JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Un théorème relatif à la pression au sein d'un liquide parfait en mouvement irrotationnel

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 427-433.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__427_0>

Un théorème relatif à la pression au sein d'un liquide parfait en mouvement irrotationnel;

PAR GEORGES BOULIGAND.

1. M. J. Hadamard a signalé, dans ses *Leçons sur la propagation des Ondes* (n° 138), les difficultés que l'on rencontre dans la dynamique des liquides (même dépourvus de viscosité), pour s'assurer que la pression demeure positive au cours d'un mouvement, dont on a effectué la mise en équations moyennant l'hypothèse qu'aucune cavitation ne se produise au sein du fluide. Nous nous proposons ici de faire connaître un théorème, spécial au cas du mouvement irrotationnel, d'où l'on peut tirer certaines indications sur le signe de la pression au sein d'un liquide parfait, sur lequel agit seulement la pesanteur.

2. La proposition que nous avons en vue s'énonce de la manière suivante :

Étant donné un liquide pesant en mouvement irrotationnel, le laplacien de la pression au sein de ce liquide est négatif [1].

En effet, prenons trois axes rectangulaires $Oxyz$, l'axe Oz étant la verticale ascendante. En appelant φ le potentiel des vitesses, g l'accélération de la pesanteur, ρ la densité du liquide, et en déterminant convenablement la fonction additive arbitraire du temps seul qu'on peut toujours faire figurer dans l'expression de φ, nous avons la relation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\overline{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0, \tag{1}$$

(1) On peut dire encore que la pression est une fonction *surharmonique*.

où $\overline{V}^2$ désigne naturellement le carré de la vitesse, c'est-à-dire du vecteur

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi. \tag{2}$$

En appelant u, v, w les composantes de $\vec{V}$, nous tirons de (1), en tenant compte de ce que φ, et par suite $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, sont harmoniques

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2}\Delta(u^2 + v^2 + w^2). \tag{3}$$

Or un calcul simple donne

$$\Delta(u^2) = 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Dans le second membre, le premier terme est nul, en raison de l'harmonicité de $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Donc le laplacien de u^2 est essentiellement positif. Il en est de même pour ceux de v^2 et de w^2. En vertu de la formule (3), le théorème est donc établi.

3. De cette proposition découlent des conséquences provenant de ce qu'une fonction dont le laplacien est négatif ne peut offrir de minimum à l'intérieur de son domaine de régularité : la borne inférieure d'une telle fonction dans chaque domaine emprunté au précédent est atteinte exclusivement sur la frontière de ce domaine ([1]).

Cela posé, étudions d'abord le mouvement irrotationnel de chute libre dans le vide d'une certaine masse de liquide, dont la configuration initiale sera supposée, pour fixer les idées, homéomorphe à une sphère ou à un tore, ou même à une figure de genre plus élevé. Le problème se ramène à l'étude du mouvement du système autour de son centre de gravité, mouvement auquel on peut appliquer (en faisant

---

([1]) M. H. Villat a déjà montré, pour le cas du mouvement à deux dimensions, le parti qu'on peut tirer d'idées analogues, en introduisant certaines fonctions harmoniques dont les extrema correspondent à ceux de la pression. Voir notamment son Mémoire du *Journal de Mathématiques* (*Sur la validité des solutions de certains problèmes d'hydrodynamique*), 1913, et son Ouvrage de la *Collection Scientia : Recherches théoriques sur la résistance des fluides.*

$g = 0$) la théorie précédente. Cela posé, à la surface libre de la masse liquide, la pression est nulle. Ainsi non seulement la borne inférieure de la pression à un instant quelconque dans le liquide est zéro, mais on peut même affirmer qu'en un point intérieur, cette borne n'est pas atteinte, donc que la pression est positive et non nulle. Par conséquent on pourra traiter le problème du mouvement de ce fluide en admettant que la configuration à un instant quelconque est homéomorphe à la configuration initiale, sous réserve de vérifier toutefois le point suivant : en écrivant les équations du mouvement et intégrant ces équations, il ne se produit, au cours du mouvement obtenu, aucun choc entre les éléments matériels et la surface libre.

En résumé, nous pouvons dire que si l'intégration naturelle du problème conduit à définir, en fonction du temps, un domaine variable satisfaisant à la *condition d'impénétrabilité*, c'est-à-dire n'empiétant jamais sur lui-même, on est assuré que la pression demeure toujours positive au sein du liquide.

4. Une autre application est relative au problème du mouvement d'un liquide dans un bassin à parois fixes ([1]). Considérons d'abord le cas où la profondeur est constante à l'état d'équilibre, c'est-à-dire où le fond est constitué par un plan horizontal et étudions d'abord le cas limite où le fluide est indéfini dans chaque direction horizontale, le plan précédent constituant à lui seul toute la paroi. Envisageons un mouvement qui donne une surface libre dont la dénivellation reste inférieure à une valeur constante h, et telle que la condition d'impénétrabilité soit satisfaite. On peut être alors assuré que la pression au sein du liquide demeure constamment positive.

En effet, appelons H le plan de fond et soit S la surface libre à un instant quelconque. Appelons S' la symétrique de S par rapport au plan H. Entre S d'une part et S' de l'autre s'étend un domaine infini : appelons $G(M, P)$ sa fonction de Green ordinaire, pour deux points P et M situés dans le volume même du liquide. Appelons P' le symétrique de P par rapport à H. Alors $G(M, P) + G(M, P')$ constitue la

([1]) Voir sur ce problème un article du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, 50, avril 1926.

fonction de Green, pour le pôle P, du problème mixte consistant à trouver une fonction harmonique bornée dans tout le liquide, prenant des valeurs données sur la surface libre et telle que sa dérivée normale en chaque point du plan H prenne elle-même ses valeurs données. Or, nous pouvons précisément ici utiliser cette fonction pour le calcul de la pression. Cette fonction est en effet déterminée par les conditions suivantes :

1° Au sein du liquide, elle doit vérifier l'équation (3), qui peut encore s'écrire

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2}\Delta \overline{V}^2;$$

2° Sur la surface libre, on doit avoir $p = 0$;
3° Sur le fond, on doit avoir

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

La valeur de p_P est donc donnée par la formule

$$(5)\quad p_P = \frac{1}{2\pi}\rho g \int\int G(M, P)\, d\sigma_M + \frac{\rho}{8\pi}\int\int\int \Delta\left(\overline{V}_M^2\right)[G(M, P) + G(M, P')]\, d\omega_M$$

où l'intégrale double est étendue à la totalité du plan H, et l'intégrale triple au volume du liquide. Puisque tous les termes sont essentiellement positifs, le résultat annoncé est établi.

Il subsiste d'ailleurs pour un fluide de profondeur indéfinie. Dans ce cas, soit $G(M, P)$ la fonction de Green du domaine infini occupé par le liquide. La pression est de la forme

$$\psi(P) + \frac{\rho}{8\pi}\int\int\int \Delta\left(\overline{V}_M^2\right) G(M, P)\, d\omega_M,$$

en désignant par $\psi(P)$ une fonction harmonique dans le liquide, s'annulant sur la surface et devenant infiniment grande comme $-\rho g z$ lorsque la profondeur augmente indéfiniment. Cette fonction se présente comme la limite, pour h infini, du premier terme dans le second membre de (5). Elle est donc essentiellement positive : d'ailleurs cela est intuitif si l'on remarque qu'elle représente la différence de potentiel entre un point quelconque de la surface libre et le point P dans un état d'équilibre électrique obtenu en remplissant la région située au-dessus du liquide par un conducteur homogène, le liquide étant supposé diélectrique. Dans ce cas encore, la pression est partout positive.

5. Dans tous les exemples qui précèdent, on n'aura donc à se préoccuper que d'une seule chose : s'assurer que la condition d'impénétrabilité est vérifiée. Ce résultat peut s'étendre à des cas plus généraux du problème du mouvement d'un liquide pesant dans un bassin à parois fixes.

Tout d'abord, le cas d'un bassin en forme de parallélépipède rectangle ayant quatre arêtes verticales se ramène immédiatement à l'exemple du n° 4 en appliquant le principe des images.

D'une manière plus générale, examinons le cas suivant : la paroi est une surface polyédrale et chaque verticale la coupe en un seul point. Dans ces conditions, en un point situé sur une facette, mais non sur son périmètre, la dérivée de $\overline{V}^2$ suivant la normale est nulle, en vertu de l'existence d'un prolongement analytique de φ au delà de la facette, immédiatement réalisable par un processus de symétrie sur lequel il est inutile d'insister. De la relation (1), on déduit donc qu'en un point non périmétrique d'une facette quelconque, la dérivée de p prise suivant la normale intérieure sera négative (¹). On voit alors bien facilement que, moyennant l'hypothèse supplémentaire suivante : la *surface polyédrale est convexe*, le gradient de la pression en chaque point de la paroi ne pourra jamais se trouver à l'intérieur du bassin.

De là, une induction bien naturelle conduit au cas où le bassin est délimité par une *paroi convexe, coupée par chaque verticale en un seul point*. Vérifions que, dans ces conditions, le gradient de la pression en un point de la paroi se trouvera toujours à l'extérieur du bassin, ou encore que la dérivée normale intérieure $\frac{dp}{dn}$ est partout négative sur la paroi. Ce résultat sera établi si nous montrons que la dérivée normale intérieure de $\overline{V}^2$ est positive. Or il suffit de chercher le signe du

(¹) Ce résultat se déduirait encore de l'équation générale $\vec{J} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)$ en remarquant que l'accélération $\vec{J}$ d'un point non périmétrique d'une facette est contenue dans le plan de cette facette.

produit scalaire

$$\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dn};$$

or, considérons un déplacement infinitésimal d'amplitude $\delta n(>0)$ sur la normale intérieure et un intervalle de temps dt également positif. Le produit scalaire

$$\vec{V}\,dt\cdot\frac{d\vec{V}}{dn}\delta n \tag{6}$$

est aussi celui d'un déplacement infinitésimal $d\text{M}$ sur la paroi par l'accroissement géométrique $\delta\vec{V}$ du champ des vitesses résultant du déplacement d'amplitude δn accompli le long de la normale intérieure. En vertu du caractère irrotationnel du champ des vitesses, on peut égaler l'expression (6) au produit scalaire de notre déplacement normal par l'accroissement géométrique subi par le champ des vitesses pour le déplacement tangentiel $d\text{M}$ dans la direction du champ. Or, en vertu de la connexité, il est clair que ces deux vecteurs font entre eux un angle aigu et le résultat est démontré.

Dès lors, pour résoudre simultanément les deux derniers cas cités, il suffit de s'appuyer sur cette remarque topologique intéressante en elle-même :

Soit p une fonction semi-monotone inférieurement, c'est-à-dire qui ne puisse présenter aucun minimum intérieur à son domaine d'existence. Supposons que p soit continu et possède un champ de gradient continu dans un domaine homéomorphe à un hémisphère, la continuité substituant sur la frontière, et satisfasse aux conditions suivantes :

1° On a $p \geqq 0$ sur la partie S de la frontière qui correspond au plan diamétral limite;

2° Sur la partie restante Σ de la frontière, le gradient est partout extérieur au domaine.

Dans ces conditions, la fonction p est positive dans tout le domaine. Sinon, elle atteindrait nécessairement sa borne inférieure sur Σ. Or ce fait serait en contradiction avec les conséquences immédiates de nos hypothèses sur la répartition du gradient le long de Σ.

En résumé, dans des cas très larges, qui sont d'ailleurs pratiquement les plus intéressants, il n'y aura pas à se préoccuper du signe de la pression.

Je terminerai par une remarque relative aux cas où la résolution analytique du problème étudié pourrait conduire à des pressions négatives. Notre théorème montre alors (toutes les hypothèses étant supposées vérifiées) qu'une pression nulle suivie, dans le prolongement analytique du mouvement, de pressions négatives, ne peut apparaître que sur la paroi. Ainsi, faisons déplacer un solide dans un liquide, en imprimant à ce solide une translation rectiligne et uniforme, et supposons le liquide en mouvement irrotationnel. Alors, la pression atteindra sa valeur minimum au contact du liquide et du solide. Si donc, d'après une idée de M. Riabouchinski [1], on fait décroître la pression extérieure, on verra, pour une valeur suffisamment petite de cette pression, le fluide se détacher de cette paroi, la cavitation prenant naissance justement *à partir de cette paroi*. Il est intéressant de remarquer que ce résultat, considéré d'habitude comme un fait expérimental, est une conséquence de notre théorème.

---

[1] *Comptes rendus*, séance du 31 mai 1926, p. 1325.