# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


JOSEPH PÉRÈS

**Sur la condition des travaux virtuels**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 7 (1928), p. 337-343.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__337_0>

# *Sur la condition des travaux virtuels;*

PAR JOSEPH PÉRÈS.

---

1. Le Traité de M. Paul Appell, qui synthétise si heureusement les divers principes dont peut dépendre l'exposé de la Mécanique rationnelle, a marqué sans doute un moment décisif du développement de cette science : celui où les principales théories atteignent leur forme définitive, la forme qui restera classique dans l'Enseignement.

Les progrès ainsi acquis rendaient possible un retour aux principes et aux axiomes, pour leur étude critique et pour préciser les bases logiques de la Mécanique. Ce fut l'objet d'importants travaux et il suffit de rappeler, en France, les noms de Poincaré et de M. Painlevé, de Delassus. La question reste à l'ordre du jour; on s'en convaincra en lisant le substantiel exposé sur les axiomes que donne M. G. Hamel dans le Tome V du *Handbuch der Physik* (1), esquisse d'une construction logique, où est envisagée l'indépendance et la compatibilité des axiomes et qui peut être rapprochée des travaux analogues consacrés à la Géométrie, vers la fin du siècle dernier.

Dans la présente Note nous n'envisageons qu'une question très particulière concernant la *méthode*, ou le *théorème du travail virtuel :* question d'équivalence entre deux procédés de mise en équation d'un problème de Dynamique ou de Statique. Le point de vue adopté nous amènera à proposer un léger complément (complément restrictif et qui se justifie d'ailleurs d'une autre façon), à la condition caractéris-

(1) Berlin, 1927; Springer, éd.

tique classique des liaisons sans frottement (*condition des travaux virtuels*).

**2**. Rappelons d'abord que, dans la démonstration la plus classique du *théorème du travail virtuel*, on utilise des raisonnements essentiellement différents suivant qu'il s'agit d'établir, d'abord que le théorème donne une condition *nécessaire* de l'équilibre, puisqu'il donne une condition *suffisante* (*cf.* le Traité de M. P. Appell).

Que la condition soit nécessaire, c'est ce qui est immédiat, après une analyse des divers types de liaisons sans frottement. Pour prouver que la condition est suffisante, on *cherche* une contradiction dans l'hypothèse d'après laquelle le système se mettrait en mouvement.

Cette dernière partie de la démonstration prête à diverses objections. Elle perd d'ailleurs toute signification lorsqu'il s'agit d'utiliser le théorème pour établir l'équation générale de la Dynamique des systèmes. Elle se rattache en fait à une question (détermination unique d'un mouvement, ou d'un équilibre, par les données initiales, positions et vitesses) qui est d'ordre plus analytique que mécanique et qu'il y a peut être intérêt à traiter à part.

**3**. Quelle que soit d'ailleurs l'opinion que l'on ait à ce sujet, on ne peut nier l'intérêt de la question d'*équivalence* suivante, que nous examinerons par la suite :

On peut, et c'est le procédé le plus élémentaire de mise en équation, écrire les équations du mouvement ou de l'équilibre en y faisant figurer, comme inconnues auxiliaires, les forces de liaison. Nous désignerons les équations ainsi formées comme *équations primitives* du problème.

On a ensuite à éliminer, entre ces équations primitives, les forces de liaison. La question est de savoir si, par *la méthode du travail virtuel* (et en se restreignant à certains types de liaisons) :

*a. On obtient des équations débarrassées des inconnues auxiliaires ;*
*b. On obtient toutes ces équations.*

Le système considéré étant sans frottement, les forces de liaison vérifient la condition suivante, dite *condition des travaux virtuels ;*

C. *La somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle pour tout déplacement virtuel du système, compatible avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t.*

Dans ces conditions l'énoncé précédent *a* est immédiat. Mais les démonstrations classiques du théorème du travail virtuel laissent vague la réciproque *b* bien qu'on n'émette généralement pas de doutes à son sujet. Or il est *impossible*, comme on le verra par les exemples donnés à la fin, de déduire *b* de la condition C. Il faut, pour obtenir l'équivalence complète entre la méthode élémentaire de mise en équation et la méthode des travaux virtuels, se limiter aux systèmes matériels, vérifiant une condition, plus restrictive que C, et que nous énoncerons :

C′. *Si on laisse aux forces de liaisons tout l'arbitraire dont elles sont* a priori *susceptibles*, leur travail virtuel disparaît identiquement pour les déplacements virtuels compatibles, *il ne disparaît identiquement que pour de tels déplacements virtuels* (1).

C′ étant admis, l'équivalence (énoncés *a* et *b*) résulte des deux remarques suivantes, qui donnent les raisons profondes du succès de l'artifice du travail virtuel.

I. Les forces de liaison figurent linéairement dans les équations primitives du problème.

D'où résulte que, pour leur élimination, on peut procéder uniquement par combinaison linéaire de ces équations, et qu'il faut chercher toutes les combinaisons linéaires distinctes et où les forces de liaison disparaissent.

II. Chacune de ces combinaisons linéaires peut s'interpréter comme correspondant à un déplacement virtuel, compatible ou non.

4. Pour bien préciser le raisonnement, limitons-nous au cas particulier d'un système de solides (bien que les remarques précédentes puissent trouver leur application dans d'autres cas).

---

(1) Nous soulignons dans C′ ce qui vient s'ajouter à la condition précédente C.

Le point de départ doit être les six équations du mouvement, ou de l'équilibre, d'un solide libre, équations qui s'interprètent comme exprimant que dans un déplacement infiniment petit quelconque de ce solide, les forces appliquées et les forces fictives d'inertie donnent un travail virtuel total nul.

Étant donné alors un système de solides soumis à des liaisons, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les paramètres qui fixent les positions des solides supposés libres. Les équations *primitives* s'obtiennent en envisageant chacun des solides comme libre et soumis aux forces, aussi bien données que de liaison. Soient

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n = 0 \tag{1}$$

ces équations; elles peuvent se condenser sous la forme

$$X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 + \ldots + X_n\,\delta x_n = 0, \tag{2}$$

où le premier membre est le travail virtuel total des forces données, des forces de liaison, des forces d'inertie. Ces équations doivent être compatibles par rapport aux inconnues auxiliaires (forces de liaison) qui y figurent au premier degré. En général (les liaisons pouvant être surabondantes), elles ne suffiront pas à déterminer complètement les inconnues auxiliaires. Mais il importe peu : toutes les équations du mouvement seront données par les conditions de compatibilité par rapport aux inconnues auxiliaires et l'on doit admettre que, dans le mouvement réel, les forces de liaison auront des valeurs prises parmi celles qui sont admissibles de par les équations primitives; c'est là, si l'on veut, un *postulat* fondamental. Il faut donc former toutes les combinaisons

$$X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2 + \ldots + X_n\lambda_n = 0,$$

où les forces de liaison disparaissent. Une telle combinaison correspond à un déplacement virtuel pour lequel les $\delta x$ sont proportionnels aux $\lambda$. Enfin, d'après C′, on aura toutes les combinaisons cherchées en écrivant (2) pour tous les déplacements virtuels compatibles ([1]).

([1]) Nous avons supposé les liaisons bilatérales; mais cela n'empêche point une certaine difficulté qu'il faut signaler. Dans une liaison, *bilatérale*, mais obtenue par contact entre deux solides convenablement entaillés, le sens d'une réaction élémen-

5. Il semble que le raisonnement précédent, qui établit, sous la condition C′, l'équivalence entre la méthode de mise en équation par le travail virtuel, et celle qui consiste à introduire les forces de liaison puis à profiter du postulat rappelé plus haut, donne la meilleure justification du *théorème du travail virtuel*, et une justification pour laquelle on n'a pas besoin de distinguer entre les deux cas de la Statique et de la Dynamique.

Quelques remarques sur la condition C′ ne seront pas inutiles. La plupart des liaisons sans frottement que l'on est conduit à envisager vérifient, non seulement C, mais encore C′. Mais il est instructif de donner quelques exemples de liaisons vérifiant C à l'exclusion de C′ afin de bien se rendre compte de l'utilité de la condition complétée C′.

Soit d'abord un point assujetti à se déplacer sans frottement sur une courbe. Avec les réalisations habituelles d'une telle liaison, la réaction est *a priori* indéterminée dans le plan normal. La condition C′ est alors vérifiée : le seul déplacement virtuel annulant identiquement le travail de la réaction est effectué suivant la courbe. Mais on peut concevoir une réalisation effective d'une telle liaison dans laquelle l'orientation de la réaction dans le plan normal serait imposée : elle serait, par exemple, toujours portée par la normale principale ; C serait alors satisfaite, mais non C′.

Voici un second exemple plus naturel. Soit un disque (D) qui peut tourner et glisser sans frottement autour d'un axe qui reste fixe. L'axe fixe étant réalisé matériellement par un cylindre circulaire fixe (A), on peut concevoir la réalisation effective de la liaison du disque par l'un des deux procédés suivants :

---

taire agissant en une petite aire de contact est *bien déterminé*. Les réactions inconnues vérifient donc, dans ce cas, certaines conditions *d'inégalité* dont il n'a pas été tenu compte dans le texte et qui viennent un peu limiter leur arbitraire. Le plus souvent *l'arbitraire des réactions sera suffisant pour que les restrictions d'inégalité ainsi introduites n'amènent aucune impossibilité* et les seules conditions de compatibilité seront celles que nous donne le théorème du travail virtuel. Mais il n'en sera pas toujours ainsi (un exemple est celui d'une règle posée sur un plan et guidée par trois chevilles fixées au plan, deux d'entre elles A et B touchant un bord de la règle, la troisième C étant au contact de l'autre bord et vis-à-vis de A). Pour écarter de tels cas on pourra apporter à la condition (C′) un léger complément, d'ailleurs évident et sur lequel nous aurons l'occasion de revenir.

1° Un cylindre creux, soudé au disque et ayant pour rayon intérieur celui de (A), est engagé dans (A);

2° Le disque est simplement percé d'un trou, de même rayon que (A), et dont les bords sont arrondis, de sorte que le contact ait lieu seulement suivant une section droite de (A).

Au point de vue cinématique, les réalisations 1° et 2° sont exactement équivalentes. Mais, tandis que 1° vérifie C', 2° vérifiera seulement C. Les réactions suivant le cercle de contact, normales à (A), donnent en effet un moment nul au centre O de ce cercle, de sorte que leur travail virtuel disparaît pour toute rotation infiniment petite autour du point O.

Dans la réalisation 2°, l'élimination des liaisons entre les équations primitives donnera, non seulement les équations classiques du mouvement [quantité de mouvement projetée suivant l'axe de (A), moment cinétique par rapport à cet axe], mais encore deux autres conditions. Si le disque est homogène ces conditions expriment que le moment des forces données au point O est porté par l'axe de (A) [1]. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée il y a une impossibilité dont la raison est bien claire (les réactions prennent des valeurs infinies).

Les difficultés de ce genre ont été déjà signalées [2]. Si nous y revenons ici, c'est pour noter d'abord que le théorème du travail virtuel, pris comme base *a priori* de la Mécanique, les ignore. Or il paraît que des liaisons réalisées comme la précédente 2° sont un peu en marge

---

(1) Si le disque a son centre de gravité en O, l'ellipsoïde d'inertie correspondant étant

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 2\delta yz - 2\varepsilon zx - 2\zeta xy = 1$$

par rapport à des axes liés à (D) [$Oz$ suivant l'axe de (A)], les deux conditions complémentaires seront

$$-\varepsilon\theta'' + \delta\theta'^2 = L, \qquad -\delta\theta'' - \varepsilon\theta'^2 = M,$$

$\theta$ étant l'angle de rotation du disque et L, M les composantes sur $Ox$ et $Oy$ du moment des forces données.

(2) *Cf.*, par exemple, TRESSE, *Sur l'équilibre des corps solides* (*Nouvelles Annales*, 1905. Dans l'important article de M. LECORNU, publié dans le présent volume du *Journal* (page 159) de tels types de liaisons sont étudiés du point de vue de la Mécanique physique.

de la Mécanique des solides parfaits : nous les écartons par la condition C′, substituée à C dans la définition des liaisons parfaites.

On pourrait objecter que 2° est un cas limite, pratiquement irréalisable. Mais on peut en dire autant de toute liaison parfaite. Il y a pourtant une différence essentielle entre deux liaisons concrètes approchant respectivement de 1° ou de 2° : dans le premier cas le passage à la limite a un sens et les résultats obtenus dans le cas théorique limite ont leur valeur concrète; dans le second cas il semble impossible de faire abstraction, même à la limite, des imperfections dans la réalisation et des propriétés d'élasticité des solides considérés.

Les diverses réalisations parfaites d'une liaison, au moyen de systèmes auxiliaires de masse nulle sont, comme on le sait, dynamiquement équivalentes. Si l'on se borne à la condition caractéristique C on devrait donc considérer comme équivalentes des réalisations du type 1° ou du type 2°. Il nous semble que ce soit méconnaître la réalité, plus qu'il n'est permis de le faire (même en des questions théoriques) et c'est là une raison assez forte de préférer la condition complétée suivant l'énoncé C′.