

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. GALBRUN

De la propagation du son dans les fluides

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 7 (1928), p. 299-318.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7_299_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

De la propagation du son dans les fluides ;

PAR H. GALBRUN.

1. Dans un ouvrage intitulé *L'acoustique des canons et des projectiles* (1). M. Esclangon a exposé les importants travaux qu'il a menés à bien sur ce sujet pendant la dernière guerre. On y trouve notamment une théorie de la propagation des ondes sonores dans l'atmosphère terrestre, où il a tenu compte des effets du vent et des variations de la température avec l'altitude. En l'étudiant, il m'a semblé qu'il ne serait pas sans intérêt de la reprendre au moyen d'une méthode différente de celle qu'avait employée son auteur, afin de préciser les résultats auxquels il a abouti et en obtenir de nouveaux.

Pour trouver les positions successives de la surface du front de l'onde sonore, M. Esclangon considère cette surface S à l'instant t ; il en déduit la surface S_1 , sur laquelle, par suite du mouvement propre du milieu, sont situés à l'instant $t + dt$ immédiatement suivant les points matériels qui, à l'instant t , étaient situés sur la surface S ; il définit alors la surface du front de l'onde S' à l'instant $t + dt$ comme l'enveloppe des sphères dont les centres sont les points de S_1 , et dont le rayon est égal à cdt , la lettre c désignant la vitesse propre de propagation du son au centre considéré sur la surface S_1 . C'est là une application du principe d'Huyghens, ou, plus exactement, de l'une des propositions connues sous ce nom.

Or cette forme du principe d'Huyghens ne trouve sa justification en

(1) Ernest ESCLANGON, *L'acoustique des canons et des projectiles* (Imprimerie Nationale, 1925).

quelque sorte qu'*a posteriori*, dans les propriétés des équations aux dérivées partielles régissant le phénomène vibratoire; il n'est donc pas inutile de contrôler, au moyen de ces équations mêmes, les conclusions de toute application nouvelle qui en est faite. C'est à quoi l'on parvient en considérant la surface de front d'onde comme le siège d'une discontinuité dans le mouvement du fluide. Les conséquences de cette définition de la surface de front d'onde, qui a été imaginée et appliquée par Hugoniot, ont été développées systématiquement par M. Hadamard dans ses *Leçons sur la propagation des ondes* ⁽¹⁾. Les résultats que nous exposerons ici découlent donc, pour la plupart, de l'application des méthodes générales de M. Hadamard au cas particulier d'un fluide dont l'état avant le passage de l'onde, ne dépend que de l'altitude z , tandis que ses différents éléments se déplacent avec une vitesse horizontale également fonction de cette seule variable.

2. Supposons tout d'abord que le fluide dans lequel se propage l'onde est un gaz; soient u, v, w les composantes de la vitesse de l'élément de ce gaz qui, à l'instant t , est au point $M(x, y, z)$; $\gamma_{(x)}, \gamma_{(y)}, \gamma_{(z)}$ celles de son accélération, p et ρ sa pression et sa masse spécifique, X, Y, Z les composantes de la force donnée. Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent

$$(1) \quad \gamma_{(x)} = X - \frac{\rho_x}{\rho}, \quad \gamma_{(y)} = Y - \frac{\rho_y}{\rho}, \quad \gamma_{(z)} = Z - \frac{\rho_z}{\rho},$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0,$$

en désignant les dérivées partielles de toute fonction f par cette même lettre affectée en indice de la variable de dérivation, et par le symbole $\frac{\partial f}{\partial t}$ la dérivée de cette même fonction prise par rapport au temps en suivant l'élément du gaz dans son mouvement.

La surface d'onde S est représentée à l'instant t par l'équation

$$(3) \quad \Pi(x, y, z, t) = 0.$$

⁽¹⁾ J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (Hermann, Paris, 1903).

Cette surface divise le gaz en deux régions (1) et (2); les éléments situés dans l'une (1) n'ont pas encore été atteints par l'onde à l'instant t ; la pression p et la masse spécifique ρ , dans cette région, ne dépendent que de l'altitude z ; il en est de même des composantes u, v de la vitesse, dont la composante w suivant Oz est nulle; dans cette région (1) $\gamma_{(x)}, \gamma_{(y)}, \gamma_{(z)}, \rho_x, \rho_y$ sont donc nuls; par suite il en est de même de X et Y et les équations (1) se réduisent à

$$(4) \quad z - \frac{Pz}{\rho} = 0.$$

Il convient d'ajouter à celle-ci l'équation caractéristique de fluide, qui pour un gaz parfait s'écrit

$$(5) \quad \frac{P}{\rho} = a(1 + \alpha\tau);$$

τ désignant la température, fonction de la seule variable z . Les fonctions u, v, p, ρ, τ sont des données du problème de la propagation de l'onde dans la région (1).

On considère alors la surface S comme le siège d'une discontinuité du second ordre dans le mouvement du gaz; il faut entendre par là que, quand le point $M(x, y, z)$ traverse la surface S , les fonctions u, v, w, p, ρ restent continues, tandis que leurs dérivées premières éprouvent les variations brusques

$$(6) \quad [u_x]_{11}^{(2)} = u_x^{(2)} - u_x^{(1)}, \quad [u_y]_{11}^{(2)} = u_y^{(2)} - u_y^{(1)}, \quad \dots$$

Il est aisé d'apercevoir que ces discontinuités satisfont aux relations

$$(7) \quad \begin{cases} [u_x]_{11}^{(2)} = l\alpha, & [v_x]_{11}^{(2)} = m\alpha, & [w_x]_{11}^{(2)} = n\alpha, & [\rho_x]_{11}^{(2)} = k\alpha, & [p_x]_{11}^{(2)} = h\alpha, \\ [u_y]_{11}^{(2)} = l\beta, & [v_y]_{11}^{(2)} = m\beta, & [w_y]_{11}^{(2)} = n\beta, & [\rho_y]_{11}^{(2)} = k\beta, & [p_y]_{11}^{(2)} = h\beta, \\ [u_z]_{11}^{(2)} = l\gamma, & [v_z]_{11}^{(2)} = m\gamma, & [w_z]_{11}^{(2)} = n\gamma, & [\rho_z]_{11}^{(2)} = k\gamma, & [p_z]_{11}^{(2)} = h\gamma, \\ [u_t]_{11}^{(2)} = -l\omega, & [v_t]_{11}^{(2)} = -m\omega, & [w_t]_{11}^{(2)} = -n\omega, & [\rho_t]_{11}^{(2)} = -k\omega, & [p_t]_{11}^{(2)} = -h\omega, \end{cases}$$

dans lesquelles α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la direction de la normale à S qui s'enfonce dans la région (1), non encore atteinte par l'onde à l'instant t , tandis que

$$(8) \quad \omega = \frac{-\Pi_t}{\alpha\Pi_x + \beta\Pi_y + \gamma\Pi_z}$$

représente la vitesse apparente de propagation de l'onde S, comptée suivant cette même direction.

Des équations (1) résultent alors les relations

$$(9) \quad lP = \frac{\alpha h}{\rho}, \quad mP = \frac{\beta h}{\rho}, \quad nP = \frac{\gamma h}{\rho},$$

dans lesquelles

$$(10) \quad P = \omega - \alpha u - \beta v - \gamma w$$

représente la vitesse propre de propagation de l'onde S, c'est-à-dire celle qui apparaîtrait à un observateur qui serait entraîné avec la vitesse u, v, w de l'élément du fluide au point considéré de la surface S; de la définition de la direction α, β, γ résulte que cette vitesse P est essentiellement positive.

Les équations (9) entraînent la relation

$$(11) \quad P(\alpha l + \beta m + \gamma n) = \frac{h}{\rho}.$$

D'autre part, l'équation de continuité (2) donne

$$(12) \quad -hP + \rho(\alpha l + \beta m + \gamma n) = 0.$$

Si l'on exclut le cas

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \quad P = 0,$$

qui correspond à une onde transversale stationnaire, des relations (11) et (12) résulte l'égalité

$$(13) \quad P^2 = \frac{h}{k}.$$

On obtient une autre valeur du rapport $\frac{h}{k}$ en admettant que le mouvement pris par le gaz à partir du passage de la discontinuité est adiabatique; la pression p et la masse spécifique ρ d'un élément du gaz, au cours des transformations subies par cet élément, satisfont alors constamment à la relation

$$(14) \quad \frac{p}{\rho^\varpi} = \text{const.},$$

dans laquelle ϖ désigne le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous

pression constante à sa chaleur spécifique sous volume constant. En dérivant cette relation par rapport au temps, en suivant l'élément dans son mouvement, il vient

$$(15) \quad \frac{\partial p}{\partial t} - \omega \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Cette relation est vérifiée dans la région (2) par hypothèse; elle l'est également dans la région (1), parce que les fonctions p, ρ, u, v n'y dépendent que de la variable z ; tandis que la fonction ω y reste toujours nulle; on a donc

$$(16) \quad \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right]_{(1)} - \omega \frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]_{(1)} = 0,$$

d'où

$$(17) \quad P[h - c^2 k] = 0$$

en posant

$$(18) \quad c^2 = \omega \frac{p}{\rho}.$$

Si l'on exclut le cas de l'onde transversale stationnaire, en rapprochant les égalités (13) et (17) on constate que

$$(19) \quad P - c = \omega - \alpha u - \beta v - c = 0$$

puisque ω est nul.

Mais

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\varepsilon \Pi_x}{K_\pi}, \quad \beta = \frac{\varepsilon \Pi_y}{K_\pi}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon \Pi_z}{K_\pi}, \quad \omega = \frac{-\varepsilon \Pi_t}{K_\pi}, \\ K_\pi = \sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2} \quad (\varepsilon = \pm 1). \end{array} \right.$$

La fonction $\Pi(x, y, z, t)$ satisfait donc à l'équation aux dérivées partielles

$$(21) \quad \Pi_t + u \Pi_x + v \Pi_y + \varepsilon c K_\pi = 0$$

dans laquelle u, v, c sont des fonctions données de la variable z ; la fonction c s'obtient notamment par la relation (18), où l'on reconnaît la

formule bien connue donnant la vitesse de propagation du son dans un gaz.

En posant

$$(22) \quad \Pi_x = \varepsilon K_\pi \cos \mathfrak{S} \cos \psi, \quad \Pi_y = \varepsilon K_\pi \cos \mathfrak{S} \sin \psi, \quad \Pi_z = \varepsilon K_\pi \sin \mathfrak{S},$$

relations dans lesquelles \mathfrak{S} et ψ désignent l'inclinaison sur le plan horizontal et l'azimut de la direction de la normale à la surface d'onde dirigée vers la région (1), les équations différentielles des courbes caractéristiques de l'équation (21) deviennent

$$(23) \quad \frac{dx}{u + c \cos \mathfrak{S} \cos \psi} = \frac{dy}{v + c \cos \mathfrak{S} \sin \psi} = \frac{dz}{c \sin \mathfrak{S}} = \frac{dt}{1} = \frac{d\Pi}{0} = \frac{d\psi}{0} = \frac{d\Pi_t}{0} \\ = \frac{-dK_\pi}{K_\pi [c_z + \cos \mathfrak{S} U_z] \sin \mathfrak{S}} = \frac{d\mathfrak{S}}{-\cos \mathfrak{S} [c_z + U_z \cos \mathfrak{S}]},$$

avec

$$(24) \quad U_z = u_z \cos \psi + v_z \sin \psi.$$

Elles admettent les intégrales premières

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi = \Pi^0, \quad \Pi_t = \Pi_t^0, \quad \psi = \psi_0, \quad K_\pi \cos \mathfrak{S} = K_\pi^0 \cos \mathfrak{S}_0, \\ \frac{c}{\cos \mathfrak{S}} + U = \frac{c_0}{\cos \mathfrak{S}_0} + U_0 = m_0, \end{array} \right.$$

en posant

$$U = u \cos \psi_0 + v \sin \psi_0, \quad U_0 = u_0 \cos \psi_0 + v_0 \sin \psi_0,$$

et en désignant la valeur prise par toute fonction f au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, origine de la courbe caractéristique et au temps t_0 , auquel la surface S passe en ce point, par cette même lettre affectée de l'indice ou de l'exposant 0.

La dernière relation (25) permet de calculer \mathfrak{S} en fonction de z , tout le long d'une caractéristique

$$(27) \quad \cos \mathfrak{S} = \frac{c}{m_0 - U}.$$

Les coordonnées x, y , d'un point quelconque M de cette caractéristique et le temps t auquel il est atteint par la surface S , s'obtiennent

ensuite par des quadratures (1)

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{z_0}^z \frac{c \cos \vartheta \cos \psi_0 + u}{c \sin \vartheta} d\sigma, \\ y &= y_0 + \int_{z_0}^z \frac{c \cos \vartheta \sin \psi_0 + v}{c \sin \vartheta} d\sigma, \\ t &= t_0 + \int_{z_0}^z \frac{d\sigma}{c \sin \vartheta}. \end{aligned} \right.$$

On remarque que le long d'une caractéristique l'azimut de la normale à la surface d'onde S reste fixe. Ces courbes caractéristiques ne sont autres que les rayons; on retrouve ainsi le résultat de M. Esclangon.

3. Mais les méthodes de M. Hadamard permettent d'aller plus loin; elles donnent le moyen de déterminer la variation de la grandeur de la discontinuité le long d'un rayon.

On remarque tout d'abord que les quantités l, m, n, h, k dont dépend la discontinuité s'expriment en fonction de l'une d'elles h . Si l'on cherche à calculer les valeurs des dérivées secondes des fonctions u, v, w, p, φ sur la surface d'onde, comme si l'on se proposait de résoudre le problème de Cauchy sur cette surface pour les équations aux dérivées partielles du mouvement du gaz, on aboutit à former une équation différentielle permettant de calculer les valeurs de h tout le long d'un rayon, dès que l'on connaît la valeur de cette fonction en un point de ce rayon.

Toutefois dans le cas actuel, il est plus commode d'atteindre ce même résultat en partant de l'équation obtenue par dérivation de l'équation (15) par rapport au temps en suivant l'élément du gaz dans son mouvement. Si l'équation de la surface S a été mise sous la forme

$$(29) \quad t = \varphi(x, y, z),$$

et si l'on désigne par h' la discontinuité

$$(30) \quad [p_t]_t^+ = h' = -h\omega,$$

(1) Pour éviter toute confusion dans la suite des calculs, nous désignons la variable d'intégration par la lettre σ et non comme on le fait généralement par la lettre z .

on trouve ainsi que la fonction h' satisfait à l'équation

$$(31) \quad 2 \frac{dh'}{dx} [u H_\varphi + v^2 \varphi_x] + 2 \frac{dh'}{dy} [v H_\varphi + v^2 \varphi_y] + 2 \frac{dh'}{dz} v^2 \varphi_z \\ - h' \left[\Lambda + \frac{v^2}{\rho} \varphi_z \rho_z - \frac{2v^2 \varphi_z}{H_\varphi} (u_z \varphi_x + v_z \varphi_y) \right] - K_\varphi^2 \frac{(\varpi + 1) h'^2}{\rho} = 0,$$

dans laquelle

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_\varphi = 1 - u \varphi_x - v \varphi_y, \quad K_\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2, \\ \Lambda = u^2 \varphi_{xx} + 2uv \varphi_{xy} + v^2 \varphi_{yy} - v^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}). \end{array} \right.$$

Nous verrons plus loin comment cette équation (31) se transforme en une équation de Bernoulli, donnant les valeurs de h' tout le long d'un rayon.

4. Dans ce qui précède il n'a été fait aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur des déplacements subis par les éléments du gaz, dans le mouvement qu'ils prennent après le passage de la surface de discontinuité; or il est intéressant d'étudier plus particulièrement le cas où ces déplacements restent petits. L'introduction de cette hypothèse permet d'étendre la méthode, d'une part à tout fluide qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un gaz, d'autre part aux discontinuités du premier ordre portant sur la vitesse, la pression et la masse spécifique du fluide, c'est-à-dire correspondant à une onde de choc.

On commence par définir un état initial du fluide; dans cet état la masse spécifique ρ , la pression p , la température τ des éléments du fluide ne dépendent que de l'altitude z ; de plus ces éléments sont en équilibre ou sont animés d'une vitesse horizontale ne dépendant que de cette même variable z ; la définition de l'état initial n'est donc autre que celle adoptée plus haut pour l'état du gaz dans la région (1).

Soient alors x, y, z les coordonnées du point M où se trouverait un certain élément du fluide à l'instant t dans l'état initial, si le petit mouvement n'existait pas, et x', y', z' les coordonnées du point M' où ce même élément se trouve en réalité à ce même instant, du fait du petit mouvement; on pose

$$(33) \quad x' = x + \xi(x, y, z, t), \quad y' = y + \eta(x, y, z, t), \quad z' = z + \zeta(x, y, z, t),$$

ξ, η, ζ désignant les composantes du déplacement de l'élément dû au

petit mouvement. Si l'on suppose que les dérivées des fonctions ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées d'espace x, y, z peuvent être considérées comme très petites par rapport à l'unité et si l'on néglige leurs carrés et leurs produits, on constate que les équations du petit mouvement s'écrivent

$$(34) \quad \begin{cases} \gamma_{xx} = c^2 \Theta_{xx} + \frac{\rho_z}{\rho} \zeta_{xx}, \\ \gamma_{yy} = c^2 \Theta_{yy} + \frac{\rho_z}{\rho} \zeta_{yy}, \\ \gamma_{zz} = c^2 \Theta_{zz} + \frac{\sigma z}{\rho} \Theta - \frac{\rho_z}{\rho} (\xi_z + \eta_y), \end{cases}$$

en posant

$$\Theta = \xi_{xx} + \eta_{yy} + \zeta_{zz}, \quad c^2 = \frac{\sigma z}{\rho},$$

z désignant le coefficient d'élasticité du fluide qui, dans le cas d'un gaz, n'est autre que p , et σ le rapport des chaleurs spécifiques, qui dans le cas d'un liquide est toujours voisin de l'unité. Enfin les équations (34) ne sont valables que si le déplacement ξ, η, ζ reste constamment assez petit pour que les variations éprouvées de son fait par la force donnée X, Y, Z appliquée à l'élément du fluide restent négligeables.

Comme dans l'état initial les éléments du fluide peuvent être animés de la vitesse horizontale u, v , les coordonnées x, y, z de l'élément qui à l'instant t est en M sont des fonctions du temps :

$$(35) \quad x = x_0 + u(z)(t - t_0), \quad y = y_0 + v(z)(t - t_0), \quad z = z_0,$$

d'où

$$(36) \quad \begin{cases} \gamma_{xx} = \frac{d^2 x'}{dt^2} = \xi_{xx} + 2u\xi_{xt} + 2v\xi_{yt} + u^2\xi_{xx} + 2uv\xi_{xy} + v^2\xi_{yy}, \\ \gamma_{yy} = \frac{d^2 y'}{dt^2} = \eta_{yy} + 2u\eta_{xt} + 2v\eta_{yt} + u^2\eta_{xx} + 2uv\eta_{xy} + v^2\eta_{yy}, \\ \gamma_{zz} = \frac{d^2 z'}{dt^2} = \zeta_{zz} + 2u\zeta_{xt} + 2v\zeta_{yt} + u^2\zeta_{xx} + 2uv\zeta_{xy} + v^2\zeta_{yy}. \end{cases}$$

La variation de pression Δp et la variation de masse spécifique $\Delta \rho$ résultant du petit mouvement sont

$$(37) \quad \Delta p = -\sigma x \Theta, \quad \Delta \rho = -\rho \Theta.$$

Soit alors une surface S définie par l'équation

$$\Pi(x, y, z, t) = 0.$$

Elle est le siège d'une discontinuité du premier ordre, si les dérivées premières des fonctions ξ , η , ζ éprouvent une variation brusque quand le point M la traverse; on démontre que la variation de ces dérivées est de la forme

$$(38) \quad \begin{cases} [\xi_x]_{\pm}^{(2)} = l\alpha, & [\eta_x]_{\pm}^{(2)} = m\alpha, & [\zeta_x]_{\pm}^{(2)} = n\alpha, \\ [\xi_y]_{\pm}^{(2)} = l\beta, & [\eta_y]_{\pm}^{(2)} = m\beta, & [\zeta_y]_{\pm}^{(2)} = n\beta, \\ [\xi_z]_{\pm}^{(2)} = l\gamma, & [\eta_z]_{\pm}^{(2)} = m\gamma, & [\zeta_z]_{\pm}^{(2)} = n\gamma, \\ [\xi_t]_{\pm}^{(2)} = -l\omega, & [\eta_t]_{\pm}^{(2)} = -m\omega, & [\zeta_t]_{\pm}^{(2)} = -n\omega. \end{cases}$$

α , β , γ désignant toujours les cosinus directeurs de la normale à S qui s'enfonce dans la région (1) non encore atteinte par l'onde et ω sa vitesse de propagation apparente. On démontre que les quantités l , m , n satisfont aux relations

$$(39) \quad \begin{cases} l P^2 = \alpha c^2 (\alpha l + \beta m + \gamma n) \\ m P^2 = \beta c^2 (\alpha l + \beta m + \gamma n) \\ n P^2 = \gamma c^2 (\alpha l + \beta m + \gamma n) \end{cases} \quad P = \omega - \alpha u - \beta v; \quad c^2 = \frac{\omega z}{\rho}$$

en partant de la théorie des percussions.

De ces équations on déduit la relation

$$(40) \quad P - c = 0,$$

et l'on constate ainsi que la fonction Π doit encore satisfaire à l'équation aux dérivées partielles (22).

La grandeur de la discontinuité est déterminée par les quantités l , m , n et les quantités h et k :

$$(41) \quad \begin{cases} [\Delta p]_{\pm}^{(2)} = -\omega z (\alpha l + \beta m + \gamma n) = h, \\ [\Delta \rho]_{\pm}^{(2)} = -\rho (\alpha l + \beta m + \gamma n) = k. \end{cases}$$

Ces cinq quantités s'expriment en fonction de l'une d'elles; d'ailleurs d'après (39), l , m , n sont proportionnels à α , β , γ et si l'équation de la surface S est mise sous la forme (29) résolue par rapport à t , on peut écrire

$$(42) \quad [\xi_t]_{\pm}^{(2)} = l' \varphi_x, \quad [\eta_t]_{\pm}^{(2)} = m' \varphi_y, \quad [\zeta_t]_{\pm}^{(2)} = n' \varphi_z,$$

la grandeur de la discontinuité dépendant de la seule fonction l' . En appliquant aux équations (36) la méthode employée dans le problème de Cauchy relatif à ces équations, pour calculer les dérivées secondes des fonctions ξ , η , ζ sur la surface S , on trouve que la fonction l' satisfait à l'équation

$$(43) \quad 2 \frac{dl'}{dx} [u \Pi_\varphi + c^2 \varphi_x] + 2 \frac{dl'}{dy} [v \Pi_\varphi + c^2 \varphi_y] + 2 \frac{dl'}{dz} c^2 \varphi_z \\ - l' \left[\Lambda + 2 \frac{\Pi_\varphi}{K_\varphi^2} \varphi_z (u_z \varphi_x + v_z \varphi_y) - \frac{c^2}{\rho} \varphi_z \rho_z \right] = 0,$$

dans laquelle

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_\varphi = 1 - u \varphi_x - v \varphi_y, \quad K_\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2, \\ \Lambda = u^2 \varphi_{xx} + 2uv \varphi_{xy} + v^2 \varphi_{yy} - c^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}). \end{array} \right.$$

En introduisant dans l'équation (43) les relations (28) définissant les rayons, on la transforme en une équation différentielle linéaire, permettant de calculer l' sur tout le rayon en fonction de sa valeur en un point de ce rayon.

Ces mêmes résultats s'étendent à une surface S , siège d'une discontinuité du second ordre; la fonction $\Pi(x, y, z, t)$ qui, égalée à zéro, représente une telle surface satisfait à l'équation aux dérivées partielles (22), tandis que la grandeur de la discontinuité dépend d'une fonction l' satisfaisant à l'équation (43).

§. Soit le rayon correspondant à l'inclinaison initiale \mathfrak{z}_0 , à l'azimut initial ψ_0 et issu du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$; les coordonnées x, y du point M de ce rayon qui est atteint par l'onde au temps t sont

$$(45) \quad x = x_0 + \int_{z_0}^z \frac{c \cos \mathfrak{z} \cos \psi_0 + u}{c \sin \mathfrak{z}} d\sigma, \quad y = y_0 + \int_{z_0}^z \frac{c \cos \mathfrak{z} \sin \psi_0 + v}{c \sin \mathfrak{z}} d\sigma,$$

avec

$$(46) \quad t = t_0 + \int_{z_0}^z \frac{d\sigma}{c \sin \mathfrak{z}};$$

la fonction \mathfrak{z} de la variable z (ou σ) étant définie par l'égalité

$$(47) \quad \cos \mathfrak{z} = \frac{c}{m_0 - U}, \quad m_0 = \frac{c_0}{\cos \mathfrak{z}_0} + U_0,$$

d'où

$$(48) \quad \sin \mathfrak{S} = \pm \frac{\sqrt{(m_0 - U - c)(m_0 - U + c)}}{m_0 - U}.$$

Pour étudier plus commodément la forme des rayons issus du point M_0 , on y transporte l'origine des coordonnées; les coordonnées X, Y du point M dans le trièdre $OXYz$ formé par le plan horizontal passant par M_0 et les plans verticaux d'azimut $\psi_0, \psi_0 + \frac{\pi}{2}$ sont

$$(49) \quad X = \int_0^z \frac{1}{c \sin \mathfrak{S}} [c \cos \mathfrak{S} + U] d\sigma, \quad Y = \int_0^z \frac{V}{c \sin \mathfrak{S}} d\sigma$$

avec

$$(50) \quad V = -u \sin \psi_0 + v \cos \psi_0.$$

Dans tous les cas de la pratique, la vitesse c est d'un ordre de grandeur supérieur à celui de la vitesse U ; il en résulte que $m_0 - U + c$ ne peut s'annuler. Pour la même raison, on constate que la quantité $c \cos \mathfrak{S} + U$ reste sûrement positive, sauf peut-être pour les rayons dont l'inclinaison initiale \mathfrak{S}_0 est très voisine de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

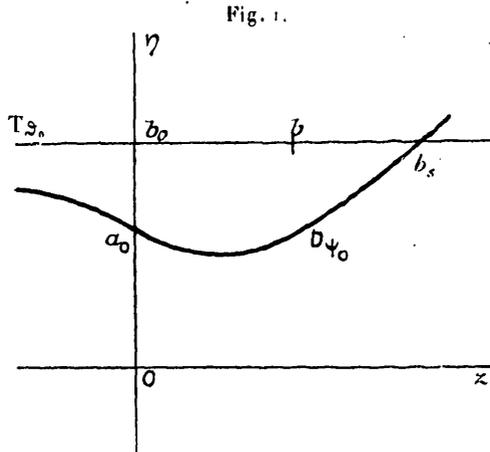
Faisons alors varier l'inclinaison \mathfrak{S}_0 tandis que l'azimut ψ_0 reste fixe; on construit dans un plan auxiliaire rapporté aux axes Oz, Oy la courbe D_{ψ_0} ayant pour équation

$$(51) \quad r = c + U$$

et la droite $T_{\mathfrak{S}_0}$ parallèle à l'axe Oz passant par le point b_0 de l'axe $O\eta$ dont l'ordonnée est m_0 . La courbe D_{ψ_0} coupe ce même axe au point a_0 . Comme si grand que soit z les fonctions c et U restent finies, la courbe D_{ψ_0} est tout entière comprise entre deux parallèles à Oz situées à distance finie de cet axe. Quand \mathfrak{S}_0 varie à partir de zéro en croissant par valeurs positives, ou en décroissant par valeurs négatives, le point b_0 part du point a_0 , pour décrire la portion de $O\eta$ située au-dessus de a_0 ; d'ailleurs à tout point b_0 de cette portion de $O\eta$, correspondent deux valeurs de \mathfrak{S}_0 de même module et de signes opposés.

A la limite supérieure z des intégrales (46) et (49) correspond un point b de $T_{\mathfrak{S}_0}$ ayant pour abscisse cette valeur de z ; si \mathfrak{S}_0 est positif, il y a lieu de prendre tout d'abord le signe + devant le radical figurant

dans l'expression de $\sin \mathfrak{S}$; la valeur de z commence par croître quand le temps croît; si \mathfrak{S}_0 est négatif, il y a lieu au contraire de prendre le signe — devant ce même radical et la valeur de z commence par



décroître quand le temps croît. En étudiant la correspondance entre le déplacement du point M décrivant le rayon et celui du point b sur la droite $T_{\mathfrak{S}_0}$, on aboutit à distinguer plusieurs cas.

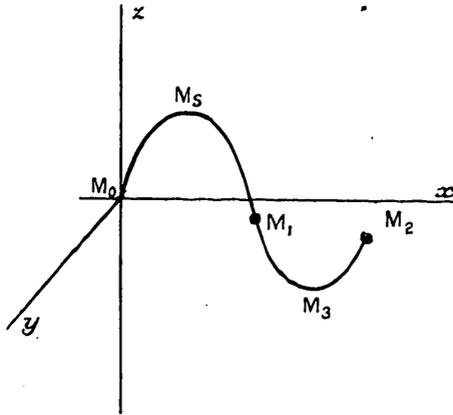
1° La droite $T_{\mathfrak{S}_0}$ ne rencontre pas la courbe D_{ψ_0} ; l'altitude z du point M qui parcourt le rayon ne cesse de croître, si \mathfrak{S}_0 est positif, ou de décroître, si \mathfrak{S}_0 est négatif; d'où une première catégorie de rayons que nous dirons de première espèce.

2° La droite $T_{\mathfrak{S}_0}$ rencontre la courbe D_{ψ_0} , d'où une seconde catégorie de rayons que nous dirons de seconde espèce. Par exemple, si la droite $T_{\mathfrak{S}_0}$ rencontre la courbe D_{ψ_0} en un point b_s situé du côté des abscisses positives et ne rencontre pas cette courbe du côté des abscisses négatives, le point M du rayon correspondant à la valeur positive de \mathfrak{S}_0 commence par avoir une altitude croissante; il en est ainsi jusqu'à ce que le point b atteigne le point b_s auquel correspond le sommet M_s du rayon, où $\sin \mathfrak{S}$ est nul; le point b rétrograde ensuite sur la droite $T_{\mathfrak{S}_0}$ et l'altitude du point M ne cesse de décroître; la portion du rayon qui est située au-dessus du plan horizontal du point M_0 se compose de deux arcs symétriques par rapport à la verticale du sommet M_s .

Si la droite $T_{\mathfrak{S}_0}$ rencontre D_{ψ_0} en b_s du côté des abscisses positives et

en b_s du côté des abscisses négatives, il est clair que le point b ne peut qu'osciller indéfiniment entre les points b_s et b_x . Le rayon correspondant à la valeur positive de \mathfrak{S}_0 se compose alors d'un arc tel que $M_0M_sM_1$, présentant le sommet M_s et se décomposant en deux branches M_0M_s , M_sM_1 symétriques l'une de l'autre par rapport à la verticale du sommet M_s ; puis d'un second arc tel que $M_1M_sM_2$, pré-

Fig. 2.



sentant le sommet M_s et se décomposant en deux branches M_1M_s , M_sM_2 symétriques l'une de l'autre par rapport à la verticale du sommet M_s . Pour les temps supérieurs à celui auquel la surface d'onde atteint le point M_2 , le rayon se continue par la courbe qui se déduit de $M_0M_sM_1M_sM_2$ par une série de translations horizontales M_0M_2 . On trouverait naturellement un résultat analogue pour l'inclinaison \mathfrak{S}_0 négative.

Enfin, dans le cas où la droite $T_{\mathfrak{S}_0}$, au lieu de couper D_{ψ_0} en b_0 , est tangente à cette courbe en un tel point, il est clair que le point M_s correspondant est rejeté à l'infini dans le plan horizontal d'altitude z_s (abscisse de b_s); le rayon est asymptote à ce plan.

Pour les rayons de seconde espèce, les fonctions x, y, t de la variable z , figurant dans les équations (45), (46), comportent donc plusieurs déterminations, dont chacune correspond à la branche du rayon comprise entre deux sommets consécutifs. Pour passer d'une détermination à la suivante, on est amené à introduire des intégrales

telles que

$$\int_{z_0}^{z_s} \frac{c \cos \xi \cos \psi_0 + u}{c \sin \xi} d\sigma, \quad \int_{z_0}^{z_s} \frac{c \cos \xi \sin \psi_0 + v}{c \sin \xi} d\sigma, \quad \int_{z_0}^{z_s} \frac{d\sigma}{c \sin \xi}$$

dans lesquelles z_s est l'altitude d'un sommet M_s ou M_x ; or pour ces valeurs de z_s , $\sin \xi$ s'annule comme $(z - z_s)^{\frac{1}{2}}$. Le calcul des dérivées de ces intégrales par rapport à z_0 , ψ_0 exige donc l'introduction des parties finies d'intégrales infinies; il en est par suite de même de celui des dérivées des fonctions x , y , t relatives aux différentes branches d'un même rayon de seconde espèce.

De cette analyse ressort une condition nécessaire de l'existence de rayons de seconde espèce pour l'azimut initial ψ_0 ; il ne peut y avoir de tels rayons pour cet azimut que si la courbe D_{y_0} pour certaines altitudes z s'élève au-dessus de l'ordonnée du point a_0 (fig. 1), autrement dit, si pour certaines altitudes la quantité $c + U$ prend des valeurs supérieures à celle qu'elle a au point M_0 , origine du rayon. Ce résultat mérite de retenir l'attention, car il semble bien avoir été complètement négligé par les auteurs qui ont pensé trouver que l'état des régions élevées de l'atmosphère terrestre, avait pour effet de faire revenir au sol les rayons sonores émis par une source située à la surface du sol.

6. On peut se donner la surface d'onde S_0 à l'instant initial sous la forme

$$(52) \quad x = x_0(\lambda, \mu), \quad y = y_0(\lambda, \mu), \quad z = z_0(\lambda, \mu),$$

λ et μ étant deux paramètres variables; la position de la surface d'onde S à chaque instant t est alors définie par les équations

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{z_0}^z \frac{c \cos \xi \cos \psi_0 + u}{c \sin \xi} d\sigma, & y &= y_0 + \int_{z_0}^z \frac{c \cos \xi \sin \psi_0 + v}{c \sin \xi} d\sigma, \\ t &= t_0 + \int_{z_0}^z \frac{d\sigma}{c \sin \xi} \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles la fonction ξ s'obtient par l'équation

$$(54) \quad \cos \xi = \frac{c}{m_0 - U}, \quad m_0 = \frac{c_0}{\cos \xi_0} + U_0,$$

les lettres x_0, y_0, z_0 désignant les fonctions (52), tandis que ϑ_0, ψ_0 sont l'inclinaison et l'azimut de la normale à S_0 au point λ, μ . Mais on peut également assujettir la surface de front d'onde à passer à chaque instant t_0 par une courbe C qui engendre une surface Σ , définie par les équations (52). Soit alors

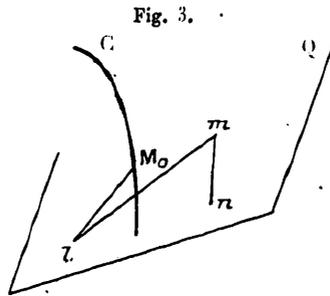
$$t_0 = \psi(\lambda, \mu)$$

le temps auquel la courbe C passe par le point $M_0(\lambda, \mu)$ de cette surface Σ . On peut toujours supposer que l'un des paramètres λ ou μ est la variable t_0 elle-même; par exemple

$$\mu = t_0.$$

De plus, on peut admettre que le paramètre λ a été choisi de telle sorte que les courbes de Σ sur lesquelles λ reste fixe, soient les trajectoires orthogonales Γ des courbes C. Pour obtenir ϑ_0, ψ_0 en fonction de λ, μ , on est alors amené à la construction suivante.

Soit M_0 un point de Σ ; par ce point on mène le plan Q normal à Σ et à la courbe C passant en M_0 ; il coupe le plan tangent à Σ en M_0 suivant la tangente à une courbe Γ ; sur cette tangente on porte le vecteur $\vec{M_0 l}$ mesuré par la vitesse c'_0 , avec laquelle la courbe C se



déplace normalement à elle-même sur la surface Σ au point M_0 ; avec le point l comme origine, on construit le vecteur \vec{lm} opposé à la vitesse u, v en M_0 . Son extrémité m se projette sur le plan Q en n ; dans le plan Q on trace le cercle de diamètre $M_0 n$ et le cercle de centre M_0 et de rayon c_0 , vitesse propre de propagation de l'onde au point M_0 . Les points D de rencontre de ces deux cercles sont les extré-

mités des vecteurs M_0D ayant pour inclinaison et azimut les angles cherchés ϑ_0, ψ_0 .

Cette construction des directions M_0D est à la base de la théorie de la réflexion et de la réfraction des surfaces d'onde.

7. Dans les deux cas précédents les équations de la surface d'onde se présentent sous la forme

$$(55) \quad x = \alpha(\lambda, \mu, \varepsilon), \quad y = \beta(\lambda, \mu, \varepsilon), \quad t = \gamma(\lambda, \mu, \varepsilon).$$

Les deux premières représentent les rayons qui dépendent des deux paramètres λ et μ et forment une congruence; elles permettent de calculer λ, μ en fonction de x, y, ε ; en portant les valeurs de λ, μ ainsi obtenues dans la troisième équation (55)

$$t = \gamma(\lambda, \mu, \varepsilon) = \varphi(x, y, \varepsilon),$$

on obtient l'équation de la surface d'onde à chaque instant t ; les dérivées partielles de $\varphi(x, y, \varepsilon)$ sont

$$\varphi_x = \frac{\cos \psi_0}{m_0}, \quad \varphi_y = \frac{\sin \psi_0}{m_0}, \quad \varphi_\varepsilon = \frac{\tan \vartheta_0}{m_0}.$$

La surface focale F de la congruence des rayons est représentée par les deux premières équations (55) et l'équation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \beta}{\partial \mu} - \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = D(\lambda, \mu, \varepsilon) = 0.$$

La courbe I , suivant laquelle la surface d'onde S coupe la surface focale F , est une arête de rebroussement de la surface S . Soit, pour préciser, la surface d'onde S_t correspondant au temps t ; elle présente deux nappes qui viennent se raccorder suivant la courbe I ; les points de la nappe antérieure appartiennent à des rayons dont le point de contact avec la surface focale F sera atteint par la surface d'onde à un temps postérieur à t , auquel correspond la surface S_t ; les points de la nappe postérieure appartiennent à des rayons qui ont touché la surface focale F à une époque antérieure à t .

8. Nous avons vu que la grandeur de la discontinuité du second ordre se propageant dans un gaz dépend de la fonction h' satisfaisant à

l'équation (21); or cette équation, quand on y tient compte des deux premières équations (55) définissant les rayons, devient

$$(59) \quad 2 \frac{dh'}{dz} + h' \frac{d}{dz} L \left| \frac{D \sin \mathfrak{Z} \cos \mathfrak{Z}}{c^2 \rho} \right| - \frac{(m_0 + 1) h'^2}{m_0 c^2 \rho \sin \mathfrak{Z} \cos \mathfrak{Z}} = 0.$$

C'est donc une équation de Bernoulli dont l'intégrale est de la forme

$$(60) \quad h'(z) = h'(z_0) \frac{K(z_0)}{K(z)} \left(\frac{\cos \mathfrak{Z}_0}{\cos \mathfrak{Z}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c \rho^{\frac{1}{2}}}{c_1 \rho_0^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{1 - h'(z_0) \Lambda(z, z_0)}$$

avec

$$(61) \quad K(z) = |D \sin \mathfrak{Z}|^{\frac{1}{2}}$$

et

$$(62) \quad \Lambda(z, z_0) = \frac{m_0 + 1}{2 m_0} \frac{K(z_0) \cos \mathfrak{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{c_0 \rho_0^{\frac{1}{2}}} \int_{z_0}^z \frac{d\sigma}{K(\sigma) c \rho^{\frac{1}{2}} \sin \mathfrak{Z} \cos \mathfrak{Z}^{\frac{3}{2}}}.$$

(Cette expression de $h'(z)$ contient en dénominateur une quantité de la forme

$$Q(z) = 1 - h'(z_0) \Lambda(z, z_0).$$

$\Lambda(z, z_0)$ étant une fonction essentiellement positive.

Si à l'instant initial la discontinuité est telle que la pression de l'élément du gaz diminue au passage de la surface d'onde, la quantité $h'(z_0)$ est négative, et la fonction $Q(z)$ ne peut s'annuler; mais si au contraire à l'instant initial, la pression du gaz augmente au passage de la discontinuité, $h'(z_0)$ est positif; la fonction $Q(z)$ peut s'annuler en un certain point du rayon et par suite la fonction $h'(z)$ devenir infinie. Cette singularité de $h'(z)$ correspond au phénomène de Riemann-Hugoniot, comme il est aisé de s'en rendre compte en calculant $Q(z)$ dans le cas des ondes planes.

Quand on se borne à étudier les petits mouvements du fluide, la grandeur de la discontinuité dépend d'une fonction $l'(z)$ satisfaisant à l'équation (43). Or cette dernière, quand on y tient compte des équations (55) définissant les rayons, devient

$$(63) \quad 2 \frac{dl'}{dz} + l' \frac{d}{dz} L \left| \frac{D \sin \mathfrak{Z}}{\cos^2 \mathfrak{Z}} \right| c^2 \rho = 0.$$

Son intégrale générale est

$$(64) \quad I(z) = I(z_0) \left| \frac{D_0 \sin \xi_0}{D \sin \xi} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} \xi}{\cos^{\frac{3}{2}} \xi_0} \frac{c_0 \rho_0^{\frac{1}{2}}}{c \rho^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette fonction $I(z)$ devient infinie sur la surface focale E de la congruence des rayons. Mais le long de la courbe I commune à la surface E et à la surface d'onde S, cette dernière se compose de deux nappes se raccordant suivant la courbe I. On est alors amené à prendre pour valeur de $I(z)$ sur la nappe antérieure, celle qui est définie par l'égalité (64) et pour valeur de cette même fonction sur la nappe postérieure, celle définie par l'égalité

$$(64)' \quad I(z) = -I(z_0) \left| \frac{D_0 \sin \xi_0}{D \sin \xi} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} \xi}{\cos^{\frac{3}{2}} \xi_0} \frac{c_0 \rho_0^{\frac{1}{2}}}{c \rho^{\frac{1}{2}}}.$$

Sur cette nappe postérieure, la discontinuité a donc le signe opposé à celui qu'elle a sur la nappe antérieure; le passage du rayon au contact de la surface focale a pour effet l'inversion de la discontinuité; c'est le phénomène bien connu des physiciens qui a été signalé et étudié par Gouy.

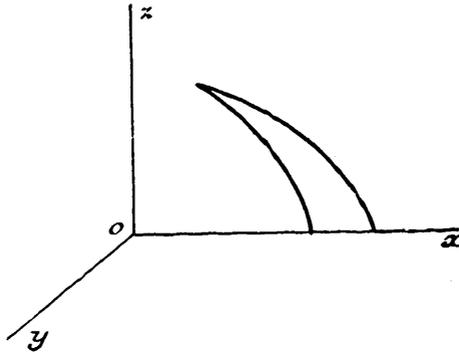
9. L'étude des nappes réelles de la surface focale E est particulièrement aisée dans le cas des rayons issus d'un même point; elle se simplifie encore dès que l'on se borne au cas de l'onde émise dans l'atmosphère par un centre sonore situé à la surface d'un sol horizontal.

On démontre qu'il ne peut y avoir de points réels de la surface focale sur les rayons de première espèce et sur les branches ascendantes des rayons de seconde espèce; par contre, il peut y avoir un tel point et un seul sur la portion de la branche descendante d'un rayon de seconde espèce située au-dessus du plan horizontal de la source; il en est ainsi dès que la courbe auxiliaire D_{ρ_0} , qui a été utilisée pour étudier la forme des rayons, présente des tangentes suffisamment inclinées sur l'horizontale.

L'existence des nappes réelles de la surface focale s'élevant au-dessous du plan horizontal de la source est en rapport étroit avec la forme de la surface, lieu des sommets des rayons de seconde espèce. Ces nappes se raccordent entre elles suivant des arêtes de rebrousse-

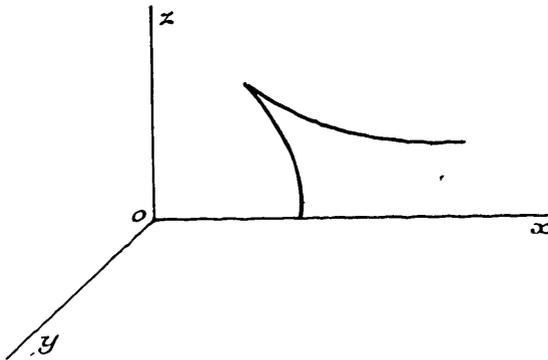
ment et leur section par des plans verticaux présente une forme générale analogue à celle qui est représentée sur les figures 4 et 5.

Fig. 4.



Les régions délimitées dans le plan horizontal de la source par l'intersection de la surface focale avec ce plan se distinguent les unes des

Fig. 5.



autres par le nombre de rayons passant par chacun de leur point, autrement dit par le nombre de nappes de la surface d'onde qui viennent les couper. Il est ainsi des régions où un même son émis par la source peut être perçu plusieurs fois. Enfin au voisinage même des courbes limitant ces régions, le son est perçu avec une intensité accrue puisque, d'après l'équation (64), la fonction $l'(z)$ devient très grande près de la surface focale. Ce résultat explique comment un son émis par la source peut être perçu par des observateurs très éloignés de la source, alors qu'il n'est pas entendu par d'autres plus rapprochés.