JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL LÉVY

Introduction à une théorie des fonctions à croissance régulière

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 137-157.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__137_0>

Introduction à une théorie des fonctions à croissance régulière;

Par Paul LÉVY.

---

1. La notion de la rapidité de croissance d'une fonction est d'un caractère si intuitif que nous sommes tentés de penser que les idées que nous avons aujourd'hui sur ce sujet devaient être familières à des savants tels que Lagrange et Cauchy, mais que, occupés par des travaux plus importants, ils n'ont pas pris la peine de les formuler. Pourtant rien de précis ne confirme cette manière de voir, et l'on peut observer qu'à leur époque les auteurs d'ouvrages didactiques qui se sont le plus efforcés d'analyser les méthodes de raisonnement des mathématiques et la nature des notions qu'on y introduit, Lacroix, Cournot et Duhamel, par exemple, n'ont pas soupçonné l'importance de la théorie de la croissance. Ce n'est qu'à la fin du XIX^e siècle que la critique philosophique des notions fondamentales de l'analyse a fait de nouveaux progrès; pendant que se développait la théorie des ensembles, Paul du Bois-Reymond étudiait systématiquement la formation de fonctions de plus en plus rapidement croissantes, et M. Borel introduisait la notion de croissance régulière.

Ces théories n'ont pas progressé depuis, comme on aurait pu l'espérer; on y trouve à chaque pas toutes les difficultés du transfini, et les objections adressées par les empiristes aux raisonnements de Cantor et Zermelo ont découragé les chercheurs prêts à s'aventurer sur un terrain si peu solide. Nous ne savons pas encore très bien ce que c'est qu'une fonction à croissance régulière, et il est facile de se convaincre de l'insuffisance des définitions simples qui se présentent d'abord à l'esprit; elles suffisent pour les fonctions se rattachant à des types de croissance bien connus, mais sont en défaut lorsqu'il s'agit de types nouveaux. Il serait important d'obtenir une définition valable dans tous les cas; ce problème n'est pas encore résolu; du moins, si j'ai été conduit par des recherches sur l'itération à une définition dont je crois qu'elle remplit les conditions voulues, je n'ai pas réussi jusqu'ici à le démontrer.

En tout cas ces recherches m'ont dès le début convaincu de l'importance de cette remarque que deux fonctions à croissance régulière ne sauraient être égales une infinité de fois; la différence de ces deux fonctions est différente de zéro et d'un signe bien déterminé, pour x assez grand. Il y a alors lieu d'étudier les ensembles de fonctions vérifiant cette condition, ensembles que je désignerai sous le nom d'*échelles de croissance*. Les fonctions à croissance régulière doivent de plus constituer une échelle *complète;* dans toute *lacune*, existant dans l'ensemble des fonctions régulières connues et permettant l'introduction de types de croissance nouveaux, on doit en effet pouvoir en choisir qui soient réguliers.

Je compte, dans un second Mémoire, exposer les résultats que j'ai obtenus sur la notion de fonction à croissance régulière et sur la théorie de l'itération, ainsi que sur les applications qu'aurait cette notion si l'on parvenait à la préciser convenablement; je me contente pour le moment de renvoyer le lecteur à quelques Notes que j'ai déjà publiées sur ces questions (¹). Le présent travail a pour objet l'étude générale des échelles complètes de croissance; c'est une étude préliminaire, qui peut guider dans les recherches relatives aux fonctions à croissance régulière, et préciser le but à atteindre.

J'ai délibérément adopté dans ce travail le point de vue idéaliste; on n'y trouvera qu'incidemment des résultats établis d'une manière qui puisse satisfaire les empiristes. De plus je n'ai pas craint d'énoncer à plusieurs reprises des résultats dont je n'ai pas trouvé la démonstration, mais qui m'ont paru très vraisemblables, et d'en développer les

(¹) *Comptes rendus*, 1926 et 1927, et *Congrès pour l'avancement des Sciences, Poitiers*, 1926. Mon Mémoire sur les séries divergentes (*Bull. Soc. math.*, 1926) se rattache aussi au même ordre d'idées.

conséquences. Ce n'est que grâce à cette hardiesse, pour laquelle je sollicite l'indulgence du lecteur, que je puis donnèr un exposé d'ensemble d'une théorie que je ne pense pas réussir à justifier d'une manière tout à fait rigoureuse, même au point de vue idéaliste.

J'attire spécialement l'attention des lecteurs désireux de contribuer au progrès de cette théorie sur le théorème de la théorie des ensembles que j'ai admis sans démonstration au nº **7**. La démonstration, ou au contraire l'indication d'un exemple le mettant en défaut, aurait une grande importance.

2. Les fonctions considérées dans cette étude sont des fonctions uniformes d'une variable réelle x croissant indéfiniment par valeurs positives. Toutes les propriétés énoncées seront supposées vraies seulement pour x assez grand; deux fonctions égales pour x assez grand ne seront pas considérées comme distinctes. Nous dirons que $f_1(x)$ *croît plus vite* que $f_2(x)$ si la différence $f_1(x) - f_2(x)$ est positive pour x assez grand, même si cette différence est décroissante.

Nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions vérifiant certaines conditions telles que la continuité, ou bien l'existence ou la continuité d'un certain nombre de dérivées, ou même de toutes les dérivées. Nous appellerons *échelle complète de croissance*, ou plus simplement *échelle complète*, extraite de $\mathcal{E}$, tout ensemble E de fonctions de $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

Condition a : la différence de deux fonctions distinctes de E *est différente de zéro et d'un signe bien déterminé pour x assez grand;* en d'autres termes l'une d'elles croît plus vite que l'autre.

Condition b : il est impossible d'ajouter une nouvelle fonction de $\mathcal{E}$ à l'ensemble E *sans que la condition a cesse d'être vérifiée.* En d'autres termes, étant donnée une fonction $g(x)$ de $\mathcal{E}$, on peut toujours trouver une fonction $f(x)$ de E qui soit, ou bien une infinité de fois [1] égale à $f(x)$, ou bien une infinité de fois plus grande et une infinité de fois plus petite (la seconde de ces circonstances, impliquant la première, est inutile à mentionner dans le cas des fonctions continues).

---

[1] Dans tout ce travail « une infinité de fois » signifie « pour une infinité de valeurs de x indéfiniment croissantes ».

Un ensemble vérifiant la première de ces conditions, mais non la seconde, est une *échelle incomplète*. On peut toujours compléter une telle échelle par l'addition de nouvelles fonctions. L'ensemble $\mathcal{E}$ étant en effet supposé bien ordonné, au sens de Zermelo, on examinera successivement toutes ses fonctions pour classer dans l'échelle à former toutes celles qui peuvent l'être, c'est-à-dire toutes celles qui croissent, soit moins vite, soit plus vite, que n'importe laquelle des fonctions antérieurement classées dans l'échelle. Il est clair que la condition a sera constamment vérifiée, et que la condition b le sera aussi quand on aura épuisé toutes les fonctions de $\mathcal{E}$.

3. L'étude des *coupures* dans une échelle complète est fondamentale. Comme l'a déjà observé M. Borel, elle conduit à introduire des *fonctions idéales*, grâce auxquelles on peut établir une sorte de continuité, analogue à la continuité des valeurs d'une variable réelle, malgré d'importantes différences, que la suite montrera.

Une *coupure*, dans une échelle complète ou incomplète E, est une division de E en deux ensembles E_1 et E_2, tels que toute fonction de E_1 croisse moins vite que n'importe quelle fonction de E_2. La coupure prendra le nom de *lacune* si l'on peut trouver une fonction croissant plus vite que toutes celles de E_1 et moins vite que toutes celles de E_2; il ne peut y avoir de lacune que dans une échelle incomplète.

Une fonction $f(x)$ de E définit évidemment deux coupures, E_1 comprenant toutes les fonctions qui croissent moins vite que $f(x)$, E_2 toutes celles qui croissent plus vite, et la fonction $f(x)$ elle-même pouvant être classée, soit dans E_1, soit dans E_2; on a ainsi deux coupures ne différant que par la seule fonction $f(x)$. Il est clair que dans tout autre cas, entre deux coupures différentes d'une échelle complète, il y a une infinité non dénombrable de fonctions de cette échelle; l'ensemble de ces fonctions, ou bien l'ensemble des fonctions de E situées d'un côté déterminé d'une seule coupure, constitue ce que nous appellerons un *segment* de cette échelle.

Si une coupure, dans une échelle complète, n'est pas définie par une fonction véritable $f(x)$, nous dirons qu'elle définit une *fonction idéale;* nous désignerons une telle fonction par $\mathcal{F}(x)$, et nous distinguerons trois types de fonctions idéales, que nous désignerons par $\overline{\mathcal{F}}(x)$, $\underline{\mathcal{F}}(x)$ et $\mathcal{G}(x)$.

Une fonction idéale sera une fonction $\overline{\mathcal{F}}(x)$ si l'on peut trouver dans E_1 une suite dénombrable de fonctions

$$(1) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

(qu'on peut supposer de plus en plus rapidement croissantes, en supprimant celles qui ne croîtraient pas plus vite que les précédentes), telle qu'aucune fonction de E_1 ne croisse au moins aussi vite que n'importe laquelle des fonctions $f_n(x)$. La fonction $\overline{\mathcal{F}}(x)$ sera alors la première fonction croissant plus vite que toutes celles de la suite (1). D'ailleurs une suite dénombrable de fonctions de plus en plus rapidement croissantes choisies dans E définit bien toujours une fonction idéale $\overline{\mathcal{F}}(x)$, mais il y a naturellement une infinité de manières d'obtenir la même fonction.

Une fonction $\underline{\mathcal{F}}(x)$ sera au contraire définie par une suite de fonctions

$$(2) \qquad g_1(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_n(x), \quad \ldots,$$

choisies dans E et de moins en moins rapidement croissantes, l'ensemble E_1 comprenant toutes les fonctions de E qui croissent moins rapidement que toutes celles de cette suite.

D'ailleurs les deux suites (1) et (2) ne peuvent évidemment pas définir une même coupure, si l'échelle E est complète. Il faudrait évidemment pour cela que chaque fonction de la seconde suite croisse plus vite que toutes les fonctions de la première. Or, s'il en est ainsi, on peut, d'après les théorèmes de Paul du Bois-Reymond, trouver une fonction, et même une fonction vérifiant toutes les conditions de continuité qui caractérisent l'ensemble $\mathcal{E}$, croissant plus vite que tous les $f_n(x)$ et moins vite que tous les $g_n(x)$. Si les deux suites définissaient une même coupure dans l'échelle E, cette fonction croîtrait plus vite que toutes les fonctions de l'ensemble inférieur E_1 et moins vite que toutes les fonctions de E_2; elle pourrait donc être ajoutée à l'échelle pour la compléter. Si l'échelle est complète, cela n'est pas possible; une fonction idéale du type $\overline{\mathcal{F}}(x)$ ne peut donc pas coïncider avec une fonction $\underline{\mathcal{F}}(x)$.

Il existe, d'autre part, des fonctions idéales $\mathcal{G}(x)$ qui ne sont d'aucun des types précédents; si l'on veut définir une telle fonction comme limite d'une infinité de fonctions de E, il en faut une infinité non dénombrable.

On formera aisément de telles fonctions par des conditions de convergence ou de divergence (¹); on voit même aisément que dans tout segment d'échelle complète il existe une infinité non dénombrable de coupures de chaque type. Mais il n'est pas facile de donner une définition générale des coupures du type $\mathcal{G}(x)$, et c'est à cela qu'est due surtout la difficulté de cette étude. Sans doute peut-on toujours définir $\mathcal{G}(x)$ comme limite d'une infinité non dénombrable de fonctions de plus en plus rapidement croissantes; mais, que l'on admette ou non les raisonnements idéalistes, il n'est pas aisé de tirer des conséquences précises de cette définition, dans laquelle intervient un ensemble bien ordonné et non dénombrable.

Enfin il peut être commode d'introduire une fonction idéale $\mathcal{H}(x)$, croissant plus vite que toutes les fonctions de E, et la fonction $-\mathcal{H}(x)$.

4. Deux ensembles de fonctions, extraits chacun d'une échelle complète, seront dits *homéomorphes*, s'il est possible d'établir entre eux une correspondance biunivoque, une fonction véritable correspondant à une fonction véritable et une fonction idéale à une fonction idéale, et l'ordre de grandeur relatif de deux fonctions étant respecté (²).

Il est surtout intéressant d'étudier l'homéomorphisme de deux segments. *Deux segments limités par des fonctions véritables sont toujours homéomorphes*. Du moins c'est là un résultat qui paraît très vraisem-

(¹) *Cf.* E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 118.

(²) On peut considérer aussi l'homéomorphisme généralisé, dans lequel une fonction véritable pourrait correspondre à une fonction idéale, et inversement. Il résultera de la suite que, dans l'homéomorphisme généralisé de deux segments, une fonction véritable peut correspondre à une fonction $\mathcal{G}(x)$ et inversement; mais une fonction $\overline{\mathcal{F}}(x)$, sauf si elle limite inférieurement l'un des segments considérés, ne peut que correspondre à une fonction du même type; de même pour une fonction $\underline{\mathcal{F}}(x)$, sauf si elle limite supérieurement l'un des segments. Cette remarque est importante; elle montre que l'homogénéité n'existe pas dans une échelle complète comme dans le continu ordinaire.

blable et que nous admettrons sans démonstration. Observons seulement qu'il est évident dans le cas de segments extraits d'une échelle complète telle que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions de cette échelle appartiennent à l'échelle; la correspondance homéomorphe des deux segments (f_1, f_2) et (g_1, g_2) est en effet alors réalisée par la formule

$$\frac{z - g_1(x)}{g_2(x) - g_1(x)} = \frac{y - f_1(x)}{f_2(x) - f_1(x)},$$

où y et z désignent les deux fonctions qui se correspondent. Or c'est une condition essentielle, dans l'étude des fonctions à croissance régulière, que l'ensemble de ces fonctions soit fermé par rapport à l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Le théorème énoncé est donc sûrement vrai pour l'ensemble des fonctions régulières, et par suite pour tous les ensembles déduits du précédent par des changements de variables effectués sur x. Mais il n'est guère douteux qu'il soit vrai dans des cas beaucoup plus généraux, et probablement sans aucune restriction.

L'homéomorphisme de deux segments quelconques ne dépend alors évidemment que de deux conditions, l'une relative aux limites supérieures, l'autre relative aux limites inférieures. Si en effet on a établi des correspondances homéomorphes, d'une part entre des parties de ces segments voisines des limites supérieures, d'autre part entre des parties voisines des limites inférieures, on peut toujours limiter ces parties à des fonctions véritables, et compléter la correspondance homéomorphe des segments étudiés par une correspondance convenable entre les parties moyennes.

Le problème de la limite supérieure et celui de la limite inférieure étant identiques, étudions par exemple le premier. Il est d'abord évident, si l'un des segments est limité supérieurement par une fonction du type $\overline{\mathfrak{F}}(x)$, que la condition nécessaire et suffisante de l'homéomorphisme, en ce qui concerne les limites supérieures, est qu'il en soit de même du second; il est en effet nécessaire et suffisant qu'aux fonctions de plus en plus rapidement croissantes de la suite (1), dont la donnée définit une fonction $\overline{\mathfrak{F}}(x)$, correspondent les fonctions $g_n(x)$ d'une suite analogue du second segment; le segment partiel compris entre deux fonctions $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ correspond alors au segment compris entre les fonctions correspondantes $g_n(x)$ et $g_{n+1}(x)$ de la seconde suite (¹).

Dans tous les autres cas, qu'il s'agisse d'un segment limité supérieurement par une fonction $\underline{\mathcal{F}}(x)$ ou $\mathcal{G}(x)$, ou par la fonction $\mathcal{H}(x)$, ou encore par une fonction véritable $\varphi(x)$ (le segment étant dans ce cas *ouvert*, c'est-à-dire que l'on considère cette fonction comme ne lui appartenant pas), on ne peut approcher de cette limite supérieure que par une infinité non dénombrable de fonctions, qu'on peut toujours choisir de manière à constituer un ensemble bien ordonné de fonctions de plus en plus rapidement croissantes. Ces quatre cas n'en font qu'un au point de vue de l'homéomorphisme. Du moins on peut le démontrer en admettant, en plus des principes généraux du raisonnement idéaliste, le principe du continu, d'après lequel tout ensemble non dénombrable a au moins la puissance du continu; inversement une démonstration directe de l'homéomorphisme de toutes les coupures du type $\mathcal{G}(x)$ suffirait à démontrer le principe du continu.

Démontrons d'abord un théorème général sur les ensembles bien ordonnés. Soient $\mathcal{E}$ un tel ensemble, e un élément arbitraire de $\mathcal{E}$, Ω son rang et $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments précédant e; désignons par Ω_0 le plus petit nombre transfini de même classe que Ω, par e_0 l'élément de $\mathcal{E}$ dont le rang est Ω_0, et par $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des éléments précédant e_0. Il a même puissance que $\mathcal{C}$, d'où résulte la possibilité d'établir une correspondance biunivoque entre ces deux ensembles, et par suite une nouvelle classification des éléments de $\mathcal{C}$ dans laquelle cet ensemble apparaîtra comme le plus petit ensemble de sa puissance (²). Dans

(¹) Comme il a déjà été indiqué dans une Note précédente, ce résultat subsiste même pour l'homéomorphisme généralisé, pour lequel les fonctions $g_n(x)$ peuvent être des fonctions idéales; en effet entre $g_n(x)$ et $g_{n+1}(x)$ on peut toujours choisir une fonction véritable $\varphi_n(x)$, et la limite supérieure des fonctions $g_n(x)$ peut être définie comme limite supérieure des $\varphi_n(x)$. C'est donc une propriété caractéristique des fonctions du type $\overline{\mathcal{F}}(x)$ de pouvoir être définies comme limite supérieure d'une infinité dénombrable de fonctions, véritables ou idéales, de plus en plus rapidement croissantes.

(²) Précisons bien que cela signifie que, si l'on choisit un élément quelconque de $\mathcal{C}$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ classé avant lui est de puissance plus petite. Ainsi, dans l'ensemble dénombrable des nombres entiers, l'ensemble de ceux qui précèdent un entier choisi d'une manière quelconque est fini.

cette classification, supprimons tous les éléments qui ne sont pas supérieurs à tous ceux classés avant eux (le plus grand de deux éléments étant par définition celui dont le rang est le plus élevé dans la classification initiale). Pour l'ensemble $\mathcal{C}'$ des éléments conservés, l'ancienne et la nouvelle classification sont équivalentes; d'ailleurs e est le premier élément de $\mathcal{E}$ classé, dans l'ancienne classification, après ceux de $\mathcal{C}'$; on n'a en effet supprimé aucun élément de $\mathcal{C}$ sans être d'abord assuré d'avoir conservé un élément classé après lui. L'élément e choisi dans $\mathcal{E}$ est donc le premier après tous ceux d'un ensemble bien ordonné $\mathcal{C}'$ qui, par la manière dont il est formé, ou bien est de même puissance que $\mathcal{C}$ et le plus petit ensemble de cette puissance, ou bien de puissance plus petite que $\mathcal{C}$. En raisonnant dans ce dernier cas sur $\mathcal{C}'$ comme nous l'avons fait sur $\mathcal{C}$, comme on ne peut pas dans l'ensemble bien ordonné des puissances inférieures à celles de $\mathcal{C}$ trouver une suite infinie de puissances décroissantes, on sera arrêté après un nombre fini d'opérations. On aura alors établi le résultat suivant : *étant donné un élément e d'un ensemble bien ordonné $\mathcal{E}$, ou bien il est le premier après un autre élément bien déterminé, ou bien on peut (et même d'une infinité de manières) le définir comme le premier après tous ceux d'un certain ensemble qui soit le plus petit de sa puissance.*

En considérant deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ extraits d'un même ensemble bien ordonné $\mathcal{E}$ comme *équivalents*, si le premier élément de $\mathcal{E}$ après ceux de $\mathcal{E}_1$ est aussi le premier après ceux de $\mathcal{E}_2$, on peut dire que : *tout ensemble bien ordonné est équivalent à un ensemble qui soit le plus petit de sa puissance.*

Considérons alors l'ensemble bien ordonné des fonctions de plus en plus rapidement croissantes définissant par leur limite supérieure une coupure $\Phi(x)$; on peut, sans changer cette limite supérieure, le remplacer par un ensemble qui soit le plus petit de sa puissance. Il y a alors autant de cas possibles que de puissances possibles, et dans chaque cas il y a évidemment homéomorphisme de deux ensembles rattachés à ce cas; en remplaçant chaque fonction $f_n(x)$ par l'ensemble des fonctions de l'échelle complète comprise entre $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$, on voit que deux coupures rattachées au même cas peuvent être définies comme limites supérieures d'ensembles de segments juxtaposés; ces deux ensembles ont même structure, et chacun de ces segments, étant limité par deux fonctions véritables, est homéomorphe du segment correspondant relatif à la seconde coupure. On a donc bien établi l'homéomorphisme de deux segments limités inférieurement à une fonction véritable et supérieurement à deux coupures se rattachant au même cas.

Si alors on admet le principe du continu rappelé plus haut, on peut conclure, comme nous l'avons annoncé, qu'il n'y a que deux cas possibles, le cas dénombrable déjà étudié et le cas non dénombrable, groupant les quatre types $f(x)$, $\underline{\mathscr{F}}(x)$, $\mathscr{G}(x)$, $\mathscr{H}(x)$.

Remarquons d'ailleurs qu'il est facile de donner des exemples simples de correspondance homéomorphe entre deux quelconques de ces quatre types; y et z désignant les deux fonctions correspondantes, la formule

$$z = f(x) - \frac{1}{y} \tag{3}$$

réalise la correspondance entre $f(x)$ et $\mathscr{H}(x)$; on définit de même aisément des exemples de correspondance, au-dessous de la coupure, entre $\mathscr{H}(x)$ et des coupures d'un quelconque des types $\underline{\mathscr{F}}(x)$ et $\mathscr{G}(x)$. Mais, du moins en ce qui concerne le type $\mathscr{G}(x)$, on ne peut atteindre ainsi que des exemples simples, et les raisonnements idéalistes qui précèdent paraissent bien nécessaires pour montrer qu'il n'existe pas deux sortes de coupures de ce type, non homéomorphes entre elles. Si le principe du continu était faux, il faudrait admettre l'existence d'une seconde sorte de coupure $\mathscr{G}(x)$, dont aucun exemple simple ne pourrait sans doute donner une idée.

Il y a lieu d'autre part de remarquer que les quatre types considérés sont bien différents au point de vue du prolongement de la correspondance homéomorphe au delà de la coupure. Pour $\mathscr{H}(x)$, la question ne se pose pas. Pour la correspondance entre $f(x)$ et $\mathscr{G}(x)$, il n'est possible que par l'homéomorphisme généralisé, la fonction véritable $f(x)$ devant correspondre à la fonction idéale $\mathscr{G}(x)$. Enfin, pour la correspondance entre un de ces types et $\underline{\mathscr{F}}(x)$, le prolongement est évidemment impossible, une fonction $\underline{\mathscr{F}}(x)$, considérée comme limite inférieure d'un segment, ne pouvant pas être homéomorphe de fonctions d'un autre type.

5. Nous venons d'étudier l'*analysis situs* d'une échelle complète. Pour aller plus loin, il faut définir la *largeur* d'une coupure. Pour faciliter l'exposé, nous supposerons que l'échelle considérée, si elle comprend une fonction $f(x)$, comprend des fonctions $g(x)$, croissant les unes plus vite que $f(x)$, les autres moins vite, et telles que

$$|g(x) - f(x)|$$

tende vers zéro plus rapidement que n'importe quelle fonction donnée; comme nous le verrons plus loin, il n'en est pas toujours ainsi.

Nous dirons qu'une coupure est *étroite* si l'on peut trouver deux fonctions séparées par cette coupure et dont la différence tende vers zéro plus rapidement que n'importe quelle fonction donnée; une coupure définie par une fonction véritable, d'après l'hypothèse que nous venons de faire, est sûrement étroite. Dans le cas contraire, la coupure est *large:* il existe des fonctions positives $\varphi(x)$ telles qu'on ne puisse pas trouver deux fonctions séparées par la coupure et dont la différence soit pour x assez grand inférieure à $\varphi(x)$; nous dirons qu'elles sont inférieures à la largeur de la coupure.

Une coupure $\overline{\mathcal{F}}(x)$, définie comme limite supérieure d'une suite dénombrable de fonctions $f_n(x)$ de plus en plus rapidement croissantes, est toujours une coupure large; on peut en effet, d'après les théorèmes de Paul du Bois-Reymond, trouver une fonction positive $\varphi(x)$ croissant moins vite que toutes les différences $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Si alors une fonction $f(x)$ est au-dessous de la coupure, elle croît moins vite que l'un des $f_n(x)$; alors $f(x) + \varphi(x)$ croît moins vite que $f_{n+1}(x)$, et est aussi au-dessous de la coupure. Il est donc impossible que la différence de deux fonctions séparées par la coupure croisse moins vite que $\varphi(x)$; c'est bien une coupure large. Le même raisonnement s'applique aux coupures du type $\underline{\mathcal{F}}(x)$. Quant aux coupures du type $\mathcal{G}(x)$, on peut aisément, pour les exemples simples définis par des conditions de convergence, établir que ce sont des coupures larges. Il n'est guère possible de douter qu'il en soit de même de toutes les autres coupures de ce type. Mais la démonstration de cette propriété se heurte aux difficultés déjà rencontrées à propos de ces coupures, qu'on ne peut définir qu'à l'aide de la notion bien peu claire d'un ensemble bien ordonné et non dénombrable de fonctions de plus en plus rapidement croissantes.

Si l'on admet l'exactitude de ce résultat, on peut conclure que *les coupures définies par des fonctions véritables sont les seules coupures étroites*, ce qui a une grande importance, comme on le verra ultérieurement dans notre second mémoire sur ces questions.

Pour préciser davantage la notion de largeur, nous nous placerons dans le cas d'une échelle E constituant un ensemble fermé par rapport à l'addition et la soustraction des fonctions qui y figurent, ou leur multiplication par une constante. Une fonction idéale $\mathcal{F}(x)$ étant choisie dans E, $f(x)$ désignant une fonction quelconque de E croissant moins vite que $\mathcal{F}(x)$, et $g(x)$ une fonction quelconque de E croissant plus vite que $\mathcal{F}(x)$, l'ensemble des fonctions $\psi(x) = g(x) - f(x)$ est un segment de E limité inférieurement par une coupure $\Phi(x)$; ces fonctions sont supérieures à la largeur de la coupure $\mathcal{F}(x)$. Au contraire les fonctions $\varphi(x)$ de E positives et inférieures à $\Phi(x)$ sont inférieures à cette largeur. On peut donc dire que $\Phi(x)$ définit exactement cette largeur.

Étant données une fonction $\varphi(x)$ de E positive et inférieure à $\Phi(x)$ et une fonction $f(x)$ de E inférieure à $\mathcal{F}(x)$, la somme

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(x)$$

appartient à E et est nécessairement inférieure à $\mathcal{F}(x)$; il en est alors de même de

$$f_1(x) + \varphi(x) = f(x) + 2\varphi(x),$$

et plus généralement de $f(x) + c\varphi(x)$, c étant une constante quelconque. L'ensemble des fonctions $\varphi(x)$ ne change donc pas si l'on multiplie toutes ces fonctions par une constante, ce qu'on peut exprimer par la formule

$$c\Phi(x) \sim \Phi(x) \tag{4}$$

qui implique évidemment que $\Phi(x)$ soit une fonction idéale, sauf pour les coupures étroites, pour lesquelles $\Phi(x) = 0$.

Réciproquement, $\Phi(x)$ étant une fonction idéale positive vérifiant cette condition, il existe des coupures $\mathcal{F}(x)$ de largeur $\Phi(x)$; il n'y a en effet qu'à prendre $\mathcal{F}(x) = \Phi(x)$, et plus généralement

$$(5) \qquad \mathcal{F}(x) = \pm \psi(x) \pm \Phi(x).$$

en désignant par $\psi(x)$ une fonction véritable de E supérieure à $\Phi(x)$; il est inutile d'introduire des fonctions $\varphi(x)$; une telle fonction ajoutée à $\pm \Phi(x)$ ou à $\mathcal{F}(x)$ ne change rien.

Il est probable que la formule (5) donne toutes les coupures de largeur $\Phi(x)$. Il en résulterait qu'une coupure de l'un ou l'autre des types $\overline{\mathcal{F}}(x)$ et $\underline{\mathcal{F}}(x)$ a pour largeur une fonction idéale d'un de ces types (non nécessairement le même), et qu'une coupure du type $\mathcal{G}(x)$ a sa largeur définie par une fonction du même type.

6. Rien n'est changé à ce qui précède si, au lieu de faire varier x d'une manière continue, on ne considère qu'un certain ensemble L de valeurs de x, qui ne soit pas borné supérieurement. On peut en particulier considérer une infinité dénombrable de valeurs x_n indéfiniment croissantes; chaque fonction $y = f(x)$ se réduit alors à une suite dénombrable de valeurs $y_n = f(x_n)$, et des ensembles de telles suites peuvent constituer des échelles complètes ou incomplètes.

Considérons une échelle E de fonctions $y = f(x)$ définies dans un ensemble L; désignant par L' un sous-ensemble qui contienne des valeurs de x dépassant toute valeur donnée, et faisant abstraction des valeurs extérieures à L', nous obtenons un ensemble E' de fonctions définies dans L', et qui constitue évidemment une échelle (c'est-à-dire que la condition a est vérifiée); cet ensemble sera appelé *section de* E *relative à l'ensemble* L', et l'échelle E sera dite *complète* ou *incomplète dans* L' suivant que l'échelle E' est complète ou incomplète.

Une échelle incomplète dans L est évidemment incomplète dans tous les sous-ensembles L', puisqu'on peut y adjoindre au moins une nouvelle fonction bien définie dans L, et par suite dans L'. Mais une échelle complète dans L ne l'est pas nécessairement dans L'. Nous dirons qu'une échelle est *normale dans* L si elle est complète dans tous les sous-ensembles L', c'est-à-dire si toutes ses sections sont complètes; elles sont alors évidemment complètes et normales.

L'existence d'échelles normales n'est pas douteuse, quoique sans doute difficile à établir avec précision, même par des procédés idéalistes; il n'est guère douteux notamment que, si l'on arrive à définir avec précision la notion de fonction à croissance régulière, l'ensemble de ces fonctions constitue une échelle normale.

L'existence d'échelles qui soient complètes, mais non normales, est facile à établir par des exemples. Partons d'un ensemble de fonctions $y = f(x)$, constituant une échelle complète, normale ou non, mais complète pour l'ensemble de valeurs $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n étant un entier quelconque), et contenant des fonctions plus rapidement croissantes que n'importe quelle fonction donnée. Posons

$$z_1 = \operatorname{tgh} y \cos^2 x + y \sin^2 x, \tag{6}$$

$$z_2 = \frac{y}{1 + |y| \cos^2 x}. \tag{7}$$

Pour les valeurs x_n, $z_1 = z_2 = y$, les fonctions z_1 et z_2 constituent donc deux échelles complètes (puisqu'elles le sont pour les valeurs x_n). D'autre part, pour les valeurs $x'_n = n\pi$, z_1 et z_2 ne varient qu'entre -1 et $+1$; les sections des échelles considérées relatives à cet ensemble de valeurs sont donc incomplètes; elles présentent deux *lacunes*, l'une entre $+1$ et $+\mathcal{H}(x)$, l'autre entre $-\mathcal{H}(x)$ et -1, que l'on pourrait combler par des fonctions nouvelles. Mais pour les valeurs x_n, ces lacunes disparaissent; on ne peut pas définir ces fonctions nouvelles pour x quelconque et compléter avec ces fonctions les échelles considérées.

Les deux exemples considérés diffèrent d'ailleurs par la circonstance suivante : si l'on isole les valeurs x_n et x'_n par des intervalles aussi petits que l'on veut, ou décroissant aussi vite que l'on veut quand n augmente, dans l'ensemble conservé, on peut trouver des fonctions z_1 croissant plus vite que n'importe quelle fonction donnée, tandis que les fonctions z_2, inférieures à $\sec^2 x$, ont leur croissance limitée supérieurement. Donc, pour l'ensemble des fonctions z_1, ce sont les valeurs $x'_n = n\pi$ qui apparaissent comme exceptionnelles; la lacune n'existe que pour ces valeurs; pour l'ensemble des fonctions z_2, la lacune existe presque partout, mais se rétrécit près des valeurs x_n et disparaît pour ces valeurs.

Si maintenant nous considérons dans l'ensemble des y une coupure définie par une fonction positive $F(x)$, véritable ou idéale, si l'on pose $z_3 = z_2$ au-dessous de la coupure et $z_3 = y$ au-dessus, on obtient un troisième exemple, dans lequel on a une lacune pour les valeurs distinctes des x_n, lacune située, non plus au-dessus de toutes les fonctions de l'échelle, mais entre deux segments ([1]); mais la lacune se rétrécit près des valeurs x_n et disparaît pour ces valeurs, et l'on ne peut pas la combler par de nouvelles fonctions définies pour toutes les valeurs de x.

On peut varier ces exemples d'une infinité de manières; observons notamment qu'il existe des échelles complètes présentant une infinité non dénombrable de lacunes; on peut en effet, dans une échelle complète et normale, distinguer une infinité non dénombrable de segments, et dans chacun de ces segments, par une transformation homéomorphe, faire apparaître une lacune pour certaines valeurs singulières, tandis que pour les autres valeurs l'échelle restera complète.

D'ailleurs ces exemples donnent bien une idée des seules circonstances qui puissent faire qu'une échelle complète E ne soit pas normale. Cela implique en effet l'existence d'un ensemble de *valeurs singulières* ξ dans lequel l'échelle E ne soit pas complète, et d'au moins une fonction $g(\xi)$, définie dans cet ensemble, pouvant la compléter; toute fonction de E croissant, pour ces valeurs ξ, soit plus vite, soit moins vite que $g(\xi)$, cette fonction $g(\xi)$ définit *une coupure qui, pour les valeurs singulières, s'élargit, et devient une lacune.*

7. Il est vraisemblable que : *dans toute échelle normale, il existe des fonctions croissant plus vite que n'importe quelle fonction donnée.* Toutefois la démonstration de ce résultat donne lieu à quelques difficultés que nous allons indiquer.

Considérons une échelle complète E ne contenant aucune fonction qui croisse plus vite qu'une fonction donnée $\varphi(x)$, c'est-à-dire qui soit constamment supérieure à $\varphi(x)$ pour x assez grand. D'ailleurs puisque

---

([1]) Toutefois cette lacune n'existe pas dans le cas où la coupure définie par $F(x)$ est assez large pour ne pas être modifiée par la transformation $\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + 1$.

l'échelle E est complète, $\varphi(x)$ ne peut être plus rapidement croissant que toute fonction de E. Choisissons donc dans E une infinité bien ordonnée et non dénombrable de fonctions $f_\alpha(x)$ (α étant un indice entier fini ou transfini), de plus en plus rapidement croissantes, et telles qu'aucune fonction de E ne croisse plus vite que tous les $f_\alpha(x)$. A partir d'une certaine valeur de α, chacune de ces fonctions est une infinité de fois plus grande que $\varphi(x)$, et une infinité de fois plus petite. Désignons par L_α l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$f_\alpha(x) < \varphi(x);$$

si $\alpha < \beta$, L_α *contient à l'infini* L_β, c'est-à-dire contient tous les points de L_β d'abscisses assez grandes. On a ainsi une infinité bien ordonnée et non dénombrable d'ensembles L_α dont chacun contient à l'infini tous les suivants, et qui tous contiennent des points d'abscisses indéfiniment croissantes. Il s'agit de savoir si dans ces conditions on peut trouver un ensemble l, contenant au moins une infinité dénombrable de points d'abscisses $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, indéfiniment croissantes et contenues à l'infini dans n'importe lequel des ensembles L_α [1]. Si l'on peut affirmer qu'il en est ainsi, il en résulte que $\varphi(x)$ croît plus vite, pour les points de cet ensemble l, que n'importe quelle fonction $f_\alpha(x)$. L'échelle E n'est donc pas complète pour cet ensemble; c'est donc qu'elle n'est pas normale, et le résultat énoncé tout à l'heure est démontré.

On est donc ramené à démontrer le théorème suivant : si tous les ensembles L_α, dont chacun contient les suivants à l'infini, n'ont en commun à l'infini aucun ensemble l, c'est qu'à partir d'une certaine valeur de α ils cessent de contenir des points d'abscisses indéfiniment croissantes. J'ai démontré ce théorème, dans une Note récente (*Comptes rendus*, 12 mars 1928), pour le cas d'une infinité dénombrable d'ensembles L_α; il reste à traiter le cas d'une infinité non dénom-

---

(1) La partie commune des L_α peut d'ailleurs être un ensemble idéal $\mathcal{L}$; mais s'il existe, on peut trouver au moins un ensemble véritable l contenu dans $\mathcal{L}$ et par suite dans tous les L_α; l'ensemble idéal $\mathcal{L}$ serait alors défini comme limite inférieure des L_α et limite supérieure des l (un ensemble étant dit supérieur à un autre s'il le contient à l'infini).

brable. Je n'ai pu y parvenir, mais pense que le résultat est exact, malgré d'importantes différences avec le cas dénombrable [1].

Ce point admis, on peut conclure que *toute échelle normale contient des fonctions plus rapidement croissantes que n'importe quelle fonction donnée*. On voit de même que, *si elle contient une fonction $f(x)$, elle contient des fonctions croissant, les unes plus vite que $f(x)$, les autres moins vite que $f(x)$, et telles que leur différence avec $f(x)$ tende vers zéro plus rapidement que n'importe quelle fonction donnée*.

On peut aussi obtenir un résultat analogue pour une fonction idéale $\mathcal{F}(x)$. Une fonction $\varphi(x)$ n'appartenant pas à l'échelle complète E sera dite située au-dessous de cette coupure, ou croissant moins vite que $\mathcal{F}(x)$, si elle croît moins vite que n'importe quelle fonction de E située au-dessus de la coupure. Nous dirons qu'elle *entre dans la coupure* (sans la traverser), si elle est une infinité de fois supérieure à n'importe quelle fonction $f_\alpha(x)$ appartenant à E et située au-dessous de la coupure. Du théorème que nous venons d'admettre, résulte alors qu'il existe au moins une suite dénombrable de points d'abscisses indéfiniment croissantes pour lesquels $\varphi(x)$ croît plus vite que tous les $f_\alpha(x)$. Pour l'ensemble de ces points, la coupure devient une lacune, ce qui n'est pas possible pour une échelle normale. *Pour une telle échelle, il n'est donc pas possible qu'une fonction $\varphi(x)$ entre une infinité de fois dans une coupure sans la traverser*.

On remarque d'ailleurs que le même raisonnement s'applique sans modification si la fonction $\varphi(x)$, au lieu d'être définie pour toutes les valeurs de x, n'est définie que pour un certain ensemble, dénombrable ou non, contenant des valeurs de x indéfiniment croissantes. *Il n'est donc pas possible, pour une échelle normale, qu'un ensemble de points entre une infinité de fois dans une coupure sans la traverser*.

---

[1] Signalons notamment que, *dans le cas non dénombrable*, tout ensemble véritable l appartenant à l'infini à tous les L_α peut être défini, du moins en ce qui concerne les points d'abscisses assez grandes, comme étant l'ensemble des points communs à une infinité non dénombrable d'ensembles convenablement choisis parmi les L_α. On n'a rien d'analogue dans le cas dénombrable. Précisons bien que nous supposons l'ensemble bien ordonné des L_α réduit, par le procédé exposé au n° **4**, à être le plus petit de sa puissance; du moins en disant que nous sommes dans le cas non dénombrable, nous entendons par là que l'ensemble non dénombrable des L_α ne se réduirait pas ainsi à un ensemble dénombrable.

Il serait naturellement important de démontrer le théorème de la théorie des ensembles sur lequel reposent tous ces résultats. De tous les résultats énoncés sans démonstration au cours de ce travail, il me semble que c'est à la fois le plus important, et le seul dont on ne puisse pas dire qu'il s'impose à notre esprit de telle manière qu'il ne soit pas possible d'en douter.

Si, contrairement à ce que je pense, ce résultat est faux, il y a lieu de distinguer les échelles normales, au sens défini au n° **6**, et celles que nous appellerons *absolument normales*, qui ont de plus l'ensemble des propriétés que nous venons d'indiquer. Or, d'après le n° **6**, si une échelle complète n'est pas normale, cela ne peut être qu'à cause de l'allure irrégulière des fonctions qui y figurent; il n'est guère douteux qu'on puisse appliquer la même remarque aux échelles qui seraient normales, mais non absolument normales. Si donc on peut conserver quelque doute sur l'exactitude de l'ensemble des résultats de ce numéro, il n'est guère possible d'en conserver sur leur exactitude dans le cas des fonctions à croissance régulière; *ces fonctions doivent constituer une échelle complète absolument normale*. Remarquons d'ailleurs qu'au point de vue logique, il ne saurait être question pour le moment de justifier cet énoncé; il nous apparaît comme une condition qu'il est naturel d'imposer à la définition des fonctions à croissance régulière. C'est seulement si l'on se trouve un jour en présence d'une définition précise ne faisant pas intervenir cette condition que la question se posera de savoir si elle est vérifiée.

8. Considérons une échelle absolument normale E et une fonction $\varphi(x)$ n'appartenant pas à l'échelle. Elle nous apparaît comme oscillant entre deux fonctions de l'échelle. Si par exemple il s'agit de l'échelle des fonctions à croissance régulière, cela revient à dire que toute fonction irrégulière oscille indéfiniment entre deux fonctions régulières bien déterminées. D'une manière générale, *il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de l'échelle* E, *telles que l'on ait toujours*

$$f_1(x) \leqq \varphi(x) \leqq f_2(x),$$

chacune des égalités $f_1(x) = \varphi(x)$ et $\varphi(x) = f_2(x)$ étant réalisée une infinité de fois.

Ce résultat, qui est encore d'une nature assez intuitive, se déduit aisément de la définition de l'échelle absolument normale. Nous allons voir même qu'il s'étend au cas où l'on remplace la courbe $y = \varphi(x)$ par une suite de points d'abscisses croissantes, et même par un ensemble de points défini d'une manière quelconque, sous les seules restrictions qu'il y ait des points d'abscisses indéfiniment croissantes et qu'on puisse trouver deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ telles que tous ces points soient compris dans la région du plan définie par les inégalités

$$\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x).$$

Un tel ensemble nous conduit en effet immédiatement à une division de l'échelle E en trois segments E_1, E_2, E_3, le premier segment E_1 comprenant toutes les fonctions de E dont les courbes représentatives sont, pour x assez grand, au-dessous de l'ensemble donné, E_3 comprenant celles dont les courbes représentatives sont au-dessus de cet ensemble, et E_2 comprenant les fonctions intermédiaires entre E_1 et E_3. Chacun de ces trois segments contient d'ailleurs effectivement des fonctions de E; si par exemple E_2 n'en contenait pas, les points de l'ensemble donné marqueraient une lacune entre E_1 et E_3, ce qui n'est pas possible, l'échelle étant normale.

Considérons alors la coupure entre E_1 et E_2. Quatre circonstances seulement sont logiquement possibles.

1° Elle définit une fonction véritable $f_1(x)$, appartenant à E_2; l'ensemble des points donnés contient une infinité de points de la courbe

$$y = f_1(x),$$

mais, pour x assez grand, ne contient aucun point situé au-dessous.

2° Elle définit une fonction $f_1(x)$, appartenant à E_2; l'ensemble des points donnés contient des points d'abscisses indéfiniment croissantes situés au-dessous de la courbe $y = f_1(x)$.

3° Elle définit une fonction $f_1(x)$, appartenant à E_1, de sorte que tous les points donnés sont pour x assez grand au-dessus de la courbe

$$y = f_1(x).$$

4° Elle définit une fonction idéale.

Dans les trois derniers cas, l'ensemble des points donnés serait un ensemble entrant une infinité de fois dans la coupure considérée, sans la traverser. L'échelle E étant absolument normale, cette circonstance est exclue. Le premier cas est donc seul possible, ce qui démontre l'existence de la fonction $f_1(x)$ ayant les propriétés indiquées. La fonction $f_2(x)$ étant de même définie par la coupure entre E_2 et E_3, le théorème est démontré.

On remarque qu'il résulte en particulier de ce théorème qu'une échelle, complète dans un ensemble de fonctions définies par des conditions de continuité très restrictives, est complète d'une manière absolue. Même si l'on considère ensuite des fonctions ne vérifiant pas ces conditions de continuité, on n'en trouve aucune qu'on puisse introduire dans l'échelle pour la compléter. La notion d'échelle complète est donc indépendante des conditions de continuité introduites initialement.

9. On remarque que jusqu'ici, sauf incidemment lorsque nous avons observé que certaines des propriétés étudiées étaient vérifiées pour les fonctions à croissance régulière, nous n'avons introduit que des notions invariantes par un changement de variable $x_1 = \psi(x)$, x_1 croissant et devenant infini avec x. Nous avons en somme étudié ceux des caractères de l'échelle des fonctions à croissance régulière restant invariants par un tel changement. Nous allons terminer par quelques remarques n'ayant pas ce caractère d'invariance.

Nous désignerons par $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des fonctions monotones pour x assez grand, et par $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des fonctions ayant pour dérivées d'ordre p des fonctions de $\mathcal{E}_0$; leurs dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, p-1$ sont alors continues et monotones. La définition de $\mathcal{E}_0$ a encore le caractère d'invariance que nous venons de signaler, mais non celle de $\mathcal{E}_p$, si p est positif.

Une fonction de $\mathcal{E}_p$ ne peut pas être une infinité de fois égale à un polynome de degré p, à moins de se réduire à ce polynome; sa dérivée d'ordre p devrait en effet, d'après le théorème de Rolle, être une infinité de fois égale à une même constante, dérivée d'ordre p de ce polynome (du moins si, en un point où elle varie brusquement d'une valeur à une autre, on la considère comme prenant toutes les valeurs intermédiaires). C'est impossible, puisqu'elle est monotone.

Il en résulte que *toute échelle complète formée avec des fonctions de $\mathcal{E}_p$ et complète dans $\mathcal{E}_p$ contient tous les polynomes de degré p*; en particulier *toute échelle complète E_0 formée de fonctions monotones et complète dans $\mathcal{E}_0$ contient toutes les fonctions se réduisant à une constante.*

Montrons maintenant que : *cette échelle E_0 est complète dans l'ensemble des fonctions continues.*

Soit en effet une fonction continue $F(x)$; il s'agit de montrer qu'il existe une fonction de E_0 égale une infinité de fois à $F(x)$. Si $F(x)$ est égal une infinité de fois à une même constante, on n'a qu'à prendre cette constante. Il reste alors à traiter le cas où $F(x)$ tend vers une limite déterminée (finie ou infinie) par valeurs toujours inférieures ou toujours supérieures à cette limite; supposons pour fixer les idées $F(x)$ inférieur à cette limite, et désignons par $G(x)$ le minimum de $F(\xi)$ quand ξ varie de x à l'infini; c'est une fonction continue, non décroissante, toujours $\leqq F(x)$ et une infinité de fois égale à $F(x)$; pour chaque valeur de x, elle représente la plus grande valeur que puisse prendre une fonction non décroissante et toujours $\leqq F(x)$, et toute fonction non décroissante $f(x)$, si $f(x_0) = G(x_0)$, est égale à $F(x)$ pour au moins une valeur $\geqq x_0$. Or, $G(x)$ appartenant à $\mathcal{E}_0$, il existe au moins une fonction $f(x)$ de E_0 égale une infinité de fois à $G(x)$; c'est une fonction non décroissante, elle est donc une infinité de fois égale à $F(x)$. C. Q. F. D.

On démontre de même que *toute échelle E_1 formée de fonctions de $\mathcal{E}_1$ et complète dans $\mathcal{E}_1$ est complète dans l'ensemble des fonctions continues.* La démonstration est analogue à celle qui précède; dans le cas par exemple où $\frac{F(x)}{x}$ tend vers une limite par valeurs inférieures à cette limite, on prendra pour $G(x)$ la plus grande fonction convexe toujours inférieure à $F(x)$. Mais la démonstration ne s'étend pas au cas de l'ensemble $\mathcal{E}_2$, et je ne sais si le théorème lui-même reste exact pour $\mathcal{E}_2$ et plus généralement pour les ensembles $\mathcal{E}_p$ d'indices plus grands que 1; cela tient à ce qu'on ne peut pas définir la plus grande fonction de $\mathcal{E}_p$, à dérivée d'ordre p non décroissante, qui soit au plus égale à une fonction donnée, comme on le fait aisément dans le cas de $p = 1$; le maximum des fonctions remplissant cette condition n'est pas en effet une fonction de $\mathcal{E}_p$.