JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 113-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__113_0>

Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia;

PAR GEORGES VALIRON.

Le théorème de M. Picard dont il sera question ici est la célèbre proposition d'après laquelle une fonction uniforme prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus, dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée. Ce théorème a été l'origine de toute une théorie qui a pour objet l'étude de plus en plus approfondie des fonctions uniformes, soit dans les régions de régularité, soit au voisinage des singularités.

En utilisant la théorie des familles normales de M. Montel, M. Julia a apporté ([1]) au théorème de M. Picard un complément très important qui peut aujourd'hui, après les travaux de M. Ostrowski ([2]), s'énoncer ainsi. Supposons la singularité rejetée à l'infini et soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'extérieur d'un cercle, sauf au point à l'infini qui est point essentiel; supposons en outre que $f(z)$ n'appartienne pas à une certaine classe de fonctions dites *fonctions exceptionnelles* J. *Il existe au moins une suite de points* $z(n, f)$ *s'éloignant indéfiniment et jouissant de la propriété suivante :* ε *étant un nombre positif arbitraire et* $C(n, \varepsilon)$ *désignant le cercle de centre* $z(n, f)$ *et de rayon* $\varepsilon|z(n, f)|$, *la fonction* $f(z)$ *prend une*

([1]) *Voir* notamment les trois Mémoires des *Annales de l'École Normale*, 1919, 1920, 1921, et les *Leçons sur les fonctions uniformes à point essentiel isolé.*

([2]) *Mathematische Zeitschrift*, t. 24, 1925. Une partie des résultats de M. Ostrowski est donnée par M. Montel dans son Ouvrage récent : *Leçons sur les familles normales de fonctions et leurs applications.*

infinité de fois toute valeur, sauf deux valeurs au plus, dans toute suite infinie de cercles C(n, ε).

M. Ostrowski a déterminé complètement la classe des fonctions exceptionnelles J.

De la propriété précédente, on déduit que, si la fonction $f(z)$ est ordinaire, et si C est une courbe continue allant à l'infini, on peut faire tourner C autour de l'origine d'un angle tel que, dans sa nouvelle position C', elle jouisse de cette propriété : ε *étant positif arbitraire,* $f(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus, dans le domaine balayé par un cercle dont le centre* z *décrit* C', *le rayon étant* $\varepsilon|z|$. C'est sous cette forme que M. Julia donna pour la première fois son théorème et l'on a parfois appelé courbes de Julia les courbes qui possèdent la propriété des courbes C'. J'appellerai de telles courbes, *courbes de Picard*, en réservant le nom de *courbes de Julia* à celles qui contiennent une suite de points de Julia, courbes qui ont été seules considérées par M. Julia, et qui sont seules en relation avec la théorie des familles normales. Je montrerai que :

I. *Toute fonction* $f(z)$ *méromorphe autour du point à l'infini, qui est point essentiel, admet un ensemble très riche de courbes de Picard.*

On peut préciser cet énoncé de diverses manières. On a par exemple la proposition suivante :

II. *Si l'on considère les spirales logarithmiques*

$$z = e^{i\delta} t^{1+ik},$$

δ, k *et* t *étant réels, et une fonction* $f(z)$, *toutes ces spirales sont, quel que soit* δ, *courbes de Picard, sauf au plus pour un ensemble de mesure nulle,* E(f), *de valeurs de* k.

C'est ici le paramètre de forme k qui est indéterminé dans un ensemble de mesure nulle, tandis que dans le théorème de M. Julia, une courbe C étant prise au hasard, c'est la façon de la placer qui est inconnue.

Pour une fonction méromorphe non exceptionnelle il peut exister des courbes de Picard qui ne sont pas courbes de Julia, mais je n'ai pas pu voir si, pour les fonctions holomorphes, toute courbe de Picard n'est pas courbe de Julia.

Une courbe de Picard qui n'est pas courbe de Julia, ce qui a toujours lieu pour les fonctions exceptionnelles J, est *une courbe d'indétermination complète*. J'entendrai par là que le domaine d'indétermination au point de l'infini de la courbe C considérée comprend tout le plan. On sait que ce domaine, introduit par M. Painlevé, se définit comme suit : on prend l'ensemble $E(r)$ obtenu en adjoignant aux valeurs prises par $f(z)$ aux points de C de module supérieur à r les valeurs limites de ces valeurs, et l'on considère l'ensemble $\Delta(C)$ commun à tous ces ensembles $E(r)$. Une courbe de Julia n'est pas toujours une courbe d'indétermination complète, mais alors il y a d'autres courbes de Julia équivalentes à la première qui sont courbes d'indétermination complète.

Il existe des fonctions méromorphes autour du point à l'infini pour lesquelles toute courbe allant à l'infini est courbe d'indétermination complète. Dans ce cas l'ensemble des points critiques algébriques de la fonction inverse couvre tout le plan simple. *Mais il existe de telles fonctions pour lesquelles certaines de ces courbes d'indétermination complète ne sont pas courbes de Picard.*

Une étude analogue peut être faite pour les fonctions méromorphes dans un angle et d'ordre suffisamment grand à l'intérieur de cet angle, fonctions pour lesquelles j'ai établi ([1]) l'existence d'une suite de points de Julia. On peut aussi pour ces fonctions préciser la valeur des rayons des cercles de remplissage de M. Milloux ([2]) en suivant la marche que j'ai indiquée ([3]) pour les fonctions méromorphes autour du point à l'infini. Je montre ici que, dans le cas des fonctions holomorphes dans l'angle, on peut obtenir directement une valeur plus exacte des rayons de ces cercles ([4]).

1. *Propriétés des fonctions exceptionnelles* J. — Considérons

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1926.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 1924; *Bulletin de la Société mathématique*, 1925; *Comptes rendus*, 1er mars 1926.

([3]) *Comptes rendus*, 25 mai 1926; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1927.

([4]) Une partie des résultats de cette étude a été donnée dans une Note des *Comptes rendus*, 22 juin 1925.

d'abord une fonction $f(z)$ méromorphe en tout point à distance finie et exceptionnelle J. Toutes les familles considérées par M. Julia sont normales sauf aux points o et ∞, en particulier la famille

$$f(z;n) = f(z2^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Nous allons montrer que cette suite de fonctions (1) *admet des fonctions limites non constantes.* M. Ostrowski a montré qu'une fonction exceptionnelle J est de la forme

$$f(z) = \alpha z^m \prod_1^\infty \frac{1 - \frac{z}{a_p}}{1 - \frac{z}{b_p}} \tag{2}$$

et qu'en désignant par A_p et B_q les modules de a_p et b_q, ces nombres supposés rangés par ordre de grandeur non décroissante, vérifient les conditions suivantes :

1° Les suites A_p et B_q sont infinies, mais le nombre des pôles et des zéros dont le module est compris entre 2^n et 2^{n+1} reste inférieur à un nombre $N = N(f)$ quel que soit n.

2° La valeur absolue de la différence entre le nombre des pôles et le nombre des zéros de module moindre que r est inférieure à un nombre fixe $D = D(f)$.

3° Si l'on pose

$$M(r) = |\alpha|\, r^{m+p-q} \frac{B_1 B_2 \ldots B_q}{A_1 A_2 \ldots A_p},$$
$$B_q \leqq r < B_{q+1}, \qquad A_p \leqq r < A_{p+1},$$

les nombres

$$M(A_p), \qquad \frac{1}{M(B_q)}$$

sont inférieurs à un nombre fixe $M = M(f)$.

Il y a encore une quatrième condition que nous n'utiliserons pas.

D'après la troisième proposition les limites d'indétermination pour r infini de la fonction continue $M(r)$ comprennent entre elles un nombre fini positif β

$$\beta \leqq M, \qquad \beta \geqq \frac{1}{M}.$$

Il existe donc des valeurs R aussi grandes que l'on veut pour lesquelles $M(R)$ diffère de β d'aussi peu que l'on veut. Nous allons étudier $f(z)$ dans des couronnes dont les rayons extrêmes comprennent de tels nombres R. Nous posons

$$|f(z)| = M(r)\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\frac{P'P''}{Q'Q''},$$

les produits P, P' et P'' étant définis par

$$P' = \prod_{KA_p \leqq R}\left|1 - \frac{a_p}{z}\right|, \qquad P'' = \prod_{A_p \geqq KR}\left|1 - \frac{z}{a_p}\right|,$$

$$P = \prod_{\frac{R}{K} < A_p \leqq R}\left(1 - \frac{a_p}{z}\right)\prod_{R < A_p < KR}\left(1 - \frac{z}{a_p}\right)$$

et Q, Q', Q'' étant définis de façon analogue. K est un nombre supérieur à 4. La première propriété des A_p, B_q montre que P', P'', Q', Q'' sont compris entre les nombres

$$\prod_1^\infty (1 - 2^{-n})^N \quad \text{et} \quad \prod_1^\infty (1 + 2^{-n})^N,$$

on a donc

$$(1) \qquad |f(z)| = M(r)h\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|$$

avec

$$\frac{1}{\gamma} < h < \gamma,$$

γ étant un nombre positif fixe.

Nous distinguerons alors deux cas :

Premier cas. — Il existe un nombre fini $K > 4$ et une suite infinie de nombres R pour lesquels il y a soit un pôle, soit un zéro, dont le module est compris entre $\frac{R}{K}$ et KR. En définissant n par les inégalités

$$2^n \leqq R < 2^{n+1},$$

on en déduit qu'il existe une suite de fonctions (1) qui prennent dans la couronne

$$\frac{1}{K^2} < |z| < K^2$$

deux valeurs dont la différence est supérieure à un nombre fixe. C'est évident s'il y a à la fois des pôles et des zéros dans la couronne

$$(5) \qquad \frac{1}{K} R < |z| < KR.$$

S'il n'y a, par exemple, que des zéros dans (5), il y en a 2D au plus d'après la seconde propriété. Considérons alors la portion de couronne extérieure aux cercles ayant pour centres ces zéros et pour rayon $\frac{RK}{m}$, m étant assez grand pour que cette portion existe. On a dans cette portion

$$|P(z)| > \frac{1}{m^{2D}},$$

donc

$$|f(z)| > \frac{\beta}{2\gamma} m^{-2D}.$$

Il y a encore deux points en lesquels la différence des valeurs de $f(z)$ est supérieure à un nombre fixe. La suite des fonctions (1) considérée ci-dessus admet donc une fonction limite non constante.

Second cas. — Supposons que, si grand que soit K, il n'existe pas de pôles ou de zéros dans les couronnes (5). L'exposant $m+p-q$ figurant dans (3) ne peut être nul pour une telle valeur R. Car $M(r)$ serait constant sur un certain segment, tous les points de ce segment seraient des points R. Si ce segment est fini à droite, son extrémité droite est un point R qui est le module d'un zéro ou d'un pôle, on est en réalité dans le premier cas; si le segment est infini à droite, tous les pôles et zéros ont deux à deux le même module, on est encore dans le premier cas.

Supposons donc que, pour la valeur R, $m+p-q$ soit positif. Tant que cet exposant est positif, $M(r)$ croît. Soit R′ le plus grand des nombres A_p, B_q qui sont inférieurs à R. Le rapport R : R′ croît indéfiniment pour la suite des R considérée, sinon on retomberait encore dans le premier cas. Dans l'intervalle R′, R, le nombre $m+p-q$ est au moins égal à 1, on a donc

$$M(r) < M(R)\frac{r}{R} < \frac{2r\beta}{R} \qquad (R' \leqq r < R);$$

par suite, dans cette couronne,

$$|f(z)| < \frac{2r\beta\gamma}{R},$$

tandis que, pour $|z| = R$,

$$|f(z)| > \frac{\beta}{2\gamma}.$$

En choisissant r convenablement, on voit qu'il existe encore des couples de points où les valeurs de $f(z)$ sont nécessairement distinctes, $R : r$ restant fini; il existe encore une fonction limite non constante pour la suite (1).

On raisonne d'une façon analogue lorsque, au point R, $m + p - q$ est négatif.

La proposition en vue est ainsi établie pour les fonctions méromorphes en tout point à distance finie. Elle est encore vraie pour les fonctions exceptionnelles J qui sont seulement méromorphes autour du point à l'infini, puisque de telles fonctions sont nécessairement le produit d'une fonction exceptionnelle méromorphe sauf à l'infini par une fonction holomorphe autour du point à l'infini et égale à 1 en ce point.

2. *Démonstration du théorème II pour les fonctions exceptionnelles* J. — On vient d'établir que, pour ces fonctions, la suite (1) admet des fonctions limites non constantes. Une telle fonction limite $\Phi(z)$ peut être un polynome ou une fraction rationnelle ou bien admettre le point à l'infini ou le point zéro pour point essentiel. Mais le théorème de M. Picard s'applique toujours : elle prend toute valeur sauf deux au plus une fois au moins dans le plan privé des points o et ∞.

Soit z_0 un point de ce domaine en lequel $\Phi(z_0)$ prend une valeur non exceptionnelle c. Si l'on entoure ce point d'un petit cercle de rayon arbitrairement petit, dans ce cercle les fonctions $f(z; m)$ de la suite extraite de (1) qui converge vers $\Phi(z)$ sont uniformément convergentes, elles prennent la valeur c dès que l'indice m est assez grand.

Ceci dit, considérons la famille de spirales

$$z = e^{i\delta} t^{1+ik}, \tag{6}$$

δ et k étant réels et t variant de 1 à $+\infty$. Le point d'intersection de cette spirale avec la circonférence

$$|z| = 2^m$$

a pour argument

$$\delta + k \log 2.m. \tag{7}$$

M. H. Weyl a montré ([1]) que, *sur la circonférence de rayon 1 centrée à l'origine, les points d'argument* (7) *sont denses, et même uniformément denses, quelle que soit la suite infinie donnée d'entiers distincts m, pourvu que les coefficients $k \log 2$ soient pris à l'extérieur d'un certain ensemble linéaire de mesure nulle.* Supposons que k ait été ainsi choisi et considérons la portion de plan $D(\varepsilon)$ balayée par un cercle $C(t)$ dont le centre décrit la spirale (6), le rayon étant εt (ε est un nombre positif donné arbitraire). Je dis que, dans $D(\varepsilon)$, $f(z)$ prend toute valeur une infinité de fois, sauf deux valeurs au plus. Soient en effet une valeur c non exceptionnelle pour $\Phi(z)$ et z_0 un point considéré ci-dessus où $\Phi(z_0) = c$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, et soit enfin $\Gamma(\varepsilon', z_0)$ le cercle de centre z_0 et de rayon $r_0 \varepsilon'$. Les fonctions $f(z; m)$ prennent la valeur c dans $\Gamma(\varepsilon', z_0)$ dès que $m > m(\varepsilon', z_0)$ et la fonction $f(z)$ prend cette valeur dans les cercles correspondants $C(\varepsilon', m)$

$$|z - z_0 2^m| < \varepsilon' |z_0| 2^m \qquad (m = m_1, m_2, \ldots).$$

Les points d'argument (7) étant denses sur la circonférence $|z| = 1$, il existe une suite de valeurs m_p, pour lesquelles

$$|k \log 2 m_p + k \log r_0 + \delta - \varphi_0 - 2\pi \mu_p|$$

est inférieur à un nombre donné ε''. En prenant ε' et ε'' assez petits, on voit que les cercles $C(\varepsilon' m_p)$ correspondants sont intérieurs à $D(\varepsilon)$, ce qui démontre le théorème II pour les fonctions exceptionnelles J.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. 77, 1916, en particulier, p. 344-349.

3. *Démonstration du théorème II pour les fonctions ordinaires.* — Pour étendre le théorème II aux fonctions non exceptionnelles, il est nécessaire d'utiliser les propositions complètes qui ont été données par M. Ostrowski pour les fonctions des suites exceptionnelles. Nous considérons une famille de fonctions méromorphes dans un domaine D et qui n'est pas normale dans ce domaine. Il existe alors un point de Julia, z_0, point en lequel la famille n'est pas normale, et une suite exceptionnelle d'Ostrowski relative à ce point. C'est une suite $f(z; n)$ de fonctions de la famille telle que, aucune suite extraite de celle-ci ne soit normale dans aucun cercle de centre z_0. M. Ostrowski montre que :

Si $f(z; n)$ est une suite exceptionnelle en z_0, ε un nombre positif et Ω un petit cercle de centre z_0, chaque fonction de la suite dont l'indice n est supérieur à un nombre $n(\varepsilon, \Omega)$ prend toute valeur dans Ω, sauf au plus des valeurs dont les points représentatifs sur la sphère de Riemann appartiennent à l'un ou à l'autre de deux cercles $\Gamma(n)$, $\Gamma'(n)$, *de rayons ε, de cette sphère* [1].

Si l'on extrait de $f(z; n)$ une suite quelconque $f(z; n_p)$, la proposition reste évidemment vraie. En faisant tendre ε vers zéro suffisamment lentement, on voit que les fonctions d'une telle suite prennent dans leur ensemble toute valeur, sauf deux au plus, une infinité de fois, dans Ω. C'est cette proposition, due également à M. Ostrowski, qui justifie la définition des suites de points de Julia donnée dans l'introduction. Il suffit de l'appliquer à un point de Julia de la suite (1). On peut aussi supposer que le rayon de Ω et ε tendent tous deux vers zéro, on trouve alors des cercles de remplissage de M. Milloux. *Toute suite de points de Julia donne naissance à une telle suite.*

Ici, la propriété des suites de points J sera suffisante. Si z_0 est un point en lequel la famille (1) n'est pas normale, il existe une suite de points J de la forme

$$z(m) = z_0 2^m \qquad (m = m_1, m_2, \ldots).$$

Une spirale de la forme (6) qui n'est pas exceptionnelle pour cette

(1) La sphère de Riemann est une sphère de rayon 1 sur laquelle les points du plan complet sont représentés au moyen d'une inversion.

suite d'entiers m_p [c'est-à-dire telle que la suite (7) ne fasse pas exception au théorème de M. Weyl] fournit un domaine $D(\varepsilon)$, ε arbitraire, qui renferme à son intérieur une suite infinie de cercles de centres $z(m)$ et rayons $\varepsilon'|z(m)|$, ce qui démontre le théorème II.

4. *Généralisations.* — On étend aisément les résultats précédents à des familles très générales de courbes s'enroulant autour du point à l'infini. Considérons les courbes

$$z = e^{i\delta}\, t\, e^{i\varphi(t)k}, \tag{8}$$

où δ, k, t et $\varphi(t)$ sont réels, et $\varphi(t)$ étant indéfiniment croissante mais telle que $\varphi(\lambda t) - \varphi(t)$ tende vers une limite pour tout λ fini. *On a pour ces courbes le même énoncé que* II. Il suffit, pour le voir, de se reporter à la démonstration précédente et à l'énoncé général de M. Weyl : les nombres μ_n étant indéfiniment croissants, les points d'argument $\mu_n k$ sont denses sur la circonférence de rayon 1 centrée à l'origine (mais la densité n'est homogène que si les μ_n croissent assez vite), sauf au plus pour un ensemble de mesure nulle de valeurs k.

On pourra considérer d'autres familles. Par exemple, les courbes

$$z = e^{i\delta}(t\, e^{i\varphi(t)})^k,$$

k étant compris entre deux nombres positifs fixes. Dès que $\varphi(t)$ est convenablement croissante, ces courbes sont encore, quel que soit δ, des courbes de Picard pour $f(z)$, presque pour tous les k. *Ces exemples justifient l'énoncé* I.

Pour les courbes ainsi obtenues, on voit que, C étant l'une d'elles, si l'on fait tourner C de $\frac{\pi}{n}$, $2\frac{\pi}{n}$, $\ldots$, $(2n-1)\frac{\pi}{n}$ autour de l'origine, n étant un entier quelconque, le théorème de M. Picard s'applique à la fonction $f(z)$ considérée dans chacun des $2n$ secteurs obtenus. Si l'on se donne un nombre fini ou même une infinité dénombrable de fonctions méromorphes, il existe encore des spirales (6) ou (8) ou de la dernière forme considérée, qui sont courbes de Picard à la fois pour toutes ces fonctions quel que soit δ. Dans les secteurs correspondant à ces courbes communes, le théorème de M. Picard s'applique à la fois à toutes ces fonctions. De telles spirales sont d'ailleurs courbes de

Julia communes si aucune des fonctions considérées n'est exceptionnelle J.

On peut observer que, dans le cas des fonctions invariantes par la substitution $(z, z\sigma)$, $\sigma = \Sigma e^{is}$, $\Sigma > 1$, les spirales logarithmiques (6) sont courbes de Picard, sauf celles pour lesquelles $k \log \Sigma - s$ est commensurable à π. De même, pour la fonction entière

$$f(z) = \Pi(1 - z2^{-n}), \tag{9}$$

pour laquelle les points où $f(z) = c$ convergent vers les zéros, les spirales (6) qui ne sont pas courbes de Julia, quel que soit δ, correspondent aux valeurs de $k \log 2$ commensurables à π. On peut se demander si, d'une façon générale, l'ensemble des spirales exceptionnelles n'est pas toujours dénombrable.

Lorsque le théorème de M. Julia s'applique à une fonction méromorphe autour du point à l'infini, il peut exister effectivement, en outre des courbes de Julia, des courbes de Picard. C'est ce qui a lieu si, à une fonction méromorphe $f_1(z)$, d'ordre positif, tendant vers une limite lorsque z s'éloigne indéfiniment dans un certain angle A, on ajoute une fonction $f_2(z)$ invariante par la substitution $(z, z\sigma)$ considérée ci-dessus, s étant incommensurable à π. Toute demi-droite d'argument constant contenue dans A est alors courbe de Picard, mais non pas courbe de Julia, pour la fonction $f_1(z) + f_2(z)$ qui, étant d'ordre positif, admet des courbes de Julia. En ce qui concerne les fonctions holomorphes autour du point à l'infini, je n'ai pu reconnaître s'il peut exister des courbes de Picard qui ne sont pas courbes de Julia.

5. *Le domaine d'indétermination au point à l'infini des courbes de Julia.* — Ce domaine $\Delta(J)$ peut se réduire à un point. C'est le cas pour

$$\frac{\sin z}{z} + d,$$

la famille (1) est ici normale en dehors de l'axe réel, mais ne l'est pas pour les points de cet axe; il y a deux demi-droites de Julia et deux seulement, pour ces demi-droites $\Delta(J)$ se réduit au point d. De même pour les fonctions

$$\Pi\left(1 - z2^{-n}e^{i\frac{\pi}{n}}\right), \quad \frac{z}{\sin z},$$

l'axe réel positif est courbe de Julia, pour cette courbe, $\Delta(J)$ se réduit au point à l'infini.

$\Delta(J)$ peut être un segment fini ou infini, le premier cas se présente pour $\sin z$, le second pour la fonction (9) considérée ci-dessus, en prenant pour courbe J l'axe réel positif. Pour e^z, en prenant pour courbe J un demi-axe des quantités complexes, $\Delta(J)$ est une circonférence; en prenant une courbe convenable située entre les droites d'abscisses zéro et un, on obtient une couronne.

Enfin $\Delta(J)$ peut comprendre tout le plan. C'est le cas pour e^z lorsqu'on prend pour courbes J les spirales (6), k étant incommensurable.

D'ailleurs, étant donnée une courbe de Julia, contenant une suite $z(n)$ de points de Julia, toute courbe s'approchant des points $z(n)$, d'une façon exacte contenant une suite de points $z'(n)$ tels que

$$\lim \frac{z'(n) - z(n)}{z(n)} = 0, \tag{10}$$

est aussi une courbe de Julia, les points $z'(n)$ étant les points de Julia de cette courbe. On peut dire que les suites de Julia, $z(n)$ et $z'(n)$, sont *équivalentes* lorsque la condition (10) est réalisée. Deux courbes sont de même *équivalentes* au point de vue des théorèmes de M. Julia lorsque l'une appartient à tous les domaines $D(\varepsilon)$ relatifs à l'autre. Il est loisible de choisir les $z'(n)$ pour que les valeurs de $f(z)$ en ces points soient denses dans le plan, cela résulte du théorème de M. Ostrowski donné plus haut. On obtiendra donc toujours des courbes de Julia équivalentes à une courbe de Julia déterminée, pour lesquelles le domaine $\Delta(J)$ comprendra tout le plan.

6. *Les courbes de Picard qui ne sont pas courbes de Julia sont aussi courbes d'indétermination complète.* — J'avais démontré cette proposition dans le cas des demi-droites ([1]). La démonstration dans le cas général est identique. Soit

$$z = z_0\sigma(t), \qquad \sigma(1) = 1 \qquad (1 \leqq t < \infty)$$

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1925.

la courbe de Picard P considérée. La famille des fonctions

$$f[z\sigma(t)]$$

est normale au point z_0, sans quoi la courbe serait courbe de Julia. Supposons que $f(z)$ ne soit pas complètement indéterminé au point à l'infini de la courbe P; il existera un point c extérieur à $\Delta(P)$. Il est loisible de supposer c infini, en remplaçant s'il y a lieu $f(z)$ par $\frac{1}{f-c}$. Alors $f[z_0\sigma(t)]$ est borné dès que t est assez grand. La famille étant normale dans un cercle de centre z_0, les fonctions $f[z\sigma(t)]$ sont bornées uniformément pour $t > T$ dans un cercle concentrique $|z - z_0| < \varepsilon$. $f(z)$ ne prendrait pas les valeurs de module inférieur à un certain nombre dans le domaine $D(\varepsilon)$ correspondant, la courbe P ne serait pas courbe de Picard.

Cette proposition permet de montrer de suite, dans certains cas, qu'une courbe de Picard est, en réalité, une courbe de Julia; il suffit que le domaine correspondant $\Delta(P)$ ne comprenne pas tout le plan. Par exemple, le théorème de Schottky montre très aisément que, lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe et d'ordre infini dans un angle, il y a une droite de Picard dans cet angle; si sur cette droite, $f(z)$ tend vers une limite, c'est une demi-droite de Julia. (On montre d'ailleurs autrement qu'il y a toujours des demi-droites de Julia dans un tel angle.)

7. *Toute courbe d'indétermination complète n'est pas courbe de Picard.* — Je vais montrer qu'il existe des fonctions méromorphes pour lesquelles toute courbe s'éloignant indéfiniment est courbe d'indétermination complète et pour lesquelles certaines de ces courbes ne sont pas courbes de Picard. Considérons la fonction entière

$$g(z, c) = \sum_{1}^{\infty} c_n q^{n^3} z^n \quad (0 < q < 1)$$

avec

$$\frac{1}{n} < |c_n| < n. \tag{11}$$

Le module du rapport du coefficient de z^{n+1} au coefficient de z^n est compris entre

$$q^{+3n^2+4n} \quad \text{et} \quad q^{+3n^2+2n},$$

dès que n est assez grand. Il s'ensuit que, pour

$$(12) \qquad q^{-3n^2+n} < r = |z| < q^{-3n^2-n},$$

$g(z, c)$ est asymptotiquement égal au terme de rang n de la série. Dans ces couronnes (12), la fonction méromorphe

$$G(z) = \frac{g(z, c)}{g(z, 1)}$$

est asymptotiquement égale à c_n. On peut choisir les c_n satisfaisant à la condition (11) et denses dans tout le plan. *Toute courbe s'éloignant indéfiniment est alors courbe d'indétermination complète pour* $G(z)$.

Il est, d'autre part, loisible de supposer que les c_n vérifient, en outre, cette condition supplémentaire : pour deux valeurs consécutives de n, l'un au plus des nombres $|c_n - 1|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$. Considérons alors les zéros, les pôles et les uns de $G(z)$ [points où $G(z) = 1$]; ce sont les zéros de $g(z, c)$, $g(z, 1)$ et $g(z, c-1)$. Les deux premières fonctions ont, en vertu du théorème de Rouché, n zéros dans les cercles

$$|z| < q^{-3n^2 \pm n}$$

et il en est encore de même pour la troisième fonction pour une valeur au moins sur deux valeurs consécutives de n. Il existe donc une suite de nombres R_n égaux à certains des nombres q^{-3n^2}, pris parfois de deux en deux, tels que, dans toute couronne

$$(13) \qquad R_n < |z| < R_{n+1},$$

$G(z)$ a un ou deux zéros, pôles et uns. En outre, si l'on exclut les cercles ayant pour centres ces zéros, pôles et uns et dont le rayon est égal à ε fois la distance de leur centre à l'origine, ces cercles exclus ne coupent pas les circonférences $|z| = R_n$, $|z| = R_{n+1}$ limitant la couronne, et l'on peut joindre ces circonférences par un segment de rayon intérieur à la couronne ne coupant pas les cercles exclus. En procédant ainsi dans chaque couronne, *on obtient une courbe s'éloignant indéfiniment qui n'est pas courbe de Picard.*

On peut évidemment modifier de bien des façons la construction de la fonction $G(z)$. Il résulte de ce que j'ai établi ailleurs [1] que, en général, pour une fonction méromorphe d'ordre nul qui est telle que l'indicatrice $T(r, f)$ de M. Nevanlinna vérifie la condition

$$\lim \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = 0,$$

toute courbe s'éloignant indéfiniment est courbe d'indétermination complète. On passe de ces fonctions d'ordre nul à d'autres plus générales en les multipliant par des fonctions qui tendent vers une même limite finie sur des circonférences $|z| = \text{const.}$ appartenant aux couronnes analogues à (12) qui se présentent pour toutes ces fonctions. Il suffit de prendre, par exemple,

$$g_1(z) = \sum \frac{b_p}{z - a_p},$$

les $|a_p|$ pouvant croître indéfiniment aussi lentement que l'on veut, mais étant tels que, quels que soient p et n, on ait

$$\big| |a_p| - r_n \big| > 1$$

pour une valeur r_n vérifiant les inégalités (12) (ou les inégalités analogues dans le cas général), et les $|b_p|$ décroissant assez vite en valeur absolue pour que $\Sigma |b_p|$ converge. Une telle fonction $g_1(z)$ est méromorphe et est bornée sur les circonférences $|z| = r_n$, la fonction

$$\frac{1}{z} g_1(z) + 1$$

tend vers un sur ces circonférences. Le produit par $G(z)$ (ou une fonction analogue) jouit encore de la même propriété que $G(z)$, et l'ordre de cette fonction est aussi grand que l'on veut. On obtiendra, en particulier, des fonctions à croissance régulière, par exemple d'ordre fini, se comportant comme $G(z)$. On remplacera $g_1(z)$ par une dérivée logarithmique. Si $F(z)$ est une fonction entière d'ordre fini ρ, et si k est supérieur à ρ,

$$g_2(z) = \frac{F'(z)}{z^k F(z)} + 1$$

---

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 49, 1925.

tend vers 1 sur une suite de circonférences r_n convenablement choisies, cela résulte des travaux de P. Boutroux. La croissance de l'indicatrice $T\left(r, \frac{F'}{F}\right)$ est régulière si $F(z)$ est à croissance régulière et si ρ n'est pas entier, donc aussi celle de $T(r, g_2)$, et, par suite, celle de $T(r, g_2 G)$.

8. *Propriétés des fonctions pour lesquelles toute courbe allant à l'infini est courbe d'indétermination complète.* — Les exemples précédents ont été obtenus au moyen de fonctions qui tendent vers une limite lorsque le point z s'éloigne indéfiniment en restant sur certaines circonférences centrées à l'origine. Toutes les fonctions, pour lesquelles toute courbe s'éloignant indéfiniment est courbe d'indétermination complète, jouissent d'une propriété analogue. Considérons, en effet, une telle fonction $f(z)$ et un nombre c quelconque. Chacune des courbes $\Gamma(c, \varepsilon)$ sur lesquelles

$$(14) \qquad |f(z) - c| = \varepsilon$$

est une courbe pouvant avoir des points multiples, mais qui se ferme à distance finie, puisque $f(z)$ y reste borné. Celles de ces courbes qui pénètrent dans un cercle $|z| \leqq R_1$ sont en nombre fini. Les points appartenant soit à ce cercle, soit à l'intérieur de l'une quelconque des branches fermées de ces courbes, forment une région $D(R_1)$ intérieure à un cercle $|z| < R_2$. A l'extérieur de $D(R_1)$ et dans le voisinage de sa frontière, $|f(z) - c|$ est, ou bien constamment inférieur, ou bien constamment supérieur à ε. Nous supposerons, par exemple, que $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Il existe des courbes $\Gamma(c, \varepsilon)$ extérieures à $D(R_1)$. Sinon, à l'extérieur de $D(R_1)$, $f(z)$ serait borné contrairement au théorème de Weierstrass. L'une de ces courbes possède une branche fermée simple (qui peut passer par des points multiples) contenant $D(R_1)$ à son intérieur. Supposons, en effet, le contraire et considérons la circonférence $|z| = R_2$: les courbes $\Gamma(c, \varepsilon)$ en nombre fini, qui sont extérieures à $D(R_1)$ et qui pénètrent à l'intérieur de cette circonférence, délimitent des domaines dans lesquels $|f(z) - c| < \varepsilon$. L'un de ces domaines a une frontière comprenant la frontière de $D(R_1)$ et possède un point sur la circonférence $|z| = R_2$; on peut joindre ce point z_0 à un point arbitraire de la frontière de $D(R_1)$ par une courbe sur laquelle $|f(z) - c| \leqq \varepsilon$. On peut recommencer le raisonnement à partir du cercle de rayon R_2, le point z_0 étant extérieur au domaine $D(R_2)$ relatif à ce cercle, et l'on obtiendrait une courbe allant à l'infini sur laquelle $f(z)$ serait borné.

Soit alors $C(c, \varepsilon)$ la première branche fermée extérieure à $D(R_1)$ et entourant ce domaine sur laquelle on a l'égalité (14), et soit $|z| = R_2$ une circonférence contenant $C(c, \varepsilon)$ à son intérieur. On peut recommencer les mêmes raisonnements avec cette circonférence en remplaçant dans (14) ε par un nombre plus petit ε_2. Et ainsi de suite en prenant une suite de valeurs $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, décroissantes et tendant vers zéro. On obtient *des courbes* $C(c, \varepsilon_n)$ *entourant l'origine, chacune d'elles entourant la précédente sur lesquels* $f(z)$ *tend vers* c *lorsque* n *croît indéfiniment.* Il est manifeste que $C(c, \varepsilon_n)$ s'éloigne indéfiniment. Ces courbes jouent le rôle des cercles introduits dans les exemples précédents.

On voit que, dans ces conditions, la famille (1) et les familles analogues admettent toute constante finie ou infinie pour fonction limite (si $f(z)$ est exceptionnelle J).

Le fait pour une fonction d'être complètement indéterminée au point à l'infini de tout chemin allant à l'infini entraîne que *les points critiques algébriques de la fonction inverse* $z = \varphi(Z)$, qui sont les seules singularités de cette fonction, *sont denses dans le plan simple des* Z.

Considérons, en effet, une fonction méromorphe $f(z)$, sans valeur asymptotique et considérons un point Z_0 du plan simple des Z qui ne soit pas point limite de points critiques algébriques de $\varphi(Z)$. C'est dire qu'il existe un cercle $|Z - Z_0| \leqq \eta$ ne contenant, ni à son intérieur, ni sur sa circonférence, de tels points critiques. Les domaines dans lesquels

$$|f(z) - Z_0| < \eta$$

sont ici simplement connexes et chacun d'eux est borné; ils sont donc extérieurs les uns aux autres. Il est loisible de tracer une courbe allant à l'infini et ne pénétrant pas dans ces domaines; le domaine d'indétermination au point à l'infini de cette courbe ne pénètre pas dans le cercle $|Z - Z_0| < \eta$. Cette conséquence de l'hypothèse faite démontre la proposition soulignée plus haut.

9. *Sur des fonctions entières sans valeurs asymptotiques finies qui sont bornées dans un angle.* — Le mode de construction des exemples donnés ci-dessus permet de mettre en évidence l'existence de fonctions entières qui sont bornées dans un angle, mais ne tendent vers aucune limite lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans un angle intérieur à celui-ci.

On peut construire dans des conditions très larges des fonctions entières dont le module est alternativement très grand et très petit lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans des angles formant une étoile ayant pour sommet l'origine : le cas le plus simple est celui des exponentielles e^{z^m} ou $e^{P(z)}$, $P(z)$ étant un polynome; puis celui des fonctions d'ordre non entier dont les zéros sont distribués régulièrement sur une demi-droite $\left(\text{ordre supérieur à } \frac{1}{2}\right)$. Ces fonctions ont été étudiées par MM. Lindelöf et Leau et par l'auteur. Si $F(z)$ est une fonction de cette espèce, des zéros de

$$F(z) + 1 \tag{15}$$

se placent régulièrement dans le voisinage des demi-droites séparant les secteurs de grande croissance de ceux où $F(z)$ tend vers zéro, où (15) tendra vers un. On peut extraire de la suite de ces zéros de (15) une suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

telle que

$$|a_{n+1}| > |a_n|\, 2^n.$$

La fonction

$$H(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

jouit alors de propriétés signalées depuis longtemps par divers auteurs : dans les couronnes

$$|a_n|\, K_n < |z| < |a_{n+1}| \frac{1}{K_n} \qquad (\lim K_n = \infty).$$

on a

$$(16)\qquad H(z) = \frac{(1+\varepsilon_n)(-z)^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0);$$

à l'extérieur des cercles

$$(17)\qquad |z - a_n| > h\,|a_n|, \qquad h > 0;$$

le rapport de $H(z)$ au second membre de (16) a son module compris entre deux nombres positifs fixes. En prenant

$$H_1(z) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a'_n}\right), \qquad a'_n = a_n e^{i\theta},$$

la fonction méromorphe

$$(18)\qquad M(z) = \frac{H_1(z)}{H(z)}$$

est bornée à l'extérieur des cercles (17) et, pour $|z| = |a_n|$, est égale à

$$(1+\varepsilon_n)\,e^{-ni\theta}.$$

En supposant θ incommensurable à π, les valeurs de $M(z)$ sur ces circonférences $|z| = |a_n|$ ont pour limite tout point de la circonférence de rayon 1 centrée à l'origine. La fonction entière

$$M(z)[F(z) + 1]$$

reste bornée dans certains angles, et le domaine d'indétermination $\Delta(D)$ relatif aux demi-droites intérieures à ces angles comprend la circonférence de rayon 1 considérée ci-dessus. En modifiant légèrement la définition des a'_n, $\Delta(D)$ pourra renfermer une aire donnée (bornée). En appliquant la méthode de M. Lindelöf, on constate aisément qu'il n'y a pas de valeurs asymptotiques.

Ceci s'applique aussi aux fonctions entières de MM. Lindelöf et Mittag-Leffler, en particulier aux fonctions d'ordre infini du dernier de ces auteurs.

Ces circonstances, qui ne semblent pas avoir été signalées jusqu'ici, doivent se présenter *en général* pour les fonctions bornées dans un angle. Les fonctions envisagées ci-dessus sont d'ailleurs à croissance très régulière. Voici un exemple particulier, construit avec des fonctions *usuelles*. Considérons la fonction

$$\mathrm{M}(z) = \prod_{0}^{\infty} \frac{2^n - z^2}{2^n + z^2},$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(1 - 2z^2)\,\mathrm{M}(z) = (1 + 2z^2)\,\mathrm{M}(\sqrt{2}\,z).$$

Le produit

$$\mathrm{K}(z) = \mathrm{M}(z)\,\mathrm{M}\left(\frac{1}{z\sqrt{2}}\right)$$

est une fonction classique invariante par la substitution $(z, 2z)$, $\mathrm{M}(z)$ est asymptotiquement invariant par la même substitution et est bornée à l'extérieur des circonférences

$$|z \pm i\sqrt{2^n}| = \varepsilon\sqrt{2^n} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Le produit

$$\mathrm{E}(z) = \mathrm{M}(z)\left[e^{\pi\sqrt{2}z} - 1\right](e^{2\pi z} - 1)$$

est une fonction entière bornée dans tout angle $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ et dont le domaine d'indétermination au point à l'infini de toute demi-droite située dans cet angle est effectivement une courbe.

10. *Les fonctions holomorphes dans un angle.* — Les fonctions $\mathrm{F}(z)$ méromorphes dans un angle

$$(19) \qquad |\varphi| < \frac{\alpha}{2} \qquad (z = r\,e^{i\varphi})$$

et qui sont d'ordre assez grand au point à l'infini d'un angle intérieur à celui-ci, $2|\varphi| < \alpha' < \alpha$, possèdent des droites de Julia, donc des droites de Picard qui peuvent être plus nombreuses que les premières. La méthode que j'ai indiquée pour les fonctions méromorphes autour du point à l'infini (1), et qui est basée sur l'existence de domaines dans lesquels il y a à la fois un grand nombre de points où la fonction prend une même valeur (non exceptionnelle) c, montre pour ces fonctions l'existence de cercles de remplissage de M. Milloux et donne une valeur des rayons de ces cercles. Dans le cas des fonctions

(1) *Loc. cit.* [note (3) de la page 115].

holomorphes, on obtient une meilleure valeur du rayon de ces cercles en employant la méthode du cheminement et le théorème de M. Schottky comme je l'ai fait pour les fonctions holomorphes autour du point à l'infini. C'est ce que je montrerai rapidement ici. On part de cet énoncé du théorème de Schottky : si $g(z)$ est holomorphe pour $|z-z_0|<d$ et ne prend pas les valeurs zéro et un dans ce cercle, si $k<1$ et $\varepsilon>0$ et si $|g(z_0)|$ est supérieur à $C(k, \varepsilon)$, on a

$$\log|g(z)|>(1-\varepsilon)\frac{1-k}{1+k}\log|g(z_0)|$$

dans le cercle $|z-z_0|<kd$.

Supposons que l'angle α soit un peu inférieur à π et que l'ordre de $f(z)$ dans l'angle intérieur soit un peu supérieur à un. Partons d'un point z_0 de module r_0 très grand, en lequel

$$\log|f(z_0)|>r_0^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon>0).$$

Si dans le cercle de centre z_0 et rayon $r_0\sin\left(\alpha''-\frac{\alpha'}{2}\right)$, $\left(\alpha''<\frac{\alpha}{2}\right)$, $f(z)$ ne prend pas les valeurs zéro et un, on a encore

$$\log|f(z)|>(1-\varepsilon)\frac{1-k}{1+k}r_0^{1+\varepsilon}$$

pour $|z-z_0|<kr_0\sin\left(\alpha''-\frac{\alpha'}{2}\right)$. On peut faire le même raisonnement à partir du point z_1 de ce dernier cercle dont le module est r_0 et l'argument inférieur en valeur absolue à celui de z_0 ; et ainsi de suite en cheminant vers l'axe réel Ox tant que les cercles introduits ne renferment pas de zéro ou de un. Si Ox est atteint, on chemine en prenant des cercles dont le centre r est sur Ox, $r<r_0$, et dont le rayon est $r\sin\alpha''$. Si l'on arrive ainsi à un point d'abscisse r, on a encore en ce point

$$\log|f(r)|>K\left[(1-\varepsilon)\frac{1-k}{1+k}\right]^{\gamma}r_0^{1+\varepsilon},$$

K étant fini, et

$$\gamma=\frac{\log r_0-\log r}{-\log(1-k\sin\alpha'')}.$$

En prenant $k=\sin\alpha''$, on a

(20) $$\log|f(r)|>Kr^{\delta}r_0^{1+\varepsilon-\delta}$$

avec

$$\delta = \frac{\log \frac{1+\sin\alpha''}{(1-\varepsilon)(1-\sin\alpha'')}}{-2\log\cos\alpha''}.$$

On supposera que α'' est assez voisin de $\frac{\pi}{2}$ pour que $1+\varepsilon-\delta$ soit positif. L'inégalité (20) exige que r soit grand, alors le second membre doit être moindre que $r^{1+\varepsilon+\varepsilon''}$, ε'' pouvant être supposé arbitrairement petit, et il faut alors que

$$r > r_0^{1-\varepsilon'(r_0)} \qquad \left[\lim_{r_0=\infty} \varepsilon'(r_0) = 0\right].$$

Il existe donc un cercle de cheminement de M. Milloux au centre duquel

$$\log|f(z)| > |z|^{1-\varepsilon'},$$

qui contient un zéro ou un un de $f(z)$. On applique alors le théorème de Schottky à un cercle de rayon convenable ayant pour centre ce zéro ou ce un. On établit ainsi l'existence d'une suite infinie de cercles $C(n)$

$$|z-z(n)| < |z(n)|^{\eta} = R(n) \qquad (\eta < \lambda\varepsilon',\ \lambda \text{ fini}),$$

$f(z)$ prenant dans $C(n)$ toutes les valeurs de module moindre que $R(n)$, sauf au plus des valeurs appartenant à un cercle de rayon $\frac{1}{R(n)}$. En effectuant une transformation (z, z^{m}), on a le résultat général suivant :

Si $f(z)$ est holomorphe dans l'angle (19) et est d'ordre ρ supérieur à $\frac{\pi}{\alpha}$ au point à l'infini d'un angle intérieur, si petit que soit le nombre positif ε, il existe une suite de cercles $C(n)$ intérieurs à l'angle

$$|z-z(n)| < |z(n)|^{1-\rho+\varepsilon},$$

tels que, dans $C(n)$, $f(z)$ prend les valeurs de module moindre que

$$R(n) = |z(n)|^{\varepsilon},$$

sauf au plus des valeurs qui appartiennent à un cercle de rayon $\frac{1}{R(n)}$.

11. *Remarques sur les cercles de remplissage des fonctions holomorphes.* — J'ai signalé dans d'autres publications que, dans l'ensemble d'une suite infinie de cercles de remplissage de M. Milloux, obtenus en cheminant à partir d'un point de module maximum, les fonctions $f(z)+P(z)$ s'annulent une infinité de fois, $P(z)$ étant un polynome quelconque distinct d'un certain polynome exceptionnel (qui peut ne pas exister). *C'est ce qui se produit encore dans les cercles que l'on vient d'obtenir* (alors que mon ancienne méthode ne donnait pas ce résultat). On voit en même temps que la suite de points de Julia obtenue est encore suite de Julia pour toutes les fonctions $z^q f(z)$, q étant un entier positif ou négatif quelconque. On peut interpréter ce fait au point de vue des propriétés des familles introduites par M. Julia. Par exemple : *$f(z)$ étant holomorphe autour du point à l'infini, il existe un point z_0 en lequel aucune des suites de fonctions*

$$\sigma^{nq} f(z\sigma^n) \qquad (|\sigma| > 1,\ n = 1, 2, \ldots),$$

correspondant aux diverses valeurs de l'entier q, n'est normale.

Ceci s'obtient, comme je l'ai dit, en partant de cercles de remplissage dans lesquels existent des points où $f(z)$ est comparable au module maximum d'une fonction entière. Mais la méthode de M. Milloux permet, théoriquement tout au moins, d'obtenir aussi des cercles de remplissage ne jouissant pas de cette propriété. *Je vais montrer qu'il existe effectivement de tels cercles.* Reportons-nous à la fonction $E(z)$ construite à la fin du n° **9**. La fonction $K(z)$ prend une même certaine valeur c en des points $d_n = -2^n k$ de l'axe réel négatif; $M(z)$ prend cette même valeur dans le voisinage de ces points, $|M(z) - c|$ restant en outre supérieur à un nombre fixe η sur des circonférences $|d_n - z| < -\varepsilon d_n$ dès que n est assez grand. On a une propriété analogue pour $E(z)$. On obtient ainsi pour la fonction $zE(z)$ une suite de points de Julia et de cercles de remplissage dans lesquels le maximum de $|f(z)|$ est comparable à $|z|$ seulement. La famille

$$2^{nq} E(z2^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est donc normale au point $z = k$ lorsque q est négatif ou nul, et n'est pas normale lorsque $q \geqq 1$.

Ainsi se pose un nouveau problème dans l'étude des ensembles $E(\sigma)$

de M. Julia, ensembles des points où la famille $f(z\sigma^n)$ n'est pas normale, celui de la comparaison des ensembles $E(\sigma, f)$ et $E(\sigma, z^q f)$. *Tous ces ensembles ont, on vient de le voir, au moins un point commun.* Il résulte d'une proposition donnée dans ma Thèse (¹) que ces ensembles coïncident, quel que soit q, pour les fonctions d'ordre nul à croissance lente, telles que

$$\overline{\lim}\,\frac{\log|f(z)|}{(\log|z|)^2} < +\infty.$$

Mais la méthode de construction du n° **9**, appliquée à l'exemple donné au paragraphe **18** de ma Thèse, montre déjà que ces ensembles peuvent ne pas coïncider pour certaines fonctions d'ordre nul.

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1913.