JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. TZITZÉICA

Sur certaines congruences de droites

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 189-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__189_0>

Sur certaines congruences de droites;

Par G. TZITZÉICA

(Bucarest).

M. Goursat a étudié (¹), au point de vue de l'intégration, une classe spéciale d'équations de Laplace qui ont certaines analogies avec les équations de Laplace à invariants égaux. Il est revenu (²) plus tard sur cette question, en donnant une transformation remarquable analogue à celle de Moutard. Je me suis proposé dans ce travail de montrer les applications géométriques de ces résultats et de les généraliser en plusieurs points.

I.— Congruences de M. Goursat.

1. Considérons, dans un espace projectif S_n à n dimensions, un réseau (x) et la suite de Laplace correspondante. Soient (x_i) et (x_{-i}) les transformés de Laplace d'ordre i de (x), dans le sens des courbes $u=$ const. et dans le sens des courbes $v=$ const.; h_i, k_i et h_{-i}, k_{-i} leurs invariants. Dans le cas où l'on a

$$h_i = k_{-i}, \qquad k_i = h_{-i},$$

quel que soit i, nous dirons que la suite de Laplace est symétrique par

---

(¹) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXV, p. 36.

(²) *Ibid.*, t. XXVIII, p. 1.

rapport au réseau (x). Il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite soit symétrique par rapport à (x) est que ce réseau soit à invariants égaux.

Considérons maintenant la congruence $(x x_1)$, admettant comme réseaux focaux le réseau (x) et son transformé de Laplace (x_1). Dans le cas où l'on a pour les réseaux (x_{i+1}) et (x_{-i}) les relations suivantes entre les invariants

$$h_{i+1} = k_{-i}, \qquad k_{i+1} = h_{-i},$$

nous dirons que la suite de Laplace est symétrique par rapport à la congruence $(x x_1)$. Il est facile de voir que pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$h_1 = k,$$

qui est précisément la relation qui caractérise les équations de Laplace étudiées par M. Goursat.

Ce sont ces congruences $(x x_1)$, que je désignerai dans la suite de ce travail par *congruences de M. Goursat* ou, d'une manière abrégée, par congruences G, qui forment l'objet de ce Mémoire.

Remarquons immédiatement que, d'après la définition précédente, si l'on a un réseau (x) à invariants égaux et à suite de Laplace périodique à période impaire, telle que $(x_{2p+1}) \equiv (x)$, alors la congruence $(x_p\, x_{p+1})$ est une congruence G.

2. Nous voulons définir actuellement une congruence G à l'aide de ses deux réseaux focaux. Rappelons [1] à cet effet que pour définir, dans S_n, une congruence quelconque de droites (xy) à l'aide des réseaux focaux (x) et (y), il faut prendre $n+1$ couples de solutions x^i, y^i d'un système de la forme

$$(1) \qquad x_v = a y, \qquad y_u = b x,$$

où x_v et y_u sont des dérivées partielles, a et b des fonctions de u et v.

On déduit de (1) les équations de Laplace qui correspondent aux

[1] Voir ma *Géom. diff. proj. des réseaux*, p. 63.

réseaux focaux de (xy)

$$(2)\qquad \begin{cases} x_{uv}-\dfrac{a_u}{a}x_v-abx=0, \\ y_{uv}-\dfrac{b_v}{b}y_u-aby=0, \end{cases}$$

dont les invariants sont respectivement

$$(3)\qquad \begin{cases} h=ab, & k=-(\log a)_{uv}+ab, \\ h'=-(\log b)_{uv}+ab, & k'=ab. \end{cases}$$

La condition de symétrie $h'=k$, qui définit une congruence G, donne

$$\frac{a}{b}=\frac{U}{V},$$

U étant une fonction de u, V une fonction de v. On peut, par un changement des variables u et v, sans changer les courbes $u=$ const., $v=$ const., réduire la relation précédente à $a=b$. Donc, *toute congruence* G *peut être définie à l'aide d'un certain nombre de couples de solutions d'un système de la forme*

$$x_v=ay, \qquad y_u=ax,$$

identique à son adjoint.

3. Il y a pour les congruences G une propriété géométrique caractéristique analogue à un théorème de M. Kœnigs sur les réseaux à invariants égaux [1].

Considérons tout d'abord une congruence arbitraire (xy), définie à l'aide du système (1) et soient (x') le transformé de Laplace du réseau focal (x) dans le sens des courbes $v=$ const., (y') celui de (y) dans le sens des courbes $u=$ const. On a de (2)

$$x'=x_u-\frac{a_u}{a}x, \qquad y'=y_v-\frac{b_v}{b}y,$$

d'où

$$x'_v=kx, \qquad y'_u=h'y,$$

les invariants h' et k ayant les valeurs données par (3).

Un point X de l'espace à trois dimensions, déterminé par les

[1] *Géom. diff. proj. des réseaux*, p. 77.

points x, y, x' et y', a ses coordonnées de la forme

$$X = \alpha x + \beta y + \alpha' x' + \beta' y',$$

où nous avons supprimé les indices supérieurs $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Les coefficients α, β, α' et β' sont les coordonnées de X par rapport au tétraèdre mobile $xyx'y'$.

Considérons maintenant la quadrique

$$\alpha\beta + \lambda\alpha'\beta' = 0$$

qui contient manifestement les arêtes xx', yy', $x'y$ et xy' du tétraèdre précédent. Nous verrons qu'elle a, quel que soit λ, un contact du second ordre en x' avec la courbe $u = \text{const.}$ décrite par ce point, et de même un contact du même ordre en y' avec la courbe $v = \text{const.}$ Nous prouverons ensuite qu'on peut déterminer λ, de manière que la quadrique correspondante Q_1 ait avec la courbe $u = \text{const.}$, décrite par x', un contact du troisième ordre; de même, on peut définir une quadrique Q_2 ayant en y' un contact du troisième ordre avec la courbe $v = \text{const.}$ décrite par ce point.

La propriété que nous voulons démontrer est celle-ci : *Dans le cas général, les quadriques Q_1 et Q_2, que nous venons de définir, sont distinctes; elles ne sont confondues que dans le cas où (xy) est une congruence de M. Goursat.*

Pour faire la démonstration je considère le point $x'(u, v+\varepsilon)$ voisin, pour ε très petit, du point x' sur la courbe $u = \text{const.}$ On a

$$\begin{aligned} x'(u, v+\varepsilon) = x' + \frac{\varepsilon}{1} kx + \frac{\varepsilon^2}{2}(k_v x + aky) \\ + \frac{\varepsilon^3}{6}\left[k_{vv} x + ak_v y + (ak)_v y + ak\left(\frac{b_v}{b} y + y'\right)\right] + \ldots. \end{aligned}$$

Les coordonnées relatives de ce point sont :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon}{1} k + \frac{\varepsilon^2}{2} k_v + \frac{\varepsilon^3}{6} k_{vv} + \ldots, \\ \beta &= \frac{\varepsilon^2}{2} ak + \frac{\varepsilon^3}{6}\left(2ak_v + a_v k + a\frac{b_v}{b} k\right) + \ldots, \\ \alpha' &= 1 + \varepsilon^4(\quad) + \ldots, \\ \beta' &= \frac{\varepsilon^3}{6} ak + \ldots. \end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha\beta + \lambda\alpha'\beta' = \frac{\varepsilon^3}{6}(3ak^2 + \lambda ak) + \varepsilon^4(\quad) + \ldots,$$

qui prouve bien que la quadrique

$$\alpha\beta + \lambda\alpha'\beta' = 0$$

a, quel que soit λ, un contact du second ordre avec la courbe $u =$ const. décrite par x'. Ce contact est du troisième ordre seulement dans le cas où $\lambda = -3k$, en supposant $k \neq 0$. On obtient ainsi l'équation de la quadrique Q_1

$$(Q_1) \qquad \alpha\beta - 3k\alpha'\beta' = 0.$$

On trouve de la même manière pour la quadrique Q_2

$$(Q_2) \qquad \alpha\beta - 3h'\alpha'\beta' = 0.$$

Ces deux quadriques sont identiques seulement dans le cas $h' = k$, c'est-à-dire si (xy) est une congruence G.

II. — Transformation de M. Goursat.

4. Étant donnée une congruence G dans un S_n, définie à l'aide du système

$$(4) \qquad x_v = ay, \qquad y_u = ax,$$

nous allons donner une méthode géométrique pour en déduire d'autres. Cette méthode a été trouvée, sous la forme analytique, par M. Goursat; aussi nous dirons que c'est une *transformation de M. Goursat* ou bien une *transformation* Γ.

Soit (z) un réseau harmonique à la congruence G (xy), c'est-à-dire un réseau dont les tangentes passent respectivement par x et par y; il est défini (¹) à l'aide du système

$$(5) \qquad z_u = \xi x, \qquad z_v = \eta y,$$

ξ, η étant un couple particulier de solutions du système (4). Ce couple

(¹) Voir *Géom. diff. proj. des reseaux*, p. 75.

étant choisi, les relations (3) permettent de faire correspondre, à une constante additive près, à tout couple de solutions de (4), une solution z de l'équation de Laplace du réseau (z). En particulier, si l'on prend $x=\xi$, $y=\eta$, la solution ρ correspondante est donnée par

$$\rho_u=\xi^2, \qquad \rho_v=\eta^2. \tag{6}$$

Au moyen de cette solution, à laquelle on peut ajouter une constante, on construit ∞^1 congruences ($x'y'$) harmoniques à (z). Je dis que ce sont des congruences G.

En effet, d'après la théorie générale ([1]), on peut prendre pour les foyers du rayon $x'y'$

$$\rho z_u - \rho_u z = \rho\xi\left(x - \frac{\xi}{\rho}z\right),$$

$$\rho z_v - \rho_v z = \rho\eta\left(y - \frac{\eta}{\rho}z\right),$$

ou bien

$$x' = x - \frac{\xi}{\rho}z, \qquad y' = y - \frac{\eta}{\rho}z. \tag{7}$$

Comme on a

$$x'_v = \left(a - \frac{\xi\eta}{\rho}\right)y' = a'y', \qquad y'_u = a'x', \tag{8}$$

la congruence ($x'y'$) est bien une congruence G et les formules (7) définissent une transformation Γ.

5. Les relations (7) prouvent que les droites xy, $x'y'$ se coupent au point

$$\bar{z} = \xi y - \eta x.$$

D'autre part on tire de (5) l'équation de Laplace du réseau (z)

$$z_{uv} = a\xi y + a\eta x = \frac{a\eta}{\xi}z_u + \frac{a\xi}{\eta}z_v$$

et de là les transformés de Laplace z_1 et z_{-1} de z

$$z_1 = z_v - \frac{a\eta}{\xi}z = \frac{\eta}{\xi}(\xi y - az),$$

$$z_{-1} = z_u - \frac{a\xi}{\eta}z = \frac{\xi}{\eta}(\eta x - az).$$

([1]) Voir *Géom. diff. des réseaux*, p. 72.

On en déduit que le point $\bar{z}$, commun aux rayons xy, $x'y'$, est situé sur la droite $z_1 z_{-1}$, car on a

$$\bar{z} = \xi y - \eta x = \frac{\xi}{\eta} z_1 - \frac{\eta}{\xi} z_{-1}.$$

On a donc le résultat suivant : *Tous les rayons $x'y'$ des congruences $(x'y')$, transformées* Γ *de la congruence (xy) et harmoniques au même réseau (z), coupent la droite $z_1 z_{-1}$ au même point $\bar{z}$ que xy.* Ce dernier point décrit un réseau $(\bar{z})$, conjugué à toutes les congruences $(x'y')$.

6. On peut démontrer une réciproque de la proposition précédente, à savoir : *Étant donnés une congruence (xy) et un réseau harmonique (z), si le rayon xy coupe la droite $z_1 z_{-1}$, qui joint les deux transformés de Laplace de z, en un point $\bar{z}$ qui décrit un réseau $(\bar{z})$, conjugué à (xy), alors (xy) est une congruence de M. Goursat.*

Supposons (xy) définie par le système (1), le réseau harmonique (z) par

$$z_u = \xi x, \qquad z_v = \eta y,$$

où ξ, η est un couple de solutions du système

$$\xi_v = b\eta, \qquad \eta_u = a\xi$$

adjoint à (1). On a

$$z_1 = \eta\left(y - \frac{b}{\xi} z\right), \qquad z_{-1} = \xi\left(x - \frac{a}{\eta} z\right),$$

donc

$$\bar{z} = a\xi y - b\eta x.$$

Ce point décrit un réseau $(\bar{z})$, conjugué à (xy), seulement si l'on peut déterminer λ de manière que $\lambda a\xi$, $\lambda b\eta$ satisfassent au système (1), ce qui conduit à

$$(\lambda a)_v = 0, \qquad (\lambda b)_u = 0.$$

On en conclut aisément que (xy) est une congruence G.

7. *Théorème de permutabilité.* — Il y a pour les transformations Γ des congruences G un théorème de permutabilité, analogue à celui qui a été donné par M. Bianchi pour les transformations de Moutard des réseaux à invariants égaux, à savoir : *Si deux congruences* G, $(x'y')$ *et* $(x''y'')$, *sont des transformées* Γ *d'une même congruence* G (xy), *elles le sont d'une infinité.*

Soient, en effet, (4) le système qui correspond à la congruence (xy); ξ', η' et ξ'', η'' les couples de solutions de ce système qui conduisent aux congruences transformées $(x'y')$, $(x''y'')$.

On a

$$(9)\quad \begin{cases} x' = x - \dfrac{\xi'}{\rho'} z', & y' = y - \dfrac{\eta'}{\rho'} z'; \\ x'' = x - \dfrac{\xi''}{\rho''} z'', & y'' = y - \dfrac{\eta''}{\rho''} z'', \end{cases}$$

où z', z'', ρ', ρ'' sont définis par

$$\begin{aligned} z'_u &= \xi' x, & z'_v &= \eta' y; \\ z''_u &= \xi'' x, & z''_v &= \eta'' y; \\ \rho'_u &= \xi'^2, & \rho'_v &= \eta'^2; \\ \rho''_u &= \xi''^2, & \rho''_v &= \eta''^2. \end{aligned}$$

Partons de la congruence $(x'y')$ et appliquons-lui une transformation Γ particulière. A cet effet remarquons que les formules (9) prouvent que le système

$$x'_v = a' y', \qquad y'_u = a' x',$$

où

$$a' = a - \frac{\xi'\eta'}{\rho}$$

admet le couple de solutions

$$\bar{\xi}' = \xi'' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma', \qquad \bar{\eta}' = \eta'' - \frac{\eta'}{\rho'}\sigma',$$

où σ' est définie, à une constante additive près, par

$$\sigma'_u = \xi'\xi'', \qquad \sigma'_v = \eta'\eta''.$$

Au moyen du couple $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$ on peut déterminer un réseau $(\bar{z}')$, harmonique à $(x'y')$, par le système

$$\bar{z}'_u = \bar{\xi}' x' = \left(\xi'' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma'\right)\left(x - \frac{\xi'}{\rho'} z'\right) = \left(z'' - \frac{\sigma'}{\rho'} z'\right)_u,$$

$$\bar{z}'_v = \left(z'' - \frac{\sigma'}{\rho'} z'\right)_v,$$

donc, à une constante additive près,

$$\bar{z}' = z'' - \frac{\sigma'}{\rho'} z'.$$

On aura ensuite

$$\bar{x}' = x' - \frac{\bar{\xi}'}{\bar{\rho}'} \bar{z}', \qquad \bar{y}' = y' - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\rho}'} \bar{z}',$$

où $\bar{\rho}'$ est déterminé par

$$\bar{\rho}'_u = \bar{\xi}'^2, \qquad \bar{\rho}'_v = \bar{\eta}'^2,$$

ou

$$\bar{\rho}'_u = \left(\xi'' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma'\right)^2 = \left(\rho'' - \frac{\sigma'^2}{\rho'}\right)_u,$$

$$\bar{\rho}'_v = \left(\rho'' - \frac{\sigma'^2}{\rho'}\right)_v,$$

donc

$$\bar{\rho}' = \rho'' - \frac{\sigma'^2}{\rho'}.$$

On a donc

$$\bar{x}' = \frac{1}{\rho'\rho'' - \sigma'^2} \begin{vmatrix} x & z' & z'' \\ \xi' & \rho' & \sigma' \\ \xi'' & \sigma' & \rho'' \end{vmatrix},$$

$$\bar{y}' = \frac{1}{\rho'\rho'' - \sigma'^2} \begin{vmatrix} y & z' & z'' \\ \eta' & \rho' & \sigma' \\ \eta'' & \sigma' & \rho'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on part maintenant de la congruence $(x''y'')$ avec le couple de solutions

$$\bar{\xi}'' = \xi' - \frac{\xi''}{\rho''}\sigma'', \qquad \bar{\eta}'' = \eta' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma''$$

du système correspondant, où

$$\sigma''_u = \xi''\xi', \qquad \sigma''_v = \eta''\eta',$$

on trouvera la même congruence si l'on prend

$$\sigma' = \sigma'' = \sigma + c,$$

c étant une constante arbitraire. On a ainsi les ∞^1 congruences $(\bar{x}\bar{y})$, où

$$\bar{x} = \frac{1}{\rho'\rho'' - (\sigma + c)^2} \begin{vmatrix} x & z' & z'' \\ \xi' & \rho' & \sigma + c \\ \xi'' & \sigma + c & \rho'' \end{vmatrix},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\rho'\rho'' - (\sigma + c)^2} \begin{vmatrix} y & z' & z'' \\ \eta' & \rho' & \sigma + c \\ \eta'' & \sigma + c & \rho'' \end{vmatrix},$$

qui admettent toutes comme transformées Γ les congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$. Pour $c = \infty$ on a la congruence initiale (xy).

III. — Suites de Laplace à deux congruences G consécutives.

8. Soit (xy) une congruence G, définie par le système (4) et soit y_1 le transformé de Laplace de y dans le sens des courbes $v =$ const. Les invariants du réseau (y), tirés de (3), sont

$$h' = -(\log a)_{uv} + a^2, \qquad k' = a^2;$$

ceux du réseau (y_1) sont

$$h'_1 = 2h' - k' - (\log h')_{uv}, \qquad k'_1 = h'.$$

Supposons maintenant que la congruence (yy_1), consécutive à (xy), dans la suite de Laplace, soit G comme (xy). On devra avoir $h'_1 = k'$, ou

$$(\log h'a^2)_{uv} = 0.$$

d'où

$$h'a^2 = \mathrm{UV},$$

donc

$$(\log a)_{uv} = a^2 - \frac{\mathrm{UV}}{a^2}.$$

On peut multiplier x par une fonction de u, y par une fonction de v et changer les variables indépendantes, de manière que le système (4) garde la même forme et que l'on ait

(10) $$(\log a)_{uv} = a^2 - \frac{1}{a^2}.$$

Or on a

$$y_1 = y_v - \frac{a_v}{a} y,$$

et en posant $x_1 = \frac{y}{a}$, on trouve

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{y_1}{a}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{x_1}{a},$$

qui est le système, analogue à (4), correspondant à la congruence (yy_1) consécutive à (xy). Comme $\frac{1}{a}$ est aussi une solution de (10), la congruence consécutive à (yy_1) est aussi une congruence G. *Toutes les congruences de la suite de Laplace sont des congruences* G.

9. On peut déterminer une transformation Γ telle que la congruence transformée $(x'y')$ jouisse de la même propriété que (xy). On a pour $(x'y')$

$$x'_v = a'y', \qquad y'_u = a'x',$$

où

$$a' = a - \frac{\xi\eta}{\rho}.$$

Il s'agit de choisir le couple ξ, η de manière que l'on ait

$$(\log a')_{uv} = a'^2 - \frac{1}{a'^2},$$

ce qui conduit à la relation

$$(a\xi_u - a_u\xi)(a\eta_v - a_v\eta) = \xi\eta.$$

On peut alors poser

$$a\xi_u - a_u\xi = \lambda\eta, \qquad a\eta_v - a_v\eta = \frac{1}{\lambda}\xi,$$

qui doivent être compatibles avec

$$\xi_v = a\eta, \qquad \eta_u = a\xi,$$

ce qui exige que l'on ait $\lambda = \text{const.} = m$. Le système compatible

$$\xi_u = \frac{a_u}{a}\xi + \frac{m}{a}\eta, \qquad \xi_v = a\eta.$$

$$\eta_u = a\xi, \qquad \eta_v = \frac{1}{ma}\xi + \frac{a_v}{a}\eta$$

et

$$\rho_u = \xi^2, \qquad \rho_v = \eta^2$$

permet de déduire de toute solution a de (10) une autre solution

$$a' = a - \frac{\xi\eta}{\rho}$$

de la même équation.

IV. — Congruences G quadratiques.

10. Parmi les congruences G, celles qui sont en même temps quadratiques sont les plus intéressantes. Dans un S_5 ces congruences sont l'image des surfaces isothermes asymptotiques (¹).

Nous dirons qu'une congruence de S_n est quadratique si les rayons de la congruence sont situés sur une variété quadratique non singulière à $n-1$ dimensions, dont on peut prendre l'équation sous la forme

$$\Sigma X^2 = 0.$$

Si l'on a une congruence (xy) qui est en même temps G et quadratique et que l'on connaisse un couple de solutions ξ, η du système (4) correspondant, on pourra déduire, par des quadratures seulement, une succession de transformées Γ de (xy), mais qui ne sont pas en général des congruences quadratiques.

Remarquons tout d'abord que, en vertu de (4), il suffit que l'on ait

$$\Sigma x^2 = 0, \qquad \Sigma y^2 = 0,$$

pour que (xy) soit quadratique, car il en résulte aussi

$$\Sigma xy = 0.$$

Cela étant, les systèmes (5), (6) et (7) permettent d'obtenir la transformée $(x'y')$ de (xy), qui n'est pas en général quadratique. Posons maintenant

$$X = 2\Sigma xz, \qquad Y = 2\Sigma yz,$$

on a

$$X_v = aY, \qquad Y_u = aX,$$

c'est-à-dire X, Y est un nouveau couple de solutions de (4). On peut

(¹) FUBINI et CECH, *Geom. proj. differenziale*, t. 1, p. 282.

employer ce couple pour appliquer de nouveau la transformation Γ. On aura le système

$$z'_u = \mathrm{X}x, \qquad z'_v = \mathrm{Y}y,$$

et l'on déduira un autre couple

$$\mathrm{X}' = 2\Sigma x z', \qquad \mathrm{Y}' = 2\Sigma y z'$$

de solutions de (4) et ainsi de suite. On obtient ainsi une succession de congruences G, mais qui ne sont pas, en général, quadratiques.

11. Nous allons montrer actuellement qu'on peut choisir le couple ξ, η de manière que la transformée $(x' y')$ de la congruence (xy), qui est en même temps G et quadratique, jouisse de la même propriété.

Il faudra avoir en vertu de (7)

$$\Sigma x'^2 = \frac{\xi^2}{\rho^2}\mathrm{Z} - \frac{\xi}{\rho}\mathrm{X} = 0,$$

$$\Sigma y'^2 = \frac{\eta^2}{\rho^2}\mathrm{Z} - \frac{\eta}{\rho}\mathrm{Y} = 0,$$

où nous avons posé

$$\mathrm{Z} = \Sigma z^2$$

et d'où nous tirons

$$\frac{\xi}{\mathrm{X}} = \frac{\eta}{\mathrm{Y}} = \frac{\rho}{\mathrm{Z}} = \lambda.$$

Or si nous tenons compte que ξ, η et X, Y satisfont au système (4), nous trouvons $\lambda = \text{const.} = m$. On a donc

$$\xi = m\mathrm{X}, \qquad \eta = m\mathrm{Y}, \qquad \rho = m\mathrm{Z}, \tag{11}$$

d'ailleurs il est facile de voir que la dernière est une conséquence des deux autres, car on a

$$\mathrm{Z}_u = \xi\mathrm{X}, \qquad \mathrm{Z}_v = \eta\mathrm{Y}.$$

Il s'agit par conséquent de faire voir qu'on peut déterminer ξ, η de manière à avoir les deux premières relations (11).

12. Remarquons d'abord qu'on a de (4) et des relations

$$\Sigma x^2 = \Sigma y^2 = \Sigma xy = 0$$

les relations

$$\Sigma x_u^2 = \mathrm{U}, \qquad \Sigma y_v^2 = \mathrm{V}$$

qu'on peut réduire, par un changement des variables et en multipliant les x et les y par des facteurs convenables, à la forme

$$\Sigma x_u^2 = 1, \qquad \Sigma y_v^2 = 1$$

et que l'on a aussi

$$\Sigma x_u y_v = 0.$$

On peut alors employer la méthode des déterminants orthogonaux de M. Guichard, en posant

$$x_u^{(i)} = \mathrm{X}_1^i, \qquad y_v^{(i)} = \mathrm{X}_2^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

ou bien, en supprimant les indices supérieurs, comme nous l'avons fait jusqu'ici,

(12)
$$x_u = \mathrm{X}_1, \qquad y_v = \mathrm{X}_2.$$

Considérons $n - 1$ autres points $\mathrm{X}_k (k = 3, \ldots, n+1)$, formant avec X_1 et X_2 un $n+1$-èdre conjugué par rapport à la variété quadratique

$$\Sigma \mathrm{X}^2 = 0$$

et tels que le déterminant

$$\Delta = |\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_{n+1}|$$

soit orthogonal.

On peut déterminer $(n+1)^2$ coefficients $p_{ik} (i, k = 1, 2, \ldots, n+1)$ et $(n+1)^2$ coefficients q_{ik}, de manière que les fonctions X_k^i satisfassent au système

(13)
$$\frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial u} = \sum_l p_{kl} \mathrm{X}_l, \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial v} = \sum_l q_{kl} \mathrm{X}_l.$$

On en tire

$$p_{kl} = \sum_i \mathrm{X}_l^i \frac{\partial \mathrm{X}_k^i}{\partial u}, \qquad q_{kl} = \Sigma \mathrm{X}_l^i \frac{\partial \mathrm{X}_k^i}{\partial v},$$

d'où

(14)
$$p_{kk} = q_{kk} = 0, \qquad p_{kl} + p_{lk} = 0, \qquad q_{kl} + q_{lk} = 0.$$

Le système (13) définit les fonctions X_k^i si l'on a les relations

(15)
$$\frac{\partial p_{kl}}{\partial v} + \sum_j p_{kj} q_{jl} = \frac{\partial q_{kl}}{\partial u} + \sum_j q_{kj} p_{jl}.$$

On peut alors poser

$$x = \Sigma \lambda_k X_k, \qquad y = \Sigma \mu_k X_k, \tag{16}$$

où les fonctions λ_k, $\mu_k (k = 1, 2, \ldots, n+1)$ doivent vérifier les relations

$$\Sigma \lambda_k^2 = 0, \qquad \Sigma \mu_k^2 = 0, \qquad \Sigma \lambda_k \mu_k = 0. \tag{17}$$

Si l'on introduit les valeurs (16) de x et y d'abord en (12), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_l}{\partial u} + \sum_k p_{kl} \lambda_k = \varepsilon_l, \qquad \varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_l = 0 \qquad (l \neq 1); \\ &\frac{\partial \mu_l}{\partial v} + \sum q_{kl} \mu_k = \eta_l, \qquad \eta_2 = 1, \qquad \eta_l = 0 \qquad (l \neq 2); \end{aligned} \right. \tag{18}$$

ensuite en (4), d'où l'on a

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_l}{\partial v} + \sum_k q_{kl} \lambda_k = a \mu_l, \\ &\frac{\partial \mu_l}{\partial u} + \sum_k p_{kl} \mu_k = a \lambda_l. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Comme la congruence (xy) est donnée et les points variables $X_k (k = 1, 2, \ldots, n+1)$ choisis, les relations (17) sont vérifiées et les conditions d'intégrabilité du système formé par les équations (18) et (19) satisfaites.

La congruence (xy) étant définie par les relations (16) par rapport au $n+1$-èdre des points X_k, passons à la transformation Γ. Nous poserons pour le point z qui décrit le réseau (z) harmonique à (xy)

$$z = \sum_k \nu_k X_k.$$

Les relations (5) donnent alors :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \nu_l}{\partial u} + \sum_k p_{kl} \nu_k = \xi \lambda_l, \\ &\frac{\partial \nu_l}{\partial v} + \sum q_{kl} \nu_k = \eta \mu_l. \end{aligned}$$

Or on a

$$X = 2\Sigma xz = 2\Sigma\lambda_k\nu_k = L,$$
$$Y = 2\Sigma yz = 2\Sigma\mu_k\nu_k = M,$$

et, comme la congruence transformée $(x'y')$ doit être quadratique, on a

$$\xi = mX = mL, \qquad \eta = mY = mM$$

et le système précédent devient

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\nu_l}{\partial u} + \sum_k p_{kl}\nu_k = m\lambda_l L = 2m\lambda_l \sum_k \lambda_k\nu_k, \\ &\frac{\partial\nu_l}{\partial v} + \sum_k q_{kl}\nu_k = m\mu_l M = 2m\mu_l \sum \mu_k\nu_k. \end{aligned} \right.$$

C'est un système linéaire et homogène du premier ordre de $2(n+1)$ équations aux dérivées partielles à $n+1$ inconnues. Les conditions d'intégrabilité sont identiquement vérifiées en vertu des relations antérieures. La transformation Γ cherchée est complètement définie.

13. Nous venons de trouver une transformation Γ spéciale, qui dépend de $n+1$ constantes arbitraires, et qui permet de déduire de toute congruence G quadratique d'autres congruences de même espèce. Il y a pour ces transformations un théorème de permutabilité qui mérite d'être signalé. On peut le déduire de celui qui a été étudié au paragraphe **7**.

Il s'agit de montrer que la congruence (xy) étant donnée, de même que deux transformées $(x'y')$, $(x''y'')$, toutes les trois G et quadratiques, on peut trouver une nouvelle congruence $(\overline{x}\overline{y})$ en même temps G et quadratique qui ait comme transformées $(x'y')$ et $(x''y'')$.

En gardant les notations du paragraphe **7** et en posant

$$X' = 2\Sigma xz', \qquad Y' = 2\Sigma yz', \qquad Z' = \Sigma z'^2,$$
$$X'' = 2\Sigma xz'', \qquad Y'' = 2\Sigma yz'', \qquad Z'' = \Sigma z''^2,$$

on doit avoir, par hypothèse,

$$\xi' = m'X', \qquad \eta' = m'Y', \qquad \rho' = m'Z';$$
$$\xi'' = m''X'', \qquad \eta'' = m''Y'', \qquad \rho'' = m''Z''.$$

Pour que la congruence $(\overline{x}\overline{y})$, obtenue à partir de $(x'y')$, soit quadratique, il faut et il suffit qu'on ait

$$\overline{\xi}' = 2m\Sigma x'\overline{z}', \qquad \overline{\eta}' = 2m\Sigma y'\overline{z}'$$

ou bien

$$(21) \qquad \begin{cases} \xi'' - \dfrac{\xi'}{\rho'}\sigma = 2m\Sigma x'\left(z'' - \dfrac{\sigma}{\rho'}z'\right), \\ \eta'' - \dfrac{\eta'}{\rho'}\sigma = 2m\Sigma y'\left(z'' - \dfrac{\sigma}{\rho'}z'\right), \end{cases}$$

σ devant vérifier les relations

$$\sigma_u = \xi'\xi'', \qquad \sigma_v = \eta'\eta''.$$

Or le système (21) conduit à prendre $m = m''$ et l'on a alors

$$\sigma = 2\frac{m'm''}{m' + m''}\Sigma z'z''$$

qui vérifie bien les relations précédentes. Le théorème de permutabilité en résulte.

V. — Congruences G à réseaux conjugués à invariants égaux.

14. Il y a encore une classe particulièrement intéressante de congruences G, ce sont celles qui admettent des réseaux conjugués à invariants égaux. Supposons la congruence (xy) définie par le système (4). On a un réseau conjugué à la congruence en prenant un couple ξ, η de solutions de (4) et, d'après un théorème [1] de M. Kœnigs, le réseau sera à invariants égaux si le système (4) admet aussi comme solutions le couple

$$\overline{\xi} = \lambda\xi, \qquad \overline{\eta} = -\lambda\eta.$$

On trouve aisément que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'après un changement des variables indépendantes on ait

$$a = \frac{f'(u+v)}{2f(u+v)},$$

[1] *Géom. diff. proj. des réseaux*, p. 81.

d'où

$$\lambda = \frac{1}{f}, \quad \xi = \sqrt{f}, \quad \eta = \sqrt{f}, \quad \bar{\xi} = -\bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{f}}.$$

Considérons maintenant les réseaux (z) et $(\bar{z})$, harmoniques à la congruence (xy), déduits respectivement avec les couples ξ, η et $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$.

On a

$$z_u = \xi x, \quad z_v = \eta y,$$
$$\bar{z}_u = \lambda \xi x, \quad \bar{z}_v = -\lambda \eta y,$$

d'où manifestement

$$\bar{z}_u - \lambda z_u = 0, \quad \bar{z}_v + \lambda z_v = 0,$$

qui prouvent que les réseaux (z) et $(\bar{z})$ sont à invariants égaux. On peut mettre les relations précédentes sous la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{f}} z - \sqrt{f}\,\bar{z}\right)_u = -\frac{f'}{2f}\left(\frac{1}{\sqrt{f}} z + \sqrt{f}\,\bar{z}\right),$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{f}} z + \sqrt{f}\,\bar{z}\right)_v = -\frac{f'}{2f}\left(\frac{1}{\sqrt{f}} z - \sqrt{f}\,\bar{z}\right),$$

d'où l'on conclut que la droite $z\bar{z}$ décrit une congruence G admettant, comme (xy), deux réseaux conjugués (z) et $(\bar{z})$ à invariants égaux.

Si l'on remarque maintenant que x et y sont les points communs aux tangentes, aux courbes correspondantes des réseaux (z) et $(\bar{z})$ à invariants égaux et conjugués à $(z\bar{z})$, il est clair qu'on pourra appliquer le même procédé à (xy) pour en déduire, sans quadratures, une autre congruence de la même espèce.

Il est facile de voir que les deux points $\bar{x}$, $\bar{y}$ qui décrivent des réseaux à invariants égaux conjugués à (xy) sont

$$\bar{x} = x - y, \quad \bar{y} = x - y.$$

Les points x', y' communs aux tangentes correspondantes des réseaux $(\bar{x})$ et $(\bar{y})$ sont alors

$$x' = \bar{x}_u + a\bar{x} = \bar{y}_u - a\bar{y} = x_u - ay,$$
$$y' = \bar{x}_v + a\bar{x} = a\bar{y} - \bar{y}_v = ax - y_v;$$

et l'on a

$$x'_v = ay', \quad y'_u = ax',$$

c'est-à-dire $(x'y')$ est aussi une congruence G qui admet des réseaux conjugués à invariants égaux. En partant de $(x'y')$ on pourra en déduire une autre et ainsi de suite.

Analytiquement, le théorème précédent revient à ceci : *Étant donné un couple x, y de solutions d'un système* (4) *de M. Goursat, où a est une fonction de $u+v$, on en déduit un autre couple de solutions en prenant*

$$x' = x_u - ay, \qquad y' = ax - y_v;$$

de x', y' on pourra, par la même opération, en tirer un autre et ainsi de suite.

VI. — Généralisations.

15. Considérons le système

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = a_{ik} x_k \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

formé de $n(n-1)$ équations, où les x_i sont les fonctions inconnues, les u_i les variables indépendantes et les a_{ik} des fonctions données des variables u_i. Nous supposons les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = a_{il} a_{lk} \qquad (i \neq k \neq l)$$

identiquement vérifiées. Si l'on a

$$a_{ik} = a_{ki},$$

je dirai que (22) est un *système de M. Goursat,* car pour tout couple de $i \neq k$ on a un système habituel de M. Goursat analogue à (4).

16. Prenons $m+1$ solutions $x_i^{(j)} (j = 1, 2, \ldots, m+1)$ de (22). On aura, dans un S_m, n points $x_i (i = 1, \ldots, n)$ qui forment, lorsque les u_i varient, une configuration spéciale que je désignerai par G. Un couple de points x_i, x_k de la configuration décrit, pour u_i, u_k variant seules, une congruence G.

On a déjà rencontré, d'une manière indirecte, une configuration G de trois points, à savoir les traces sur le plan de l'infini des tangentes aux courbes d'un système triple orthogonal particulier, étudié par

Darboux, Fouché, Egorov et Guichard (Darboux, *Systèmes orthogonaux*, p. 419 et suiv.).

Les configurations générales jouissent de propriétés aussi simples et aussi intéressantes que les congruences G. Je me borne à définir une transformation Γ analogue à celle de M. Goursat.

Prenons une solution $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ du système (22). On a alors le système intégrable

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \xi_i x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui définit un réseau (z) à n variables, harmonique à la configuration donnée. A l'aide de la fonction ρ déterminée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_i} = \xi_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient la configuration transformée

$$x' = x_i - \frac{\xi_i}{\rho} z,$$

car on a

$$\frac{\partial x'_i}{\partial u_k} = a'_{ik} x'_k \qquad (i \neq k),$$

où

$$a'_{ik} = a'_{ki} = a_{ik} - \frac{\xi_i \xi_k}{\rho}.$$

La configuration des n points x'_i est donc aussi G.

Nous croyons avoir réussi à montrer, par ce qui précède, l'importance géométrique des systèmes de M. Goursat.