JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VITO VOLTERRA

Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 249-298.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__249_0>

Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires;

PAR M. VITO VOLTERRA,
Membre de l'Institut.

INTRODUCTION.

J'ai traité plusieurs fois la question des phénomènes héréditaires comme application des théories sur les équations intégrales, intégro-différentielles et fonctionnelles. Plusieurs chapitres de mes *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* ([1]) et de celles *sur les fonctions de lignes* ([2]), sont consacrés à l'étude mathématique de l'hérédité. C'est pourquoi je me rapporterai à ces ouvrages pour les principes qu'il me faudra rappeler ([3]).

Dans le présent Mémoire, j'étudie la question énergétique que j'avais laissée de côté dans mes précédents travaux. En partant de certains postulats je montre l'accord existant entre la théorie de l'hérédité linéaire et les principes de l'énergétique. Je démontre que le travail des forces externes nécessaire pour amener d'un état à un

([1]) Paris, Gauthier-Villars, 1913 (*Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiées sous la direction de M. Borel).

([2]) Paris, Gauthier-Villars, 1913 (de la même Collection).

([3]) La démonstration de la formation des cycles, les relations entre les cycles périodiques et l'invariabilité de l'hérédité, résultent de la théorie développée dans ces Leçons. Certaines particularités des cycles d'hystérésis, par exemple leurs points de rebroussement (qui d'autre part n'existent pas toujours), ne s'expliquent pas par la seule hérédité, au moins par celle linéaire. Il est possible qu'elles doivent être attribuées à des causes qui s'ajoutent à l'hérédité telle qu'on la considère ordinairement.

autre un système, sujet à des phénomènes héréditaires linéaires, dépasse toujours la variation d'une certaine fonctionnelle qui ne dépend que de l'état du système. Lorsque le système revient à l'état initial on peut calculer le travail des forces externes dissipé.

J'ai obtenu peu à peu ces résultats. C'est ainsi que dans une Note publiée en 1912 ([1]) j'ai démontré l'impossibilité d'un mouvement spontané périodique en supposant que l'hérédité soit linéaire. Ce résultat découle du fait qu'une certaine intégrale est toujours positive. On peut le considérer comme un premier pas dans la voie que j'ai suivie après.

Dans les Cours professés à Rome en 1912-1913 et en 1924-1925, j'avais montré, en appliquant la propriété analytique qu'on vient de rappeler, qu'il existe une dissipation de l'énergie mécanique dans les cycles fermés périodiques. Mais je n'avais pas encore réussi à aborder la question générale énergétique. Ce n'est que dans mes recherches récentes de biologie mathématique, où j'ai envisagé des phénomènes d'un caractère héréditaire, que je suis arrivé à trouver un procédé de calcul pouvant s'employer avec succès pour traiter cette question générale ([2]).

J'ai ainsi obtenu les résultats exposés dans les paragraphes I, II du Chapitre II et dans les paragraphes II, III du Chapitre III du présent Mémoire.

Celui-ci est divisé en trois Chapitres. Dans le premier je donne les équations fondamentales et quelques théorèmes de calcul intégral et de la théorie des équations intégrales et intégro-différentielles dont je fais usage dans les Chapitres suivants.

J'ai cru nécessaire de traiter à part le cas d'un seul degré de liberté en y consacrant le Chapitre II, et de ne pas le déduire du cas général envisagé dans le Chapitre III, car toutes les hypothèses qu'il faut

---

([1]) *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 2e série, vol. XXI, 1912). Dans cette Note, les intégrales qui paraissent dans les formules (12) et (12') sont précédées du signe +. Les conséquences sont les mêmes si elles sont précédées du signe —. C'est justement ce second cas qu'il faut envisager.

([2]) *Variazioni e fluttuazioni nel numero d'individui in specie animali conviventi* (*Memorie del R. Comitato Talassografico Italiano*, t. CXXXI, Venezia, 1927).

introduire lorsque le système qu'on étudie a plusieurs degrés de liberté ne sont pas nécessaires s'ils se réduisent à un seul.

Les paragraphes des Chapitres II et III, qui ne sont pas cités ci-dessus, renferment les méthodes que j'avais exposées dans mes Cours de 1912-1913 et 1924-1925 et que je n'avais pas publiées jusqu'ici.

Enfin la Note qui termine le Mémoire étend les résultats obtenus au cas où l'on tient compte du frottement proportionnel à la vitesse.

L'étude de l'énergétique des systèmes continus présentant des phénomènes héréditaires, ainsi que celle des systèmes pour lesquels l'hérédité n'est pas linéaire, méritent de faire l'objet de Mémoires spéciaux.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES PHÉNOMÈNES HÉRÉDITAIRES LINÉAIRES ET FORMULES AUXILIAIRES.

I. — Équations des phénomènes héréditaires linéaires.

1. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les coordonnées indépendantes d'un système,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s} a_{is}q'_i q'_s \tag{1}$$

la force vive, $-\Omega$ le potentiel des forces internes et $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ les forces externes.

Les équations du mouvement seront

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial(T-\Omega)}{\partial q_i} = \mathfrak{Q}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{I}$$

Si les coefficients a_{is} sont constants et si l'on a

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s} b_{is}q_i q_s,$$

les coefficients b_{is} étant aussi constants, les équations (I) prendront la forme linéaire

$$(\mathrm{I}') \qquad \sum_{1}^{n}{}_s a_{is} q''_s + \sum_{1}^{n}{}_s b_{is} q_s = \mathfrak{Q}_i,$$

où l'on suppose que les forces externes soient des fonctions connues du temps.

La forme (1) est une forme définie et positive. Nous supposerons que Ω aussi soit une forme définie et positive. Dans ce cas les déplacements (coordonnées) se conserveront aussi petits que l'on veut si les vitesses initiales ainsi que les déplacements initiaux sont suffisamment petits, les forces externes étant nulles ou si elles satisfont à certaines conditions. La théorie des petits mouvements est fondée sur les équations (I′) que l'on peut simplifier et mettre sous la forme

$$(\mathrm{I}'') \qquad q''_i + b_i q_i = \mathfrak{Q}_i$$

en effectuant une substitution linéaire sur les coordonnées.

2. Les *actions héréditaires* sont des actions actuelles dues à des causes qui ont existé dans le passé [1]. Nous supposerons que dans chaque instant elles soient des fonctionnelles dépendant des déplacements (coordonnées) qui ont eu lieu précédemment, ces déplacements étant considérés comme des fonctions du temps.

Si ces fonctionnelles sont linéaires, puisque les déplacements sont continus, les actions dues à l'hérédité pourront s'exprimer par les formules

$$\sum_{1}^{n}{}_s \int_{-\infty}^{t} \mathrm{F}_{is}(t, \tau)\, q_s(\tau)\, d\tau.$$

Elles s'appelleront des *actions héréditaires linéaires;* les fonctions F_{is} seront les *coefficients d'hérédité*. Supposons que dans un système du type considéré dans le numéro précédent, outre les forces qu'on a envisagées, s'exercent des actions héréditaires linéaires. Alors il faudra

---

[1] Voir *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées par M. Vito Volterra à la Sorbonne en 1912 (citées ci-dessus), Chap. VI, VII, VIII, XIV.

remplacer les équations (I′) par les équations

$$(\mathrm{A})\qquad \sum_1^n{}_s a_{is}q_s'' + \sum_1^n{}_s b_{is}q_s(t) = \sum_1^n{}_s \int_{-\infty}^{t} \mathrm{F}_{is}(t,\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i.$$

Le cas où les F_{is} sont des fonctions de la différence $t-\tau$, s'appelle le cas du *cycle fermé* (1). Nous supposerons que *cette condition soit toujours satisfaite.*

Nous supposerons aussi que les actions héréditaires soient négligeables au delà d'une certaine limite de temps, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathrm{F}_{is}(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqq \mathrm{T}_0 \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n).$$

T_0 s'appellera la *durée de l'hérédité.*

Les équations (A) s'écriront

$$(\mathrm{A}')\qquad \sum_1^n{}_s a_{is}q_s''(t) + \sum_1^n{}_s b_{is}q_s(t) = \sum_1^n{}_s \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i,$$

ou bien

$$(\mathrm{A}'')\qquad \sum_1^n{}_s a_{is}q_s''(t) + \sum_1^n{}_s b_{is}q_s(t) = \sum_1^n{}_s \int_{0}^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i.$$

La même substitution linéaire sur les déplacements qui amène à l'équation (I″) conduit les équations précédentes aux formes

$$(\mathrm{A}''')\qquad q_i'' + b_i q_i = \sum_1^n{}_s \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i.$$

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{IV}})\qquad q_i'' + b_i q_i = \sum_1^n{}_s \int_{0}^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i.$$

On dira qu'il y a équilibre lorsque les quantités q' et q'' sont négligeables; c'est pourquoi les équations de l'équilibre seront

$$(\mathrm{B}')\qquad \sum_1^n{}_s b_{is}q_s = \sum_1^n{}_s \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i$$

---

(1) Voir *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées par M. Vito Volterra à la Sorbonne en 1912 (citées ci-dessus), Chap. VII.

que l'on peut aussi écrire

$$(\mathrm{B}'')\qquad \sum_{1}^{n}{}_{s}\, b_{is} q_s = \sum_{1}^{n}{}_{s} \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i.$$

Dans le cas où le système a un seul degré de liberté, chacun des systèmes d'équations (A′), (A″), (B′), (B″) se réduit à une seule équation et l'on a

$$(a')\qquad q'' + bq = \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q},$$

$$(a'')\qquad q'' + bq = \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q},$$

$$(b')\qquad bq = \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}.$$

$$(b'')\qquad bq = \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}.$$

3. L'action héréditaire totale $\int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}(t-\tau) q(\tau) d\tau$ est la somme des actions héréditaires élémentaires $\mathrm{F}(t-\tau) q(\tau) d\tau$. La quantité $\mathrm{F}(t-\tau) q(\tau) d\tau$ peut être regardée comme l'action héréditaire qui s'exerce au temps t due au déplacement $q(\tau)$ qui a eu lieu dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$. Nous verrons dans le n° **6** que l'on peut donner aux formules une autre forme équivalente et interpréter d'une autre manière les actions héréditaires élémentaires.

4. S'il n'y a pas d'hérédité ni de force externe, on a

$$-q'' = bq.$$

Cette équation peut s'interpréter en disant que bq mesure en valeur absolue l'accélération avec laquelle le déplacement q tend à se dissiper.

Lorsqu'il y a l'hérédité et qu'il n'y a pas de forces externes, on a

$$(2)\qquad -q'' = bq - \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau.$$

Supposons que dans tout l'intervalle de temps T_0 qui précède l'instant t, q conserve le même signe.

Or, on sait que *les actions héréditaires retardent l'action dissipatrice du déplacement*, donc il faut supposer que $F(\tau)$ soit positive.

D'autre part, *l'action héréditaire produite à l'instant t par un déplacement $q(\tau)$ qui a lieu au temps τ, doit diminuer si la distance de temps $t-\tau$ augmente*. C'est pourquoi $F(\tau)$ doit être une fonction décroissante. On a donc les propriétés suivantes de cette fonction :

$F(\tau)$ *est une fonction finie continue, positive décroissante qui s'annule pour* $\tau \geqq T_0$.

On en tire que

$$\begin{array}{ll}(3) & F(\tau) > 0 \\ (3') & F'(\tau) < 0 \end{array}\Bigg\} \quad \text{pour } 0 < \tau < T_0.$$

Prenons q constante pendant l'intervalle de temps $(t-T_0,\ t)$. L'équation (2) s'écrira

$$-q''(t) = q\left(b - \int_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau\right).$$

Si

$$b = \int_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau,$$

on aurait $q''(t) = 0$ et puisque $q'(t) = 0$, q se conserverait constant après l'instant t.

Si l'on avait

$$b < \int_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau,$$

q augmenterait toujours à partir de l'instant t. Ces deux résultats seraient absurdes, car nous supposerons que *le déplacement par soi-même, c'est-à-dire sans causes externes, ne peut pas se conserver constant ni augmenter*. Il faut donc qu'on ait

$$(4) \qquad b - \int_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau = m > 0.$$

5. Passons au cas général de n degrés de liberté.

Dans ce cas, on peut envisager

$$\sum_i^n {}_s F_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau,$$

comme la mesure de l'action héréditaire qui s'exerce au temps t et est due aux déplacements $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$, ..., $q_n(\tau)$ ayant eu lieu dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$. Nous verrons après (n° **7**) comment on peut aussi interpréter les formules.

Supposons que, quel que soit τ, on ait

$$\sum_i^n {}_s F_{is}(\tau) q_s = \frac{\partial \Phi}{\partial q_s}.$$

Φ sera le *potentiel héréditaire élémentaire*.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la fonc tion Φ seront

$$F_{is} = F_{si}.$$

Dans l'hypothèse qu'elles soient satisfaites, nous ferons aussi les hypothèses que

$$\Phi(t \mid q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s F_{is}(t)\, q_i q_s \tag{5}$$

soit une *forme définie et positive*, et

$$\Psi(t \mid q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{\partial \Phi(t \mid q_1, q_2, \ldots, q_n)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s F'_{is}(t)\, q_i q_s \tag{5'}$$

soit une *forme définie et négative*. On a posé

$$F'_{is}(t) = \frac{d F_{is}(t)}{dt}$$

et l'on a considéré, dans la dérivation de la formule (5'), les quantités q_1, q_2, ..., q_n comme des constantes.

Nous regarderons ces hypothèses comme l'extension des conditions (3) et (3').

Écrivons

$$b_{is} - \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, d\tau = m_{is}. \tag{6}$$

Comme extension de la condition (4), nous supposerons que

$$(7) \qquad A = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\, m_{is}q_i q_s$$

soit une *forme définie et positive*.

On donnera ensuite les conséquences énergétiques de ces diverses hypothèses (Chap. III, § II), qui pourront les justifier.

6. L'équation (a') peut s'écrire indifféremment

$$(a'') \qquad q'' + bq = \int_0^{T_0} F(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}$$

ou

$$(a''_1) \qquad q'' + mq + \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau = \mathfrak{Q},$$

où m est positif [*voir* formule (4)].

Cette seconde forme correspond à l'interprétation suivante : On peut regarder l'action interne qui s'exerce à l'instant t comme résultante d'une force $-mq$ proportionnelle au déplacement actuel et des forces héréditaires

$$-F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau$$

proportionnelles aux excès des déplacements actuels sur les déplacements qui ont eu lieu pendant la durée de l'hérédité (*voir* n° **3**).

Le potentiel de $-mq$ est $-\frac{1}{2}mq^2$; en effet,

$$mq = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}mq^2\right)$$

et le potentiel des forces

$$-\int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau$$

est

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2\, d\tau.$$

En effet

$$\frac{\partial}{\partial q(t)} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau = \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] d\tau \text{ [1]}.$$

Le potentiel de toutes les forces internes est donc — Θ, étant

$$(C_1) \quad \Theta = \frac{1}{2} m q^2 + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{2} b q^2 - \int_0^{T_0} F(\tau) q(t) q(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) q(t-\tau)^2 d\tau.$$

Tandis que la première expression correspond à la formule (a''), la seconde correspond à la formule (a''_1). On pourrait même supprimer le dernier terme dans la dernière expression, ce qui ne changerait pas la dérivée par rapport à $q(t)$, mais nous verrons après (Chap. II, § I) qu'il convient de le conserver.

7. De même les équations (A') peuvent s'écrire sous la forme (A'') ou sous la forme équivalente

$$(A''_1) \quad \sum_1^n {}_s a_{is} q''_s(t) + \sum_1^n {}_s m_{is} q_s(t) + \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)[q_s(t) - q_s(t-\tau)] d\tau = \mathfrak{Q}_i$$

et l'on peut regarder l'action interne qui s'exerce à l'instant t comme

---

[1] Si l'on prend la fonctionnelle $\frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau$ et l'on calcule sa variation première, on trouve

$$\delta q(t) \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] d\tau - \int F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] \delta q(t-\tau) d\tau.$$

La fonctionnelle n'est donc pas *normale* au sens de M. Lévy (*Leçons d'analyse fonctionnelle*, p. 67. Paris 1922). Le premier terme montre que la fonctionnelle *dépend d'une manière spéciale* de $q(t)$ d'après les définitions que j'ai données dans mon premier Mémoire sur les fonctionnelles [*Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (*Rendic. Lincei*, 2e série, 1887, p. 141 et suiv.)]. C'est le coefficient de $\delta q(t)$ dans l'expression de la variation première que nous avons indiqué ici par

$$\frac{\partial}{\partial q(t)} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau.$$

résultante des forces

$$-\sum_1^n {}_s m_{is} q_s(t),$$

exprimables linéairement par les déplacements actuels et des forces héréditaires

$$-\sum_1^n {}_s \mathrm{F}_{is}(\tau)[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,d\tau$$

exprimables linéairement par les excès des déplacements actuels sur les déplacements qui ont eu lieu pendant la durée de l'hérédité.

A ce point de vue, le potentiel des forces internes est exprimé par $-\Theta$, étant

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{C})\quad \Theta = {} & \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s m_{is} q_i(t) q_s(t) \\
& + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0} \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \mathrm{F}_{is}(\tau)[q_i(t) - q_i(t-\tau)][q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,d\tau \\
= {} & \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s b_{is} q_i(t) q_s(t) - \sum_1^n {}_i q_i(t) \int_0^{\mathrm{T}_0} \sum_1^n {}_s \mathrm{F}_{is}(\tau) q_s(t-\tau)\,d\tau \\
& + \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_{is}(\tau) q_i(t-\tau) q_s(t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Au sujet de ces deux expressions équivalentes, on peut répéter ce que nous avons dit dans le n° **6** sur les deux expressions (C_1). (*Voir* Chap. III, § 2.)

8. Remarquons que le potentiel des forces internes [formules (C) et (C_1)] au temps t dépend des valeurs des déplacements dans cet instant et des valeurs des déplacements qui ont eu lieu pendant la durée précédente de l'hérédité. D'après les hypothèses précédentes, ce potentiel est une quantité négative, qui ne s'annule que si tous les déplacements pendant la durée de l'hérédité sont nuls. Nous exprimerons cette propriété en disant que *le potentiel des forces internes est défini et négatif.*

9. Nous nommerons *potentiel dérivé* l'expression

$$\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s F'_{is}(\tau)[q_i(t)-q_i(t-\tau)][q_s(t)-q_s(t-\tau)]d\tau;$$

il sera *défini et négatif*, car il est négatif et ne s'annule que lorsque

$$q_i(t)=q_i(t-\tau)\qquad (0<\tau<T_0).$$

II. — Digression sur les équations intégrales et intégro-différentielles.

1. THÉORÈME I. — *Si l'on a l'équation intégrale*

$$(8)\qquad y(t)=x(t)+\int_{t-T_0}^{t}F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

où $F(t)=0$ *pour* $t\geqq T_0$, *et si l'on suppose que* $y(t)$ *soit connue depuis* $t=t_0$ *jusqu'à* $t=t_1\,(t_1>t_0)$, *et* $x(t)$ *soit connue depuis* $t=t_0-T_0$ *jusqu'à* $t=t_0$, $x(t)$ *sera déterminée depuis* $t=t_0$ *jusqu'à* $t=t_1$.

En effet, soit d'abord $t_0<t<t_0+T_0$.

L'équation (8) pourra s'écrire

$$y(t)=x(t)+\int_{t_0}^{t}F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau+\int_{t-T_0}^{t_0}F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Or $x(\tau)$ est connu si $t-T_0<\tau<t_0$. Donc

$$\int_{t-T_0}^{t_0}F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau=z(t)$$

est connu. Par suite, la résolution de l'équation intégrale

$$(8')\qquad y(t)-z(t)=x(t)+\int_{t_0}^{t}F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

pourra donner $x(t)$ pour t compris entre t_0 et t_0+T_0.

Supposons maintenant que t soit compris entre t_0+T_0 et $t_1>t_0+T_0$.

Puisque $F(\tau) = 0$ pour τ égale ou supérieur à T_0, l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t-T_0} F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

sera nulle. Par suite, l'équation (8) pourra s'écrire

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_{t-T_0}^{t_0} F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

c'est-à-dire

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} F(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Nous avons montré que l'on peut calculer $x(t)$ pour t compris entre t_0 et $t_0 + T_0$; la dernière équation nous donnera $x(t)$ pour t compris entre $t_0 + T_0$ et t_1.

2. Théorème II. — *Si l'on a le système d'équations intégrales*

$$(9) \qquad y_i(t) = x_i(t) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t-\tau)x_s(\tau)\,d\tau,$$

où $F_{is}(t) = 0$ *pour* $t \geqq T_0$, *et si l'on suppose que les* $y_i(t)$ *soient connues depuis* $t = t_0$ *jusqu'à* $t = t_1$ $(t_1 > t_0)$, *les* $x_i(t)$ *soient connues depuis* $t = t_0 - T_0$ *jusqu'à* $t = t_0$, *les fonctions* $x_i(t)$ *seront déterminées depuis* $t = t_0$ *jusqu'à* $t = t_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

La démonstration de ce théorème se fait de la même manière que celle du théorème précédent.

3. Prenons dans l'équation (8) $t = t_0$, il viendra

$$(10) \qquad y(t_0) = x(t_0) + \int_{t_0-T_0}^{t_0} F(t_0-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Donc $y(t_0)$ est connue étant données les valeurs de $x(\tau)$ pour τ compris entre $t_0 - T_0$ et t_0.

Si l'on ne veut pas que $y(t)$ soit discontinue pour $t = t_0$, il faut que les valeurs de cette fonction, que l'on donne à partir de $t = t_0$, commencent par la valeur de $y(t_0)$ déduite de l'équation (10).

Cette condition n'étant pas satisfaite, on voit, à cause de l'équation (8'), que $x(t)$ aussi est discontinue pour $t = t_0$.

On peut faire la même remarque dans le cas du système d'équations intégrales (9).

4. Les théorèmes précédents amènent au corollaire suivant :

Corollaire. — *Dans le cas de l'équilibre héréditaire, si l'on connaît les déplacements q_1, q_2, ..., q_n pendant un intervalle de temps égal à la durée héréditaire et si l'on connaît les forces externes dans tous les instants suivants, il sera possible de calculer les déplacements à ces instants.*

La continuité des déplacements sera assurée par les conditions qui résultent de la remarque du n° **3**.

5. Soient les équations intégro-différentielles

$$(11) \qquad \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_1^n {}_s \left\{ \mathrm{A}_{is}(t) x_s(t) + \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} \mathrm{F}_{is}(t-\tau) x_s(\tau)\, d\tau \right\} + y_i(t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on suppose $\mathrm{F}_{is}(t) = 0$ pour $t \geqq \mathrm{T}_0$.

On peut passer aux équations intégrales

$$(11') \qquad x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_1^n {}_s \mathrm{A}_{is}(\tau) x_s(\tau)\, d\tau$$
$$+ \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi-\mathrm{T}_0}^{\xi} \sum_1^n {}_s \mathrm{F}_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau)\, d\tau + \int_{0^t}^{t} y_i(\tau)\, d\tau.$$

Examinons maintenant l'intégrale

$$(11_1) \qquad \mathrm{I} = \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi-\mathrm{T}_0}^{\xi} \mathrm{F}_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau)\, d\tau.$$

Prenons dans le plan $\tau\xi$ les points suivants :

A de coordonnées		$\tau = t_0$,	$\xi = t_0$;
B	»	$\tau = t$,	$\xi = t$;
C	»	$\tau = t - \mathrm{T}_0$,	$\xi = t$;
D	»	$\tau = t_0 - \mathrm{T}_0$,	$\xi = t_0$.

L'aire ABCD $= \sigma$ est un parallélogramme et l'on aura évidemment

$$I = \int_\sigma F_{is}(\xi - \tau) x_s(\tau)\, d\sigma.$$

Conduisons la droite AE parallèle à l'axe ξ. Elle partagera l'aire σ en deux parties σ_1 et σ_2 situées respectivement à gauche et à droite de cette droite. Or deux cas peuvent se présenter : ou $t - T_0 \leqq t_0$ (*fig.* 1, 2) ou $t - T_0 > t_0$ (*fig.* 3). Dans le premier cas, l'aire σ_2 est

Fig. 1.

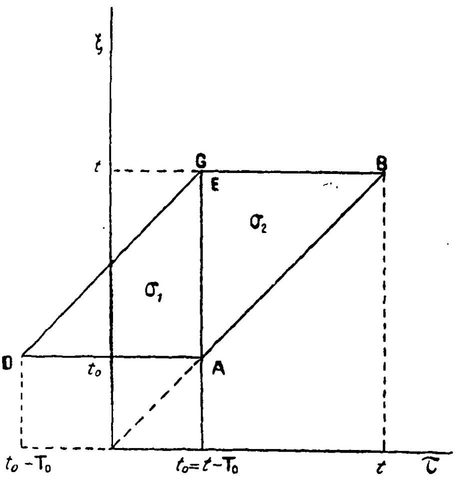
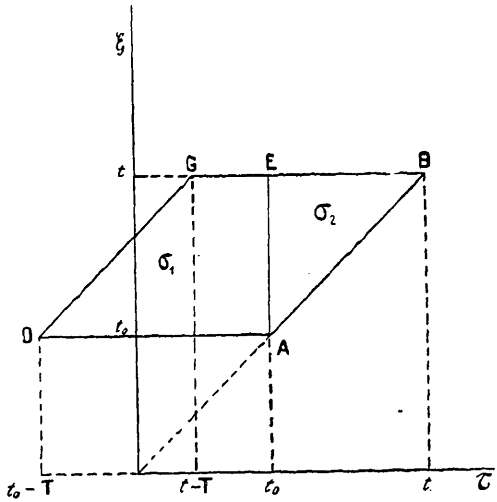


Fig. 2.



constituée du triangle AEB; dans le second cas, elle est constituée du quadrilatère AFCB, F étant le point où la droite AE rencontre le côté DC du parallélogramme. Soient ξ, τ les coordonnées d'un point du triangle CEF $= \sigma_3$, on aura

$$\xi - \tau \geqq T_0.$$

En effet la droite CD a pour équation

$$\xi - \tau = T_0$$

et les points du triangle σ_3 sont situés à la gauche de cette droite. Mais

$$F(t) = 0 \qquad \text{si} \qquad t \geqq T_0;$$

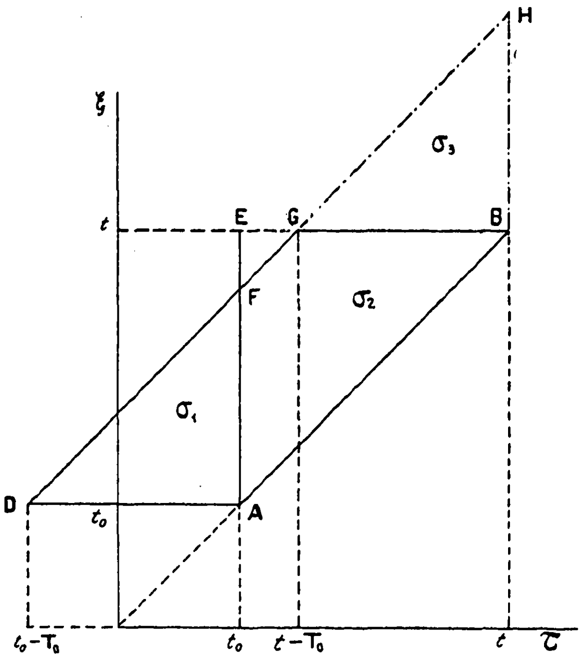
donc

$$\int_{\sigma_3} F_{is}(\xi - \tau) x_s(\tau)\, d\sigma_3 = 0,$$

et par suite, dans le second cas,

$$\int_{\sigma_2} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma_2 = \int_{\sigma_2} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma_2 + \int_{\sigma_3} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma_3$$
$$= \int_{\mathrm{ABE}} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma.$$

Fig. 3.



Dans le premier cas, on a directement

$$\int_{\sigma_2} F_{is}(\xi-\tau)\,x_s(\tau)\,d\sigma = \int_{\mathrm{ABE}} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma.$$

Donc, dans les deux cas, on pourra écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma_1 + \int_{\mathrm{ABE}} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma \\ &= \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{t_0}^{\xi} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi-\tau)x_s(\tau)\,d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} x_s(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{t} F_{is}(\xi-\tau)\,d\xi, \end{aligned}$$

et les équations intégrales (11′) pourront s'écrire

$$(11'') \qquad x_i(t) - \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{n}{}_s \left[A_{is}(\tau) + \int_{\tau}^{t} F_{is}(\xi - \tau)\, d\xi \right] x_s(\tau)\, d\tau$$

$$= x_i(t_0) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi - \tau) x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau.$$

En posant

$$- \left[A_{is}(\tau) + \int_{\tau}^{t} F_{is}(\xi - \tau)\, d\xi \right] = \Phi_{is}(\tau, t),$$

$$x_i(t_0) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi - \tau) x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau = z_i(t),$$

les équations (11″) deviendront

$$(12) \qquad x_i(t) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{t_0}^{t} \Phi_{is}(\tau, t) x_s(\tau)\, d\tau = z_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si les A_{is} et les F_{is} sont des fonctions connues, $\Phi_{is}(\tau, t)$ seront aussi connues. Si $y_i(t)$ sont données pour t compris entre t_0 et $t_1 > t_0$, on pourra calculer $\int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau$ pour t compris entre les mêmes limites. Supposons de connaître les $x_s(\tau)$ pour τ compris entre $t_0 - T_0$ et t_0, alors les intégrales

$$\int_{\sigma_1} F_{is}(\xi - \tau) x_s(\tau)\, d\sigma_1$$

seront connues, car les points situés dans l'intérieur de l'aire σ_1 ont l'abscisse comprise entre $t_0 - T_0$ et t_0.

On en déduit que les fonctions $z_i(t)$ seront connues depuis $t = t_0$ jusqu'à $t = t_1$, et par suite, en résolvant les équations intégrales (12), on pourra déterminer les $x_i(t)$ pour t compris entre t_0 et t_1.

6. La proposition qu'on tire de là est un théorème général sur les équations intégro-différentielles qu'il est facile d'énoncer. Mais voyons son application aux équations héréditaires du mouvement.

Si l'on pose dans les équations (A‴)

$$q'_i = p'_i,$$

elles s'écriront

$$p'_l + b_l q_l + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{ls}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau = \mathfrak{Q}_l,$$
$$q'_l - p_l = 0,$$

qui rentrent dans la forme générale des équations intégro-différentielles (11) en supposant dans celles-ci quelques noyaux nuls.

Donc on aura le théorème suivant :

Si l'on connaît les déplacements pendant une période de temps égale à la durée de l'hérédité et si l'on connaît les forces dans un intervalle de temps suivant, on pourra calculer les déplacements qui ont lieu pendant cet intervalle de temps.

III. — Propriétés de quelques intégrales.

1. Théorème I. — *Si* $F(\xi)$ *est une fonction positive décroissante pour* $0 \leqq \xi < T_0$,

$$\int_0^{T_0} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0,$$

α étant une constante positive.

En effet, soit

$$\frac{2(\lambda-1)\pi}{\alpha} < T_0 \leqq \frac{2\lambda\pi}{\alpha},$$

h étant un nombre entier. Posons

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \omega.$$

On aura

$$\int_0^{\omega} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0, \qquad \int_{\omega}^{2\omega} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0, \qquad \ldots,$$
$$\int_{(\lambda-1)\omega}^{T_0} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{T_0} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0.$$

COROLLAIRE. — *Si*

$$\frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s F_{is}(\xi)\,a_i a_s = \Phi(\xi \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

est une forme définie positive, et si

$$\frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s F'_{is}(\xi)\,a_i a_s = \psi(\xi \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

est une forme définie négative,

$$\int_0^{T_0} \Phi(\xi \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_n) \sin\alpha\xi \, d\xi > 0,$$

quelles que soient les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha$, *pourvu que cette dernière constante soit positive.*

Remarque. — Si, outre les conditions que nous avons posées précédemment, on suppose que

$$|F(\xi)| < \frac{m}{\xi^{1+\varepsilon}}, \qquad |F_{is}(\xi)| < \frac{m}{\xi^{1+\varepsilon}},$$

m étant une constante positive déterminée et $\varepsilon > 0$, on pourra prendre dans les inégalités précédentes $T_0 = \infty$, c'est-à-dire

$$\int_0^{\infty} F(\xi) \sin\alpha\xi \, d\xi > 0, \qquad \int_0^{\infty} \Phi(\xi \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_n) \sin\alpha\xi \, d\xi > 0.$$

2. THÉORÈME II. — *Si, quelle que soit la constante* α, *on a*

$$\int_0^{T} F(\xi) \sin\alpha\xi \, d\xi = 0 \tag{13}$$

ou

$$\int_0^{T_0} F(\xi) \cos\alpha\xi \, d\xi = 0, \tag{14}$$

$F(\xi)$ *étant une fonction finie et continue, il s'ensuivra* $F(\xi) = 0$.

On pourrait déduire cette proposition de la théorie des systèmes orthogonaux fermés, mais nous en donnerons une démonstration directe.

Prenons

$$\eta = \frac{\pi\xi}{T_0}, \qquad F\left(\frac{T_0\eta}{\pi}\right) = F_1(\eta), \qquad \beta = \frac{T_0\alpha}{\pi},$$

on aura, si l'équation (13) est satisfaite,

$$\int_0^\pi F_1(\eta) \sin \beta\eta \, d\eta = 0,$$

quelle que soit la constante β.

Soit $f(\eta)$ une fonction continue périodique impaire avec la période 2π ayant dans une période un nombre fini d'oscillations. Elle pourra se développer en série de Fourier uniformément convergente et l'on aura

$$f(\eta) = \sum_1^\infty {}_n A_n \sin n\eta,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\pi F_1(\eta) f(\eta) \, d\eta = 0. \tag{13'}$$

Si $F_1(\eta)$ n'est pas nul en un point de l'intervalle $(0, \pi)$ on pourra trouver un intervalle $(\eta_1, \eta_1 + \varepsilon)$ intérieur à $(0, \pi)$ et dans lequel $F_1(\eta)$ conserve le même signe. Or on pourra choisir :

$$\begin{array}{lll} f(\eta) = 0 & \text{pour } \eta \text{ compris entre} & 0 \text{ et } \eta_1, \\ f(\eta) > 0 & \quad\text{»} & \eta_1 \text{ et } \eta_1 + \varepsilon, \\ f(\eta) = 0 & \quad\text{»} & \eta_1 + \varepsilon \text{ et } \pi; \end{array}$$

c'est pourquoi

$$\int_0^\pi F_1(\eta) f(\eta) \, d\eta$$

ne serait pas nul, ce qui est en contradiction avec l'équation (13'). Donc $F_1(\eta)$ doit être nul en tous les points de l'intervalle $(0, \pi)$, ce qui démontre la première partie du théorème.

On démontre la seconde partie du théorème II directement par un procédé analogue à celui par lequel nous en avons démontré la première partie, mais il est inutile de le rapporter, parce que l'on peut remarquer que par dérivation par rapport à α on tire de l'équation (14) l'égalité

$$\int_0^{T_0} \xi F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi = 0 \tag{14}$$

et en vertu de la première partie du théorème II on a $F(\xi)=0$.

3. THÉORÈME III. — *Si $f(x)$ est une fonction périodique ayant la période* 2ω

$$\int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

sera périodique avec la même période.

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)f(\tau)\,d\tau &= \int_0^{T_0} F(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^{T_0} F(\tau)f(t+2\omega-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{t+2\omega-T_0}^{t+2\omega} F(t+2\omega-\tau)f(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

CHAPITRE II.

PHÉNOMÈNES HÉRÉDITAIRES LINÉAIRES. CAS D'UN SEUL DEGRÉ DE LIBERTÉ.

I. — Principes énergétiques.

1. Prenons l'équation (a'') (1),

$$(a'') \qquad q''(t)+bq(t)=\int_0^{T_0} F(\tau)q(t-\tau)\,d\tau+\mathfrak{Q}.$$

En multipliant les deux membres par $q'(t)$, on a

$$q'(t)\,q''(t)+bq(t)\,q'(t)=q'(t)\int_0^{T_0} F(\tau)q(t-\tau)\,d\tau+\mathfrak{Q}q',$$

(1) Il est utile de comparer les calculs suivants, ainsi que ceux du paragraphe II, Chap. III, avec les calculs qui sont effectués dans le dernier paragraphe du dernier chapitre du Mémoire précédemment cité : *Variazioni e fluttuazioni nel numero d'individui* etc. (*Voir* Introduction.)

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)-q(t)\int_0^{T_0}F(\tau)q(t-\tau)\,d\tau\right)$$
$$=-q(t)\int_0^{T_0}F(\tau)q'(t-\tau)\,d\tau+2q'$$
$$=\quad q(t)\int_0^{T_0}F(\tau)\frac{d}{d\tau}[q(t-\tau)-q(t)]\,d\tau+2q'.$$

En effectuant une intégration par parties dans la deuxième intégrale et en tenant compte que $F(T_0)=0$, on a

$$\text{(15)}\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)-q(t)\int_0^{T_0}F(\tau)q(t-\tau)\,d\tau\right)$$
$$=-q(t)\int_0^{T_0}F'(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]\,d\tau+2q'.$$

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{T_0}F(\tau)q^2(t-\tau)\,d\tau=-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)\frac{d}{d\tau}[q^2(t-\tau)-q^2(t)]\,d\tau.$$

Par une intégration par parties, elle peut s'écrire

$$\text{(16)}\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{T_0}F(\tau)q^2(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F'(\tau)[q^2(t-\tau)-q^2(t)]\,d\tau.$$

En ajoutant membre à membre les équations (15) et (16), on a

$$\text{(17)}\qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)q^2(t-\tau)\,d\tau\right.$$
$$\left.-\int_0^{T_0}F(\tau)q(t-\tau)q(t)\,d\tau\right\}$$
$$=-q(t)\int_0^{T_0}F'(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]\,d\tau$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F'(\tau)[q^2(t-\tau)-q^2(t)]\,d\tau+2q'$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F'(\tau)[q^2(t-\tau)+q^2(t)-2q(t)q(t-\tau)]\,d\tau+2q'$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F'(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau+2q'.$$

Or

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)q^2(t-\tau)\,d\tau-\int_0^{T_0}F(\tau)q(t-\tau)q(t)\,d\tau\\
&=\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)q^2(t)\,d\tau\\
&=\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}\left[b-\int_0^{T_0}F(\tau)\,d\tau\right]q^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\\
&=\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$m=b-\int_0^{T_0}F(\tau)\,d\tau>0.$$

[*Voir* la formule (4), Chapitre I, § I.]

L'équation (17) pourra donc s'écrire

$$\begin{aligned}
(18)\qquad &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F'(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau=\mathfrak{Q}q'.
\end{aligned}$$

En multipliant par dt et en intégrant entre les temps t_0 et t, on aura

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}_1)\qquad &\left\{\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\right\}\\
&-\left\{\frac{1}{2}q'^2(t_0)+\frac{1}{2}mq^2(t_0)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t_0-\tau)-q(t_0)]^2\,d\tau\right\}\\
&-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt\left\{\int_0^{T_0}F'(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\right\}=\int_{t_0}^{t}\mathfrak{Q}q'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

On peut regarder l'équation précédente comme *l'équation fondamentale énergétique de la mécanique héréditaire linéaire pour les systèmes ayant un seul degré de liberté* (¹).

(¹) Si au lieu de partir de l'équation (a'') nous partons de l'équation équiva-

2. Nous allons maintenant analyser l'équation précédente. Le second membre est le *travail effectué par les forces*. Nous pouvons le désigner par $\mathcal{L}$.

$$\frac{1}{2} q'^2(t) = \mathrm{E}^{(c)} \tag{19}$$

est l'*énergie cinétique toujours positive*, c'est pourquoi

$$\frac{1}{2} q'^2(t) - \frac{1}{2} q'^2(t_0) = \mathrm{E}^{(c)} - \mathrm{E}_0^{(c)}$$

est *la variation de l'énergie cinétique.*

Considérons la quantité *toujours positive*

$$\frac{1}{2} m q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau = \Theta(t), \tag{C_1}$$

— Θ est *le potentiel des forces internes* [Chap. I, § I, formule (C_1)] et ne dépend que de l'état du système pendant la période de temps égale à la durée de l'hérédité qui précède l'instant actuel t.

Puisque $\mathrm{F}'(\tau)$ est négative

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\xi \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}'(\tau)[q(\xi - \tau) - q(\xi)]^2 d\tau = \mathrm{E}^{(d)} \tag{C'_1}$$

est une *quantité toujours positive.*

---

lente (a''_1) en multipliant les deux membres par q', on trouve

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} q'^2(t) + \frac{1}{2} m q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau\right\}$$

$$= -\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\, q'(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q} q'$$

$$= -\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] \frac{d}{dt}[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau + \mathfrak{Q} q'$$

$$= -\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau) \frac{d}{d\tau}[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau + \mathfrak{Q} q'$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}'(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau + \mathfrak{Q} q',$$

c'est-à-dire on trouve l'équation (18). C'est donc une manière plus simple de l'obtenir, mais qui ne diffère pas essentiellement de celle qu'on a suivie dans le texte (*voir* la Note au n° 2 du paragraphe II, Chap. III).

L'équation (D_1) s'écrira donc

$$(D'_1) \qquad [E^{(c)} - E_0^{(c)}] + [\Theta(t) - \Theta(t_0)] + E^{(d)} = \mathcal{L}.$$

Si nous posons

$$(20) \qquad E^{(c)} + \Theta(t) = E^{(m)},$$

nous aurons

$$(D''_1) \qquad E^{(m)} - E^{m}_{(0)} + E^{(d)} = \mathcal{L}$$

et par suite

$$E^{(m)} - E_0^{(m)} < \mathcal{L}.$$

Donc *le travail (positif ou négatif) que les forces externes doivent effectuer pour amener le système d'un état à un autre est toujours supérieur à la variation que la fonctionnelle* $E^{(m)}$ *subit dans le même passage.*

Remarquons que cette proposition est une conséquence des *hypothèses* formulées dans le n° **4**, § I, Chapitre I.

Si nous appelons *par définition* Θ *l'énergie potentielle interne*, $E^{(m)}$ l'*énergie mécanique*, la formule (D'_1) peut s'interpréter de la manière suivante :

Théorème I. — *Le travail des forces externes dépasse toujours la variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle interne d'une quantité positive,* ou encore [formule (D''_1)] :

Le travail des forces externes dépasse toujours la variation de l'énergie mécanique d'une quantité positive.

On peut aussi énoncer ce théorème de la manière suivante en supposant $\mathcal{L}$ positif :

Le travail des forces externes ne se transforme jamais complètement en énergie mécanique, mais il reste toujours une partie résiduelle de ce travail qui ne se transforme pas en énergie mécanique.

Et si nous supposons les forces externes nulles et par conséquent $\mathcal{L} = 0$, on a :

Théorème II. — *S'il n'y a pas de forces externes, l'énergie mécanique diminue continuellement.*

Supposons $\mathcal{L}$ négatif, alors le système effectue un travail externe $-\mathcal{L}$ et l'on a :

THÉORÈME III. — *La diminution d'énergie mécanique dépasse toujours le travail externe effectué,* ou même :

L'énergie mécanique ne se transforme qu'en partie en travail mécanique externe.

3. Si $q(t)=q(t_0)$ et $q'(t)=q'(t_0)$, on peut dire que le système au temps t a le même déplacement et les mêmes vitesses qu'au temps t_0, mais, au point de vue de l'hérédité, on ne peut pas conclure que le système est revenu aux conditions initiales. Nous dirons que *le système est revenu aux conditions initiales si*

$$q(t-\tau)=q(t_0-\tau) \qquad \text{pour } 0 \leqq \tau \leqq T_0$$

(*voir* Chap. I, § I, nº **7**).

On pourra alors énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME IV. — *Si le système revient aux conditions initiales, l'énergie potentielle reprend la même valeur qu'elle avait initialement.*

THÉORÈME V. — *Pendant une période de temps au bout de laquelle le système revient aux conditions initiales, les forces effectuent un travail positif.*

Si le système revient aux conditions initiales, rien n'est changé au point de vue mécanique et, puisque les forces ont produit un travail positif, il s'ensuit qu'il y a un travail mécanique dissipé. La mesure du travail dissipé s'obtient de la formule (D''_1) en prenant $E^{(m)}=E^{(m)}_0$. Par suite on a

$$E^{(d)}=\mathcal{L}.$$

Donc $E^{(d)}$ *est le travail dissipé lorsqu'on revient aux conditions initiales.*

D'après le principe de la conservation de l'énergie, ce travail doit se transformer en d'autres formes d'énergie.

Si l'on ne revient pas aux conditions initiales, on ne sait pas si $E^{(d)}$ est une quantité de travail mécanique qui s'est tranformé dans une autre forme d'énergie.

4. Il faut bien s'entendre sur la signification des mots dont nous avons fait usage. Ce n'est que par *définition*, que nous avons appelé Θ *énergie potentielle*, $E^{(m)}$ *énergie mécanique;* mais les résultats précédents montrent que ces *définitions* sont compatibles avec les principes de l'énergétique.

II. — Mouvement spontané.

1. Un mouvement est *spontané* s'il a lieu sans que des forces externes agissent. Si des forces externes agissent, le mouvement est *forcé*. Considérons maintenant le mouvement d'un système ayant un seul degré de liberté dans le cas héréditaire.

S'il n'y a pas de forces externes, c'est-à-dire si $\mathfrak{Q} = 0$, l'équation (a'') deviendra

$$q''(t) + bq(t) = \int_0^{T_0} F(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

où $F(\tau)$ est positif et $F'(\tau) < 0$.

Alors l'équation (18) s'écrira

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}mq^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)[q(t-\tau) - q(t)]^2\, d\tau\right\} \tag{22}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)[q(t-\tau) - q(t)]^2\, d\tau < 0,$$

et, en tenant compte des égalités (19), (C_1), (20),

$$\frac{dE^{(m)}}{dt} < 0.$$

Donc, comme premier théorème sur le mouvement spontané, on a le théorème II du paragraphe précédent, c'est-à-dire : *s'il n'y a pas de forces externes, l'énergie mécanique diminue toujours.*

On tire de là comme conséquence :

Théorème II. — *S'il n'y a pas de forces externes, tout mouvement périodique est impossible.*

En effet, s'il existait un mouvement périodique, $q(t)$ et $q'(t)$ seraient des fonctions périodiques du temps. Par suite, l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2}q'(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}F(\tau)[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau \tag{23}$$

serait une fonction périodique de t. Donc cette quantité ne pourrait pas diminuer constamment, comme le prouve l'inégalité (22).

2. Théorème III. — *S'il n'y a pas de forces externes, $q(t)$ et $q'(t)$ doivent se conserver toujours comprises entre des limites finies à partir d'un certain instant initial où ils ont des valeurs déterminées.*

En effet, si la valeur absolue d'une des deux quantités q ou q' pouvait devenir aussi grande que l'on veut, la quantité (23) aussi pourrait croître indéfiniment, ce qui est en contradiction avec la formule (22). Ce théorème peut être aussi énoncé de la manière suivante:

S'il n'y a pas de forces externes, le mouvement est toujours borné à partir d'un certain temps initial.

En prenant

$$|q'(t_0)| \quad \text{et} \quad |q(\tau)|, \qquad (t_0-T_0\leqq\tau\leqq t_0)$$

suffisamment petits,

$$|q'(t)| \quad \text{et} \quad |q(t)|$$

se conserveront pour $t_0<t<\infty$ plus petits qu'une quantité σ quelconque donnée. Donc :

Théorème IV. — *Il y a stabilité de l'équilibre lorsque les déplacements sont nuls.*

Ce théorème est le fondement de la *théorie des petits mouvements spontanés dans le cas de l'hérédité*, car il prouve l'existence de déplacements qui se conservent aussi petits que l'on veut, pourvu que l'on choisisse d'une manière convenable les conditions initiales.

3. L'équation (21) peut s'écrire aussi [*voir* formule (a')]

$$q''+bq-\int_{t-T_0}^{t}F(t-\tau)\,q(\tau)\,d\tau=0.$$

Par une intégration entre les limites t_0 et t, on trouve

$$(24)\qquad q'(t) - q'(t_0) + b\int_{t_0}^{t} q(\tau)\,d\tau - \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi-T_0}^{\xi} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\tau = 0.$$

Envisageons la dernière intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi-T_0}^{\xi} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\tau.$$

Si nous prenons $F = F_{is}$, elle est l'intégrale (11_1) du Chapitre I, § II, n° **5**. Supposons que t soit si grand que dans le calcul de cette intégrale on puisse se rapporter à la figure 3. On aura

$$I = \int_{\sigma} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma,$$

où σ est l'aire du parallélogramme ABCD. Considérons maintenant le parallélogramme $\sigma' = $ ABHF qu'on obtient de σ en retranchant l'aire du triangle isoscèle et rectangle $\sigma_1 = $ AFD et en ajoutant l'aire du triangle $\sigma_3 = $ HBG égale à AFD. C'est pourquoi

$$I = \int_{\sigma'} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma' - \int_{\sigma_1} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma_1 + \int_{\sigma_3} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma_3.$$

Mais $|q|$ ne peut pas dépasser une certaine limite M (n° **2**, théorème III) et $F(\xi-\tau)$ est positive et inférieure à une certaine limite N. D'autre part l'aire des triangles σ_1 et σ_3 est $\frac{1}{2}T_0^2$, par conséquent

$$\left|\int_{\sigma_1} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma_1\right| < \frac{1}{2}MNT_0^2,$$

$$\left|\int_{\sigma_3} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma_3\right| < \frac{1}{2}MNT_0^2.$$

On pourra donc écrire

$$I = \int_{\sigma'} F(\xi-\tau)\,q(\tau)\,d\sigma' + \theta MNT_0^2,$$

où θ est un nombre compris entre $+1$ et -1. Or

$$\mathrm{I}' = \int_{\sigma'} \mathrm{F}(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma' = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{\tau+\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\xi - \tau)\, d\xi$$
$$= \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau \int_{0}^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\eta)\, d\eta.$$

Par suite l'équation (24) pourra s'écrire

$$(24') \quad q'(t) - q'(t_0) + \left(b - \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\eta)\, d\eta\right) \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau - \theta \mathrm{MNT}_0^2 = 0.$$

Et en rappelant [formule (4), Chap. I, § I, n° **4**] que

$$b - \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\eta)\, d\eta = m,$$

il viendra

$$q'(t) - q'(t_0) + m \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau - \theta \mathrm{MNT}_0^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau = \frac{\theta \mathrm{MNT}_0^2}{m(t - t_0)} - \frac{q'(t) - q'(t_0)}{m(t - t_0)}.$$

En faisant croître indéfiniment t, on trouvera

$$\lim_{t=\infty} \left[\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau\right] = 0,$$

car $|q'|$ est inférieure à une limite finie (théorème III, n° **2**).

On aura donc :

Théorème V. — *La moyenne asymptotique du déplacement est nulle.*

Évidemment

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q'(\tau)\, d\tau = \frac{1}{t - t_0} [q(t) - q(t_0)]$$

et par suite

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q'(\tau)\, d\tau = 0,$$

qui amène au théorème suivant :

Théorème VI. — *La moyenne asymptotique de la vitesse est nulle.*

4. Si les moyennes asymptotiques du déplacement et de la vitesse sont nulles, ces quantités tendent vers zéro asymptotiquement ou doivent osciller autour de la valeur zéro.

Montrons par un exemple que l'on peut toujours prendre les conditions initiales de manière que le déplacement et la vitesse tendent asymptotiquement vers zéro. A cet effet prouvons que l'on peut toujours satisfaire l'équation (21) en prenant

$$q(t) = e^{-zt}, \tag{25}$$

z étant positif.

En remplaçant $q(t)$ dans (21) par l'expression (25), on a

$$z^2 e^{-zt} + b e^{-zt} - e^{-zt} \int_0^{T_0} F(\tau) e^{z\tau}\, d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$z^2 + b - \int_0^{T_0} F(\tau) e^{z\tau}\, d\tau = 0.$$

Posons

$$f(z) = z^2 + b - \int_0^{T_0} F(\tau) e^{z\tau}\, d\tau.$$

$f(z)$ est une fonction entière de z. Pour $z = 0$, nous avons

$$f(0) = m$$

et, pour $z = \infty$,

$$f(\infty) = -\infty;$$

donc il y a une racine réelle positive de l'équation

$$f(z) = 0,$$

ce qui prouve que l'expression (25) satisfait l'équation (21) si l'on remplace z par cette racine. On en tire

$$q'(t) = -z e^{-zt}$$

et, par suite, le déplacement et la vitesse $q(t)$ et $q'(t)$ tendent asymptotiquement vers zéro.

III. — Cycle périodique forcé.

1. Nous allons examiner le cas où les mouvements sont périodiques et de type harmonique, c'est-à-dire que l'on a

$$q(t) = \alpha \sin \mathrm{K}t + \beta \cos \mathrm{K}t, \tag{26}$$

α, β, K étant des quantités constantes.

Si nous remplaçons q par l'expression (26) dans l'équation (a''), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&-\alpha \mathrm{K}^2 \sin \mathrm{K}t - \beta \mathrm{K}^2 \cos \mathrm{K}t + b\alpha \sin \mathrm{K}t + b\beta \cos \mathrm{K}t \\
&\quad - \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)[\sin \mathrm{K}t(\alpha \cos \mathrm{K}\tau + \beta \sin \mathrm{K}\tau) + \cos \mathrm{K}t(-\alpha \sin \mathrm{K}\tau + \beta \cos \mathrm{K}\tau)]\,d\tau = \mathfrak{Q},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\sin \mathrm{K}t \left\{ \alpha(-\mathrm{K}^2 + b) - \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)(\alpha \cos \mathrm{K}\tau + \beta \sin \mathrm{K}\tau)\,d\tau \right\} \\
&+ \cos \mathrm{K}t \left\{ \beta(-\mathrm{K}^2 + b) - \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)(-\alpha \sin \mathrm{K}\tau + \beta \cos \mathrm{K}\tau)\,d\tau \right\} = \mathfrak{Q}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau) \cos \mathrm{K}\tau\,d\tau = \mathfrak{L}, \tag{27}$$

$$\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau) \sin \mathrm{K}\tau\,d\tau = \mathfrak{M} \tag{27'}$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
&\sin \mathrm{K}t \left\{ \alpha(-\mathrm{K}^2 + b) - (\alpha\mathfrak{L} + \beta\mathfrak{M}) \right\} \\
&+ \cos \mathrm{K}t \left\{ \beta(-\mathrm{K}^2 + b) - (\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M}) \right\} = \mathfrak{Q}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(-\mathrm{K}^2 + b) - (\alpha\mathfrak{L} + \beta\mathfrak{M}) &= \mathrm{A}, \\ \beta(-\mathrm{K}^2 + b) - (\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M}) &= \mathrm{B}. \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Il viendra

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{A} \sin \mathrm{K}t + \mathrm{B} \cos \mathrm{K}t, \tag{29}$$

d'où le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si le déplacement est harmonique, la force sera aussi harmonique avec la même période. La phase sera en général changée.*

2. Si le déplacement est périodique, supposons de pouvoir le développer en une série de Fourier uniformément convergente, ayant aussi les séries des dérivées du premier et du second ordre des termes, uniformément convergentes.

Soit $\frac{2\pi}{K}$ la période

$$q(t)=\sum_{0}^{\infty}{}_{p}(\alpha_p \sin pKt+\beta_p \cos pKt) \tag{26'}$$

et l'on trouvera

$$\mathfrak{Q}(t)=\sum_{0}^{\infty}{}_{p}(A_p \sin pKt+B_p \cos pKt), \tag{29'}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A_p&=\alpha_p(-p^2K^2+b)-(\alpha_p\mathfrak{L}_p+\beta_p\mathfrak{M}_p),\\ B_p&=\beta_p(-p^2K^2+b)-(\beta_p\mathfrak{L}_p-\alpha_p\mathfrak{M}_p)\end{aligned}\right. \tag{28'}$$

étant

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{L}_p&=\int_0^{T_0}F(\tau)\cos pK\tau\,d\tau,\\ \mathfrak{M}_p&=\int_0^{T_0}F(\tau)\sin pK\tau\,d\tau.\end{aligned}\right. \tag{30}$$

$\mathfrak{Q}(t)$ est donc périodique avec la même période que $q(t)$.

Les équations (28), (28′) peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &(b-K^2-\mathfrak{L})\alpha-\mathfrak{M}\beta=A,\\ &\mathfrak{M}\alpha+(b-K^2-\mathfrak{L})\beta=B;\end{aligned}\right. \tag{28''}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(b-p^2K^2-\mathfrak{L}_p)\alpha_p-\mathfrak{M}_p\beta_p=A_p,\\ &\mathfrak{M}_p\alpha_p+(b-p^2K^2-\mathfrak{L}_p)\beta_p=B_p.\end{aligned}\right. \tag{28'''}$$

Le déterminant des coefficients de α et β dans le système d'équations (28″) est

$$\Delta=(b-K^2-\mathfrak{L})^2+\mathfrak{M}^2.$$

A cause du théorème I du paragraphe III du Chapitre I, $\mathfrak{M}$ ne peut pas s'annuler, donc Δ aussi ne peut pas s'annuler et il est toujours positif. En résolvant les équations (28″) par rapport à α et β, on trouve

$$\alpha=\frac{1}{\Delta}[(b-K^2-\mathfrak{L})A+\mathfrak{M}B],$$

$$\beta=\frac{1}{\Delta}[-\mathfrak{M}A+(b-K^2-\mathfrak{L})B].$$

De même en posant

$$\Delta_p = (b - p^2 K^2 - \mathfrak{L}_p)^2 + \mathfrak{M}_p^2,$$

on aura

$$\Delta_p > 0$$

et, en résolvant les équations (28‴) par rapport à α_p, β_p,

$$\alpha_p = \frac{1}{\Delta_p}[(b - p^2 K^2 - \mathfrak{L}_p) A_p + \mathfrak{M}_p B_p],$$

$$\beta_p = \frac{1}{\Delta_p}[(b - p^2 K^2 - \mathfrak{L}_p) B_p - \mathfrak{M}_p A_p].$$

Supposons que les forces externes soient nulles. Cela correspond à prendre

$$A_p = B_p = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty);$$

c'est pourquoi l'on aura

$$\alpha_p = \beta_p = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et, par suite,

$$q = 0.$$

On en déduit *qu'il n'y a pas de mouvement spontané périodique.*

On a ainsi une nouvelle démonstration du théorème II donné dans le paragraphe II du Chapitre II.

3. Lorsque le déplacement est périodique, le système revient aux conditions initiales après chaque période. Un point d'un plan ayant pour abscisse et pour ordonnée q et $\mathfrak{Q}$ décrit pendant chaque période le même cycle fermé ([1]). Le travail effectué par les forces externes pendant une période doit être positif d'après le théorème V du paragraphe I. On pourrait le calculer en évaluant par la formule (C'_1) l'énergie mécanique dissipée. Mais c'est plus simple de le calculer directement. Il suffit en effet de déterminer

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{2\pi}{K}} \mathfrak{Q}(t) q'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{K}} \sum_0^{\infty}{}_p (A_p \sin pKt + B_p \cos pKt) \sum_0^{\infty}{}_n (\alpha_n \cos pKt - \beta_n \sin pKt) pK\, dt.$$

([1]) Voir *Leçons sur les fonctions de lignes* professées à la Sorbonne par M. Vito Volterra (citées ci-dessus), Chapitre VII.

Et par des théorèmes bien connus sur les intégrales des fonctions trigonométriques, on trouve

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{2\pi}{K}} \sum_0^{\infty}{}_p (-A_p \beta_p \sin^2 pKt + B_p \alpha_p \cos^2 pKt) pK\, dt.$$

Or

$$\int_0^{\frac{2\pi}{K}} \sin^2 pKt . pK\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{K}} \cos^2 pKt . pK\, dt = p\pi ;$$

donc

$$\mathcal{L} = \pi \sum_0^{\infty}{}_p p(\alpha_p B_p - \beta_p A_p)$$

et, en vertu des équations (28‴),

$$\mathcal{L} = \pi \sum_0^{\infty}{}_p p(\alpha_p^2 + \beta_p^2) \mathfrak{M}_p.$$

Puisque $\mathfrak{M}_p$ est positif [*voir* formule (30) et théorème I du paragraphe III du Chapitre I] $\mathcal{L}$ *sera positif*, ce qui confirme le théorème V du paragraphe I de ce Chapitre.

4. Dans le cas où le déplacement est harmonique, la série (26′) se réduit à un seul terme [formule (26)] et le travail devient

$$\mathcal{L} = \pi(\alpha^2 + \beta^2) \mathfrak{M}.$$

L'expression (26) peut s'écrire

$$q(t) = G \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varepsilon\right), \tag{31}$$

où G est l'*amplitude*, T la *période*, ε la *phase*,

$$G^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad \alpha = G \cos 2\pi\varepsilon, \qquad \beta = G \sin 2\pi\varepsilon,$$

$$K = \frac{2\pi}{T} \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

on aura donc

$$\mathcal{L} = \pi G^2 \mathfrak{M} = \pi G^2 \int_0^{T_0} F(\tau) \sin \frac{2\pi\tau}{T} d\tau. \tag{32}$$

Posons

$$b - K^2 - \mathfrak{L} = H \cos 2\pi\varepsilon',$$
$$\mathfrak{M} = H \sin 2\pi\varepsilon',$$

où

$$H = \left|\sqrt{(b - K^2 - \mathfrak{L})^2 + \mathfrak{M}^2}\right|.$$

H et ε' ne dépendront que de la période et du coefficient d'hérédité, outre que du coefficient b. Puisque $\mathfrak{M}$ est positif, on aura

$$o < \varepsilon' < \frac{1}{2}$$

et les équations (28″) deviendront

$$A = GH \cos 2\pi(\varepsilon + \varepsilon'),$$
$$B = GH \sin 2\pi(\varepsilon + \varepsilon');$$

par suite, à cause des équations (29) et (32),

$$\mathfrak{Q} = GH \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + (\varepsilon + \varepsilon')\right], \tag{33}$$
$$\mathfrak{L} = \pi G^2 H \sin 2\pi\varepsilon'. \tag{34}$$

La formule (32) amène au théorème suivant :

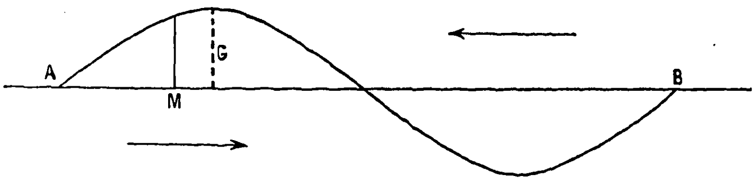
Le travail positif effectué pendant une période par les forces externes est proportionnel au carré de l'amplitude, dépend de la période, est une fonctionnelle du coefficient d'hérédité et est indépendant de la phase.

5. Changer ε en $\frac{1}{2} - \varepsilon$ équivaut à changer dans la formule (31) t en $-t$.

En vertu de la formule (34) *le travail effectué pendant un cycle ne changera pas.*

On peut représenter les valeurs du déplacement q par les ordonnées d'une sinusoïde de hauteur G et de base AB = T, les valeurs du temps étant les abscisses. Plaçons-nous au point M entre A et B, AM étant égal à $2\pi\varepsilon$. Si, à partir de l'instant O, la sinusoïde marche parallèlement à la base dans le sens BA (flèche supérieure) avec la vitesse 1, les ordonnées qui se présentent devant M seront les valeurs de q à chaque instant. Changer t en $-t$ équivaut à changer le sens du mouvement de la sinusoïde (flèche inférieure). Nous dirons dans ce cas que *les oscillations du déplacement q sont inverties.*

Fig. 4.



On pourra donc énoncer la proposition :

Le travail effectué par les forces externes pendant une période ne change pas en invertissant les oscillations du déplacement (*voir* le paragraphe suivant, n° 4).

CHAPITRE III.

PHÉNOMÈNES HÉRÉDITAIRES LINÉAIRES. CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ.

I. — Cycles périodiques forcés.

1. Considérons le cas où le système a n degrés de liberté et supposons que tous les mouvements soient harmoniques avec la même période, c'est-à-dire que les déplacements étant $q_1, q_2, \ldots, q_n$, on ait

$$q_i = \alpha^{(i)} \sin K t + \beta^{(i)} \cos K t. \tag{35}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (A″), on aura

$$\begin{aligned}
&- K^2 \sin K t \sum_1^n {}_s\, a_{is} \alpha^{(s)} - K^2 \cos K t \sum_1^n {}_s\, a_{is} \beta^{(s)} \\
&+ \sin K t \sum_1^n {}_s\, b_{is} \alpha^{(s)} + \quad \cos K t \sum_1^n {}_s\, b_{is} \beta^{(s)} \\
&- \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau) [\alpha^{(s)} \sin K(t-\tau) + \beta^{(s)} \cos K(t-\tau)]\, d\tau = \mathfrak{Q}_i.
\end{aligned}$$

En posant

(36) $$\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\cos K\tau\, d\tau = \mathfrak{P}_{is},$$

(36′) $$\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\sin K\tau\, d\tau = \mathfrak{M}_{is},$$

il viendra

$$\sin Kt \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathfrak{P}_{is})\alpha^{(s)} - \mathfrak{M}_{is}\beta^{(s)}]$$

$$+ \cos Kt \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathfrak{P}_{is})\beta^{(s)} + \mathfrak{M}_{is}\alpha^{(s)}] = \mathfrak{Q}_i,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{Q}_i = A^{(i)}\sin Kt + B^{(i)}\cos Kt,$$

où

$$A^{(i)} = \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathfrak{P}_{is})\alpha^{(s)} - \mathfrak{M}_{is}\beta^{(s)}],$$

$$B^{(i)} = \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathfrak{P}_{is})\beta^{(s)} + \mathfrak{M}_{is}\alpha^{(s)}].$$

2. Calculons maintenant le travail $\mathfrak{L}$ effectué par les forces externes pendant une période, et tout d'abord ne tenons pas compte de la condition $F_{is} = F_{si}$ (*voir* Chapitre I, § I, n° **5**). On trouvera

$$\mathfrak{L} = \int_0^{\frac{2\pi}{K}} \sum_1^n {}_i \mathfrak{Q}_i \frac{dq_i}{dt} dt = \pi \sum_1^n {}_i (\alpha^{(i)} B^{(i)} - \beta^{(i)} A^{(i)})$$

$$= \pi \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s (-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathfrak{P}_{is})(\alpha^{(i)}\beta^{(s)} - \alpha^{(s)}\beta^{(i)})$$

$$+ \pi \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \mathfrak{M}_{is}(\alpha^{(i)}\alpha^{(s)} + \beta^{(i)}\beta^{(s)})$$

$$= \pi \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathfrak{P}_{is}) - (-K^2 a_{si} + b_{si} - \mathfrak{P}_{si})]\alpha^{(i)}\beta^{(s)}$$

$$+ \pi \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \mathfrak{M}_{is}(\alpha^{(i)}\alpha^{(s)} + \beta^{(i)}\beta^{(s)}),$$

et puisque

$$a_{is} = a_{si}, \qquad b_{is} = b_{si},$$

on aura

$$\mathcal{L} = \pi \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s (\mathfrak{L}_{si} - \mathfrak{L}_{is}) \alpha^{(i)} \beta^{(s)}$$

$$+ \pi \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \mathfrak{M}_{is} (\alpha^{(i)} \alpha^{(s)} + \beta^{(i)} \beta^{(s)})$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s (\mathfrak{L}_{si} - \mathfrak{L}_{is}) (\alpha^{(i)} \beta^{(s)} - \alpha^{(s)} \beta^{(i)})$$

$$+ \pi \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \mathfrak{M}_{is} (\alpha^{(i)} \alpha^{(s)} + \beta^{(i)} \beta^{(s)}).$$

Posons

$$(37) \quad K = \frac{2\pi}{T}, \qquad \alpha^{(i)} = G^{(i)} \cos 2\pi\varepsilon^{(i)}, \qquad \beta^{(i)} = G^{(i)} \sin 2\pi\varepsilon^{(i)} \qquad (0 \leqq \varepsilon^{(i)} < 1,\ G^{(i)} > 0);$$

il viendra

$$(38) \qquad q_i = G^{(i)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varepsilon^{(i)} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(39) \qquad \mathcal{L} = \frac{\pi}{2} \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s (\mathfrak{L}_{si} - \mathfrak{L}_{is}) G^{(i)} G^{(s)} \sin 2\pi (\varepsilon^{(s)} - \varepsilon^{(i)})$$

$$+ \pi \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \mathfrak{M}_{is} G^{(i)} G^{(s)} \cos 2\pi (\varepsilon^{(s)} - \varepsilon^{(i)}),$$

où

$$(40) \qquad \mathfrak{L}_{si} - \mathfrak{L}_{is} = \int_0^{T_0} [F_{si}(\tau) - F_{is}(\tau)] \cos \frac{2\pi\tau}{T} d\tau,$$

$$(40') \qquad \mathfrak{M}_{is} = \int_0^{T_0} F_{is}(\tau) \sin \frac{2\pi\tau}{T} d\tau.$$

3. Si le déplacement est périodique avec la période $\frac{2\pi}{K}$ et si l'on suppose qu'il soit développable en série de Fourier uniformément convergente, les séries des dérivées du premier et du second ordre des termes étant aussi uniformément convergentes, on trouvera

$$q_l = \sum_1^\infty {}_p (\alpha_p^{(l)} \sin p\mathrm{K}t + \beta_p^{(l)} \cos p\mathrm{K}t),$$

$$\mathfrak{Q}_l = \sum_1^\infty {}_p (\mathrm{A}_p^{(l)} \sin p\mathrm{K}t + \mathrm{B}_p^{(l)} \cos p\mathrm{K}t),$$

avec

$$\mathrm{A}_p^{(l)} = \sum_1^n {}_s [(-p^2\mathrm{K}^2 a_{ls} + b_{ls} - \mathfrak{L}_{ls}^{(p)})\alpha_p^{(s)} - \mathfrak{M}_{ls}^{(p)}\beta_p^{(s)}],$$

$$\mathrm{B}_p^{(l)} = \sum_1^n {}_s [(-p^2\mathrm{K}^2 a_{ls} + b_{ls} - \mathfrak{L}_{ls}^{(p)})\beta_p^{(s)} + \mathfrak{M}_{ls}^{(p)}\alpha_p^{(s)}],$$

et, puisque le travail $\mathfrak{L}$ effectué par les forces externes pendant une période est

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\mathrm{K}}} \sum_1^n \mathfrak{Q}_l \frac{dq_l}{dt} dt,$$

on aura

$$(41) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty {}_p p \left\{ \sum_1^n {}_l \sum_1^n {}_s (\mathfrak{L}_{sl}^{(p)} - \mathfrak{L}_{ls}^{(p)})(\alpha_p^{(l)}\beta_p^{(s)} - \alpha_p^{(s)}\beta_p^{(l)}) \right. \\ &\qquad \left. + 2 \sum_1^n {}_l \sum_1^n {}_s \mathfrak{M}_{ls}^{(p)} (\alpha_p^{(l)}\alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(l)}\beta_p^{(s)}) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty {}_p p \left\{ \sum_1^n {}_l \sum_1^n {}_s (\mathfrak{L}_{sl}^{(p)} - \mathfrak{L}_{ls}^{(p)}) \mathrm{G}_p^{(l)} \mathrm{G}_p^{(s)} \sin 2\pi(\varepsilon_p^{(s)} - \varepsilon_p^{(l)}) \right. \\ &\qquad \left. + 2 \sum_1^n {}_l \sum_1^n {}_s \mathfrak{M}_{ls}^{(p)} \mathrm{G}_p^{(l)} \mathrm{G}_p^{(s)} \cos 2\pi(\varepsilon_p^{(s)} - \varepsilon_p^{(l)}) \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a supposé

$$\alpha_p^{(l)} = \mathrm{G}_p^{(l)} \cos 2\pi\varepsilon_p^{(l)}, \qquad \beta_p^{(l)} = \mathrm{G}_p^{(l)} \sin 2\pi\varepsilon_p^{(l)};$$

$$\mathfrak{L}_{sl}^{(p)} = \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_{sl}(\tau) \cos \frac{2\pi p\tau}{\mathrm{T}} d\tau, \qquad \mathfrak{M}_{sl}^{(p)} = \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_{sl}(\tau) \sin \frac{2\pi p\tau}{\mathrm{T}} d\tau.$$

4. Si dans la formule (39) on change toutes les phases d'une même quantité constante, *le travail $\mathfrak{L}$ ne changera pas*. Changeons maintenant toutes les $\varepsilon^{(i)}$ en $\frac{1}{2} - \varepsilon^{(i)}$, le travail (39) deviendra

$$\mathcal{L}' = \frac{\pi}{2} \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{s} (\mathcal{C}_{si} - \mathcal{C}_{is}) G^{(i)} G^{(s)} \sin 2\pi(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(s)})$$

$$+ \pi \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{s} \mathfrak{M}_{is} G^{(i)} G^{(s)} \cos 2\pi(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(s)}),$$

d'où

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \pi \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{s} (\mathcal{C}_{si} - \mathcal{C}_{is}) G^{(i)} G^{(s)} \sin 2\pi(\varepsilon^{(s)} - \varepsilon^{(i)}).$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, quels que soient les $G^{(i)}$ et les $\varepsilon^{(i)}$, sont

$$(42) \qquad \mathcal{C}_{si} - \mathcal{C}_{is} = 0 \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (40),

$$(42') \quad \mathcal{C}_{si} - \mathcal{C}_{is} = \int_{0}^{T_0} [F_{is}(\tau) - F_{si}(\tau)] \cos \frac{2\pi\tau}{T} \, d\tau = 0 \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Si cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la période T, il faut, en vertu du théorème II du paragraphe III du Chapitre I, que l'on ait

$$(43) \qquad F_{is}(\tau) = F_{si}(\tau) \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n)$$

et par suite seront satisfaites les conditions pour l'existence du potentiel héréditaire élémentaire, d'après ce que nous avons vu dans le n° 5 du paragraphe I du Chapitre I.

Réciproquement, si le potentiel héréditaire élémentaire existe, les équations (43) seront vérifiées et par suite les équations (42′) aussi, d'où l'on tire la relation $\mathcal{L} - \mathcal{L}' = 0$ et par conséquent on aura $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

Or, si dans les équations (33) on change les $\varepsilon^{(i)}$ en $\frac{1}{2} - \varepsilon^{(i)}$ elles deviennent

$$q_i = G^{(i)} \sin 2\pi \left(\frac{-t}{T} + \varepsilon^{(i)} \right),$$

c'est-à-dire cela correspond à changer t en $-t$ ou bien à invertir les oscillations de tous les déplacements q_i (*voir* paragraphe précédent, n° 5). On peut donc énoncer le théorème :

Il est nécessaire et suffisant que le potentiel héréditaire existe pour que le travail effectué par les forces externes pendant une période ne change pas, en invertissant les oscillations de tous les déplacements, quelles que soient leurs amplitudes, leurs phases et leur période.

5. Supposons maintenant que le potentiel héréditaire élémentaire existe et reprenons la formule (41). Puisque

$$\varphi_{si}^{(p)} = \varphi_{is}^{(p)}$$

elle deviendra

$$\mathfrak{L} = \pi \sum_1^\infty {}_p \, p \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \, \mathfrak{M}_{is}^{(p)} (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)})$$

et, en vertu de la formule (40′),

$$(41') \qquad \mathfrak{L} = \pi \int_0^{T_0} \sum_1^\infty {}_p \, p \left\{ \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \, F_{is}(\tau) (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)}) \right\} \sin \frac{2\pi p \tau}{T} d\tau$$

$$= \pi \sum_1^\infty {}_p \, f_p(\tau) \sin \frac{2\pi p \tau}{T} d\tau,$$

en posant

$$p \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \, F_{is}(\tau) (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)}) = f_p(\tau).$$

On aura en outre

$$p \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \, F'_{is}(\tau) (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)}) = f'_p(\tau).$$

Or les conditions que nous avons posées dans le n° **5** du paragraphe I du Chapitre I pour les formes (5) et (5′) nous montrent que

$$f_p(\tau) > 0, \qquad f'_p(\tau) < 0 \qquad (0 \leqq \tau \leqq T_0);$$

donc les $f_p(\tau)$ sont des fonctions positives et décroissantes et par suite, à cause du théorème I du paragraphe III du Chapitre I, la formule (41′) nous prouve que $\mathfrak{L}$ est positif. Par conséquent, on a le théorème :

Si tous les déplacements sont périodiques avec la même période, le travail effectué par les forces externes pendant une période est positif (voir, dans ce Chapitre, § II, n° **3**).

6. Si les forces externes sont nulles, leur travail sera nul pendant une période. Or il suffit qu'une seule au moins des quantités $\alpha_p^{(i)}$, $\beta_p^{(i)}$ ne soit pas nulle pour rendre $f_p(\tau)$ positif et $f'_p(\tau)$ négatif (*voir* numéro précédent) et par suite $\mathcal{L}$ [formule (41')] positif.

On en tire que tous les coefficients $\alpha_p^{(i)}$ et $\beta_p^{(i)}$ doivent être nuls et par suite les déplacements q_i devront être nuls. D'où le théorème :

Il n'y a aucun mouvement périodique compatible avec des forces externes nulles (*voir* § III, n° **1**).

II. — Énergétique héréditaire dans le cas général de l'hérédité linéaire.

1. Revenons aux formules et aux hypothèses des n^{os} **5**, **6** du paragraphe I du Chapitre I.

Multiplions les deux membres de chacune des équations (A'') par $q'_i(t)$. En les sommant par rapport à l'indice i, on trouvera

$$\begin{aligned}(44)\quad & \sum_1^n{}_i\, q'_i(t)\sum_1^n{}_s\, a_{is}q''_s(t)+\sum_1^n{}_i\, q'_i(t)\sum_1^n{}_s\, b_{is}q_s(t)\\ &=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_i\sum_s a_{is}q'_i(t)\,q'_s(t)+\frac{1}{2}\sum_i\sum_s b_{is}q_i(t)\,q_s(t)\right]\\ &=\sum_1^n{}_i\, q'_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau+\sum_1^n \mathfrak{Q}_i q'_i.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}& q'_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau\\ &=\frac{d}{dt}\left[q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau\right]-q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q'_s(t-\tau)\,d\tau\\ &=\frac{d}{dt}\left[q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau\right]+q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\frac{d}{d\tau}[q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau\\ &=\frac{d}{dt}\left[q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau\right]-q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0}F'_{is}(\tau)\,[q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau.\end{aligned}$$

2. D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau \\
&\quad = -\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\frac{d}{d\tau}[q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau) - q_i(t)\, q_s(t)]\, d\tau \\
&\quad = \int_0^{T_0} F'_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau) - q_i(t)\, q_s(t)]\, d\tau;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
q'_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau &= \frac{d}{dt}\Bigg[q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau\Bigg] \\
&- \int_0^{T_0}\sum_1^n{}_s F'_{is}(\tau)\Big\{q_i(t)[q_s(t-\tau) - q_s(t)] \\
&\qquad - \frac{1}{2} q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau) + \frac{1}{2} q_i(t)\, q_s(t)\Big\}\, d\tau \\
= \frac{d}{dt}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_s F_{is}(\tau)&\Big\{q_i(t)\, q_s(t-\tau) - \frac{1}{2} q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau)\Big\}\, d\tau \\
- \int_0^{T_0}\sum_1^n{}_s F'_{is}(\tau)&\Big\{\frac{1}{2} q_i(t)[q_s(t-\tau) - q_s(t)] \\
&\qquad - \frac{1}{2} q_s(t-\tau)[q_i(t-\tau) - q_i(t)]\Big\}\, d\tau
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i\, q'_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau \\
&\quad = \frac{d}{dt}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s F_{is}(\tau)\Big\{q_i(t)\, q_s(t-\tau) - \frac{1}{2} q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau)\Big\}\, d\tau \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s F'_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau) - q_i(t)][q_s(t-\tau) - q_s(t)]\, d\tau.
\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de l'équation (4) n'est que le premier membre de l'équation précédente. En le remplaçant par le second membre on trouve

$$\frac{d}{dt}\Bigg\{\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s a_{is}q'_i(t)\,q'_s(t)+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s b_{is}q_i(t)\,q_s(t)$$

$$-\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s F_{is}(\tau)\left[q_i(t)\,q_s(t-\tau)-\frac{1}{2}q_i(t-\tau)q_s(t-\tau)\right]d\tau\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s F'_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)-q_i(t)][q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau=\sum_{1}^{n}{}_i \mathfrak{Q}_i q'_i.$$

Mais

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s b_{is}q_i(t)q_s(t)-\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s F_{is}(\tau)\left[q_i(t)q_s(t-\tau)-\frac{1}{2}q_i(t-\tau)q_s(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s b_{is}q_i(t)\,q_s(t)-\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\,q_i(t)\,q_s(t)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s F_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)-q_i(t)][q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau.$$

Donc, à cause des équations (6),

$$(\mathrm{E})\quad \frac{d}{dt}\Bigg\{\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s a_{is}q'_i(t)\,q'_s(t)+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s m_{is}q_i(t)\,q_s(t)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s F_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)-q_i(t)][q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_i\sum_{1}^{n}{}_s F'_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)-q_i(t)][q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau=\sum_{1}^{n}{}_i \mathfrak{Q}_i q'_i \quad [1].$$

---

[1] Multiplions les deux membres des équations (A''_1) par q'_i. En les ajoutant

3. Or, nous savons que [*voir* équation (I)]

$$(\mathrm{F})\qquad \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}a_{is}q'_i(t)q'_s(t)=\mathrm{E}^{(c)}(t)$$

est l'énergie cinétique, toujours positive.

$$(\mathrm{G})\ \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}m_{is}q_iq_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)-q_i(t)][q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau=\Theta(t)$$

est une expression définie et positive, $-\Theta(t)$ étant le potentiel des forces internes [*voir* la formule (C)].

$$(\mathrm{C}')\quad -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}'_{is}(\tau)[q_i(t-\tau)-q_i(t)][q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau=\mathrm{E}^{(d)}$$

---

on trouve

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}a_{is}q'_iq'_s+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}m_{is}q_iq_s\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}_{is}(\tau)[q_i(t)-q_i(t-\tau)][q_s(t)-q_s(t-\tau)]\,d\tau\right\}$$
$$=-\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}_{is}(\tau)[q_s(t)-q_s(t-\tau)]\,q'_i(t-\tau)\,d\tau+\sum_{1}^{n}{}_{i}\mathfrak{Q}_iq'_i$$
$$=-\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}_{is}(\tau)[q_s(t)-q_s(t-\tau)]\frac{d}{d\tau}[q_i(t)-q_i(t-\tau)]\,d\tau+\sum_{1}^{n}{}_{i}\mathfrak{Q}_iq'_i$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}_{is}(\tau)\frac{d}{d\tau}\{[q_s(t)-q_s(t-\tau)][q_i(t)-q_i(t-\tau)]\}\,d\tau+\sum_{1}^{n}{}_{i}\mathfrak{Q}_iq'_i$$
$$=\ \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s}\mathrm{F}'_{is}(\tau)[q_i(t)-q_i(t-\tau)][q_s(t)-q_s(t-\tau)]\,d\tau+\sum_{1}^{n}{}_{i}\mathfrak{Q}_iq'_i.$$

On trouve ainsi d'une manière très rapide l'équation (E). Cependant ce procédé ne diffère pas d'une manière essentielle de celui qu'on a employé dans le texte (*voir* la note au n° 1 du paragraphe I du Chapitre II.)

est une expression définie et positive égale au potentiel dérivé changé de signe (*voir* n° **8**, § I, Chap. I).

$$\sum_{i}^{n} \mathfrak{Q}_i q'_i(t)\,dt$$

est le travail des forces externes pendant l'intervalle de temps $(t, t+dt)$. En intégrant les deux membres de l'équation (E) dans l'intervalle de temps (t_0, t) après les avoir multipliés par dt, on trouvera

$$\text{(D)} \qquad [E^{c}(t) - E^{c}(t_0)] + [\Theta(t) - \Theta(t_0)] + E^{d} = \mathfrak{L},$$

où

$$\mathfrak{L} = \int_{t_0}^{t} \sum_{i}^{n} \mathfrak{Q}_i q'_i\,dt$$

est le travail effectué par les forces externes pendant l'intervalle de temps (t_0, t).

En posant

$$\text{(H)} \qquad E^{c} + \Theta = E^{m},$$

l'équation (D) s'écrira

$$\text{(D')} \qquad E^{m}(t) - E^{m}(t_0) + E^{d} = \mathfrak{L},$$

et en appelant E^{m}, *par définition, l'énergie mécanique* (*voir* Chap. **II**, § I, n° **2**) on aura la proposition : *Le travail des forces externes dépasse toujours la variation de l'énergie mécanique d'une quantité positive.* Si

$$q_i(t-\tau) = q_i(t_0-\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \; (0 \leqq \tau \leqq T_0),$$

on pourra dire que le système revient au temps t aux conditions existantes au temps initial t_0. On aura alors

$$\mathfrak{L} = E^{d}$$

et par suite : *Le travail des forces externes, pendant une période de temps qui ramène le système aux conditions initiales, est positif.*

Il est égal à l'*énergie mécanique dissipée* et par suite transformée en d'autres formes d'énergie.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer ne sont que l'extension de ceux que nous avons trouvés au Chapitre II, § I, et étendent aussi ceux que nous avons démontrés pour le cas des cycles périodiques dans le paragraphe I de ce Chapitre, n° **5**.

On peut répéter ici les mêmes remarques que nous avons faites dans le n° **4** du paragraphe I, Chapitre II, au sujet des dénominations dont nous avons fait usage, et rappeler que les résultats obtenus sont les conséquences des hypothèses formulées dans le n° **5** du Chapitre I.

III. — Mouvements spontanés.

1. Si les forces externes manquent et si nous supposons vérifiées les suppositions du paragraphe précédent, on aura, à cause des équations (E), (F), (G), (H),

$$\frac{dE^{(m)}}{dt} < 0;$$

donc $E^{(m)}$ diminue toujours, d'où l'on tire les mêmes conséquences que nous avons énoncées dans le paragraphe II du Chapitre II, c'est-à-dire que *tout mouvement périodique est impossible* et que *les déplacements doivent rester compris entre des limites finies*.

En outre, *si les déplacements sont nuls, l'équilibre est stable*.

2. En prenant dans les équations (A′), $\mathfrak{Q}_1 = 0, \mathfrak{Q}_2 = 0, \ldots, \mathfrak{Q}_n = 0$, et en intégrant entre t_0 et t, on trouvera

$$\sum_1^n {}_s a_{is}[q'_s(t) - q'_s(t_0)] + \sum_1^n {}_s b_{is}\int_{t_0}^t q_s(\tau)\,d\tau - \sum_1^n {}_s \int_{t_0}^t d\xi \int_{\xi-T_0}^{\xi} F_{is}(\xi-\tau)\,q_s(\tau)\,d\tau = 0.$$

A ce point nous pouvons suivre la même analyse que nous avons employée dans le n° **3** du paragraphe II du Chapitre II en supposant t suffisamment grand et $|q_i(t)| < M$, $|F_{is}(\tau)| < N$. Elle nous amène aux formules

$$(45)\qquad \sum_1^n {}_s a_{is}[q'_s(t) - q'_s(t_0)] + \sum_1^n {}_s m_{is}\int_{t_0}^t q_s(\tau)\,d\tau - \theta_i n \mathrm{MNT}_0^2 = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

θ_i étant des nombres compris entre $+1$ et -1.

Posons

$$g_{1n}\,\mathrm{MNT}_0^2 - \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}[q'_s(t) - q'_s(t_0)] = A_i.$$

Les équations (45) s'écrivent

$$\sum_{1}^{n}{}_s\, m_{is} \int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau = A_i,$$

mais la forme (7) (Chap. I, § I, n° 3) est définie et positive, donc le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} m_{11}, & m_{12}, & \ldots, & m_{1n} \\ m_{21}, & m_{22}, & \ldots, & m_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ m_{n1}, & m_{n2}, & \ldots, & m_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Dans ce déterminant, soit D_{is} l'élément réciproque de l'élément m_{is}. On aura

$$\int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau = \frac{\sum_{1}^{n}{}_i\, D_{is} A_i}{D},$$

d'où l'on tire

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t - t_0}\, \frac{\sum_{1}^{n} D_{is} A_i}{D} = 0,$$

c'est-à-dire *les moyennes asymptotiques des déplacements sont nulles.*

Donc *les déplacements oscillent autour de la valeur zéro ou tendent vers la valeur zéro asymptotiquement.*

On voit immédiatement que les *moyennes asymptotiques des vitesses sont nulles.*

En effet

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q'_i(\tau)\, d\tau = \frac{q_i(t) - q_i(t_0)}{t - t_0},$$

c'est pourquoi

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q'_i(\tau)\, d\tau = 0.$$

NOTE.

Nous n'avons pas considéré le *frottement* (frottement proportionnel aux vitesses), mais on pourrait en tenir compte en ajoutant dans les premiers membres des équations (A′) ou (A″) les termes

$$\sum_{1}^{n}{}_{s} c_{is} q'_s(t).$$

où les c_{is} sont des constantes et $c_{is} = c_{si}$, en supposant en outre que la forme

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s} c_{is} q'_i(t) q'_s(t)$$

soit définie et positive.

Alors il faudrait ajouter le terme

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{s} c_{is} q'_i q'_s(t)\,dt$$

à l'expression de $E^{(d)}$ donnée par la formule (c') du Chapitre III, § II, n° 3.

Il est évident que $E^{(d)}$ resterait toujours positif, ainsi tous les théorèmes suivants du même paragraphe et du paragraphe III ne changeraient pas.

On peut dire la même chose pour le cas particulier d'un seul degré de liberté (Chap. II, § I et II).