JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROSALIND CECILY YOUNG

Théorèmes sur les ensembles d'intervalles linéaires au sens général, avec application aux fonctions à limites unilatérales uniques et finies en tout point

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 231-247.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__231_0>

Théorèmes sur les ensembles d'intervalles linéaires au sens général, avec application aux fonctions à limites unilatérales uniques et finies en tout point;

Par Rosalind Cecily YOUNG.

Dans ce qui suit, nous envisageons un domaine borné sur la droite, que nous supposerons fermé.

1. Nous allons désigner, d'une façon générale, sous le nom d'*intervalle* (a, b), $(a \leqq b)$, tout ensemble de points de l'un des *quatre types :*

Type $\bullet\!\!\rightarrow \leftarrow\!\!\bullet$:	$a \leqq x \leqq b$	(intervalle fermé),
Type $\leftarrow\!\!\bullet \leftarrow\!\!\bullet$:	$a < x \leqq b$	(ouvert en a, fermé en b),
Type $\bullet\!\!\rightarrow \bullet\!\!\rightarrow$:	$a \leqq x < b$	(fermé en a, ouvert en b),
Type $\leftarrow\!\!\bullet \bullet\!\!\rightarrow$:	$a < x < b$	(intervalle ouvert),

a et b sont ses *frontières* et leur distance $(b - a)$ est appelée la *longueur* de l'intervalle. Les intervalles fermés de longueur nulle comprennent le seul point $a = b$; les intervalles de longueur nulle non fermés ne comprennent aucun point et sont dits *vides*. Une frontière appartenant à l'intervalle s'appelle aussi *extrémité* ou *point extrême* de l'intervalle. Les autres points d'un intervalle sont ses points *intérieurs*. Tous les intervalles de mêmes frontières ont mêmes points intérieurs et ne diffèrent que par l'adjonction ou la suppression de points extrêmes. Les origines des deux flèches indiquant le type d'un intervalle représentent la première sa frontière gauche, la seconde sa frontière droite, et chaque flèche se trouve dirigée du côté où se trouve l'autre flèche, ou du côté inverse, suivant que la frontière correspondante appartient à l'intervalle ou ne lui appartient pas.

Tout intervalle (a, b) est représentable par un point (x, y) du plan, dont l'abscisse $x = a$ représente la frontière gauche, l'ordonnée $y = b$ la frontière droite de l'intervalle. Les intervalles (de tous types) de longueur nulle ont alors pour représentatifs les points de la droite $y = x$.

Pour que la représentation devienne biunivoque sur le demi-plan $y > x$, il faut décomposer le point réel (x, y) en ses quatre constituants radiaux

$$(x+0, y+0), \quad (x+0, y-0), \quad (x-0, y+0), \quad (x-0, y-0)\ (^1).$$

Dans le présent travail, nous nous contenterons de la représentation $(1, 4)$ par les points réels du demi-plan.

Deux intervalles sont dits *distincts* s'ils n'ont aucun point commun. L'un des deux intervalles est alors situé tout entier à la gauche du second. Deux intervalles (distincts) sont dits *séparés* s'il existe au moins un point ξ, étranger à tous deux, tel que les deux intervalles se trouvent de part et d'autre du point ξ; le point ξ *sépare* les deux intervalles. Un intervalle (a', b') séparé d'un intervalle (a, b) de type déterminé est toujours *distinct* des intervalles (a, b) des trois autres types. Deux intervalles distincts non séparés sont dits *contigus;* leur somme, ainsi que celle de toute paire d'intervalles non séparés, est également un intervalle. Observons que l'ensemble des points qui séparent deux intervalles donnés distincts est encore un intervalle contigu à chacun des deux intervalles donnés.

Deux intervalles contigus ont une frontière commune qui doit évidemment faire partie de l'un des intervalles et non de l'autre; nous dirons que le second *adhère* (*extérieurement*) au premier en leur frontière commune. Un intervalle Δ est donc dit adhérer (extérieurement) à un autre intervalle Δ' en un point a lorsque les deux intervalles sont distincts, ont a pour frontière commune et que Δ est ouvert, Δ' fermé en a.

Nous dirons encore que Δ *adhère* (*intérieurement*) à Δ' en a lorsque Δ

(1) *Voir* ma Note sur *Les fonctions additives d'ensemble, les fonctions de point à variation bornée quelconque et la généralisation de la notion d'espace à n dimensions* (*Enseign. math.*, 1927, n^{os} 1, 2, 3).

est compris dans Δ' et que les deux intervalles ont a pour frontière commune et sont tous deux ouverts en a.

Pour pouvoir adhérer à un autre intervalle en l'une de ses frontières, un intervalle donné doit donc en tout cas être ouvert en cette frontière. D'autre part, à un intervalle quelconque donné Δ, on pourra toujours faire adhérer des intervalles en chacune de ses frontières, extérieurement en une extrémité, intérieurement en une frontière exclue de l'intervalle [1].

De deux intervalles de longueur différente, celui de longueur plus grande est dit *le plus grand* des deux. Parmi les intervalles de même longueur, ceux du type $\leftarrow \cdot\cdot \rightarrow$ (ouverts) seront dits *plus petits*, ceux du type $\cdot \rightarrow\leftarrow \cdot$ (fermés) *plus grands* que ceux des trois autres types.

Une suite d'intervalles (a_n, b_n), chacun d'un type déterminé, sera dite *monotone* (au sens étroit) si les frontières a_n et b_n décrivent chacune une suite monotone (au sens étroit) [2].

Elle sera également dite *monotone* (par extension) si l'une des frontières demeure constante, l'autre décrivant une suite monotone (au sens étroit), à condition que la frontière constante soit toujours exclue ou soit toujours comprise.

Toute suite monotone d'intervalles sera de l'un des quatre types

$$(\cdot \rightarrow\leftarrow \cdot) \quad (\leftarrow \cdot\leftarrow\cdot), \quad (\cdot \rightarrow\cdot \rightarrow), (\leftarrow \cdot\cdot \rightarrow),$$

où chaque flèche indique soit le sens *ascendant* ($\cdot\rightarrow$) ou *descendant* ($\leftarrow\cdot$), de la suite des frontières correspondantes, soit le fait que la frontière correspondante demeure invariable et *comprise* (flèche dirigée du côté de sa compagne) dans chaque intervalle ou *exclue* (flèche dirigée du côté opposé) de chaque intervalle de la suite. En adoptant ce symbolisme, nous pourrons formuler de façon très concise la propriété fondamentale des suites monotones d'intervalles.

Nous rappelons qu'une suite d'ensembles E_n est dite avoir pour *limite unique* un ensemble E (qui peut être vide) lorsque chaque point ξ de E appartient à tous les ensembles E_n à partir d'un certain rang

---

(1) La notion d'intervalle adhérent tire son importance de la considération du groupe associé d'une suite d'intervalles; *voir* au n° **2**.

(2) Une suite de points x_n est dite *monotone* (au sens étroit) si l'on a, soit $x_n < x_{n+1}$ pour tout n (sens *ascendant*), soit $x_n > x_{n+1}$ pour tout n (sens *descendant*).

fixe N_ξ, mais que tout point étranger à E fait partie d'un nombre fini, tout au plus, d'ensembles E_n de la suite. Il est clair d'après cette définition qu'étant donnée une suite d'ensembles E_n à limite unique E, on obtient encore une suite d'ensembles E'_n à même limite unique E si l'on ajoute ou retranche à chaque ensemble E_n des points de l'ensemble e_n correspondant d'une suite à limite unique vide.

Une suite d'intervalles dont l'une des frontières demeure fixe et exclue, et dont la longueur tend vers zéro, est évidemment à limite unique vide. Car en ce cas tout point à distance positive ρ de la frontière fixe est exclu de tous les intervalles de la suite de longueurs inférieures à ρ, et la frontière fixe elle-même est exclue de tous les intervalles par hypothèse.

Soient maintenant $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ les intervalles d'une suite monotone donnée, a_n, b_n les frontières de Δ_n, et soit Δ l'intervalle de frontières

$$a = \lim a_n, \qquad b = \lim b_n,$$

dont le type se représente par le même couple de flèches que le type de la suite d'intervalles.

Les points de Δ n'appartenant pas à Δ_n et ceux de Δ_n n'appartenant pas à Δ forment deux intervalles (dont l'un au plus peut être vide), δ_n de frontières a_n, a et δ'_n de frontières b_n, b. Leur longueur tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Leur frontière fixe, a pour δ_n, b pour δ'_n, est nécessairement *exclue* dans tous les cas. En effet, par exemple, ou bien δ_n est vide, ou bien l'on a : 1° pour les suites de types $\cdot\dashrightarrow\cdot$: $a_n < a$, $\delta_n = (a_n, a)$ *contigu* à (a, b) *fermé* en a (types $\cdot\dashrightarrow\cdot$) doit donc être *ouvert* en a (δ_n *adhère* extérieurement à Δ en a); 2° pour les suites de types $\leftarrow\!\cdot\;\cdot$: $a < a_n$, $\delta_n = (a, a_n)$ *compris* (à partir d'un rang N) dans (a, b) *ouvert* en a est donc également *ouvert* en a (δ_n *adhère* intérieurement à Δ en a). De même pour δ'_n.

D'après nos remarques précédentes, nous avons donc

$$\lim \delta_n = \text{vide}, \qquad \lim \delta'_n = \text{vide},$$

et puisque l'intervalle Δ_n s'obtient de l'intervalle Δ en ajoutant ou retranchant δ_n et δ'_n,

$$\Delta_n = \Delta \pm \delta_n \pm \delta'_n,$$

nous en concluons que la suite des intervalles Δ_n a pour limite unique l'intervalle Δ.

Nous obtenons ainsi la propriété fondamentale que nous avions annoncée :

Toute suite monotone bornée d'intervalles (a_n, b_n) a une limite unique. Cette limite est l'intervalle (a, b) de frontières

$$\lim a_n = a, \qquad \lim b_n = b,$$

et du même type (symboliquement) que la suite même.

Une suite monotone d'intervalles a pour représentatif sur le demi-plan $y \geqq x$ une suite de points, monotone et bornée (1). Réciproquement, à toute suite monotone bornée de points du demi-plan correspond au moins une suite monotone d'intervalles. La proposition ci-dessus indique que toute suite monotone d'intervalles a pour limite un intervalle bien déterminé (qui peut du reste être vide) correspondant au point limite des points représentatifs de ses intervalles propres.

Étant donné un ensemble borné quelconque $\mathcal{E}$ d'intervalles, il lui correspond un ensemble borné E de points du demi-plan. Tout point limite de E est limite d'une suite partielle monotone de points de E, correspond par conséquent à la limite d'une suite partielle monotone d'intervalles de $\mathcal{E}$; et réciproquement. Nous définissons, en conséquence, comme *intervalles limites* de $\mathcal{E}$ les limites des suites partielles monotones d'intervalles de $\mathcal{E}$. Leurs représentatifs sont les points limites de l'ensemble E, et réciproquement tout point limite de E représente un intervalle limite de $\mathcal{E}$. Il s'ensuit en particulier que toute suite monotone d'intervalles limites de $\mathcal{E}$ a pour limite un intervalle limite de $\mathcal{E}$; en d'autres termes, l'ensemble formé par les intervalles limites de $\mathcal{E}$ comprend tous ses propres intervalles limites et il en est de même de l'ensemble formé par les intervalles limites de $\mathcal{E}$ et les intervalles de $\mathcal{E}$. Un ensemble borné $\mathcal{E}$ d'intervalles qui comprend tous

(1) Une suite de points P_n du plan est dite *monotone* lorsque P_{n+1} fait partie du même quadrant en P_n pour chaque n. En particulier si P_2 est sur la frontière de deux quadrants en P_1, P_{n+1} sera sur la frontière des mêmes quadrants en P_n.

ses intervalles limites sera dit *fermé;* l'ensemble E des points représentatifs des intervalles de $\mathcal{E}$ est alors lui-même fermé. (Il est clair cependant, vu que la représentation n'est pas biunivoque, que l'ensemble des points représentatifs d'un ensemble $\mathcal{E}$ d'intervalles peut être fermé sans qu'il en soit de même de l'ensemble $\mathcal{E}$.) D'après notre remarque précédente, l'ensemble formé par les intervalles de $\mathcal{E}$ et ses intervalles limites, ou par ses intervalles limites seuls, est nécessairement fermé. Un ensemble $\mathcal{E}$ d'intervalles qui *coïncide* avec l'ensemble de ses intervalles limites sera dit *parfait;* l'ensemble des points représentatifs des intervalles de $\mathcal{E}$ est alors lui-même parfait.

2. *Supposons donnée une suite d'intervalles*

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_n, \quad \ldots,$$

distincts les uns des autres et de longueurs positives.

Soit S l'ensemble des intervalles Δ' tels que tout Δ_n non distinct de Δ' soit contenu dans Δ' intégralement. S contient certainement des intervalles (les intervalles Δ_i eux-mêmes). Nous appellerons S *l'ensemble d'intervalles associé à la suite.*

(I). S *est un ensemble fermé.*

Car

$$\Delta'_1, \quad \Delta'_2, \quad \ldots, \quad \Delta'_j, \quad \ldots$$

désignant une suite quelconque d'intervalles de S, nous savons que Δ_n ne peut avoir de point en commun avec Δ'_j sans lui appartenir intégralement; par conséquent, si Δ_n n'est pas distinct de tous les Δ'_j à partir d'un certain rang, Δ_n fait partie de Δ'_j pour une suite infinie de valeurs de l'indice j. En particulier, lorsque Δ'_j décrit une suite monotone, tout intervalle Δ_n non distinct de la limite unique de cette suite fait partie de cette limite.

C. Q. F. D.

(II). Nous aurons l'occasion d'utiliser les termes *ensemble du type additif* pour désigner un ensemble tel que toute paire d'intervalles *contigus* lui appartenant ait pour somme également un intervalle de l'ensemble. Il est clair que *l'ensemble* S *est du type additif.*

Les ensembles fermés du type additif ont une importance particulière en analyse. L'ensemble S fait partie, comme nous allons le voir, d'une classe très spéciale de ces ensembles.

La somme de deux intervalles quelconques de S, *non distincts, est encore un intervalle de* S; *il en est de même de leur produit, ensemble des points communs à tous deux; les points de l'un qui n'appartiennent pas à l'autre forment également un intervalle, ou deux intervalles séparés, de* S.

Ces propriétés générales des intervalles de S deviennent évidentes lorsqu'on fait la simple remarque que si Δ' et Δ'' sont deux intervalles de S, un intervalle $\Delta_{\prime\prime}$ quelconque de la suite doit ou être distinct de tous deux, ou être contenu dans l'un et distinct de l'autre, ou être contenu intégralement dans chacun d'eux.

Nous résumerons ces propriétés générales des intervalles de S en disant que *l'ensemble* S *constitue un groupe d'intervalles.*

(III). Il est aisé de distinguer les intervalles limites de S de ses autres intervalles. Nous aurons en effet la proposition suivante :

Un intervalle de S *auquel adhérerait, en chacune de ses frontières, un intervalle* $\Delta_{\prime\prime}$ *ne peut être intervalle limite de* S.

Tout autre intervalle de S *est intervalle limite de* S.

Pour démontrer la première partie de l'énoncé, il suffit de remarquer qu'un intervalle Δ' de type donné ne peut être limite que d'une suite monotone *du même type*, et que l'une au moins des frontières d'un intervalle décrivant une suite monotone devra, de son côté, décrire une suite monotone au sens étroit. Cette suite de frontières sera donc extérieure à l'intervalle limite si celui-ci doit comprendre la frontière de laquelle elles vont s'approcher, intérieure, au moins à partir d'un certain rang, si cette frontière doit demeurer exclue. Dans les deux cas, nous voyons que la suite de frontières en question pénètre, à partir d'un certain rang, à l'intérieur de tout intervalle fixe donné Δ *adhérant* à l'intervalle Δ' en leur point limite (puisque Δ sera en effet extérieur à Δ' au premier cas, intérieur au second).

Or si les intervalles de la suite appartiennent à S, ils ne peuvent avoir de frontière intérieure à l'un des intervalles $\Delta_{\prime\prime}$; en la frontière considérée, l'intervalle limite Δ' ne peut donc avoir d'intervalle Δ_{n} adhérant à lui.

Tout intervalle limite de S a au moins une frontière en laquelle aucun des intervalles Δ_{n} n'adhère à lui. C. Q. F. D.

Reste à établir la seconde partie de l'énoncé. Soit Δ' un intervalle de S dont l'une au moins des frontières, soit c, est telle qu'aucun des intervalles Δ_{n} n'adhère à Δ' en c. Nous distinguons les cas ;

1° c fait partie de Δ'. Nous considérons uniquement les intervalles Δ_{n} distincts de Δ'. Par hypothèse, c a une distance positive δ_{n} de chacun de ces intervalles Δ_{n}, et cette distance peut, soit :

a. Avoir une borne inférieure positive, $\delta > 0$, auquel cas tout intervalle contigu (c'est-à-dire adhérant) à Δ' en c et de longueur inférieure à δ est distinct de tous les Δ_{n} et appartient donc à S; soit :

b. Avoir sa borne inférieure nulle, auquel cas une limite d'intervalles Δ_{k_i} existe dont les distances δ_{k_i} au point c forment une suite décroissante à limite zéro. L'intervalle Δ'_i séparant Δ' et Δ_{k_i} (et qui adhère à Δ' en c) appartient à S et a une longueur δ_{k_i} tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Dans les deux cas, on peut trouver une suite monotone d'intervalles Δ'_i de S, de longueurs décroissant à zéro, tous adhérant à Δ' en c et, par conséquent, ouverts en c. La limite d'une telle suite est nécessairement vide. La limite de

$$\Delta''_i = \Delta' + \Delta'_i$$

est donc Δ'. L'intervalle Δ''_i appartient à S, puisque c'est la somme de deux intervalles de S. Donc Δ' est intervalle limite de S.

2° c ne fait pas partie de Δ'. Nous considérons uniquement les intervalles Δ_{n} contenus dans Δ'. Par hypothèse, c a une distance positive de chacun de ces intervalles Δ_{n}, et cette distance peut, soit avoir une borne inférieure $\delta > 0$, soit une borne inférieure nulle. Dans les deux cas, on peut trouver comme ci-dessus une suite monotone d'intervalles Δ'_i de S, de longueur décroissant à zero, tous adhérant (intérieurement) à Δ' en c, et par conséquent tous ouverts en c. La limite de cette suite est vide. L'intervalle

$$\Delta''_i = \Delta' - \Delta'_i$$

appartient à S, puisque c'est la différence de deux intervalles de S et a pour limite Δ'. Donc Δ' est intervalle limite de S.

La proposition est entièrement vérifiée.

(IV). Un corollaire particulier immédiat, remarquons-le en passant, c'est que *les intervalles de S qui ne sont pas intervalles limites de S forment un groupe*. Car si Δ'_1 et Δ'_2 ont en chaque frontière un intervalle $\Delta_{''}$ adhérant à eux, il en est de même de leur somme, et aussi, au cas où Δ'_1 et Δ'_2 appartiennent à S, de l'un ou des deux intervalles formant leur différence, et de leur produit, précisément parce que ces intervalles appartiennent alors encore à S.

(V). Lorsqu'un intervalle Δ' de S n'est pas intervalle limite de S, il existe donc toujours, d'après (III), un intervalle $\Delta_{''}$ ouvert en une frontière au moins, et adhérant (intérieurement ou extérieurement) à Δ'. Si tous les intervalles $\Delta_{''}$ sont fermés, il n'existe donc certainement pas d'intervalle de S qui ne soit en même temps intervalle limite de S.

Le groupe S d'intervalles associé à une suite d'intervalles distincts fermés (de longueurs positives) est nécessairement parfait.

Remarque I. — Le groupe associé, défini de la même façon, d'un système d'intervalles de longueurs nulles, comprend évidemment tous les intervalles du domaine borné considéré, c'est-à-dire également un groupe parfait d'intervalles.

Remarque II. — Il est clair que le groupe associé d'une suite d'intervalles

$$\Delta_1^1,\quad \Delta_1^2,\quad \Delta_2^1,\quad \Delta_2^2,\quad \ldots,\quad \Delta_k^1,\quad \Delta_k^2,\quad \ldots$$

est le *produit* des groupes associés des deux suites partielles complémentaires

$$\begin{array}{llll} \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(1)}, & \ldots, & \Delta_k^{(1)}, \quad \ldots, \\ \Delta_1^{(2)}, & \Delta_2^{(2)}, & \ldots, & \Delta_k^{(2)}, \quad \ldots, \end{array}$$

c'est-à-dire l'ensemble des intervalles appartenant simultanément aux deux groupes. Il s'ensuit en particulier que l'on n'altère pas le groupe associé d'une suite d'intervalles distincts en ajoutant à celui-ci un certain nombre (fini ou infini) d'intervalles de longueurs nulles.

Remarque III. — Par contre, le groupe associé d'une suite d'intervalles de longueurs positives ne peut être associé d'aucune autre telle suite. Car si deux telles suites

$$\Delta_1^{(1)},\quad \Delta_2^{(1)},\quad \Delta_k^{(1)},\quad \ldots \quad \text{et} \quad \Delta_1^{(2)},\quad \Delta_2^{(2)},\quad \Delta_k^{(2)},\quad \ldots$$

ont même groupe associé S, un intervalle quelconque $\Delta_k^{(1)}$ de la première ne peut ni contenir *une partie* d'un intervalle de la seconde, puisque $\Delta_k^{(1)}$ appartient au groupe associé de cette suite; ni être distinct de tous les intervalles de la seconde suite, puisque les intervalles intérieurs à $\Delta_k^{(1)}$ appartiendraient au groupe associé de la seconde suite, sans appartenir à celui de la première. $\Delta_k^{(1)}$ doit donc contenir entièrement un intervalle $\Delta_j^{(2)}$. En intervertissant les indices, on voit que $\Delta_j^{(2)}$ doit contenir entièrement un intervalle $\Delta_m^{(1)}$, et l'on doit avoir $m = k$,

$$\Delta_m^{(1)} \equiv \Delta_k^{(1)} \equiv \Delta_j^{(2)}.$$

3. C'est un fait fondamental que l'on peut toujours trouver effectivement, parmi les intervalles d'un ensemble *fermé* quelconque $\mathcal{E}$, un intervalle de longueur maxima. Cette propriété correspond à celle des ensembles linéaires fermés de points d'admettre toujours le choix effectif d'un de leurs points, le plus à gauche ou le plus à droite de tous.

En effet, si Λ désigne la borne supérieure des longueurs des intervalles de $\mathcal{E}$, l'ensemble E de points représentatifs de ces intervalles possède des points dans un voisinage arbitraire de la droite $y - x = \Lambda$, c'est-à-dire, puisqu'il est fermé, sur la droite elle-même. Ces points constituent sur la droite un ensemble linéaire fermé, nous pouvons donc en choisir un, soit (a_1, b_1), $b_1 - a_1 = \Lambda$. Ce point représente au moins un et au plus quatre intervalles de $\mathcal{E}$ de longueur maxima Λ. Il est donc clair que nous pouvons effectuer le choix demandé.

Il est évident que l'on peut demander de plus que l'intervalle choisi soit au moins aussi grand que les autres (0, 1, 2 ou 3) intervalles de $\mathcal{E}$ de mêmes frontières, c'est-à-dire qu'il ne soit contenu dans aucun autre intervalle de $\mathcal{E}$.

Cette remarque conduit immédiatement à une propriété générale des ensembles fermés d'intervalles.

Étant donné un ensemble fermé quelconque d'intervalles, on peut trouver une suite (finie ou infinie) d'intervalles Δ_n de $\mathcal{E}$, distincts les uns des autres et de longueurs positives, tels que tout intervalle Δ de $\mathcal{E}$, de longueur positive, comprenne au moins un point de l'un d'eux, et tels cependant que (1) *l'intervalle Δ_n d'indice moindre comprenant un point*

(1) Si nous excluons le cas banal où $\mathcal{E}$ comprendrait l'intervalle fermé constituant notre champ entier.

de Δ comprenne également un point étranger à Δ, et soit, du reste, de longueur supérieure ou égale à celle de Δ.

En désignant par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des intervalles de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ distincts de

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-1},$$

on définira Δ_n par induction, pour tout n, comme intervalle de $\mathcal{E}_n$ de longueur positive maxima, ne faisant partie d'aucun autre intervalle de $\mathcal{E}_n$. La possibilité du choix est établie par notre remarque préliminaire; car toute suite monotone bornée d'intervalles, distincts de Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1}, a pour limite un intervalle également distinct de ces Δ_i, $\mathcal{E}_n$ est donc un ensemble fermé d'intervalles.

Il est évident (puisque $\mathcal{E}_n$ fait partie de $\mathcal{E}$) que Δ_n est intervalle de $\mathcal{E}$, et par construction les Δ_n sont distincts les uns des autres. S'ils sont en nombre fini, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n_0}, c'est que $\mathcal{E}_{n_0+1}$ ne contient aucun intervalle de longueur positive, aucun intervalle de $\mathcal{E}$, de longueur positive, n'est distinct de tout Δ_i. S'ils sont en nombre infini, leur longueur $\Lambda_n (> 0)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, puisque la somme de ces longueurs est bornée avec $\mathcal{E}$; et comme Λ_n est la borne supérieure des longueurs des intervalles de $\mathcal{E}_n$, il ne peut exister d'intervalle de $\mathcal{E}$, de longueur positive, commun à tous les $\mathcal{E}_n$; aucun intervalle de $\mathcal{E}$, de longueur positive, n'est distinct de tous les Δ_n.

Tout intervalle Δ de $\mathcal{E}$ contient donc au moins un point de l'un des intervalles Δ_n. En désignant par Δ_{k_0} celui d'indice moindre comprenant un point de Δ, Δ est distinct de Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{k_0-1}, appartient donc à $\mathcal{E}_{k_0}$, ne peut donc contenir Δ_{k_0}. C'est-à-dire Δ_{k_0} comprend au moins un point étranger à Δ. En outre, la longueur de Δ doit être $\leqq \Lambda_{k_0}$.

La proposition est entièrement démontrée.

Remarquons que les intervalles de $\mathcal{E}_1$ ne faisant pas partie de $\mathcal{E}_2$ sont tous compris dans l'intervalle fermé, concentrique à Δ_1 et de longueur triple; la mesure de leur ensemble somme ne dépasse donc pas $3\Lambda_1$. De même, les intervalles de $\mathcal{E}_2$ n'appartenant pas à $\mathcal{E}_3$ recouvrent un ensemble de points de mesure $\leqq 3\Lambda_2$. Et ainsi de suite. Puisque chaque $\mathcal{E}_n$ est compris dans le précédent et que tout intervalle de $\mathcal{E}$ appartient à l'un d'eux, l'ensemble de points recouverts par les intervalles de $\mathcal{E}$ a une mesure inférieure ou égale à la somme des mesures des ensembles de points considérés, c'est-à-dire

$$\leqq 3(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_n + \ldots).$$

En considérant l'inégalité dans l'ordre inverse, on dira donc que la mesure

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n + \ldots)$$

de l'ensemble de points recouvert par les intervalles Δ_n est au moins égale au tiers de celle de l'ensemble de points recouvert par tous les intervalles de l'ensemble $\mathcal{E}$ entier.

4. La propriété des intervalles de longueurs positives de l'ensemble fermé $\mathcal{E}$ (autre que les intervalles Δ_n eux-mêmes) de contenir chacun *en partie* l'un des intervalles Δ_n de la suite spéciale choisie peut encore s'exprimer en disant que l'ensemble $\mathcal{E}$ ne comprend aucun des intervalles de longueurs positives du groupe associé de cette suite (autre que les intervalles Δ_n eux-mêmes). L'essentiel de la proposition du numéro précédent se trouvera donc contenu dans le lemme suivant :

Lemme général. — *Étant donné un ensemble fermé quelconque $\mathcal{E}$ d'intervalles, on peut trouver une suite (finie ou infinie) d'intervalles Δ_n de $\mathcal{E}$, distincts les uns des autres et de longueurs positives, dont le groupe associé (fermé)* S *d'intervalles ne comprenne aucun intervalle de $\mathcal{E}$ de longueur positive outre les intervalles de la suite elle-même.*

Ce lemme admet une série de cas particuliers, dont nous allons examiner les conséquences les plus immédiatement applicables.

(1). Il peut se faire que l'ensemble fermé donné $\mathcal{E}$ soit *du type additif*. En ce cas, tout intervalle Δ_k du lemme sera nécessairement *séparé* de tout autre intervalle Δ_n. Car la somme de deux intervalles Δ_k contigus, dans le cas général, est toujours un intervalle du groupe associé S, n'appartenant pas à $\mathcal{E}$. — Toute frontière d'un intervalle Δ_k étant ici distincte de tout autre intervalle Δ_n constitue, si elle n'appartient pas déjà à Δ_k, un intervalle Δ' de longueur nulle du groupe associé, et en l'adjoignant à Δ_k nous formerons un intervalle du groupe n'appartenant pas à $\mathcal{E}$. Il s'ensuit, puisque $\mathcal{E}$ est un ensemble additif, que l'intervalle Δ' ne pouvait non plus appartenir à $\mathcal{E}$. Toute frontière non comprise d'un intervalle Δ_n constitue donc un intervalle de longueur nulle n'appartenant pas à $\mathcal{E}$.

(II). Il peut se faire en outre, cependant, que l'ensemble $\mathcal{E}$ comprenne déjà tout intervalle de longueur nulle du domaine considéré. En ce cas, il ne peut y avoir d'intervalle Δ_n ne comprenant pas ses deux frontières, nous obtenons le

LEMME PARTICULIER. — *Étant donné un ensemble fermé $\mathcal{E}$ d'intervalles du type additif et comprenant tous les intervalles de longueur nulle du domaine considéré, on peut trouver une suite (finie ou infinie) d'intervalles fermés Δ_n de $\mathcal{E}$, distincts les uns des autres et de longueurs positives, dont le groupe associé (parfait) d'intervalles ne comprenne, outre les intervalles Δ_n eux-mêmes, aucun intervalle de $\mathcal{E}$.*

Dans les deux lemmes, suivant notre remarque finale au n° **3**, les intervalles Δ_n recouvrent un ensemble de points de mesure au moins égale au tiers de celle de l'ensemble de points recouvert pour tous les intervalles de l'ensemble $\mathcal{E}$ entier.

5. En associant à tout intervalle Δ du domaine considéré Δ_0 une valeur numérique déterminée et finie, on constitue une *fonction de* Δ. Cette fonction sera dite *continue* si la suite de ses valeurs relatives aux intervalles d'une suite monotone tend vers sa valeur relative à leur intervalle limite; c'est-à-dire $\varphi(\Delta)$ *est continue, si* $\lim \Delta' = \Delta$ *entraîne* $\lim \varphi(\Delta') = \varphi(\Delta)$. La fonction sera dite *du type additif* si ses valeurs relatives à deux intervalles contigus ont pour somme la valeur relative à la somme des deux intervalles; c'est-à-dire $\varphi(\Delta)$ *est du type additif, si* $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, $\Delta_1\Delta_2 = 0$ *entraînent* $\varphi(\Delta) = \varphi(\Delta_1) + \varphi(\Delta_2)$. (En particulier, $\varphi(\Delta) = 0$ si Δ est vide.)

Étant donnée une fonction $\bar{\varphi}(\Delta)$, continue et du type additif, formons l'ensemble $\mathcal{E}$ des intervalles Δ pour lesquels $\bar{\varphi}(\Delta)$ est non négatif. Cet ensemble sera évidemment fermé et du type additif. Supposons qu'il comprenne encore tous les intervalles de longueur nulle, c'est-à-dire que $\bar{\varphi}(\Delta)$ est $\geqq 0$ pour tout Δ de longueur nulle. Nous pouvons alors appliquer le lemme particulier à l'ensemble $\mathcal{E}$. En écartant les cas où $\bar{\varphi}(\Delta_0)$ serait > 0 pour le domaine entier Δ_0, chacun des intervalles Δ_n du lemme est intervalle pour lequel $\bar{\varphi}(\Delta_n) \geqq 0$, et limite d'intervalles Δ' pour lesquels $\bar{\varphi}(\Delta') < 0$, c'est-à-dire qu'on a nécessairement

$$\bar{\varphi}(\Delta_n) = 0.$$

Et tout point étranger à la somme des Δ_n (comme tout autre intervalle du groupe associé parfait S) est limite d'intervalles Δ' pour lesquels

$$\bar{\varphi}(\Delta') < 0.$$

Supposons que d'une fonction donnée $\varphi(\Delta)$, continue, du type additif, et non négative sur les intervalles de longueur nulle, nous retranchions un multiple $K\gamma(\Delta)$, $K \geqq 0$, d'une fonction $\gamma(\Delta)$, continue et du type additif, qui soit en outre constamment positive, sauf sur les intervalles de longueur nulle, où elle s'annule.

La fonction résultante

$$\bar{\varphi}(\Delta_0) = \varphi(\Delta) - K\gamma(\Delta)$$

sera encore continue, du type additif, et prendra sur les intervalles de longueur nulle les mêmes valeurs $\geqq 0$ que la fonction $\varphi(\Delta)$ elle-même. Appliquons ce qui précède à la fonction $\bar{\varphi}(\Delta)$, en supposant K choisi de telle façon que

$$\bar{\varphi}(\Delta) = \varphi(\Delta_0) - K\gamma(\Delta_0) < 0,$$

pour le domaine entier Δ_0. Les intervalles Δ_n satisferont maintenant à

$$\varphi(\Delta_n) = K\gamma(\Delta_n),$$

et puisque $\gamma(\Delta)$ est positive pour les intervalles de longueurs positives, tout point étranger aux intervalles Δ_n sera limite d'intervalles Δ' pour lesquels

$$\frac{\varphi(\Delta')}{\gamma(\Delta')} < K.$$

Convenons d'appeler *dérivés inférieur et supérieur de* $\varphi(\Delta)$ *par rapport à* $\gamma(\Delta)$ les deux fonctions de points (non nécessairement finies) égales respectivement, en chaque point x, à la limite inférieure et à la limite supérieure du rapport $\frac{\varphi(\Delta')}{\gamma(\Delta')}$ lorsque Δ' décrit des suites monotones de limite x (suites arbitraires d'intervalles dont chacun contient le suivant et le point x, et dont la longueur tend vers zéro). *En chaque point étranger à tous les intervalles* Δ_n, *le dérivé inférieur de* $\varphi(\Delta)$ *par rapport à* $\gamma(\Delta)$ *est* $\leqq K$.

6. Une fonction d'intervalle $\varphi(\Delta)$, continue et du type additif, coïncide avec la variation sur l'intervalle Δ d'une *fonction de point à limites unilatérales uniques et finies en tout point*, — et réciproquement — si l'on convient d'appeler *variation sur l'intervalle* Δ la limite, toujours existante et finie pour une telle fonction, de la différence

$$f(y)-f(x),$$

des valeurs de la fonction aux frontières d'un intervalle variable (x, y), $y > x$, lorsque celui-ci décrit une suite monotone au sens étroit, de limite Δ (¹).

Si $\varphi(\Delta)$ s'annule en outre en chaque intervalle de longueur nulle, elle coïncide avec la variation sur Δ d'une fonction de point continue; et réciproquement. De même, si $\varphi(\Delta)$ est non négative partout, il lui correspond une *fonction monotone ascendante* [au sens étroit, si $\varphi(\Delta)$ n'est jamais nulle sur un intervalle de longueur positive]; et réciproquement.

Continuons d'appeler *dérivés* d'une fonction de point $f(x)$ *par rapport à une fonction monotone au sens étroit* $g(x)$, les dérivés de la variation $\varphi(\Delta)$ de $f(x)$ par rapport à la variation $\gamma(\Delta)$ de $g(x)$. Et désignons par les termes *variation relative de* $f(x)$ *par rapport à* $g(x)$ *sur un intervalle* Δ le rapport de la variation de $f(x)$ à celle de $g(x)$ sur cet intervalle.

Les résultats que nous venons d'établir au n° **5** s'énoncent alors comme suit :

Théorème I. — *Étant données, dans un domaine fermé* Δ_0, *une fonction* $f(x)$ *à limites unilatérales uniques et finies et à variation non négative en tout point* (²) *et une fonction* $g(x)$ *monotone ascendante au sens étroit et continue, l'ensemble des points* x, *où le dérivé inférieur*

(¹) Sur un intervalle (a, b) fermé, la variation est donc $\{f(b+0)-f(a-0)\}$, sur un intervalle (a, b) ouvert $\{f(b-0)-f(a+0)\}$, etc. La démonstration des diverses coïncidences mentionnées se fait comme au cas particulier où $f(x)$ est une fonction monotone; *voir* ma Note citée.

(²) C'est-à-dire sur l'intervalle de longueur nulle qui constitue ce point. La classe de ces fonctions comprend en particulier toutes les fonctions continues et toutes les fonctions monotones ascendantes.

de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ dépasse un nombre donné K *(supérieur lui-même à la variation relative sur le domaine entier Δ_0), fait partie de la somme d'une suite (finie ou infinie) d'intervalles Δ_n fermés distincts, de longueurs positives, sur chacun desquels la variation relative de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ égale* K.

Le cas particulier où $f(x)$ est une fonction *continue quelconque* donne précisément *le principe de la gradation des fonctions continues sur les ensembles parfaits* utilisé par M. A. Denjoy.

Celui où $f(x)$ est au contraire une *fonction quelconque monotone ascendante et bornée* offre un intérêt nouveau. Remarquons qu'en ce cas, la somme des variations de $g(x)$ sur les intervalles Δ_n (c'est-à-dire la variation de $g(x)$ sur leur somme) est au plus égale à $\frac{1}{k}$ fois la variation de $f(x)$ sur le domaine entier Δ_0, c'est-à-dire tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$. Nous pouvons en outre donner à l'énoncé pour ce cas une forme un peu plus générale, en tenant compte de la remarque suivante.

Une fonction quelconque $f(x)$ à variation bornée est la différence de deux fonctions monotones ascendantes et bornées. Sa variation sur un intervalle quelconque est égale à la différence des variations des deux fonctions monotones sur ce même intervalle, reste donc toujours inférieure ou égale, en valeur absolue, à la somme de ces variations, c'est-à-dire à la variation de la somme des deux fonctions monotones. Cette somme est elle-même une fonction monotone ascendante bornée $\overline{f}(x)$, nous pouvons lui appliquer le théorème précédent. Les relations d'inégalité entre la variation de $f(x)$ et celle de $\overline{f}(x)$ sur le même intervalle subsistent lorsqu'on divise ces variations par la variation d'une fonction monotone ascendante au sens étroit, et en passant à la limite il est clair que les mêmes relations auront lieu entre leurs dérivés. Nous avons donc l'énoncé spécial :

Théorème II. — *Étant données, dans le domaine fermé Δ_0, une fonction quelconque à variation bornée $f(x)$ et une fonction $g(x)$ continue, et monotone ascendante au sens étroit, l'ensemble des points x ou le dérivé inférieur de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ dépasse en valeur absolue un nombre* K *donné, suffisamment grand, fait partie de la somme* *d'une suite (finie ou infinie) d'intervalles fermés distincts, de longueurs positives, sur chacun desquels la variation relative de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ est inférieure ou égale à* K *en valeur absolue, et sur la somme desquels $g(x)$ a une variation inférieure à un multiple constant de* $\frac{1}{K}$.

7. On obtient, pour les fonctions générales à limites unilatérales uniques et finies en tout point, un théorème un peu plus général que le théorème I, mais un peu moins précis, en appliquant directement le lemme général et en utilisant les remarques du n° 4 (1). Si nous définissons $\mathcal{E}$ comme ensemble des intervalles Δ sur lesquels $f(x)$ possède, par rapport à une fonction monotone au sens étroit quelconque, une variation relative $\geqq$ K, nous aurons en effet un ensemble fermé du type additif, et nous obtenons l'énoncé suivant :

THÉORÈME III. — *Étant données une fonction $f(x)$ à limites unilatérales uniques et finies en tout point et une fonction monotone (au sens étroit) quelconque $g(x)$, l'ensemble des points x, où le dérivé inférieur de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ dépasse un nombre donné quelconque* K, *fait partie de la somme d'une suite (finie ou infinie) d'intervalles Δ_n, séparés les uns des autres et de longueurs positives, sur chacun desquels la variation de $f(x)$ par rapport à $g(x)$ est, ou $=$ K, ou éventuellement (au seul cas où Δ_n serait ouvert en ses deux frontières) est $>$ K mais devient $<$ K lorsqu'on adjoint à Δ_n l'une de ses frontières.*

Pour voir que la variation relative pour un intervalle Δ_k *non ouvert* est effectivement *égale* à K, on se sert du fait que les intervalles Δ_n sont séparés les uns des autres ; un intervalle Δ_k non ouvert aura donc une frontière au moins en laquelle aucun des intervalles Δ_n n'adhère à lui, c'est-à-dire sera intervalle limite du groupe associé S, c'est-à-dire d'intervalles n'appartenant pas à $\mathcal{E}$.