JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI VILLAT

Sur certains mouvements d'un solide dans un fluide visqueux limité

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 429-452.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__429_0>

Sur certains mouvements d'un solide dans un fluide visqueux limité;

Par Henri VILLAT.

On sait que M. C.-W. Oseen, dans une série de beaux Mémoires [*cf.* notamment : *Beiträge zur Hydrodynamik* (*Annalen der Physik*, Bd 46, 1915)], a réussi à caractériser des cas généraux de mouvement d'un fluide peu visqueux lorsqu'un solide se déplace dans ce fluide supposé indéfini et incompressible. M. N. Zeilon [*On Potential Problems in the Theory of Fluid Resistance* (*K. Sv. Vetenskapakademiens Handlinger*, 3ᵉ série, Bd 1, 1923)] a appliqué la méthode de M. Oseen dans divers cas concrets, et a réussi, malgré la difficulté du sujet, à expliciter avec une très grande élégance la solution de plusieurs problèmes essentiels concernant un fluide *illimité*, dans le cas de deux ou trois dimensions.

Ainsi que je l'ai fait connaître récemment (cf. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, février 1927), la théorie est susceptible d'être étendue, et des cas précis peuvent être explicitement développés, lorsque le fluide *n'est pas* illimité. Je vais dans le présent travail exposer sur un exemple simple cette extension et sa mise en œuvre, laquelle — dans ce cas comme dans des cas plus généraux — se rattache aux considérations que j'ai développées dans un article : *Sur un problème généralisé de Hilbert concernant les fonctions analytiques* (*Congrès des Sociétés savantes*, Poitiers, avril 1926).

Envisageons un mouvement permanent à deux dimensions ainsi défini : une lame rectiligne Γ, placée sur Ox, se déplace avec une vitesse constante U dans la direction Oy; le fluide est limité par cet axe Oy, indéfini dans les deux sens. Pour une raison de symétrie évidente, il revient au même de considérer, à la place du mouvement susdit, celui qui serait déterminé par deux lames, Γ et Γ', symétriques l'une et l'autre par rapport au mur Oy, en supposant le fluide illimité dans tous les sens. On détermine naturellement le mouvement du fluide relativement aux axes Ox, Oy.

La théorie de M. Oseen prouve alors qu'un mouvement du fluide peu visqueux est déterminé par la connaissance d'un potentiel φ satisfaisant, sur la partie avant $(y = +0)$ des deux lames, à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V, \tag{1}$$

et sur la partie arrière à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Enfin, on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

à l'infini. Les formules connues de M. Oseen (*loc. cit.*) permettent alors de calculer les vitesses et les pressions en tout point du fluide.

Pour déterminer la fonction harmonique φ dont dépend la question, nous commencerons par transformer le domaine (doublement connexe) défini par le plan xOy muni de coupures le long de Γ et Γ', en un domaine annulaire compris entre deux circonférences concentriques. Pour cela, posons $z = x + iy$; il est facile de voir que les relations

$$z = i\beta\left[\zeta\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)\right] + \gamma, \tag{2}$$

$$Z = e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}}, \tag{3}$$

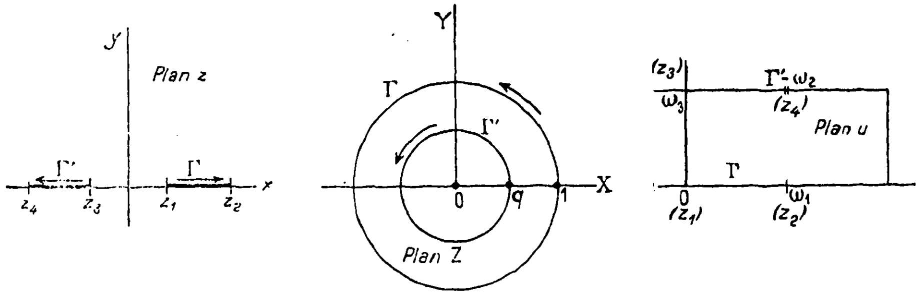
où β et γ sont deux constantes, et où la fonction ζ est la fonction de de Weierstrass construite avec les demi-périodes ω_1 et ω_3 [1], font correspondre le plan z coupé, à l'anneau du plan Z indiqué sur la figure; les rayons de l'anneau sont 1 et $q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}$ (< 1). Les deux

---

[1] Dans tout ce qui suivra, la notation concernant les fonctions elliptiques seront celles du Traité de Tannery et Molk (Gauthier-Villars, éditeur).

portions supérieures des circonférences correspondent aux côtés supérieurs des deux coupures.

Fig. 1.



Les points

$$Z_1 = 1, \qquad Z_2 = -1, \qquad Z_3 = q, \qquad Z_4 = -q$$

correspondent à

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = \omega_1, \qquad u_3 = \omega_3, \qquad u_4 = \omega_1 + \omega_3$$

et à

$$z_1 = \gamma - 2i\beta\zeta\frac{\omega_3}{2}, \quad z_2 = \gamma - 2i\beta\zeta_1\frac{\omega_3}{2}, \quad z_3 = \gamma - 2i\beta\zeta_3\frac{\omega_3}{2}, \quad z_4 = \gamma - 2i\beta\zeta_2\frac{\omega_3}{2}.$$

La condition d'égalité des deux coupures peut s'écrire sous la forme

$$\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2},$$

c'est-à-dire

$$\zeta\frac{\omega_3}{2} - \zeta_1\frac{\omega_3}{2} - \zeta_2\frac{\omega_3}{2} + \zeta_3\frac{\omega_3}{2} = 0;$$

c'est là une formule facile à vérifier directement. Le centre de symétrie sera l'origine du plan z, si l'on choisit γ par la condition $z_1 + z_3 = 0$, c'est-à-dire

$$(4) \qquad \gamma = i\beta\left(\zeta\frac{\omega_3}{2} + \zeta_3\frac{\omega_3}{2}\right).$$

La longueur commune l des deux lames sera $l = z_2 - z_1$, c'est-à-dire

$$l = 2i\beta\left(\zeta\frac{\omega_3}{2} - \zeta_1\frac{\omega_3}{2}\right) = -i\beta\frac{\wp'\frac{\omega_3}{2}}{\wp\frac{\omega_3}{2} - e_1} = 2i\beta\frac{\sigma_2\frac{\omega_3}{2}\sigma_3\frac{\omega_3}{2}}{\sigma\frac{\omega_3}{2}\sigma_1\frac{\omega_3}{2}}.$$

Mais sur l'axe réel ($o < u < \omega_1$), σ, σ_1, σ_2 et σ_3 sont réels et positifs; quand on passe sur l'axe imaginaire par une rotation d'un quart de cercle, $\arg\sigma$ augmente de $\frac{\pi}{2}$, donc

$$\left(\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma\sigma_1}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} = \left|\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma\sigma_1}\right| e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\left|\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma\sigma_1}\right|_{u=\frac{\omega_3}{2}}.$$

D'ailleurs

$$\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma\sigma_1} = \frac{\sqrt{p-e_2}\sqrt{p-e_3}}{\sqrt{p-e_1}}$$

et

$$p\frac{\omega_3}{2} = e_3 + \sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3},$$

d'où, par un calcul facile,

$$\left(\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma\sigma_1}\right)_{\frac{\omega_3}{2}} = -\sqrt{-(e_2-e_3)} = i\sqrt{e_2-e_3},$$

puisque, avec les notations adoptées, $\sqrt{e_2-e_3}$ est négatif. On a donc en définitive

$$l = -2\beta\sqrt{e_2-e_3}. \tag{5}$$

Ceci posé, revenons à notre fonction φ qu'il s'agissait de déterminer. En posant

$$\varphi = l\,y + \varphi_1, \tag{6}$$

φ_1 sera un nouveau potentiel, qui devra satisfaire à

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dy} = 0 & \text{(sur l'avant des coupures)}, \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx} = 0 & \text{(sur l'arrière)} \end{cases}$$

et à

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dy} + l = 0 \qquad \text{(à l'infini)}.$$

En appelant ψ_1 la fonction harmonique conjuguée de φ_1, la fonction

$$f_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1$$

est une fonction analytique de z, et il en est de même de

$$(9)\qquad \Phi_1 = \frac{df_1}{dz} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \mathrm{A} + i\mathrm{B}$$

(on désignera pour un instant par A et B la partie réelle et le coefficient de i dans Φ_1).

Sur les deux frontières, en posant $Z = e^{i\theta}$, et $Z = qe^{i\theta}$ respectivement, on voit qu'on est ramené, *dans le plan* Z, à trouver une fonction analytique dont les valeurs, $\mathrm{A}+i\mathrm{B}$ sur Γ, et $\mathrm{A}'+i\mathrm{B}'$ sur Γ', satisfassent aux relations

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{B} = 0, & \mathrm{B}' = 0 \quad (\text{à l'avant}), \\ \mathrm{A} = 0. & \mathrm{A}' = 0 \quad (\text{à l'arrière}). \end{cases}$$

Or ces conditions sont de la forme

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} &= 0 \quad (\text{à l'avant}), \\ a'\,\mathrm{A}' + b'\,\mathrm{B}' &= 0 \quad (\text{à l'arrière}), \end{aligned}$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} a &= 0, & a' &= 0 \\ b &= 1, & b' &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi$$

et

$$\left.\begin{aligned} a &= 1, & a' &= 1 \\ b &= 0, & b' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } \pi < \theta < 2\pi.$$

Il s'agit donc ici d'un problème qui généralise un problème classique de M. D. Hilbert, et l'on résout cette généralisation par le procédé que j'ai décrit dans un article *Sur un problème généralisé de Hilbert* cité plus haut. J'appliquerai ici purement et simplement les résultats de ce travail.

Formons d'abord la quantité

$$-\frac{1}{2}\log\frac{a-ib}{a+ib}.$$

Sur Γ elle prend la forme

$$-\frac{1}{2}\log(-1) = -\frac{1}{2}i\pi \qquad \text{pour } 0 < \theta < \pi.$$

et la valeur zéro pour $\pi < \theta < 2\pi$. Construisons alors une fonction $\mathrm{F}(Z)$ définie dans la couronne, et telle que sa partie imaginaire soit égale, sur Γ aux nombres qui précèdent, et sur Γ' aux nombres analogues calculés de même (et par suite égaux aux précédents dans les intervalles correspondants). D'après ma formule générale [1], on trouve

$$F(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left(-\frac{i\pi}{2}\right)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta\right)d\theta$$
$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left(-\frac{i\pi}{2}\right)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta\right)d\theta.$$

La condition de régularité est ici remplie d'elle-même.

Comme on a, conformément à l'équation (3),

$$u = \frac{\omega_1}{i\pi}\log Z.$$

il vient

$$F(Z) = -\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(u-\omega_1)}{\sigma u} + \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_3(u-\omega_1)}{\sigma_3 u}. \tag{11}$$

Je dis maintenant que la fonction

$$\Phi_0(Z) = i\,e^F = i\sqrt{\frac{\sigma_3(u-\omega_1)\sigma u}{\sigma(u-\omega_1)\sigma_3 u}} \tag{12}$$

vérifie les conditions (10). Cela résulte des conclusions du Mémoire cité ci-dessus, et cela est ici à peu près évident, car pour $0 < u < \omega_1$, $\sigma(u-\omega_1)$, comme $(u-\omega_1)$, est réel avec l'argument π, $\sqrt{\sigma(u-\omega_1)}$ a pour argument $\frac{\pi}{2}$ de sorte que Φ_0 est, à l'avant de Γ, égal à un nombre réel positif; on y a donc $B = 0$.

Et pour $\omega_1 < u < 2\omega_1$ (arrière de Γ), $\sigma(u-\omega_1)$ est réel avec l'argument zéro, en sorte que l'on a $A = 0$. Sur Γ' les résultats sont évidemment les mêmes, à cause de la symétrie, et du reste on a, par des formules classiques, en posant $u = v + \omega_3$,

$$\Phi_0(Z) = i\sqrt{\frac{\zeta_{30}(v-\omega_1+\omega_3)}{\zeta_{30}(v-\omega_1)}} = i\sqrt{\frac{-\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}\,\zeta_{03}(v-\omega_1)}{-\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}\,\zeta_{03}v}} \tag{13}$$
$$= i\sqrt{\frac{\zeta_{30}v}{\zeta_{30}(v-\omega_1)}} \qquad = i\sqrt{\frac{\sigma(v-\omega_1)\sigma_3 v}{\sigma_3(v-\omega_1)\sigma v}},$$

---

[1] H. VILLAT. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1912, I, p. 134-175.

qui reproduit, au signe près, l'inverse de la valeur examinée ci-dessus pour Γ. D'où les conclusions énoncées.

Nous avons donc ainsi *une solution* satisfaisant aux conditions (7), mais évidemment pas aux conditions (8) à l'infini.

Mais, si Φ_0 satisfait aux conditions (7), il en sera évidemment de même de $\Phi_0 \times \gamma(Z)$, en désignant par $\gamma(Z)$ une fonction ***réelle sur*** Γ *et* Γ', et qui par suite, à moins d'être une constante absolue, devra posséder sur Γ et Γ' quelque point singulier; ces points singuliers ne peuvent d'ailleurs être que les points $Z = \pm 1$, $Z = \pm q$, qui correspondent aux bords des deux lames.

Or il est facile de s'assurer que, si A_1, A_2, u_1, u_2, C_1, C_2 sont des nombres réels, la fonction

$$A_1 \zeta(u - u_1) + A_2 \zeta(u - u_2) - \frac{A_1 + A_2}{\omega_1} \eta_1 u + C_1 + i C_2$$

possède les deux points singuliers réels u_1 et u_2, et sa partie imaginaire reste *constante* sur Γ et sur Γ'. On voit de même que la fonction

$$A_3 \zeta(u - \omega_3 - v_1) + A_4 \zeta(u - \omega_3 - v_2) - \frac{A_3 + A_4}{\omega_1} \eta_1 u + C_3 + i C_4,$$

où A_3, A_4, v_1, v_2, C_3, C_4 sont réels, jouit de propriétés analogues en intervertissant le rôle des deux frontières. Faisons alors la somme de deux telles fonctions, en prenant $u_1 = 0$, $u_2 = \omega_1$, $v_1 = 0$, $v_2 = \omega_1$, de façon que les points singuliers coïncident avec les points qui déterminent les bords des deux lames. Nous avons ainsi la fonction

$$\begin{aligned} & A_1 \zeta u + A_2 \zeta(u - \omega_1) + A_3 \zeta(u - \omega_3) \\ & \quad + A_4 \zeta(u + \omega_2) - \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{\omega_1} \eta_1 u + C + i C' \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} & A_1 \zeta u + A_2 \zeta_1 u + A_3 \zeta_3 u \\ & \quad + A_4 \zeta_2 u - A_2 \eta_1 - A_3 \eta_3 - A_4 (\eta_1 + \eta_3) - \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{\omega_1} \eta_1 u + C + i C'. \end{aligned}$$

Cette fonction aura sa partie imaginaire *nulle* sur $\Gamma (0 < u < 2\omega_1)$ si l'on prend

$$(A_3 + A_4) \eta_3 = i C'.$$

Passons à l'autre frontière, en faisant $u = \omega_3 + v (0 < v < 2\omega_1)$; la fonction devient

$$A_1(\zeta_3 v + \eta_3) + A_2(\zeta_2 v + \eta_3) + A_3(\zeta v + \eta_3)$$
$$+ A_4(\zeta_1 v + \eta_3) - \eta_1(A_2 + A_3) - \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{\omega_1}\eta_1(\omega_3 + v) + C,$$

et sa partie imaginaire sera nulle, si l'on a

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\left(\eta_3 - \frac{\eta_1\omega_3}{\omega_1}\right) = 0.$$

c'est-à-dire

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0,$$

puisque l'on sait que

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

En changeant légèrement les notations, nous voyons que la fonction

(14) $$\chi_0(Z) = A_0\zeta u + A_1\zeta_1 u + A_2\zeta_2 u + A_3\zeta_3 u + C,$$

comme aussi toutes les puissances de cette fonction, satisfait à la condition voulue, d'avoir sa partie imaginaire nulle sur Γ et sur Γ' dès que A_0, A_1, A_2, A_3, C, sont des nombres réels, et que

(15) $$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

Remarquons d'ailleurs que cette condition était nécessaire pour que le produit $\Phi_0\chi_0$ reste uniforme dans l'anneau du plan Z.

Nous allons maintenant voir qu'on peut résoudre complètement le problème proposé, en prenant pour Φ_1 justement le produit qu'on vient d'écrire, c'est-à-dire en posant

$$\Phi_1 = i\sqrt{\frac{\sigma u\,\sigma_3(u-\omega_1)}{\sigma_3 u\,\sigma(u-\omega_1)}}(A_0\zeta u + A_1\zeta_1 u + A_2\zeta_2 u + A_3\zeta_3 u + C).$$

On s'assure immédiatement que l'on a

$$i\sqrt{\frac{\sigma u\,\sigma_3(u-\omega_1)}{\sigma_3 u\,\sigma(u-\omega_1)}} = (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\sigma_2 u\,\sigma u}{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}},$$

formule qui met mieux en évidence l'allure au voisinage des points singuliers, — en sorte qu'on posera

(16) $$\Phi_1 = \sqrt{\frac{\sigma u\,\sigma_2 u}{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}}(a_0\zeta u + a_1\zeta_1 u + a_2\zeta_2 u + a_3\zeta_3 u + c)$$

avec

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0. \tag{17}$$

Il faut maintenant nous assurer qu'au moyen de la fonction Φ_1, définie par (16), les conditions (8) à l'infini sont satisfaites : cela revient à dire que $\Phi_1 = i\mathrm{U}$ au point à l'infini, c'est-à-dire pour $u = \frac{\omega_3}{2}$. Et enfin nous achèverons le choix des coefficients arbitraires figurant encore dans la formule (16) par des considérations de symétrie, et en imposant que la pression totale soit finie sur chacune des deux lames. Or, ainsi que nous le savons dans le cas d'une lame unique (*cf.* ZEILON, *loc. cit.*) et comme il sera vérifié plus loin par un calcul direct, la pression contient dans son évaluation l'intégrale

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)^2 dx$$

étendue sur la face arrière de la plaque. D'autre part on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathrm{U} - \mathcal{I}(\Phi_1)$$

d'après la définition (6) et (9) de Φ_1. Donc il faut que $[\mathcal{I}(\Phi_1)]^2 \frac{dx}{du}$ soit intégrable par rapport à u dans l'intervalle ω_1, $2\omega_1$, qui correspond à l'arrière de Γ. On a de suite, sur Γ, d'après l'équation (2),

$$\frac{dx}{du} = i\beta \left[p\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right) - p\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right) \right] = -i\beta \frac{p'u\, p'\frac{\omega_3}{2}}{\left(pu - p\frac{\omega_3}{2}\right)^2};$$

cette expression possède deux zéros simples pour $u = \omega_1$ et $u = 2\omega_1$. Maintenant on voit sans peine que, dans l'intervalle en question, on a

$$\mathcal{I}(\Phi_1) = \sqrt{\left| \frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u} \right|} (a_0 \zeta u + a_1 \zeta_1 u + a_2 \zeta_2 u + a_3 \zeta_3 u + c).$$

Pour $u = \omega_1$, cette dernière expression se comporte comme $(u - \omega_1)^{-\frac{3}{2}}$ si $a_1 \neq 0$, et comme $(u - \omega_1)^{-\frac{1}{2}}$ si $a_1 = 0$. L'intégrale de $[\mathcal{I}(\Phi_1)]^2 \frac{dx}{du}$

serait donc infinie, comme celle de $(u-\omega_1)^{-2}$, si a_1 était différent de zéro.

Il faut donc prendre $a_1 = 0$.

Pour $u = 2\omega_1$, l'expression susdite reste au contraire intégrable sans condition nouvelle.

Si nous faisons un raisonnement analogue concernant la paroi Γ' (après avoir posé $u = \omega_3 + v$), nous trouvons, de la même manière, qu'il faut choisir

$$a_3 = 0.$$

La relation (17) donnera alors

$$a_0 + a_2 = 0.$$

de sorte que le crochet qui figure dans Φ_1 se réduira à

$$a_0(\zeta u - \zeta_2 u) + c.$$

Or on sait que

$$\zeta u - \zeta_2 u = -\frac{p' u}{2(pu - e_2)} = \frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u \dfrac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}} = \frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u},$$

en sorte qu'il viendra

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}} \left[a_0 \frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u} + c \right].$$

c'est-à-dire

$$\Phi_1 = a_0 \sqrt{\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u}} + c\sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}} = a_0 \sqrt{\frac{\xi_{30} u}{\xi_{21} u}} + c\sqrt{\frac{\xi_{21} u}{\xi_{30} u}}.$$

Introduisons maintenant une considération de symétrie. Si nous changeons u (réel) en $u + \omega_3$, en supposant par exemple $0 < u < \omega_1$, nous passons d'un point de la face *avant* de Γ au point de Γ', situé lui aussi sur la face avant, et symétrique du précédent par rapport à l'origine du plan z. Or, sur ces deux faces avant de Γ et Γ', les vitesses doivent être symétriques, donc les valeurs de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, qui se réduit ici à Φ_1, doivent être *opposées.*

Mais si l'on change u en $u + \omega_3$, on trouve

$$\xi_{21}(u + \omega_3) = -\frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \xi_{12} u,$$

$$\xi_{30}(u + \omega_3) = -\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\, \xi_{03} u$$

et par suite Φ_1 devient

$$a_0\sqrt{(e_1-e_3)\frac{\xi_{21}u}{\xi_{30}u}}+c\sqrt{\frac{\xi_{30}u}{(e_1-e_3)\xi_{21}u}}.$$

Cette expression devant coïncider avec

$$-\left[a_0\sqrt{\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}}+c\sqrt{\frac{\xi_{21}u}{\xi_{30}u}}\right],$$

il faudra poser

$$a_0\sqrt{e_1-e_3}=-c,$$

et, par suite, on aura

$$\text{(18)}\qquad \Phi_1=a_0\left[\sqrt{\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}}-\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{\frac{\xi_{21}u}{\xi_{30}u}}\right].$$

Il nous reste à calculer le coefficient a_0, en écrivant que, pour le point à l'infini $\left(u=\frac{\omega_3}{2}\right)$, on a $\Phi_1=i\mathrm{U}$. Pour cela nous commencerons par observer que $\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}=\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma u\,\sigma_2 u}$ est réel et positif pour u positif petit. Si l'on passe de l'axe réel sur l'axe imaginaire en tournant d'un petit quart de cercle autour de l'origine, σu se comporte comme u, et son argument augmente de $\frac{\pi}{2}$, donc l'argument de $\frac{1}{\sqrt{\sigma u}}$ diminue de $\frac{\pi}{4}$, et comme σ_1, σ_2, σ_3 sont des fonctions paires, voisines de 1 pour u petit, on voit que $\sqrt{\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}}$ sera égal à $e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left|\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}\right|}$ pour u compris entre o et ω_3. Il en sera ainsi notamment pour $u=\frac{\omega_3}{2}$.

Or on a

$$\frac{\xi_{30}\frac{\omega_3}{2}}{\xi_{21}\frac{\omega_3}{2}}=\frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)}=\frac{\sqrt{p\frac{\omega_3}{2}-e_1}\sqrt{p\frac{\omega_3}{2}-e_3}}{\sqrt{p\frac{\omega_3}{2}-e_2}}.$$

Utilisant les formules

$$p\frac{\omega_3}{2}=e_3+\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2},$$

$$\sqrt{e_3-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_3},\qquad \sqrt{e_3-e_2}=i\sqrt{e_2-e_3}.$$

un calcul élémentaire nous donne

$$\frac{\xi_{30}\frac{\omega_3}{2}}{\xi_{21}\frac{\omega_3}{2}} = \sqrt{-(e_1-e_3)};$$

donc, d'aprés la remarque faite plus haut,

$$\sqrt{\frac{\xi_{30}\frac{\omega_3}{2}}{\xi_{21}\frac{\omega_3}{2}}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{4}},$$

en prenant pour $(e_1-e_3)^{\frac{1}{4}}$ sa valeur arithmétique.

La condition à l'infini donne alors immédiatement

$$i\mathrm{U} = a_0(e_1-e_3)^{\frac{1}{4}}(-i\sqrt{2}),$$

de sorte qu'en définitive la fonction Φ_1 cherchée est la suivante

$$\Phi_1 = -\frac{\mathrm{U}}{\sqrt{2}(e_1-e_3)^{\frac{1}{4}}}\left[\sqrt{\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}} - \sqrt{e_1-e_3}\sqrt{\frac{\xi_{21}u}{\xi_{30}u}}\right]. \tag{19}$$

L'expression $\sqrt{\frac{\xi_{30}u}{\xi_{21}u}}$ et son inverse ont leur détermination arithmétique positive pour $0 < u < \omega_1$, et on les suit par continuité dans tout le rectangle du plan u.

Calcul de la pression totale sur Γ. — On sait que, dans le cas d'une plaque unique dans un fluide indéfini, la pression totale sur la plaque est fournie par la formule

$$\mathcal{R}'_y = -\frac{\rho}{2}\int\left(\mathrm{U}-\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 dx,$$

où l'intégrale est étendue à l'*arrière* de la lame, et où ρ désigne la densité du fluide (*cf.* N. Zeilon, *loc. cit.*, ou mes *Leçons sur l'Hydrodynamique*, sous presse, Chap. XIV). Mais ainsi qu'on le constate par le développement des calculs que je rappelle ici, cela résulte de ce qu'on a la formule générale suivante pour la pression totale R_y en projection sur Oy :

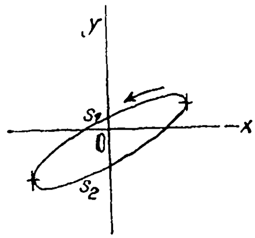
$$\mathcal{R}_y = -\frac{\rho}{2}\int_{s_2}\left(U - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dx - \text{partie réelle de } \frac{\rho}{2}\int_{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dz,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{R}_y = \mathcal{R}'_y - \mathcal{R}\frac{\rho}{2}\int_{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dz.$$

Dans le cas du fluide indéfini, contenant un seul solide, l'intégrale curviligne qui figure au second nombre était *nulle*. Mais dans le cas présent il n'en est pas nécessairement de même, et en fait il n'en est

Fig. 2.



pas ainsi : tout ce qu'on peut affirmer, c'est que cette intégrale est indépendante du contour formé entourant s (c'est-à-dire Γ) auquel on peut aussi bien l'étendre, à condition que ce contour ne contienne aucun point de Γ'. Comme on peut choisir ce contour de façon que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ y soient partout finis, il est clair que l'intégrale curviligne en question est elle-même finie, et que par conséquent $\mathcal{R}_y$ est fini en même temps que $\mathcal{R}'_y$. Le raisonnement qu'on a fait dans le Chapitre précédent, à partir de $\mathcal{R}'_y$, en vue de la construction de Φ_1, est donc entièrement légitime. Mais la formule que donne $\mathcal{R}_y$ n'est plus la formule classique.

Pour plus de clarté, nous allons établir la formule qui représente $\mathcal{R}_y$, au moyen d'un calcul direct.

En posant

$$(20) \qquad u' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

la pression p dans le fluide, sur Γ, est donnée par les formules suivantes (*cf.* Oseen, *loc. cit.*):

$$p = \begin{cases} p_1 = \rho U \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \dfrac{\rho}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = \rho U v' - \dfrac{\rho}{2}(u'^2 + v'^2) & (\text{à l'avant}), \\ p_2 = \rho U \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \dfrac{\rho}{2} U^2 \qquad\qquad\qquad = \rho U v' - \dfrac{\rho}{2} U^2 & (\text{à l'arrière}). \end{cases}$$

D'ailleurs, d'après les conditions (1) imposées à φ, on a

$$v' = U \qquad (\text{à l'avant}),$$
$$u' = 0 \qquad (\text{à l'arrière}).$$

Donc

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(U^2 - u'^2),$$

$$p_2 = \rho U v' - \frac{\rho}{2} U^2.$$

L'expression de la résistance $\mathcal{R}_y$ (ou R) sur Γ sera

$$(21) \qquad R = \int_{\text{contour de } \Gamma} p\,dx = \frac{\rho}{2} U^2 \int_{z_1 \text{ avant}}^{z_2} dx - \frac{\rho}{2} U^2 \int_{z_2 \text{ arrière}}^{z_1} dx$$
$$- \frac{\rho}{2} \int_{z_1 \text{ avant}}^{z_2} u'^2\,dx + \rho U \int_{z_2 \text{ arrière}}^{z_1} v'\,dx.$$

Maintenant on a

$$u' - iv' = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -iU + \Phi,$$
$$= -iU - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma u\,\sigma_2 u}} - (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\sigma u\,\sigma_2 u}{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}}\right].$$

Sur l'avant de Γ ($0 < u < \omega_1$), le radical $\sqrt{\dfrac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}}$ est réel et positif, et l'on a

$$(22) \qquad (u')_{\text{avant}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}} - (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}}\right].$$

Si l'on passe à l'arrière ($\omega_1 < u < 2\omega_1$) en évitant le point $u = \omega_1$ par un petit demi-cercle au-dessus de l'axe réel, on voit aisément que $\sqrt{\dfrac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}}$ devient $-i\sqrt{-\dfrac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}}$, ce dernier radical écrit étant positif.

A l'arrière on a donc

$$(23)\qquad (v')_{\text{arrière}} = U - \frac{U}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{-\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}} + (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}\sqrt{-\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}}\right].$$

On aperçoit donc qu'il sera facile de calculer $\int_{(\text{avant})} u'^2\,dx$, par une intégrale qu'on verra être *elliptique*. Mais l'intégrale $\int_{(\text{arrière})} v'\,dx$ serait beaucoup plus malaisée, car elle contient les racines carrées des diverses fonctions σ_α.

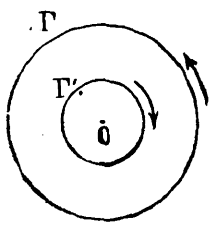
Fort heureusement on peut esquiver, par un artifice, le calcul de cette dernière intégrale. Pour cela, observons tout d'abord qu'un raisonnement tout semblable au précédent nous fournit pour la pression totale S sur Γ', la formule suivante

$$S = R = \rho U^2(z_3 - z_4) - \frac{\rho}{2}\int_{z_4\ \text{avant}}^{z_3} u'^2\,dx + \rho U\int_{z_3\ \text{arrière}}^{z_4} v'\,dx,$$

de sorte qu'on a la formule plus symétrique

$$(24)\qquad \begin{aligned} 2R = {} & \rho U^2(z_2 - z_1 + z_4 - z_3) \\ & - \frac{\rho}{2}\left[\int_{z_1\ \text{avant}}^{z_2} u'^2\,dx + \int_{z_4\ \text{avant}}^{z_3} u'^2\,dx\right] \\ & + \rho U\left[\int_{z_2\ \text{arrière}}^{z_1} v'\,dx + \int_{z_3\ \text{arrière}}^{z_4} v'\,dx\right]. \end{aligned}$$

Fig. 3.



On a d'ailleurs

$$z_2 - z_1 = z_3 - z_4 = l \qquad \text{(longueur commune des deux lames)}.$$

$$\int_{z_1}^{z_2} u'^2\,dx = \int_{z_4}^{z_3} u'^2\,dx \qquad \text{(par raison de symétrie)}.$$

Ceci posé, envisageons l'intégrale

$$J = \int \Phi_1 \, dz = \int \Phi_1 \frac{dz}{dZ} dZ,$$

étendue aux frontières de la couronne du plan Z (Γ parcouru dans le sens direct, et Γ' dans le sens inverse). Le long de ces deux frontières, dz est réel (il est égal à dx sur les deux lames), et l'on a vu que

$$u' - iv' = -iU + \Phi_1,$$

donc

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma_\lambda + \Gamma'_\gamma} (u' - iv' + iU) \, dz \\ &= \int_{z_1 \text{ (avant)}}^{z_2} u' \, dx + \int_{z_2 \text{ (arrière)}}^{z_1} i(U - v') \, dx + \int_{z_4 \text{ (avant)}}^{z_3} u' \, dx + \int_{z_3 \text{ (arrière)}}^{z_4} i(U - v') \, dx, \end{aligned}$$

puisque $v' = U$ à l'avant, et $u' = 0$ à l'arrière. Donc enfin

$$\begin{aligned} J = &\left[\int_{z_1}^{z_2} u' \, dx + \int_{z_4}^{z_3} u' \, dx \right]_{\text{(avant)}} \\ &+ iU(z_1 - z_2 + z_4 - z_3) - i \left[\int_{z_2}^{z_1} v' \, dx + \int_{z_3}^{z_4} v' \, dx \right]_{\text{arrière}}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\text{Part. imag. de } J = -2Ul - \left[\int_{z_2}^{z_1} v' \, dx + \int_{z_3}^{z_4} v' \, dx \right]_{\text{(arrière)}}.$$

Reportons dans (24), nous obtenons ainsi après réduction

$$2R = -\rho \int_{z_1}^{z_2} u'^2 \, dx - \rho U \times \text{Part. imag. de } J. \tag{25}$$

Enfin J est lui-même égal, d'après le théorème de Cauchy, à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus, correspondant aux pôles compris entre les deux frontières, concernant la fonction $\Phi_1 \frac{dz}{dZ}$, c'est-à-dire concernant

$$\begin{aligned} \Phi_1 \frac{dz}{dZ} = -\frac{U}{\sqrt{2}} &\left[\frac{1}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma \sigma_2}} - (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\sigma \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_3}} \right] \\ &\times \left[-i\beta \frac{p' u \, p' \frac{\omega_3}{2}}{\left(pu - p \frac{\omega_3}{2} \right)^2} \right] \frac{\omega_1}{i\pi} \frac{1}{Z}. \end{aligned} \tag{26}$$

Il faudra naturellement supposer qu'on a évité les points $Z = \pm 1$, $Z = \pm q$ (qui correspondent à $u = 0, \omega_1, 2\omega_1, \omega_3, \omega_3 + \omega_1, \omega_3 + 2\omega_1$) par de petites dentelures dont les rayons tendent vers zéro, et dont la contribution sera du reste nulle à la limite.

Les seuls pôles possibles de la fonction (26) sont ceux qui correspondent à $u = \pm \frac{\omega_3}{2} + \text{période}$, c'est-à-dire à $Z = q^{\pm\frac{1}{2}+2n}$ $\left(\text{à cause de } Z = e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}}\right)$. Le seul pôle situé dans la couronne est $Z_0 = q^{\frac{1}{2}}$, correspondant à $u_0 = \frac{\omega_3}{2}$. Désignons par r le résidu correspondant à Z_0. Alors on aura

$$J = 2i\pi r,$$

et enfin

$$2R = -\rho \int_{z_1\,(\text{avant})}^{z_2} u'^2\, dx - 2\pi\rho U \times (\text{Part. réelle de } r). \tag{27}$$

Il nous reste donc à trouver : 1° l'intégrale $L = \int_{z_1\,(\text{avant})}^{z_2} u'^2\, dx$; 2° le résidu r.

Calcul de L. — Sur l'avant de Γ, u' est donné par la formule (22), en sorte que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\omega_1} \frac{U^2}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u} + \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u} - 2\right] dx \\ &= \frac{U^2}{2}\int_0^{\omega_1}\left[\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma \sigma_2} + \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_3} - 2\right]\left[-i\beta\,\frac{\wp' u\, \wp'\frac{\omega_3}{2}}{\left(\wp u - \wp\frac{\omega_3}{2}\right)^2}\, du\right]. \end{aligned}$$

On peut séparer ceci en deux parties, en écrivant

$$L = -U^2(z_2 - z_1) - \frac{i\beta U^2 \wp'\frac{\omega_3}{2}}{2\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\omega_1}\left[\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u} + (e_1 - e_3)\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}\right]\frac{\wp' u\, du}{\left(\wp u - \wp\frac{\omega_3}{2}\right)^2}. \tag{28}$$

Occupons-nous de l'intégrale

$$\alpha = \int_0^{\omega_1}\left[\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u} + (e_1 - e_3)\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}\right]\frac{\wp' u\, du}{\left(\wp u - \wp\frac{\omega_3}{2}\right)^2}. \tag{29}$$

Pour cela transformons tout d'abord la fonction à intégrer. On a

$$\begin{aligned}\left[\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}+(e_1-e_3)\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}\right]p'u &= \left[\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}+(e_1-e_3)\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}\right]\left(-2\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma^3}\right)\\ &= -2\frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma^4}-2(e_1-e_3)\frac{\sigma_2^2}{\sigma^2}\\ &= -2(pu-e_1)(pu-e_3)-2(e_1-e_3)(pu-e_2)\\ &= -2\left[(pu-e_3)^2-(e_1-e_3)(e_2-e_3)\right]\\ &= -2\left(pu-p\frac{\omega_3}{2}\right)\left(pu-2e_3+p\frac{\omega_3}{2}\right).\end{aligned}$$

Transportant et simplifiant, on a donc

$$\alpha = -2\int_0^{\omega_1}\frac{pu-2e_3+p\frac{\omega_3}{2}}{pu-p\frac{\omega_3}{2}}\,du \tag{30}$$

et l'on est ramené à intégrer une fonction elliptique. Celle-ci a les deux pôles $u=\pm\frac{\omega_3}{2}$ dans un rectangle de périodes. Le résidu de la fonction sous le signe somme, pour $u=\frac{\omega_3}{2}$, est $\left[\frac{2(p-e_3)}{p'}\right]_{u=\frac{\omega_3}{2}}$, c'est-à-dire $-\left(\frac{\sigma\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2}\right)_{\frac{\omega_3}{2}}$. On voit aisément que cette expression est égale à $-i\left|\frac{\sigma\frac{\omega_3}{2}\sigma_3\frac{\omega_3}{2}}{\sigma_1\frac{\omega_3}{2}\sigma_2\frac{\omega_3}{2}}\right|$, car $\frac{\sigma\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2}$ est réel positif pour $0<u<\omega_1$, et une rotation d'un angle droit autour du point o fait apparaître dans σu le facteur i. D'ailleurs on a

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\sigma\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2}\right)_{\frac{\omega_3}{2}} &= -\frac{\sqrt{p\frac{\omega_3}{2}-e_3}}{\sqrt{p\frac{\omega_3}{2}-e_1}\sqrt{p\frac{\omega_3}{2}-e_2}}\\ &= -\sqrt{\frac{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}}{\left[e_3-e_1+\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}\right]\left[e_3-e_2+\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}\right]}}\\ &= \pm\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3}} = -\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3}},\end{aligned}$$

le dernier signe étant déterminé sans ambiguïté par les remarques ci-dessus.

Le résidu concernant $-\frac{\omega_3}{2}$ est opposé au précédent d'après un théorème classique, et par suite on a la décomposition

$$\frac{pu - 2e_3 + p\frac{\omega_3}{2}}{pu - p\frac{\omega_3}{2}} = \frac{-i}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}}\left[\zeta\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)\right] + C.$$

On détermine la constante C, en faisant par exemple $u = 0$, et l'on trouve

$$\frac{pu - 2e_3 + p\frac{\omega_3}{2}}{pu - p\frac{\omega_3}{2}} = 1 - \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}}\left[\zeta\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right) + 2\zeta\frac{\omega_3}{2}\right],$$

on a par suite

$$(31) \qquad \alpha = -2\omega_1 + \frac{4i\omega_1\zeta\frac{\omega_3}{2}}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}} + \frac{2i}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}}\left[\log\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)}\right]_0^{\omega_1}.$$

Il est nécessaire de calculer avec précision la quantité

$$(32) \qquad m = \frac{1}{i}\left[\log\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)}\right]_0^{\omega_1}.$$

Il est clair que, pour $u = \omega_1$ ou pour $u = 0$, on a

$$\frac{1}{i}\log\frac{\sigma\left(\omega_1 - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right)} = \frac{1}{i}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} - \omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} - \omega_1\right)e^{2\eta_1\frac{\omega_3}{2}}} = -\frac{\eta_1\omega_3}{i} + 2K\pi.$$

$$\frac{1}{i}\log\frac{\sigma\left(-\frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right)} = \pi + 2K'\pi.$$

K et K′ étant deux entiers (positifs, négatifs ou nuls), de sorte que

$$m = -\pi - \frac{\eta_1 \omega_3}{i} + 2(K - K')\pi.$$

Mais la valeur exacte de (K — K′) n'est pas évidente. Pour la déterminer plus aisément, transformons l'expression étudiée, en passant aux fonctions ϑ, par la formule

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}; \qquad \left(v = \frac{u}{2\omega_1}, \ \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}\right).$$

Il vient de suite

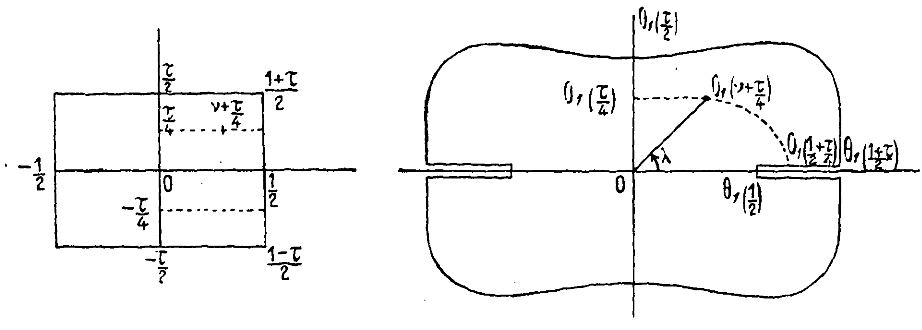
$$\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)} = \frac{\vartheta_1\left(v - \frac{\tau}{4}\right)}{\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{4}\right)} e^{-2\eta_1\omega_3 v}$$

et

$$I = \frac{1}{i}\log\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)} = \frac{1}{i}\log\frac{\vartheta_1\left(v - \frac{\tau}{4}\right)}{\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{4}\right)} - \frac{2\eta_1\omega_3}{i} v.$$

Mais on connaît la manière dont se correspondent univoquement, par la formule $Z = \vartheta_1(z)$, le rectangle fondamental du plan z et l'aire du plan Z indiquée sur la figure.

Fig. 4.



Lorsque u réel varie de o à ω_1, le point $v + \frac{\tau}{4}$ (qui correspond à $u + \frac{\omega_3}{2}$) varie de $\frac{\tau}{4}$ à $\frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}$, et $\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{4}\right)$ décrit dans le plan de la variable ϑ_1 la ligne simple indiquée en pointillé sur la figure, dans le premier quadrant. En sorte qu'en désignant par λ l'argument $\left(\text{compris entre zéro et } \frac{\pi}{2}\right)$ de $\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{i}\right)$ sur cette ligne, on a pour l'une des déterminations de I :

$$I = \frac{1}{i}(-2i\lambda - 2\eta_1\omega_3 v).$$

En conservant dans tout le calcul cette même détermination, comme les valeurs, initiale et finale, de λ sont $\frac{\pi}{2}$ et o, on voit avec évidence que l'on a

$$m = \frac{1}{i}\left(-2\eta_1\omega_3 \times \frac{1}{2} + 2i\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\eta_1\omega_3}{i}.$$

On conclut de là

$$\alpha = -2\omega_1 + \frac{2i\left(i\pi - \eta_1\omega_3 + 2\omega_1\zeta\frac{\omega_3}{2}\right)}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}}$$

et ensuite, en revenant à (28),

$$L = -U^2 l - i\beta\frac{U^2 p'\frac{\omega_3}{2}}{2\sqrt{e_1 - e_3}}\alpha.$$

D'ailleurs on a

$$p'\frac{\omega_3}{2} = -2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma^3}\right)_{\omega_3} = -2\sqrt{p - e_1}\sqrt{p - e_2}\sqrt{p - e_3}$$
$$= \pm 2i\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\left[\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}\right].$$

Mais on sait que $ip'u$ est positif pour $o < \frac{u}{i} < \frac{\omega_3}{i}$; donc, puisque $\sqrt{e_2 - e_3}$ est négatif,

$$p'\frac{\omega_3}{2} = 2i\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}). \tag{33}$$

On a vu [équation (5)] que $l = -2\beta\sqrt{e_2 - e_3}$; il vient donc, après quelques réductions élémentaires,

$$L = 2\beta U^2\sqrt{e_2 - e_3}\left[1 - \pi - i\eta_1\omega_3 + 2i\omega_1\zeta\frac{\omega_3}{2} - \omega_1(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3})\right]. \tag{34}$$

Calcul de r. — Il nous reste à calculer le résidu r, pour la fonction

$\Phi_1 \dfrac{dz}{dZ}$ et pour le pôle $Z_0 = q^{\frac{1}{2}}\left(u_0 = \dfrac{\omega_3}{2}\right)$. Cette fonction se présente comme une fonction de u, $\left[\Phi_1(u)\dfrac{dz}{du}\right]$, multipliée par $\dfrac{du}{dZ}$, ou $\dfrac{\omega_1}{i\pi Z}$. Nous allons d'abord évaluer $\Phi_1 \dfrac{dz}{du}$ au voisinage de u_0, en fonction de $h = u - \dfrac{\omega_3}{2}$. Ensuite nous passerons à Z au moyen de la formule

$$u - u_0 = \frac{\omega_1}{i\pi Z_0}(Z - Z_0) - \frac{\omega_1}{i\pi Z_0^2}(Z - Z_0)^2 + \ldots .$$

Préparons d'abord les calculs; observons que, par suite d'une remarque déjà employée, il est clair que l'on a

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\left|\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}\right|}, \qquad \left(\sqrt{\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\left|\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}\right|}$$

et par suite, après des calculs faciles, inutiles à reproduire,

$$(35)\qquad \begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma\sigma_2}}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} &= e^{-\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}, \\ \left(\sqrt{\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3}}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} &= e^{\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\left(\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma u\,\sigma_2 u}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\xi_{30} u}{\xi_{21} u}\right) &= \frac{\xi_{21}\xi'_{30} - \xi_{30}\xi'_{21}}{\xi_{21}^2} \\ &= \frac{\xi_{21}(-\xi_{20}\xi_{10}) - \xi_{30}(e_1 - e_2)\xi_{01}\xi_{31}}{\xi_{21}^2} = -\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u} - (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3^2 u}{\sigma_2^2 u}. \end{aligned}$$

Donc

$$(36)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{du}\left(\frac{\xi_{30} u}{\xi_{21} u}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} &= -\left(p\frac{\omega_3}{2} - e_1\right) - (e_1 - e_2)\frac{p\dfrac{\omega_3}{2} - e_3}{p\dfrac{\omega_3}{2} - e_2} \\ &= -\frac{\left(p\dfrac{\omega_3}{2} - e_2\right)^2 - (e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}{p\dfrac{\omega_3}{2} - e_2} \\ &= -\frac{(e_3 - e_2 + \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3})^2 - (e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}{e_3 - e_2 + \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}} \\ &= -2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}. \end{aligned}$$

Par un calcul semblable, on a

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma u \sigma_2 u}{\sigma_1 u \sigma_3 u}\right) = (e_1 - e_2)\frac{\sigma^2 u}{\sigma_1^2 u} + \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma_3^2 u}$$

et l'on trouve

(37) $$\frac{d}{du}\left(\frac{\zeta_{21} u}{\zeta_{30} u}\right)_{u=\frac{\omega_3}{2}} = 2\frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

ce qui, d'ailleurs, résulte aussi bien directement de (35) et (36).

On en conclut, au voisinage de u_0,

$$\sqrt{\frac{\sigma_1 u \sigma_3 u}{\sigma u \sigma_2 u}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}} + (u - u_0)\left[\frac{2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}}{2e^{-\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}}\right] + O(u - u_0)^2$$
$$= e^{-\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}}\sqrt{e_2 - e_3}\,(u - u_0) + \ldots.$$

On aura de même

$$\sqrt{\frac{\sigma u \sigma_2 u}{\sigma_1 u \sigma_3 u}} = e^{\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}}(e_1 - e_3)^{-\frac{1}{4}}\sqrt{e_2 - e_3}\,(u - u_0) + \ldots.$$

Il en résulte pour Φ_1 le développement suivant [*cf.* formule (26)] :

$$\Phi_1 = iU + iU\sqrt{e_2 - e_3}\,(u - u_0) + \ldots.$$

A titre de vérification, on retrouve bien la valeur iU correspondant à $u = \frac{\omega_3}{2}$ (point à l'infini).

On a ensuite

$$\frac{dz}{du} = -i\beta\frac{\wp' u\, \wp'\frac{\omega_3}{2}}{\left(\wp u - \wp\frac{\omega_3}{2}\right)^2}; \qquad \text{et, avec} \qquad u_0 = \frac{\omega_3}{2},$$

$$\wp' u = \wp' u_0 + (u - u_0)\wp'' u_0 + \ldots,$$
$$\wp u - \wp\frac{\omega_3}{2} = (u - u_0)\wp' u_0 + \frac{(u - u_0)^2}{2}\wp'' u_0 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{dz}{du} = -\frac{i\beta}{\wp' u_0 (u - u_0)^2}\left[\wp' u_0 + (u - u_0)\wp'' u_0 + \ldots\right]\left[1 - \frac{\wp'' u_0}{\wp' u_0}(u - u_0) + \ldots\right]$$
$$= -\frac{i\beta}{(u - u_0)^2}\left[1 + O(u - u_0)^2\right].$$

D'où facilement

$$\Phi_1 \frac{dz}{du} = \frac{\beta U}{(u-u_0)^2} + \frac{\beta U \sqrt{e_2-e_3}}{u-u_0} + C + O(u-u_0).$$

Maintenant on a

$$\frac{1}{u-u_0} = \frac{i\pi Z_0}{\omega_1 (Z-Z_0)}\left(1+\frac{Z-Z_0}{2Z_0}+\ldots\right),$$

$$\frac{1}{(u-u_0)^2} = -\frac{\pi^2 Z_0^2}{\omega_1^2 (Z-Z_0)^2}\left(1+\frac{Z-Z_0}{Z_0}+\ldots\right),$$

$$\frac{du}{dZ} = \frac{\omega_1}{i\pi Z} = \frac{\omega_1}{i\pi Z_0}\left(1-\frac{Z-Z_0}{Z_0}+\ldots\right),$$

et enfin

$$\Phi_1 \frac{dz}{dZ} = \left\{-\frac{\beta U \pi^2 Z_0^2}{\omega_1^2 (Z-Z_0)^2}\left[1+\frac{Z-Z_0}{Z_0}+\ldots\right] + \frac{\beta U\, i\pi Z_0 \sqrt{e_2-e_3}}{\omega_1 (Z-Z_0)}[1+\ldots]+\ldots\right\}$$
$$\times \frac{\omega_1}{i\pi Z_0}\left(1-\frac{Z-Z_0}{Z_0}+\ldots\right).$$

De sorte qu'après quelques réductions simples, on trouve le résidu

$$r = \beta U \sqrt{e_2-e_3}.$$

En reportant dans la formule (27) les valeurs de L et de r, il vient

$$\mathcal{R} = \rho\beta U^2 \sqrt{e_2-e_3}\left[-1+i\eta_1\omega_3 - 2i\omega_1\zeta\frac{\omega_3}{2} + \omega_1(\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3})\right].$$

Et comme la longueur de la lame est

$$l = -2\beta\sqrt{e_2-e_3},$$

on en conclut la formule définitive, qui fournit la valeur de la résistance de la lame, rapportée à l'unité de longueur de celle-ci

$$\frac{R}{l} = \frac{\rho U^2}{2}\left[1 - i\eta_1\omega_3 + 2i\omega_1\zeta\frac{\omega_3}{2} - \omega_1(\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3})\right].$$

Le problème proposé est ainsi entièrement résolu. Il est susceptible d'être étendu et généralisé de diverses manières, en utilisant des procédés analogues à ceux qui viennent d'être exposés, ainsi que cela sera développé ailleurs.