deux groupes de variables, et ceci justifie l'importance des expressions ρ, τ, l.

Cela résulte de ce qu'il a fallu dériver les deux équations (4) exactement n fois et l'équation $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \ldots$ exactement $n-1$. Or chaque fois que l'on dérive $\frac{\cos\theta}{R} = \ldots$, on remplace aussitôt u'' par son expression déduite de la seconde (4), de façon à toujours réduire le second membre à ne contenir au dehors de R, θ et leurs dérivées que u, v, u'; la seconde équation (4) donne u''; en dérivant une fois, on obtient u''', ..., à la $n^{\text{ième}}$ dérivée on a $u^{(n+2)}$; comme notre but est d'éliminer u'', u''', ..., $u^{(n+2)}$, l'élimination est d'une simplicité enfantine : nous nous bornons à ne pas faire ce calcul de dérivation.

On applique à $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \ldots$ précisément la même méthode qu'à $\frac{\cos\theta}{R} = \ldots$ et l'on a, en dérivant $n-1$ fois la première, n fois cette dernière, les deux équations d'ordre $n+2$ annoncées s'ajoutant à celles déjà obtenues. Pour l'ordre $n+2$ on a ainsi obtenu successivement $2n+1$ équations liant les quantités (7) à u, v, u' et représentant exactement, sans omission ni surabondance, le résultat de l'élimination de u'', u''', ..., $u^{(n+2)}$ entre les $3n+2$ équations déterminant ces $3n+2$ éléments géométriques (7).

J'explicite le calcul pour l'équation de Laguerre : Darboux indique le calcul, par une autre voie, se servant de la méthode du trièdre mobile, méthode avantageuse pour certaines questions (je l'ai montré au *Mémorial* pour la méthode de Weingarten), mais vraiment pénible comme moyen d'écrire l'équation de Laguerre. Le second membre de (4) est ce qui a été appelé ρ : je peux le laisser sous la forme (4), *sans remarquer que le dénominateur est égal à un*, ou sous la forme

$$\rho = \frac{\delta + 2\delta' m + \delta'' m^2}{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}m + \mathrm{G}m^2}, \qquad m = \frac{v'}{u'}. \tag{8}$$

De la sorte $\frac{\partial \rho}{\partial u}$, $\frac{\partial \rho}{\partial v}$ ont un sens parfaitement clair sous la forme (8) [ou à la rigueur sous la forme (4)] ainsi que $\frac{\partial \rho}{\partial m}$. J'écris

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{\partial \rho}{\partial u} u' + \frac{\partial \rho}{\partial v} v' + \frac{\partial \rho}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial s}, \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial u} u' + \frac{\partial \rho}{\partial v} v' + \frac{2(u'v'' - v'u'')}{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \delta u' + \delta' v' & \delta' u' + \delta'' v' \\ \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' & \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' \end{vmatrix}}{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}. \end{aligned} \right.$$

D'où, en se rappelant (6) et la seconde équation (4) ainsi que l'expression de $\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}$,

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}}\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} + \frac{\partial \rho}{\partial u} u' + \frac{\partial \rho}{\partial v} v' - 2\left(\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}\right)\left[\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} + \frac{\Delta}{\mathrm{H}}\right] = 0. \tag{10}$$

C'est l'équation annoncée de Laguerre reliant u, v, u' à R, θ, $\frac{d\mathrm{R}}{ds}$, $\frac{d\theta}{ds}$, T. On peut l'écrire ainsi en multipliant par $\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$ ou $\frac{1}{\rho}$:

$$\operatorname{tang}\theta\left(\frac{2}{\mathrm{T}} - \frac{3\,d\theta}{ds}\right) - \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} u' + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v} v' - \frac{2\tau}{\rho}\frac{\Delta}{\mathrm{H}}, \tag{11}$$

au second membre il suffit de remplacer u' et v' par

$$\frac{u'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}} \quad \text{et} \quad \frac{v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}}$$

pour que le second membre soit homogène et de degré zéro en u', v' et que l'application ultérieure de la méthode se poursuive aisément; d'ailleurs, sous la forme homogène, la valeur du second membre [dans (11) et les calculs suivants] sera obtenue aussitôt, même si la variable indépendante n'est plus l'arc.

Cela posé, en appelant ρ, τ, l les quantités

$$(12) \qquad \rho = \frac{\cos\theta}{R}, \qquad \tau = \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}, \qquad l = 2\tau \operatorname{tang}\theta + \frac{d\log}{ds}\left(\frac{\cos\theta}{R}\right),$$

(l est la dernière expression calculée), nous avons exprimé ρ, τ, l en u, v, u', de sorte que si la surface n'est *ni de révolution ni hélicoïdale*, nous pouvons inversement exprimer u, v, u' en ρ, τ, l. L'application de notre méthode nous fait écrire

$$(13) \qquad \tau = f\left(u, v, \frac{v'}{u'}\right), \qquad l = \varphi\left(u, v, \frac{v'}{u'}\right),$$

puis dériver en s, d'où

$$(14) \qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v' + \left(\frac{\sin\theta}{R} + \frac{\Delta}{H}\right) f_1\left(u, v, \frac{v'}{u'}\right).$$

On voit donc qu'en remplaçant u, v, u' dans les valeurs de $\frac{d\tau}{ds}$ et $\frac{dl}{ds}$, on obtient deux équations *intrinsèques*

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} F_1\left[\rho, \tau, l, \frac{d\tau}{ds}, \frac{dl}{ds}, \frac{\sin\theta}{R}\right] = 0, \\ F_2\left[\rho, \tau, l, \frac{d\tau}{ds}, \frac{dl}{ds}, \frac{\sin\theta}{R}\right] = 0, \end{array}\right.$$

R, θ y figurent avec leurs dérivées premières et secondes, T y entre par lui-même et $\frac{dT}{ds}$. Ces équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ représentent bien le résultat de l'élimination de u, v, u', u'', u''', u^{IV} entre les huit équations fournissant

$$(16) \qquad R, \quad \theta; \qquad \frac{dR}{ds}, \quad \frac{d\theta}{ds}, \qquad T; \qquad \frac{d^2R}{ds^2}, \quad \frac{d^2\theta}{ds^2}, \quad \frac{dT}{ds}.$$

Notre méthode nous a permis d'affirmer que ce sont les *seules* équations d'élimination et que ces équations sont *indépendantes*. Si l'on considère les $(3n+2)$ quantités (7), l'élimination de u, v, u', ..., $u^{(n+2)}$ fournit exactement $2n-2$ équations, puisque l'élimination préalable de u'', ..., $u^{(n+2)}$ a fourni $2n+1$ équations. Le résultat ne peut donc être que

$$(17)\qquad \begin{cases} F_1 = 0, & \dfrac{dF_1}{ds} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-2}F_1}{ds^{n-2}} = 0, \\ F_2 = 0, & \dfrac{dF_2}{ds} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-2}F_2}{ds^{n-2}} = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'il n'y a lieu de tenir compte que des deux équations F_1 et F_2.

Pour une surface de révolution ou hélicoïdale, on choisit les paramètres u, v qui réduisent le ds^2 à la forme $du^2 + U^2\,dv^2$ [ou $U^2(du^2 + dv^2)$] et l'on voit aussitôt que le paramètre v n'entre pas dans les formules donnant R, T, θ, ..., de sorte que, sauf pour la sphère, on peut tirer u et u' des formules donnant ρ, τ; on obtient donc deux équations

$$(18)\qquad \begin{cases} F_1\left[\dfrac{\cos\theta}{R}, \dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}, 2\operatorname{tang}\theta\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}\right) + \dfrac{d}{ds}\log\dfrac{\cos\theta}{R}\right] = 0, \\ F_2\left[\rho, \tau, l, \dfrac{d\tau}{ds}, \dfrac{dl}{ds}, \dfrac{\sin\theta}{R}\right] = 0; \end{cases}$$

dans la première n'entrent que R, θ; $\dfrac{dR}{ds}$, $\dfrac{d\theta}{ds}$, T.

L'élimination de l'une des variables R, T, θ entre les équations (15), ou (18), de θ par exemple, se fait en éliminant $\theta, \dfrac{d\theta}{ds}, \dfrac{d^2\theta}{ds^2}, \dfrac{d^3\theta}{ds^3}, \dfrac{d^4\theta}{ds^4}$ entre le système

$$(19)\qquad \begin{cases} F_1 = 0, & \dfrac{dF_1}{ds_1} = 0, & \dfrac{d^2F_1}{ds^2} = 0, \\ F_2 = 0, & \dfrac{dF_2}{ds} = 0, & \dfrac{d^3F_2}{ds^2} = 0, \end{cases}$$

et donne une équation *intrinsèque*

$$(20)\qquad \Phi\left[R, T, \frac{dR}{ds}, \frac{d^2R}{ds^2}, \frac{d^3R}{ds^3}, \frac{d^4R}{ds^4}, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2}, \frac{d^3T}{ds^3}\right] = 0.$$

Pour la sphère on a aussitôt, a étant le rayon,

$$(21)\qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = 0, \qquad R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = a^2.$$

La fonction Φ ne peut être *quelconque;* les fonctions F_1, F_2 elles-mêmes ne peuvent être *quelconques* vis-à-vis des six arguments indiqués. On peut remarquer, par exemple, que l'équation

$$R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = a^2$$

est caractéristique d'une sphère de rayon a (résultat classique); donc cette équation entraîne

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = 0;$$

or l'élimination de θ entre

$$\frac{\sin\theta}{R} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = 0$$

conduirait encore à l'équation $R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = a^2$, de sorte que les deux nouvelles équations sont inadmissibles.

Si la surface est *algébrique*, F_1 et F_2 sont aussi *algébriques* vis-à-vis des arguments indiqués. Il y a donc une série de questions à étudier : choix de F_1 et F_2 *a priori*; remonter de ces équations à la surface, etc.

Je donne, pour terminer, une application simple de cette méthode. Adjoignons, à l'équation intrinsèque $\Phi = 0$ de la surface S, l'équation intrinsèque $\Phi_1 = 0$ d'une autre surface S_1. Que représente le système $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$? Chaque équation, séparément, représente S ou S_1, à un déplacement arbitraire près. Laissons donc S fixe et coupons-la par S_1 dans chacune des ∞^6 positions que S_1 peut prendre : on obtient ainsi ∞^6 courbes définies intrinsèquement par $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$. C'est bien le compte de constantes arbitraires que l'on obtient par intégration de ce système, en négligeant la constante additive accolée à l'arc.

Si S et S_1 sont des sphères de rayon différent, on obtient ainsi $\frac{1}{T} = 0$, $R = \text{const.}$, équations intrinsèques d'un cercle.

NOTE. — Dans une Note qui paraîtra aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* en avril 1928, M. Fimikoff, professeur à Moscou, développe quelques-unes des idées que j'introduis à propos de l'équation intrinsèque des surfaces.