JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. MANDELBROJT

Sur les points singuliers d'une série de Taylor situés sur le cercle de convergence

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 435-439.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__435_0>

Sur les points singuliers d'une série de Taylor situés sur le cercle de convergence;

Par S. MANDELBROJT.

J'ai démontré en 1923 (*Comptes rendus*, mars-avril 1923; *Annales de l'École Normale supérieure*) le lemme suivant :

Si l'on a une série $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$, les λ_n étant tels qu'on puisse en extraire une suite partielle λ_{n_i} telle qu'on ait $\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i} > k$, alors $\varphi(x)$ a sur le cercle de convergence au moins $k+1$ pôles ou un point singulier qui n'est pas pôle. Nous avons pu en tirer plusieurs conséquences.

En profitant d'un théorème de M. Carlson (*Comptes rendus*, mai 1924) nous pouvons énoncer le lemme suivant qui est la généralisation du lemme mentionné.

Si l'on a $\psi(x) = \Sigma a_n x^n$ les a_n étant tels qu'il existe une suite partielle de coefficients a_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ satisfaisant à la condition

$$\lim \{ |a_{n_i}| + |a_{n_i+1}| + \ldots + |a_{n_i+k-1}| \} = 0,$$

alors $\psi(x)$ admet sur le cercle de convergence au moins $k+1$ pôles ou bien elle admet sur un cercle un point singulier au moins qui n'est pas pôle (on suppose le rayon de convergence égal à un) (¹).

On démontre ce lemme en s'appuyant sur le théorème de M. Carlson dont j'ai fait allusion. Un cas particulier de son théorème peut s'énoncer de la manière suivante :

Si $f(x)$ à k pôles d'ordre m sur son cercle de convergence de rayon ρ_0 et que les autres pôles sur ce cercle soient d'ordre inférieur à m, il

(¹) C'est M. Montel qui a proposé de généraliser mon lemme de cette manière dès que mon Mémoire « Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes » parut.

y a une constante $B > 0$ telle que

$$|a_n| + \ldots + |a_{n+k-1}| > B\rho_0'' n^{m-1},$$

En posant $\rho_0 = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité du lemme, nous pouvons alors écrire

$$(1) \qquad |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k-1}| > B,$$

même dans le cas extrême (au point de vue de l'inégalité) où tous les pôles sont simples.

Donc s'il n'y avait que k pôles on aurait l'inégalité (1), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du lemme.

Le lemme est alors donc démontré.

Nous pouvons en tirer le théorème suivant :

Si l'on a une suite $n_i (i = 1, 2, \ldots)$ telle que dans la série $\Sigma a_n x^n$ on a

$$(A) \qquad \lim \{ |a_{n_i}| + \ldots + |a_{n_i + k_i}| \} = 0,$$
$$\lim n_i = \infty; \qquad \lim k_i = \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

alors la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ admet sur son cercle de convergence un point singulier au moins qui n'est pas pôle.

On voit en effet que l'hypothèse du lemme démontré a lieu pour k fixe quelconque.

Enfin nous pouvons démontrer le théorème général suivant :

Si l'on a

$$(A') \qquad \lim n_i^{\rho} \{ |a_{n_i}| + \ldots + |a_{2\rho\, n_i + k_i}| \} = 0,$$
$$\lim n_i = \infty; \qquad \lim x_i = \infty \qquad (\rho \text{ un entier}),$$

et si les modules des a_n sont bornés ($|a_n| < M$), alors la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ de rayon de convergence égal à un ne peut pas être mise sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{\rho+1}}}$$

où $\varphi_1(x)$ admet le rayon de convergence supérieur à 1, et où $P(x)$ est un polynome.

Je démontre ce théorème d'une manière tout à fait semblable à celle qui a servi pour démontrer un théorème moins général (où l'on suppose : $a_{n_i}=0$, $a_{n_i+1}=0$, $\ldots$, $a_{2\rho\, n_i+k_i}=0$) et que j'ai énoncé et démontré dans ma Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1923).

On remarque en formant la série

$$[\varphi(x)]^2=\Sigma b_n x^n$$

(sur la forme de ces coefficients voir le Mémoire cité) que ses coefficients vérifient également la condition (A′) où l'on remplace ρ par $\rho-1$, de même les $|b_n|$ sont bornés.

En formant successivement les fonctions

$$[\varphi(x)]^3\ldots[\varphi(x)]^{\rho+1}.$$

on démontrera que la dernière fonction

$$F(x)=[\varphi(x)^{\rho+1}=\Sigma c_n x^n,$$

est telle que ses coefficients vérifient la condition (A). Donc cette fonction ne peut pas avoir que des pôles sur le cercle de convergence et alors $\varphi(x)$ ne peut pas être mise sous la forme (B).

Je veux enfin démontrer un théorème qui semble être important pour les applications.

On sait d'après M. Lindelöf que si l'on a

$$f(x)=\Sigma a_n x_n$$

avec

$$a_n=\varphi(n)$$

où $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe dans un certain demi-plan et si l'on a

$$|\varphi(\alpha+\rho e^{i\psi}|<e^{(\vartheta+\varepsilon)\rho} \qquad (\vartheta<\pi),$$

pour

$$\frac{\pi}{2}\leq\psi\leq\frac{\pi}{2};$$

alors $f(x)$ est holomorphe pour tout point x intérieur à l'angle $\vartheta<\theta<2\pi-\theta$ (on pose $x=re^{i\theta}$).

Notre but est de démontrer la réciproque de ce théorème dans un cas assez général. Voilà le théorème que nous démontrons :

Soit $f(x) = \Sigma a_n x^n$ *une fonction de rayon d'holomorphie égal à un et qui est holomorphe à l'intérieur (et sur la frontière) et l'angle* $\vartheta < \theta < 2\pi - \vartheta$ $(\vartheta < \pi)$, *et supposons que* $f(x)$ *n'a qu'un nombre fini de points singuliers isolés et non critiques, tous situés sur le cercle de convergence, alors on a*

$$a_n = \varphi(n),$$

où $f(x)$ *est une fonction entière vérifiant l'inégalité*

$$|\varphi(z)| < e^{(\vartheta+\varepsilon)r} \qquad (z = re^{i\theta}),$$

quelque soit ε *pour* r *assez grand.*

Pour la démonstration rappelons un théorème de M. Faber d'après lequel la condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma b_n x^n$ ait un seul point singulier d'affixe 1 est que l'on ait

$$\text{(C)} \qquad b_n = g(n)$$

où $g(z)$ est une fonction entière vérifiant la condition

$$|g(z)| < e^{\varepsilon r}.$$

Nous pouvons présenter la fonction $f(x)$ sous la forme

$$\text{(D)} \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

où chaque fonction $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ n'a qu'un seul point singulier situé sur le cercle de convergence — soit x_j ce point. On a en posant $x_j = e^{\theta_j i}$:

$$\text{(A)} \qquad |\theta_j| < \vartheta.$$

En posant

$$f_j(x) = \Sigma a_n^{(j)} x^n,$$

on voit que la fonction

$$\overline{f_j}(x) = \Sigma a_n^{(j)} e^{in\theta_j} x^n$$

admet un seul point singulier d'affixe 1. Donc d'après le théorème de M. Faber on a

$$a_n^{(j)} e^{in\theta_j} = g(n)$$

où $g(z)$ est une fonction entière avec

$$|g(z)| = e^{\varepsilon r},$$

quel que soit ε pour r assez grand.

Considérons la fonction entière

$$\varphi_j(z) = g(z)\, e^{-i\theta_j z},$$

on a, en posant $z = x + iy$,

$$\text{(L)} \qquad |\varphi_j(z)| = |g(z)\, e^{-i\theta_j z}| = |g(z)|\, e^{\theta_j y} \leqq |g(z)|\, e^{\theta_j |y|}.$$

Donc d'après (C)

$$|\varphi_j(z)| < e^{(\theta_j+\varepsilon)r},$$

on a comme on le voit

$$a_n^{(j)} = \varphi_j(n).$$

En posant

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots + \varphi_k(z) = \varphi(z),$$

on voit d'après (D) que l'on a

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(n)} = \varphi(n),$$

et d'après (A) on a

$$|\varphi(z)| < e^{(\vartheta+\varepsilon)r};$$

le théorème est donc démontré.

Il est d'ailleurs évident qu'on peut énoncer un théorème plus général en ne supposant plus que tous les points singuliers sont situés sur le cercle de convergence. Ils peuvent être situés dans une partie d'une bande circulaire entourant le cercle de rayon *un*, cette partie étant à l'intérieur de l'intérieur de l'angle précisé. Cette bande étant comprise entre les cercles de rayon $R_1 < 1$ et $R_2 > 1$ il suffit qu'on ait :

$$\left.\begin{array}{l} |\log R_1| + |\theta_j| < \vartheta \\ |\log R_2| + |\theta_j| < \vartheta \end{array}\right. \qquad (j = 1, 2, \ldots k).$$