JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STANISLAS ZAREMBA

Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 127-163.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__127_0>

Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann;

PAR STANISLAS ZAREMBA,
Professeur à l'Université de Cracovie.

Il arrive quelquefois qu'il soit possible de faire correspondre à un problème donné P, possédant une solution seulement au cas où les données satisfont à certaines conditions de régularité, un autre problème P′, relatif aux mêmes données, résoluble même lorsque les données ne remplissent pas les conditions de régularité précédentes et, se réduisant lorsque ces conditions sont satisfaites, à un problème équivalent au problème P. Dans un travail déjà ancien (1), j'ai fait voir que la circonstance précédente se présentait en ce qui concerne le problème de Dirichlet. D'autre part, il suffit de se reporter au remarquable Mémoire de M. Bouligand, formant le fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques* pour se rendre compte du parti que l'on peut tirer, pour l'étude d'un problème P, de celle d'un problème P′ qui lui correspondrait de la façon indiquée plus haut. Il y a donc quelque intérêt à montrer, comme je me propose de le faire, dans le présent Mémoire, qu'en généralisant le problème que j'avais étudié précédemment, on obtient l'énoncé d'un problème général, toujours possible, qui, moyennant une particularisation convenable des données peut être réduit à un problème se trouvant dans la relation considérée plus haut, à volonté, soit avec le problème de Dirichlet, soit avec celui de Neumann (appelé quelquefois problème hydrodynamique). L'étude du problème que j'ai en vue permettra, comme je le ferai voir, de

(1) S. ZAREMBA, *Sur le principe du minimum* (*Bulletin international de l'Académie de Cracovie*, 5 juillet 1909).

démontrer la possibilité du problème de Neumann même au cas qui échappe aux méthodes employées jusqu'à présent et où la frontière du domaine considéré présente des arêtes et des angles.

1. La théorie que j'ai en vue pourrait être développée pour un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions; mais, comme le passage du cas de l'espace ordinaire à trois dimensions au cas général n'offre pas de difficultés, je ne considérerai que le cas de l'espace ordinaire. Dans tout ce qui va suivre, je supposerai l'espace rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et, pour abréger l'écriture, je me servirai des notations vectorielles ([1]). Pour éviter des longueurs, sans porter préjudice à la clarté, je numéroterai en chiffres romains les énoncés auxquels j'aurai à renvoyer, dans l'ordre où ils se présenteront.

L'inégalité de Schwarz, sur laquelle j'aurai à m'appuyer constamment, ne faisant pas partie des théorèmes exposés dans les traités classiques, je l'énonce ici avec les quelques mots qui suffisent à la démontrer.

I. *Inégalité de Schwarz.* — Posons

$$B = \sum_{k=1}^{n} \int_{(D_k)} \varphi . \psi \, d\tau,$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} \int_{(D_k)} \varphi^2 \, d\tau,$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} \int_{(D_k)} \psi^2 \, d\tau,$$

où les domaines (D_k) peuvent n'être pas d'un même nombre de dimensions, on aura

$$B^2 \leqq AC.$$

([1]) On pourra consulter, au sujet des notations vectorielles, l'un ou l'autre des ouvrages suivants : G. Bouligand, *Leçons de Géométrie vectorielle*, Paris 1924, chez Vuibert; A. Chatelet et Kampé de Fériet, *Le calcul vectoriel*, Paris 1924, chez Gauthier-Villars.

Pour reconnaître l'exactitude de la relation précédente, il suffit de considérer que l'expression

$$\sum_{n=1}^{n} \int |\lambda\varphi_k + \mu\psi_k|^2 d\tau = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2,$$

où λ et μ représentent deux indéterminées, est une forme quadratique, jamais négative, des indéterminées réelles λ et μ.

Dans ce qui va suivre, j'aurai à faire un grand usage de certaines propriétés des polynomes sphériques. On les trouvera toutes réunies au paragraphe 27 (p. 165 et suiv.) de mon Mémoire *Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique* (*Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie*, février 1909).

Dans tout ce travail nous n'aurons à considérer que des fonctions harmoniques dont chacune possédera, dans le domaine où elle sera définie, un gradient déterminé sans ambiguïté; toutefois une fonction de ce genre peut, lorsque le domaine dans lequel elle est définie n'est pas simplement connexe par rapport aux lignes, être une fonction multiforme à la façon du potentiel électrodynamique d'un système de courants fermés constants. Pour éviter des difficultés qui pourraient dériver de là, nous adopterons la convention suivante :

II. *Convention.* — Ayant à considérer une fonction harmonique u définie au moyen de son gradient à l'intérieur d'un domaine (D) d'un seul tenant, nous supposerons toujours que l'on ait fait correspondre à un point déterminé A, situé à l'intérieur du domaine (D), sous le nom de *valeur initiale* de u, une détermination particulière u_0 de u et ayant à envisager la valeur de la fonction u en quelque point B, situé à l'intérieur du domaine (D), nous la regarderons comme celle avec laquelle on arrive en B en suivant par continuité les valeurs de u, à partir de la valeur initiale u_0, le long d'une ligne allant de A en B et située à l'intérieur du domaine considéré; au cas où nous aurons à considérer à la fois plusieurs fonctions harmoniques définies à l'intérieur d'un domaine (D) au moyen de leurs gradients respectifs, nous ferons correspondre les valeurs initiales de ces fonctions à un *même* point du domaine (D) et, en envisageant les valeurs des fonctions en question en quelque point déterminé B, situé à l'intérieur du domaine (D), nous supposerons que ces valeurs sont celles avec lesquelles on arrive en B le long d'une *même* ligne allant de A en B.

2. Voici l'énoncé du problème que nous nous proposons d'étudier.

III. *Problème.* — On désigne par (D) un domaine donné ouvert (c'est-à-dire ne contenant que des points intérieurs) et par $\vec{V}$ un vecteur, fonction donnée, dans le domaine (D), des coordonnées de son origine; on suppose que l'intégrale

$$\iiint_{(D)} \vec{V}^2 . dx\, dy\, dz$$

ait un sens et que chacune des projections orthogonales du vecteur $\vec{V}$ sur les axes des coordonnées soit intégrable au sens de Riemann dans tout domaine ouvert et borné inclus dans le domaine (D); cela posé, on demande de déterminer une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine (D), admettant en tout point intérieur à ce domaine un gradient déterminé sans ambiguïté, telle que l'intégrale

$$\iiint_{(D)} \{ \text{grad.}\, v \}^2 dx\, dy\, dz$$

ait un sens et telle enfin que, pour toute fonction harmonique h, assujettie aux restrictions générales qui viennent d'être énoncées en ce qui concerne la nature de la fonction v, l'on ait

$$(1) \qquad \iiint_{(D)} \{ \vec{V} - \text{grad.}\, v \} . \{ \text{grad.}\, h \} dx\, dy\, dz = 0 \quad (^1).$$

Dans le Mémoire, *Sur le principe du minimum*, rappelé plus haut, je n'ai étudié le problème précédent que pour un domaine borné et seulement dans le cas où le vecteur $\vec{V}$ était le gradient d'une fonction

---

(1) *Voir*, dans le fascicule du 10 mai 1926, *des Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, les notes suivantes : S. Zaremba, *Sur une transformation du problème de Neumann*, p. 1129; G. Bouligand, *Sur la continuité d'ordre zéro en hydrodynamique*, p. 1130.

donnée φ et, j'ai démontré que, dans ces conditions, le problème considéré était toujours possible et qu'il équivalait au problème de Dirichlet, lorsque celui-ci était possible pour le domaine (D).

Actuellement, je vais démontrer, en me servant d'ailleurs d'une méthode qui, en principe, ne diffère pas de celle que j'avais employée précédemment, le théorème suivant :

IV. *Théorème.* — Le problème III est possible sans restrictions et la solution v de ce problème est parfaitement déterminée à une constante additive près ([1]).

V. *Remarque.* — Le fait que la solution du problème III, lorsque celui-ci est possible, est déterminée à une constante additive près, peut se démontrer avec la plus grande facilité. En effet, si v est une solution du problème III, $v+C$, où C est une constante arbitraire, en est évidemment une autre. D'autre part, si chacune d'entre deux fonctions v_1 et v_2 est une solution du problème III, on pourra substituer à v, dans l'égalité (1), aussi bien la fonction v_1 que la fonction v_2. Or, après avoir retranché membre à membre les égalités ainsi obtenues et après avoir remarqué que ces égalités subsistent, en particulier, pour $h = v_1 - v_2$, on s'assurera que l'on a

$$\iiint_{(D)} \{\text{grad.}\, v_1 - \text{grad.}\, v_2\}^2 \, dx\, dy\, dz = 0,$$

d'où résulte l'exactitude de notre remarque.

L'intérêt du théorème IV réside en particulier dans ce fait qu'au cas où, dans tout le domaine (D), l'on a

$$\text{div.}\vec{V} = 0, \tag{2}$$

et lorsqu'en outre le domaine (D) satisfait à certaines conditions de régularité, le problème III (p. 130) équivaut au problème de Neumann. C'est ce que l'on verra avec toute la netteté désirable après avoir pris connaissance des deux derniers numéros de ce Mémoire.

([1]) Grâce à la convention II (p. 6), l'énoncé du théorème conserve un sens parfaitement précis même lorsque la solution V du problème III n'est pas une fonction uniforme.

J'ajoute que, dans le cas d'un domaine homéomorphe à un domaine limité par un nombre fini de sphères sans points communs et dont la frontière se compose de surfaces à courbure continue, une application facile du théorème de Green permettrait de vérifier que, lorsque la condition (2) est remplie, le problème III équivaut à celui de Neumann.

Notre démonstration du théorème IV sera parfaitement générale; elle ne tombera donc pas en défaut même dans le cas particulier où le domaine (D) se confondrait avec tout l'espace. Toutefois il sera peut-être utile d'indiquer dès maintenant les circonstances qui se présentent dans ce cas exceptionnel. J'observe à cet effet que, d'après les éléments de la théorie des fonctions harmoniques, une fonction u, régulièrement harmonique dans tout l'espace et telle que l'intégrale

$$\int\int\int |\operatorname{grad.} u|^2 \, dx\, dy\, dz,$$

étendue à l'espace entier soit finie, se réduit nécessairement à une constante. Par conséquent, dans le cas considéré, la fonction désignée par v dans l'énoncé III ne peut que se réduire à une constante. D'ailleurs toute valeur constante de v satisfera évidemment alors à la condition (1) puisque la fonction h ne pourra, elle aussi, que se réduire à une constante. En définitive, dans le cas exceptionnel en question, le théorème IV ne cesse pas de subsister, mais il ne présente alors aucun intérêt.

3. Commençons par présenter la solution du problème III (p. 130) dans le cas où le domaine (D) se confond avec l'ensemble (Ω) des points intérieurs à une sphère (Σ). Prenons le centre O de la sphère (Σ) pour origine des coordonnées, désignons par R le rayon de cette sphère et représentons par

$$(1) \qquad \Pi_{n,t} \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots, 2n+1)$$

un système de $2n+1$ polynomes sphériques de degré $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, relatifs à la sphère (Σ) et formés de façon à avoir :

$$(2) \qquad \int\int\int_{(\Omega)} |\operatorname{grad.} \Pi_{n,t}|^2 \, dx\, dy\, dz = 1, \qquad \text{pour} \qquad t = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

ainsi que

$$(3)\qquad \iiint_{(\Omega)} \{\text{grad}.\Pi_{n,t}\}.\{\text{grad}.\Pi_{n,t'}\}\,dx\,dy\,dz = 0, \qquad \text{pour} \qquad t \neq t'.$$

Le symbole $\vec{V}$ continuant à désigner le vecteur donné dans le problème III (p. 130), posons

$$(4)\qquad c_{n,t} = \iiint_{(\Omega)} \vec{V}.\{\text{grad}.\Pi_{n,t}\}\,dx\,dy\,dz.$$

Je dis que l'on a le théorème suivant :

VI. *Théorème.* — La formule

$$(5)\qquad v = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}.\Pi_{n,t}\right\}$$

représente une solution du problème III, pour le domaine (Ω), par rapport au vecteur $\vec{V}$.

En effet, les relations (2), (3) et (4) donnent

$$\begin{aligned}
&\iiint_{(\Omega)}\left\{\vec{V} - \text{grad}.\sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}\Pi_{n,t}\right)\right\}^2 dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{(\Omega)} \vec{V}^2\,dx\,dy\,dz - \sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la série

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2\right)$$

est convergente. Posons maintenant

$$v_{p,q} = \sum_{n=p}^{p+q}\left\{\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}.\Pi_{n,t}\right\},$$

nous aurons

$$\iiint_{(\Omega)} v_{p,q}^2\,dx\,dy\,dz = \sum_{n=p}^{p+q}\frac{R^2}{n(2n+3)}\left(\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2\right).$$

Par conséquent, à cause de la convergence de la série (6), nous aurons

$$\lim_{\frac{1}{p} \to 0} \iiint_{(\Omega)} v_{p,q}^2 \, dx \, dy \, dz = 0$$

et cela uniformément par rapport à toutes les valeurs entières et positives de q.

Cela prouve (¹) que la série (5) est uniformément convergente dans tout domaine *fermé*, *intérieur* au domaine (Ω) et que, par suite, la somme v de cette série est une fonction harmonique dans tout l'intérieur au domaine ouvert (Ω).

Cela posé, on constate de suite que

$$\iiint_{(\Omega)} \{ \operatorname{grad}. v \}^2 \, dx \, dy \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2 \right),$$

d'où il résulte que le premier membre de l'égalité précédente a une valeur finie. Donc, pour achever la démonstration de notre théorème, il suffit de prouver que l'on a

$$(7) \qquad \iiint_{(\Omega)} \{ \vec{V} - \operatorname{grad}. v \} . \{ \operatorname{grad}. h \} \, dx \, dy \, dz = 0,$$

pour toute fonction h, harmonique dans (Ω) et telle que l'intégrale

$$\iiint_{(\Omega)} \{ \operatorname{grad}. h \}^2 \, dx \, dy \, dz$$

soit finie. Or, après avoir désigné par b_0 la valeur de la fonction h au centre de la sphère (Σ) et après avoir posé

$$b_{n,t} = \iiint_{(\Omega)} \{ \operatorname{grad}. h \} . \{ \operatorname{grad}. \Pi_{n,t} \} \, dx \, dy \, dz,$$

nous aurons

$$h = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{t=1}^{2n+1} b_{n,t} \Pi_{n,t} \right\},$$

(¹) *Voir* S. Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation biharmonique* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 7 janvier 1909, p. 9, § 5), ou bien consulter le n° 19, p. 20, du Mémoire de M. Bouligand, formant le fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

ainsi que

$$\iiint_{(\Omega)} |\operatorname{grad}. h|^2 \, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{2n+1} b_{n,l} \right\}.$$

Cela posé, on s'assurera sans peine que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{2n+1} a_{n,l} . b_{n,l} \right)$$

représente la valeur de chacune des intégrales

$$\iiint_{(\Omega)} \vec{V} . |\operatorname{grad}. h| \, dy\, dx\, dz \quad \text{et} \quad \iiint_{(\Omega)} |\operatorname{grad}. v| . |\operatorname{grad}. h| \, dx\, dy\, dz,$$

ce qui prouve que l'égalité (7) sera bien vérifiée dans les conditions voulues. Notre théorème est donc démontré.

4. VII. *Théorème.* — Lorsque le problème III (p. 130) est possible pour chacun d'entre deux domaines (D_1) et (D_2), ouverts, bornés et mesurables au sens de Jordan, il est possible pour le domaine (D), somme [1] des domaines (D_1) et (D_2).

Pour établir ce théorème dans toute sa généralité, il suffira évidemment de le démontrer dans le cas où il existe des points communs aux deux domaines et où aucun d'eux n'est inclus dans l'autre. Supposons donc que cette condition soit remplie et considérons la suite infinie de vecteurs

$$(1) \qquad \vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots$$

dont le premier terme $\vec{V}_0$ se confond avec le vecteur $\vec{V}$, par rapport auquel il s'agit de résoudre le problème III (p. 130) pour le domaine (D), et dans laquelle pour toute valeur entière et non négative de p, les vecteurs $\vec{V}_{2p+1}$ et $\vec{V}_{2p+2}$ sont déterminés successivement selon la règle suivante : dans le domaine (D_1) le vecteur $\vec{V}_{2p+1}$ se confond avec le

(1) Suivant l'usage, nous entendons par *somme* de deux ou de plusieurs domaines l'ensemble de tous les points dont chacun appartient à l'un au moins de ces domaines.

gradient de la solution du problème III, pour ce domaine, par rapport au vecteur $\vec{V}_{2p}$ et, dans le reste du domaine (D) le vecteur $\vec{V}_{2p+1}$ est identique au vecteur $\vec{V}_{2p}$; quant au vecteur $\vec{V}_{2p+2}$, il coïncide, dans le domaine (D_2), avec le gradient de la solution du problème III (p. 130), pour ce domaine, par rapport au vecteur $\vec{V}_{2p+1}$, et, dans le reste du domaine (D), avec le vecteur $\vec{V}_{2p+1}$ lui même.

Posons

$$(m, n) = \int\int\int_{(D)} \vec{V}_m . \vec{V}_n \, dx \, dy \, dz. \tag{2}$$

Chacun des domaines (D_1) et (D_2) étant mesurable au sens de Jordan, l'intégrale précédente aura sûrement un sens et l'on aura

$$(m, n) = (n, m). \tag{3}$$

Cela posé, en se reportant à la définition de la suite (1) et en considérant en particulier que, en vertu de cette définition, chacun des termes de la suite

$$\vec{V}_{2k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

représente le gradient d'une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D_1) et que, par rapport au domaine (D_2), il en est de même de chaque terme de la suite

$$V_{2k+2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

on s'assurera aisément de l'existence des égalités suivantes :

$$(2p, 2q+1) = (2p+1, 2q+1), \tag{6}$$
$$(2r+1, 2s+2) = (2r+2, 2s+2), \tag{7}$$

pour tous les systèmes de valeurs entières et non négatives de p, q, r et s.

VIII. *Lemme*. L'égalité

$$m + n = m' + n' \tag{8}$$

entraîne l'égalité

$$(m, n) = (m', n') \tag{9}$$

pour tout système de valeurs entières et non négatives de m, n, m' et n', sauf peut-être au cas où l'un au moins des deux systèmes d'entiers m, n et m', n' se composerait du nombre zéro et d'un nombre pair positif.

En effet, substituons dans (6) à p et q respectivement, $s+1$ et r. L'égalité ainsi obtenue et l'égalité (7) ainsi que la relation (3) nous donneront

$$(2s+3, 2r+1) = (2r+2, 2s+2). \tag{9,1}$$

Mais, à cause de (3), le second membre de cette égalité ne change pas de valeur à la suite de la transposition de r et s, il en est donc de même du premier. Par conséquent

$$(2s+3, 2r+1) = (2r+3, 2s+1),$$

ce qui, à cause de (3), nous donne

$$(2s+3, 2r+1) = (2s+1, 2r+3);$$

égalité de laquelle on tire aisément cette conséquence que, lorsque chacun des nombres m, n, m' et n' est un entier positif impair et lorsque chacune des sommes $m+n$ et $m'+n'$ est au moins égale à 4, l'égalité (8) entraîne l'égalité (9). Mais, lorsque chacune des sommes $m+n$ et $m'+n'$ est égale à 2, chacun des nombres, impairs et positifs m, n, m' et n' est égal à l'unité, cas où l'égalité (9) se réduit à une simple identité. Donc, en définitive, lorsque chacun des entiers positifs m, n, m' et n' est impair, l'égalité (8) entraîne toujours l'égalité (9). Cela étant, il résulte de (6) qu'il en est encore de même lorsque chacun des deux systèmes d'entiers non négatifs m, n et m', n' se compose de deux nombres de parités différentes. En s'appuyant sur ce résultat et en se reportant à (9,1), on s'assurera sans peine que notre lemme subsiste dans toute sa généralité.

Posons, comme nous y autorise le lemme précédent, $I_{m+n} = (m, n)$, ou, ce qui, en vertu de (2), revient au même, posons

$$I_{m+n} = \iiint_{(D)} \vec{V}_m . \vec{V}_n . dx\, dy\, dz, \tag{10}$$

en désignant par m et n deux entiers non négatifs, quelconques à cela près qu'au cas où l'un d'eux serait nul, l'autre ne soit pas égal à un entier pair positif. Cela posé, il résulte de l'égalité (6) que l'on a

$$\mathrm{I}_{2t+1} = \mathrm{I}_{2t+2} \tag{11}$$

pour toute valeur entière et non négative de t.

En se reportant d'une part à la formule (10) et d'autre part à l'inégalité de Schwarz (I, p. 128), on tirera aisément de (11) la relation

$$\mathrm{I}^2_{2t+2} \leqq \mathrm{I}_{2t} \cdot \mathrm{I}_{2t+2},$$

d'où

$$\mathrm{I}_{2t+2} \leqq \mathrm{I}_{2t}, \qquad \text{pour} \qquad t = 0, 1, 2, 3 \ldots.$$

Il résulte de cette relation et de (11) qu'il existe un nombre fini I tel que l'on ait

$$\lim_{\frac{1}{m} \to 0} \mathrm{I}_m = \mathrm{I}. \tag{12}$$

En se reportant à (10), on reconnaît de suite que l'on a

$$\iiint_{(\mathrm{D})} \left\{ \vec{\mathrm{V}}_{m+n} - \vec{\mathrm{V}}_m \right\}^2 dx\,dy\,dz = \mathrm{I}_{2(m+n)} - 2\,\mathrm{I}_{2m+n} + \mathrm{I}_{2m},$$

donc, à cause de (12), on a

$$\lim_{\frac{1}{m} \to 0} \iiint_{(\mathrm{D})} \left\{ \vec{\mathrm{V}}_{m+n} - \vec{\mathrm{V}}_m \right\}^2 dx\,dy\,dz = 0, \tag{13}$$

et cela uniformément par rapport à l'ensemble des valeurs entières et positives de n.

D'après la définition de la suite (1), les vecteurs V_{2p+1} et V_{2p+2} se confondent, dans les domaines (D_1) et (D_2) respectivement, avec le gradient d'une fonction harmonique dans le premier de ces domaines et le gradient d'une fonction harmonique dans le second d'entre eux. Désignons la première de ces fonctions harmoniques par v_{2p+1} et la seconde par v_{2p+2}; soit encore (D_0) l'ensemble de tous les points communs aux domaines (D_1) et (D_2). Cela posé, il résulte de (13) que l'on a

$$\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\iiint_{(D_1)}\left\{\frac{\partial v_{2(p+q)+1}}{\partial x}-\frac{\partial v_{2p+1}}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy\,dz=0, \tag{14}$$

$$\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\iiint_{(D_2)}\left\{\frac{\partial v_{2(p+q)}}{\partial x}-\frac{\partial v_{2p}}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy\,dz=0, \tag{15}$$

$$\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\iiint_{(D_0)}\left\{\frac{\partial v_{p+q}}{\partial x}-\frac{\partial v_{p}}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy\,dz=0, \tag{16}$$

et cela uniformément par rapport à l'ensemble de toutes les valeurs entières et positives de q.

Le théorème de convergence, cité dans la note placée au bas de la page 130, permet de tirer aisément des égalités (14) et (15) la conclusion suivante :

Il existe une fonction φ', harmonique à l'intérieur du domaine (D_1), et une fonction φ'', harmonique à l'intérieur du domaine (D_2), définies respectivement par les formules

$$\varphi'=\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\frac{\partial v_{2p+1}}{\partial x}$$

et

$$\varphi''=\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\frac{\partial v_{2p}}{\partial x},$$

dont la première est uniformément convergente dans tout le domaine fermé intérieur au domaine (D_1) et dont la seconde jouit de la même propriété par rapport au domaine (D_2).

En s'adressant maintenant à l'égalité (16) et en s'appuyant de nouveau sur le théorème de convergence auquel nous venons de faire appel, on reconnaît que, dans le domaine (D_0), les fonctions φ' et φ'' se confondent. Il existe donc une fonction φ, régulièrement harmonique dans tout le domaine (D), et pouvant être définie par la condition de vérifier dans (D_1) l'équation

$$\varphi=\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\frac{\partial v_{2p+1}}{\partial x} \tag{17}$$

et dans (D_2) l'équation

$$\varphi=\lim_{\frac{1}{p}\to 0}\frac{\partial v_{2p}}{\partial x}, \tag{18}$$

la formule (17) étant uniformément convergente dans tout domaine fermé intérieur au domaine (D_1) et la formule (18), dans tout domaine fermé intérieur au domaine (D_2).

On complétera aisément les résultats précédents en démontrant que l'intégrale

$$\int\int\int_{(D)} \varphi^2\, dx\, dy\, dz$$

a une valeur finie et que, après avoir désigné par φ_m la projection orthogonale du vecteur V_m sur l'axe des x, l'on aura

$$\lim_{\frac{1}{m}\to 0} \int\int\int_{(D)} (\varphi_m - \varphi)^2\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Il est évident que, dans le raisonnement précédent, il est permis de substituer aux dérivées $\frac{\partial v_{2p+1}}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_{2p}}{\partial x}$ respectivement, à volonté les dérivées $\frac{\partial v_{2p+1}}{\partial y}$ et $\frac{\partial v_{2p}}{\partial y}$ ou les dérivées $\frac{\partial v_{2p+1}}{\partial z}$ et $\frac{\partial v_{2p}}{\partial z}$. Cela prouve qu'il existera un vecteur $\overrightarrow{W}$ jouissant des propriétés suivantes :

1° On pourra le définir en fonction des coordonnées de son origine dans tout le domaine (D) par la condition de vérifier, dans le domaine (D_1), l'équation

$$\overrightarrow{W} = \lim_{\frac{1}{p}\to 0} \{ \text{grad.}\, v_{2p+1} \}, \tag{19}$$

et, dans le domaine (D_2), l'équation

$$\overrightarrow{W} = \lim_{\frac{1}{p}\to 0} \{ \text{grad.}\, v_{2p} \}, \tag{20}$$

la formule (19) étant uniformément convergente dans tout domaine fermé, intérieur au domaine (D_1) et la formule (20) jouissant de la même propriété par rapport au domaine (D_2);

2° La projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{W}$ sur n'importe lequel des axes des coordonnées est une fonction régulièrement harmonique, à l'intérieur du domaine (D), des coordonnées de l'origine de ce vecteur;

3° L'intégrale

$$\int\int\int_{(D)} \overrightarrow{W}^2 dx\, dy\, dz \tag{21}$$

est finie ;

4° On a

$$\lim_{\frac{1}{m}\to 0} \int\int\int_{(D)} \left\{ \overrightarrow{V}_m - \overrightarrow{W} \right\}^2 dx\, dy\, dz = 0. \tag{22}$$

J'ajoute que les formules (19) et (20) entraînent la conséquence suivante :

$$\text{rot.} \overrightarrow{W} = 0,$$

d'où il résulte qu'il existe une fonction φ (peut-être non uniforme), harmonique à l'intérieur du domaine (D) et vérifiant, dans ce domaine, l'équation

$$\text{grad.} \varphi = \overrightarrow{W}. \tag{23}$$

Je dis que la fonction φ, définie par l'équation (23), est une solution du problème III (p. 130). En effet, désignons par h une fonction harmonique, assujettie seulement à satisfaire aux conditions spécifiées dans l'énoncé du problème précédent. Il résulte de la définition de la suite (1) que, pour toute valeur entière et non négative de m, l'on aura

$$\int\int\int_{(D)} \overrightarrow{V}_m . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz = \int\int\int_{(D)} \overrightarrow{V}_{m+1} . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz,$$

par conséquent, puisque le premier terme $\overrightarrow{V}_0$ de la suite (1) se confond avec le vecteur donné V, l'on aura

$$\int\int\int_{(D)} \overrightarrow{V}_m . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz = \int\int\int_{(D)} \overrightarrow{V} . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz, \tag{24}$$

pour toute valeur entière et positive de m. Or l'égalité précédente peut s'écrire ainsi :

$$\int\int\int_{(D)} \overrightarrow{W} . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz + \int\int\int_{(D)} \left\{ \overrightarrow{V}_m - \overrightarrow{W} \right\} . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz$$
$$= \int\int\int_{(D)} \overrightarrow{V} . \{ \text{grad.} h \} \, dx\, dy\, dz,$$

donc, puisque, en vertu de l'inégalité de Schwarz (I, p. 128) et de (22) la deuxième intégrale du premier membre de l'égalité précédente tend vers zéro, on a nécessairement

$$(25)\qquad \iiiint_{(D)} \vec{W}.\{\operatorname{grad}.h\}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(D)} \vec{V}.\{\operatorname{grad}.h\}\,dx\,dy\,dz,$$

égalité qui, conjointement avec les propriétés du vecteur $\vec{W}$, établies plus haut, prouve que la fonction v, définie par l'équation (23), est bien une solution du problème III (p. 130). Le théorème VII (p. 135) est, par cela même, complètement démontré.

5. IX. *Théorème.* — Le problème III (p. 130) est résoluble pour tout domaine (D) auquel il est possible de faire correspondre une suite infinie de domaines, soit

$$(1)\qquad (D_1),\ (D_2),\ (D_3),\ \ldots,$$

de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Chacun des domaines (1) est un domaine ouvert borné, mesurable au sens de Jordan, inclus, avec sa frontière, dans le domaine (D);

2° Pour toute valeur entière et positive de n, le domaine (D_n) est inclus dans le domaine (D_{n+1});

3° Il correspond à tout domaine borné et fermé (D') situé à l'intérieur du domaine (D), un nombre entier et positif n' tel que le domaine (D') soit situé, avec sa frontière, à l'intérieur du domaine $(D_{n'})$;

4° Pour chacun des domaines de la suite (1), le problème III (p. 130) est possible.

En effet, supposons que la suite (1) satisfasse aux quatre conditions spécifiées dans l'énoncé du théorème et, ce qui sera possible alors, faisons lui correspondre une suite infinie de vecteurs, soit

$$(2)\qquad \vec{V}_0,\ \vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ \ldots,$$

de façon que le premier terme $\vec{V}_0$ de cette suite se confonde avec le vecteur donné $\vec{V}$ et que, pour toute valeur entière et positive de n, le vecteur $\vec{V}_n$ se confonde, dans le domaine (D_n), avec le gradient de la solution du problème III (p. 130) pour le domaine (D_n), par rapport au vecteur $\vec{V}_{n-1}$ et, dans le reste du domaine (D), avec le vecteur $\vec{V}_{n-1}$ lui-même.

Désignons par $\vec{U}$ un vecteur, fonction donnée dans (D) des coordonnées de son origine et dont le choix n'est subordonné qu'aux conditions suivantes :

1° L'intégrale

$$\int\int\int_{(D)} \vec{U}^2 \, dx \, dy \, dz$$

est finie ;

2° Il existe un nombre entier et positif n tel que, dans le domaine (D_n), le vecteur $\vec{U}$ se confonde avec le gradient d'une fonction harmonique dans (D_n) ;

3° Chacune des projections orthogonales du vecteur $\vec{U}$ sur les axes des coordonnées est intégrable dans tout domaine borné, intérieur au domaine (D).

Il résulte immédiatement de la définition de la suite (2) que l'inégalité

$$p < n$$

entraînera l'égalité

$$\int\int\int_{(D)} \vec{V}_p . \vec{U} \, dx \, dy \, dz = \int\int\int_{(D)} \vec{V}_{p+1} . \vec{U} \, dx \, dy \, dz,$$

circonstance qui entraîne le lemme suivant :

X. *Lemme.* — Lorsque le vecteur $\vec{U}$ satisfait aux conditions énoncées plus haut, l'ensemble des relations

$$(3) \qquad p \leqq n \quad \text{et} \quad q \leqq n$$

entraîne l'égalité suivante :

$$(4) \qquad \int\int\int_{(D)} \vec{V}_p . \vec{U} \, dx \, dy \, dz = \int\int\int_{(D)} \vec{V}_q . \vec{U} \, dx \, dy \, dz.$$

Posons, d'une façon générale,

$$(5)\qquad T_n = \iiint_{(D)} \vec{V}_n^2\, dx\, dy\, dz.$$

Il résulte de la définition de la suite (2) et du lemme précédent que les relations (3) entraîneront l'égalité obtenue, en substituant dans (4), $\vec{V}_n$ à $\vec{U}$. Cela prouve, en particulier, que la relation

$$(6)\qquad p \leqq n$$

entraîne l'égalité

$$(7)\qquad T_n = \iiint_{(D)} \vec{V}_n . \vec{V}_p\, dx\, dy\, dz$$

où T_n a la valeur (5); donc, plus particulièrement encore, nous aurons

$$T_n = \iiint_{(D)} \vec{V}_n . \vec{V}_{n-1}\, dx\, dy\, dz,$$

relation qui, moyennant l'inégalité de Schwarz (I, p. 128), entraîne la suivante :

$$T_n^2 \leqq T_n . T_{n-1},$$

d'où

$$T_n \leqq T_{n-1}.$$

Il existe donc un nombre fini T vérifiant l'équation

$$(8)\qquad \lim_{\frac{1}{n}\to 0} T_n = T.$$

Or, puisque (6) entraîne (7), on aura

$$\iiint_{(D)} \left\{ \vec{V}_{n+p} - \vec{V}_n \right\}^2 dx\, dy\, dz = T_{n+p} - 2T_{n+p} + T_n = T_n - T_{n+p},$$

d'où il résulte, à cause de (8), que

$$(9)\qquad \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \iiint_{(D)} \left\{ \vec{V}_{n+p} - \vec{V}_n \right\}^2 dx\, dy\, dz = 0$$

et cela uniformément par rapport à l'ensemble de toutes les valeurs entières et positives de p.

Désignons par (D′) un domaine borné et fermé, situé à l'intérieur du domaine (D), mais à cela près quelconque et faisons les remarques suivantes :

1° En vertu des deuxième et troisième propriétés de la suite (1), il existera un nombre entier et positif n' tel que, pour

$$(10) \qquad n \geqq n',$$

le domaine (D′) soit inclus dans le domaine (D_n) avec sa frontière.

2° Il résulte de la deuxième propriété de la suite (1) et de la définition de la suite (2) que, sous la condition (10), le vecteur $\overrightarrow{V}_n$ représentera, dans le domaine ($D_{n'}$), le gradient d'une fonction harmonique dans ce domaine.

3° Il est permis de substituer dans (9), au domaine (D), le domaine ($D_{n'}$) et aux vecteurs $\overrightarrow{V}_{n+p}$ et $\overrightarrow{V}_n$ leurs projections orthogonales sur l'un quelconque des axes des coordonnées.

Moyennant les remarques précédentes et le théorème de convergence rappelé dans la note au bas de la page 134, on arrivera sans peine aux conclusions suivantes :

1° Il existe un vecteur $\overrightarrow{W}$ défini dans le domaine (D) comme fonction des coordonnées de son origine par l'équation suivante :

$$(11) \qquad \overrightarrow{W} = \lim_{\frac{1}{n} \to 0} V_n,$$

la convergence du second membre étant uniforme dans tout domaine borné et fermé, situé à l'intérieur du domaine (D).

2° Il existe une fonction v (peut-être non uniforme), harmonique dans tout l'intérieur du domaine (D) et vérifiant dans ce domaine l'équation

$$(12) \qquad \text{grad.}\, v = \overrightarrow{W}.$$

L'intégrale

$$(13) \qquad \iiint_{(D)} \overrightarrow{W}^2 \, dx\, dy\, dz$$

a une valeur finie et l'on a

$$(14)\qquad \lim_{\frac{1}{m}\to 0}\iiint_{(D)} \left\{ \vec{V}_m - \vec{W} \right\}^2 dx\,dy\,dz = 0.$$

Cela posé, il est aisé de voir que la fonction v définie par l'équation (12) est une solution du problème III (p. 130). En effet, en se reportant au lemme X (p. 143) et en considérant que le premier terme $\vec{V}_0$ de la suite (2) se confond, par définition, avec le vecteur donné $\vec{V}$, on reconnaît que, pour toute valeur entière et positive de n, l'on a

$$(15)\qquad \iiint_{(D)} \vec{V}.\{\operatorname{grad}.h\}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(D)} \vec{V}_n.\{\operatorname{grad}.n\}\,dx\,dy\,dz,$$

où la lettre h a la signification qui lui a été attribuée dans l'énoncé III (p. 130). Cette remarque faite, il suffit de reprendre le raisonnement qui nous a permis de conclure de l'égalité (22) p. 141 et de l'égalité (24) p. 141 à l'existence de l'égalité (25) p. 142, pour reconnaître que l'ensemble des égalités (14) et (15) entraîne la suivante :

$$\iiint_{(D)} \vec{V}.\{\operatorname{grad}.h\}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(D)} \vec{W}.\{\operatorname{grad}.h\}\,dx\,dy\,dz,$$

égalité qui, conjointement avec les autres propriétés du vecteur $\vec{W}$, établies plus haut, prouve que la fonction v, définie par l'équation (12) est bien une solution du problème III (p. 130).

En définitive, le théorème IX (p. 142) est complètement démontré.

XI. *Théorème.* — Le problème III (p. 130) est possible dans tous les cas.

En effet, il est très aisé de voir qu'il est possible de former une suite infinie de sphères, soit

$$(16)\qquad (\Sigma_1),\quad (\Sigma_2),\quad (\Sigma_3),\quad \ldots,$$

toutes intérieures au domaine (D), auquel se rapporte le problème III, de telle sorte, que, après avoir désigné par (D_n) la somme des domaines intérieurs aux n premières sphères de la suite (16), il se trouve que la suite (1) satisfasse aux trois premières des conditions énumérées dans le théorème IX (p. 142). D'autre part, il résulte de l'ensemble des théorèmes VI (p. 133) et VII (p. 135) que la suite (1), lorsqu'elle est définie comme on vient de le dire, satisfait aussi à la quatrième des conditions énumérées dans le théorème IX. Donc, en vertu de ce théorème, on a bien le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

J'observe maintenant que le théorème précédent et la remarque V (p. 131) entraînent l'exactitude du théorème IV (p. 131), lequel par conséquent est établi dans toute sa généralité.

6. Je me propose maintenant de démontrer un théorème permettant d'approfondir les relations qui existent entre le problème III (p. 130) et le problème de Neumann, en me plaçant, à cet effet, dans l'hypothèse suivante :

XII. *Hypothèse.* — Le vecteur, désigné par $\vec{V}$ dans l'énoncé III (p. 130), satisfait, dans toute l'étendue du domaine (D), à l'équation

$$\text{div.}\vec{V} = 0, \tag{1}$$

en outre, les projections orthogonales φ, ψ et θ du vecteur $\vec{V}$ sur les axes des coordonnées sont des fonctions continues des coordonnées de l'origine du vecteur $\vec{V}$ dans tout l'intérieur du domaine (D) et chacune des intégrales

$$\int\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right\},\quad \int\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz\right\},$$
$$\int\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy + \frac{\partial\theta}{\partial z}dz\right\},$$

prise suivant un segment rectiligne entièrement situé à l'intérieur du domaine (D), mais d'ailleurs quelconque, a une valeur bien déterminée au sens de Riemann.

XIII. *Théorème.* — Les notations de l'énoncé III (p. 130) étant conservées, si l'on désigne par (x, y, z) un point non situé sur la frontière du domaine (D), mais d'ailleurs quelconque, et par r la distance d'un point variable $(x'y'z')$ au point (x, y, z), l'égalité

$$(2) \qquad \iiint_{(D)} \{\vec{V} - \text{grad.}\, v\}.\left\{\text{grad.}\, \frac{1}{r}\right\} dx'\, dy'\, dz' = 0$$

subsistera, *lorsque l'hypothèse* XII *est vérifiée*, non seulement au cas où le point (x, y, z) se trouve à l'extérieur du domaine (D), cas où l'égalité (2) est une conséquence immédiate de l'hypothèse que v est une solution du problème III (p. 130) pour le domaine (D), par rapport au vecteur $\vec{V}$, mais aussi au cas où le point (x, y, z) est choisi arbitrairement à l'*intérieur* du domaine considéré.

Supposons donc, en passant à la démonstration du théorème précédent, que le point (x, y, z) soit situé à l'intérieur du domaine (D) et admettons que les diverses parties de l'hypothèse du théorème considéré soient vérifiées.

Soient (Σ) une sphère de centre (x, y, z) et de rayon R assez petit, pour être située tout entière à l'intérieur du domaine (D), et Φ une fonction des variables x', y', z' telle que l'on ait

$$(3) \qquad \Phi = \frac{1}{R}, \qquad \text{pour } r \leqq R,$$

et

$$(4) \qquad \Phi = \frac{1}{r}, \qquad \text{pour } r > R,$$

en désignant, comme plus haut, par r la distance du point variable (x', y', z') au point (x, y, z). Désignons encore par g une solution du problème III (p. 130) pour le domaine (D) par rapport au vecteur

$$\text{grad.}\, \Phi,$$

où, bien entendu, le symbole grad. porte sur les variables x', y', z'. Pour toute fonction h des variables x', y', z', vérifiant les conditions spécifiées dans l'énoncé III, nous aurons

$$(5) \qquad \iiint_{(D)} \{\text{grad.}\, \Phi - \text{grad.}\, g\}.\{\text{grad.}\, h\}\, dx'\, dy'\, dz' = 0.$$

Or, après avoir désigné par (Ω) le domaine intérieur à la sphère (Σ), nous aurons, on le vérifiera avec la plus grande facilité,

$$\iiint_{(\Omega)} \{\text{grad.}\,\Phi\}.\{\text{grad.}\,h\}\,dx'\,dy'\,dz'$$
$$= \iiint_{(\Omega)} \left\{\text{grad.}\,\frac{1}{r}\right\}.\{\text{grad.}\,h\}\,dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

Donc, l'égalité (5) entraîne la suivante :

$$(6)\qquad \iiint_{(D)} \left\{\text{grad.}\,\frac{1}{r} - \text{grad.}\,g\right\}.\{\text{grad.}\,h\}\,dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

D'autre part, la fonction v étant une solution du problème III (p. 130) pour le domaine (D), par rapport au vecteur $\vec{V}$, on aura aussi

$$(7)\qquad \iiint_{(D)} \{\vec{V} - \text{grad.}\,v\}.\{\text{grad.}\,h\}\,dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

J'observe maintenant que rien n'empêche de substituer à h, dans (6), la fonction v et, dans (7), la fonction g. Les égalités, obtenues de cette façon, entraînent évidemment la suivante :

$$(8)\qquad \iiint_{(D)} \left\{\vec{V}.[\text{grad.}\,g] - [\text{grad.}\,v].\left[\text{grad.}\,\frac{1}{r}\right]\right\} dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

Cela prouve que, pour établir l'égalité (2), qu'il s'agit de démontrer, il suffit de démontrer que l'on a

$$(9)\qquad \iiint_{(D)} \vec{V}.\left\{\text{grad.}\,\frac{1}{r} - \text{grad.}\,g\right\} dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

A cet effet, reprenons la suite de sphères

$$(10)\qquad (\Sigma_1),\quad (\Sigma_2),\quad (\Sigma_3),\quad \ldots,$$

considérée dans la démonstration du théorème XI (p. 146) ainsi que la suite de domaines

$$(11)\qquad (D_1),\quad (D_2),\quad (D_3),\quad \ldots,$$

où, d'une façon générale, (D_n) représente la somme des domaines intérieurs aux n premières sphères de la suite (10), et soit

$$(12)\qquad \vec{U}_0,\quad \vec{U}_1,\quad \vec{U}_2,\quad \ldots,$$

la suite en laquelle se transforme la suite

$$\vec{V}_0, \quad \vec{V}_1, \quad \vec{V}_2, \quad \ldots, \tag{13}$$

considérée dans la démonstration du théorème XI (p. 146), après la substitution du vecteur grad. Φ au vecteur $\vec{V}_0 = \vec{V}$.

J'observe maintenant que la suite (10), sans cesser de satisfaire aux conditions qui lui ont été imposées dans la démonstration du théorème XI, pourra être formée de telle sorte que la sphère (Σ_1) se confonde avec la sphère désignée au début de la démonstration du théorème qui nous occupe par (Σ), que deux sphères de la suite (10) ne soient jamais tangentes entre elles et qu'enfin trois sphères de la suite considérée ne soient jamais tangentes à une même droite en un même point. Ces conditions étant remplies, le problème de Dirichlet classique sera possible [1] pour chacun des domaines (D_n) et, pour toute valeur entière et positive de n, le vecteur $\vec{U}_n$ se confondra, à l'intérieur du domaine (D_n), avec le gradient de la fonction g_n, harmonique dans (D_n) et prenant sur la frontière de (D_n) des valeurs égales à $\frac{1}{r}$; dans tout le reste du domaine (D) on aura

$$\vec{U}_n = \text{grad.}\,\Phi = \text{grad.}\,\frac{1}{r}.$$

Cela posé, on aperçoit de suite que l'on a

$$\begin{aligned} &\iiint_{(D)} \vec{V}.\left\{\text{grad.}\,\frac{1}{r} - \vec{U}_n\right\} dx'\,dy'\,dz' \\ &= \iiint_{(D_n)} \vec{V}.\left\{\text{grad.}\,\frac{1}{r} - \vec{U}_n\right\} dx'\,dy'\,dz' \\ &= \iiint_{(D_n)} \vec{V}.\left\{\text{grad.}\left(\frac{1}{r} - g_n\right)\right\} dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned} \tag{14}$$

Mais la fonction $\frac{1}{r} - g_n$ des variables x', y', z' n'est autre chose que

[1] S. Zaremba, *Sur le principe du minimum* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, 5 juillet 1909, § 16, p. 225 et suiv.).

la fonction de Green classique de pôle (x, y, z), pour le domaine (D_n) au facteur $\frac{1}{4\pi}$ près.

Cela étant, après s'être reporté à l'hypothèse XII (p. 147) et plus particulièrement à l'équation (1), on trouvera, au moyen d'une application facile du théorème de Green, que

$$\iiint_{(D_n)} \vec{V} . \left\{ \text{grad.} \left(\frac{1}{r} - g_n \right) \right\} dx'\, dy'\, dz' = 0.$$

Par conséquent, les égalités (14) donnent

$$\iiint_{(D)} \vec{V} . \left\{ \text{grad.} \frac{1}{r} - \vec{U}_n \right\} dx'\, dy'\, dz' = 0. \tag{15}$$

Reprenons maintenant la fonction g, définie plus haut et reportons-nous au théorème exprimé par l'équation (14) (p. 146).

Eu égard à la façon dont la suite (12) a été déduite de la suite (13) (p. 150), on reconnaîtra aisément que l'on a

$$\lim_{\frac{1}{n} \to 0} \iiint_{(D)} \left\{ \overleftarrow{U}_n - \text{grad.}\, g \right\}^2 dx'\, dy'\, dz' = 0. \tag{16}$$

Moyennant une application facile de l'inégalité de Schwarz (I, p. 128), on déduira des égalités (15) et (16) l'égalité (9), à la démonstration de laquelle nous avons ramené celle de notre théorème. Celui-ci est donc complètement démontré.

7. Actuellement nous nous proposons d'appliquer le théorème XIII (p. 147) à la démonstration d'un autre théorème qui entraîne en particulier cette conséquence que le problème de Neumann est possible pour une classe étendue de domaines dont les frontières ne sont pas dépourvues d'angles et d'arêtes.

Nous gagnerons considérablement en brièveté, sans nuire à la clarté, en adoptant la définition suivante :

XIV. *Définition.* — L'assertion qu'un point-frontière P d'un domaine ouvert (D) jouit de la propriété (A) par rapport à un système de deux nomores positifs a et b exprime qu'il existe un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z), ayant le point P pour origine, tel que l'ensemble (D_0) de tous les points communs au domaine (D) et au domaine défini par les relations

$$(1) \qquad x^2+y^2 \leqq a^2; \qquad |z| \leqq b$$

se confonde avec l'ensemble de tous ceux des points du domaine précédent dont chacun satisfait à l'inégalité

$$(2) \qquad z > f(x, y),$$

où la fonction $f(x, y)$ des deux variables x et y est définie sans ambiguïté dans le domaine

$$(3) \qquad x^2+y^2 \leqq a^2$$

et jouit des propriétés suivantes :

1° Elle possède des dérivées continues jnsqu'au deuxième ordre inclusivement et chacune de ces dérivées admet, par rapport à la frontière du domaine (3), des valeurs périphériques distribuées continûment sur cette frontière.

2° Les dérivées premières de la fonction $f(x, y)$ s'annulent pour $x=y=0$, en raison de quoi l'axe des z est normal à la surface définie par les relations

$$(4) \qquad z=f(x, y); \qquad x^2+y^2 \leqq a^2.$$

3° La relation (3) entraîne l'inégalité

$$(5) \qquad |f(x, y)| < b.$$

XV. *Théorème.* — Lorsqu'un point-frontière P du domaine (D), considéré dans l'énoncé du problème III (p. 130), jouit de la propriété (A) par rapport à un système de nombres positifs a et b, lorsque l'hypothèse XII (p. 147) est vérifiée et lorsque, les axes étant disposés comme dans l'énoncé XIV, chacune des projections orthogonales φ, ψ et θ du vecteur $\vec{V}$ sur les axes des coordonnées admet des valeurs périphériques continûment distribuées sur la surface définie par l'ensemble des relations (4), dans ce cas, en tout point M de la surface (4), tel que ses coordonnées satisfassent à l'inégalité

$$(6) \qquad x^2 + y^2 < a^2,$$

on a

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{N}} = \alpha(\varphi)_{\mathrm{M}} + \beta(\psi)_{\mathrm{M}} + \gamma(\theta)_{\mathrm{M}},$$

où l'on a désigné : par N la normale en M à la surface (4), par α, β, γ les cosinus-directeurs de cette normale et par $(\varphi)_{\mathrm{M}}$, $(\psi)_{\mathrm{M}}$ et $(\theta)_{\mathrm{M}}$ les valeurs périphériques respectives des fonctions φ, ψ et θ en M.

Pour démontrer le théorème précédent, nous commencerons par établir le lemme suivant :

XVI. *Lemme* (¹). — Les notations précédentes et l'hypothèse du théorème XV étant conservées, si, après avoir précisé la détermination v_0 de la solution v du problème III (p. 130) que l'on considérerait dans le domaine (D_0) [ensemble de tous les points communs au domaine (D) et au domaine (1)] on avait constaté qu'en tout point M de la surface (4) dont les coordonnées satisfont à l'inégalité (6), la fonction v_0 admet une valeur périphérique finie et bien déterminée (laquelle serait nécessairement une fonction continue des coordonnées du point M) on serait en droit d'affirmer l'exactitude du théorème XV.

En effet, désignons, comme au numéro précédent, par r la distance d'un point variable (x', y', z') à un point (x, y, z), non situé sur la frontière du domaine (D), mais, à cela près, choisi arbitrairement, et posons

$$(7) \qquad \Phi(x, y, z) = \int\int\int_{(\mathrm{D})} \vec{\mathrm{V}}.\left\{\mathrm{grad}.\frac{1}{r}\right\} dx'\,dy'\,dz'.$$

Décomposons l'intégrale qui forme le second membre de cette égalité en deux autres, dont l'une serait étendue au domaine représenté par (D_0) dans l'énoncé du lemme et l'autre au reste du domaine (D).

L'hypothèse du théorème XV étant vérifiée, une transformation

(¹) Pour établir le lemme actuel et celui qui le suivra, nous utiliserons des idées que nous avons eu l'occasion d'appliquer dans les paragraphes 28, 29 et 30 de notre Mémoire *Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, février 1909).

facile de la première de ces intégrales au moyen du théorème de Green, permettra de lui donner la forme d'un potentiel de simple couche et de tirer de cette transformation cette conclusion que, en tout point M de la surface (4) dont les coordonnées vérifient l'inégalité (6), l'on a

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_i - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_e = 4\pi \{ \alpha(\varphi)_M + \beta(\psi)_M + \gamma(\theta)_M \}, \tag{8}$$

en désignant par α, β et γ les cosinus-directeurs de la normale N en M à la surface (4), cette normale étant dirigée vers l'intérieur du domaine (D), et en représentant par $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_i$ et $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_e$ respectivement les dérivées intérieure et extérieure de la fonction Φ suivant la normale N.

J'observe maintenant que (XIII, p. 147) la fonction $\Phi(x, y, z)$, définie par la formule (7), peut encore être représentée par la suivante :

$$\Phi(x, y, z) = \int\int\int_{(D)} \{\text{grad.}\, v\} . \left\{\text{grad.}\, \frac{1}{r}\right\} dx'\, dy'\, dz'. \tag{9}$$

Désignons maintenant par a_1 un nombre positif, plus petit que a mais arbitrairement voisin de ce dernier et soit (D_1) l'ensemble de tous ceux des points du domaine désigné par (D_0) dans l'énoncé du lemme, dont chacun satisfait à la relation

$$x^2 + y^2 \leqq a_1^2. \tag{10}$$

Posons maintenant

$$\Phi_1(x, y, z) = \int\int\int_{(D_1)} \{\text{grad.}\, v\} . \left\{\text{grad.}\, \frac{1}{r}\right\} dx'\, dy'\, dz' \tag{11}$$

et

$$\Phi'(x, y, z) = \int\int\int_{(D')} \{\text{grad.}\, v\} . \left\{\text{grad.}\, \frac{1}{r}\right\} dx'\, dy'\, dz',$$

en désignant par (D′) l'ensemble de tous ceux des points du domaine (D) dont aucun n'appartient au domaine (D_1).

Nous aurons

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_1(x, y, z) + \Phi'(x, y, z). \tag{12}$$

Le gradient de la solution v du problème III (p. 130) étant déterminé sans ambiguïté, il est permis de substituer, dans la formule (11), à la fonction v, la détermination particulière de cette fonction désignée par v_0 dans l'énoncé du lemme. Cette substitution étant effectuée, faisons coïncider successivement le point (x, y, z) avec un point (ξ, η, ζ) situé à l'intérieur du domaine (D_1) et avec un point (ξ', η', ζ') situé à l'extérieur de ce domaine. Une application facile du théorème de Green nous donnera les formules suivantes :

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 4\pi v_0(\xi, \eta, \zeta) - \int\int_{S_1} v_0 \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r_1}\right) ds, \tag{13}$$

$$\Phi_1(\xi', \eta', \zeta') = -\int\int_{S_1} v_0 \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r_2}\right) ds, \tag{14}$$

où nous avons employé des notations qu'il semble superflu de définir explicitement.

Les coordonnées du point M, auquel se rapporte la formule (8), vérifiant l'inégalité (6), nous pouvons choisir le nombre positif a_1 de façon que les coordonnées du point M satisfassent à l'inégalité

$$x^2 + y^2 < a_1^2.$$

Cette condition étant remplie, désignons, comme plus haut, par α, β et γ les cosinus-directeurs de la normale en M à la surface (4), dirigé vers l'intérieur du domaine (D_1) et considérons les expressions

$$\begin{aligned} &\alpha \left\{ \frac{\partial \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_1(\xi', \eta', \zeta')}{\partial \xi'} \right\} \\ &+ \beta \left\{ \frac{\partial \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1(\xi', \eta', \zeta')}{\partial \eta'} \right\} \\ &+ \gamma \left\{ \frac{\partial \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi_1(\xi', \eta', \zeta')}{\partial \zeta'} \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} &\alpha \left\{ \frac{\partial \Phi'(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi'(\xi', \eta', \zeta')}{\partial \xi'} \right\} \\ &+ \beta \left\{ \frac{\partial \Phi'(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi'(\xi', \eta', \zeta')}{\partial \eta'} \right\} \\ &+ \gamma \left\{ \frac{\partial \Phi'(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi'(\xi', \eta', \zeta')}{\partial \zeta'} \right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

en supposant que les points (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') soient situés sur la normale en M à la surface (4), symétriquement par rapport au point M. Supposons maintenant que la distance commune l des points (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') au point M tende vers zéro.

On s'assurera aisément, en tenant compte des formules (13) et (14) et en s'appuyant sur une propriété des potentiels de double couche établie par Liapounoff (¹), que l'expression (15) aura le nombre $4\pi\frac{\partial v_0}{\partial N}$ pour limite. D'autre part, dans les mêmes conditions, l'expression (16) tendra vers zéro. Par conséquent, il résulte des égalités (12) et (8) que

$$\frac{\partial v_0}{\partial N} = \alpha(\varphi)_M + \beta(\psi)_M + \gamma(\theta)_M.$$

Mais les dérivées des diverses déterminations de v sont identiques entre elles, on a donc

$$\frac{\partial v}{\partial N} = \alpha(\varphi)_M + \beta(\psi)_M + \gamma(\theta)_M,$$

égalité qui exprime précisément le lemme qu'il s'agissait de démontrer.

XVII. *Lemme.* — Les notations du lemme précédent et l'hypothèse du théorème XV (p. 152) étant conservées, la fonction v_0 admettra une valeur périphérique finie et déterminée en tout point de la surface (4), dont les coordonnées satisfont à l'inégalité (6).

En effet, désignons par a_1 un nombre positif, inférieur au nombre a mais arbitrairement voisin de ce nombre. Il est très aisé de voir qu'il correspondra au nombre a_1 un système de deux nombres positifs α et β tels que, par rapport à ces nombres, tout point de la portion (S_0) de la surface (4), située dans le domaine défini par la relation

$$(17) \qquad x^2 + y^2 \leqq a_1^2,$$

soit un point-frontière du domaine (D) jouissant, par rapport à l'ensemble des nombres α et β, de la propriété (A) (XIV, p. 151).

Supposons que le choix du nombre positif a_1 qui figure dans (17) ait été arrêté. Les nombres positifs α et β pourront alors être regardés

(¹) LIAPOUNOFF, *Sur le potentiel de double couche* (*Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, novembre 1897, p. 694).

comme ayant chacun une valeur parfaitement déterminée. Soit maintenant M un point déterminé, choisi arbitrairement sur la portion (S_0) de la surface (4), située dans la région de l'espace définie par la relation (17). Il existera une longueur R, indépendante de la position du point M sur la surface (S_0), telle que le domaine (Ω), intérieur à l'une des deux sphères de rayon R tangentes en M à (S_0), soit (Σ), soient tous intérieurs au domaine (D). Cela posé, décomposons l'intégrale formant le second membre de (9) en deux autres dont l'une serait étendue au domaine (Ω), intérieur à la sphère (Σ), et l'autre au reste (D') du domaine (D). Nous aurons

$$(18)\qquad \Phi(x, y, z) = \Phi_0(x, y, z) + \Phi_1(x, y, z),$$

en posant

$$(19)\qquad \Phi_0(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \{\text{grad}. v\}.\left\{\text{grad}. \frac{1}{r}\right\} dx'\,dy'\,dz',$$

$$(20)\qquad \Phi_1(x, y, z) = \iiint_{(D')} \{\text{grad}. v\}.\left\{\text{grad}. \frac{1}{r}\right\} dx'\,dy'\,dz'.$$

La forme des formules précédentes étant indépendante du choix des axes des coordonnées, prenons pour origine de ceux-ci le point M, en ayant soin de diriger l'axe des z suivant la normale en M à (S_0), vers l'intérieur du domaine (D) et proposons-nous ensuite d'estimer l'expression $\Phi_1(0, 0, z)$, en supposant que l'on ait

$$(21)\qquad 0 < z \leqq R.$$

L'inégalité de Schwarz (I, p. 128) donne

$$|\Phi_1(0, 0, z)|^2 = \iiint_{(D_1)} |\text{grad}. v|^2 dx'\,dy'\,dz' . \iiint_{(D_1)} \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^4}.$$

A cause de la forme particulière du domaine (D_1) dans le voisinage du point M, le second facteur du second membre de la relation précédente a pour limite supérieure une expression de la forme

$$C.\log\frac{2R}{z}$$

où C représente une constante positive indépendante de la position du point M sur (S_0). Quant au premier facteur du second membre de la relation considérée, il ne sera jamais supérieur au nombre I défini par la formule

$$\text{(22)}\qquad I = \int\!\!\int\!\!\int_{(D)} |\operatorname{grad.} v|^2 \, dx'\, dy'\, dz'.$$

En définitive, les relations (21) entraînent la suivante :

$$\text{(23)}\qquad |\Phi_1(0,\ 0,\ z)|^2 \leq I . C . \log \frac{2R}{z}.$$

En s'adressant maintenant à l'expression (7) de la fonction $\Phi(x, y, z)$ on reconnaît que l'expression $\Phi(0, 0, z)$ admet, pour les valeurs de z vérifiant (21), une limite supérieure finie, indépendante du choix du point M sur (S_0). Il résulte de là, ainsi que des relations (18) et (23), qu'il existe une constante positive C_1, indépendante du choix du point M sur (S_0), telle que l'on ait

$$\text{(24)}\qquad |\Phi_0(0,\ 0,\ z)|^2 < C_1 . \log \frac{2R}{z},$$

pour toutes les valeurs de z qui satisfont à (21). Pour aller plus loin, substituons, ce qui est permis, à la fonction v, dans la formule (19), la détermination particulière désignée par v_0 dans l'énoncé de notre lemme et, après avoir placé l'origine des coordonnées au centre O de la sphère (Σ), développons la fonction v_0 en une série procédant suivant les polynomes sphériques en représentant ceux-ci par les notations employées au n° **3**.

Nous aurons

$$\text{(25)}\qquad v_0 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{t=1}^{2n+1} C_{n,t} H_{n,t} \right\}$$

où les C représentent des constantes et, en supposant que le point (x, y, z) soit situé à l'intérieur de la sphère (Σ), nous obtiendrons, pour la fonction $\Phi_0(x, y, z)$, la formule suivante :

$$\Phi_0(x,\ y,\ z) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1} \left\{ \sum_{t=1}^{2n+1} C_{n,t} H_{n,t} \right\}$$

qui, après avoir posé

$$\text{(26)}\qquad u(x,\ y,\ z) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \sum_{t=1}^{2n+1} C_{n,t} H_{n,t} \right\},$$

pourra s'écrire ainsi :

$$(27)\qquad \Phi_0(x, y, z) = 2\pi(v_0 - C_0) + u(x, y, z).$$

En rapprochant les égalités (22) et (25), on constate sans peine que l'on a

$$(28)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{2n+1} C_{n,l}^2\right) = 1;$$

d'autre part, la formule (26) donne

$$(29)\qquad |u(x, y, z)|^2 < 4\pi^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{2n+1} C_{n,l}^2\right)\right\}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\sum_{l=1}^{2n+1} H_{n,l}^2\right)\right\}.$$

Or, après avoir désigné par ρ la distance du point (x, y, z) au centre de la sphère (Σ), on aura

$$4\pi R\,\frac{n}{2n+1}\sum_{l=1}^{2n+1} H_{n,l}^2 = \frac{\rho^{2n}}{R^{2n}}.$$

Cela posé, il résulte de (28) et de (29) que, pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur de la sphère (Σ), on aura

$$|u(x, y, z)|^2 < \frac{\pi}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)},$$

ce qui prouve que, à l'intérieur de la sphère (Σ), la fonction $|u(x, y, z)|$ a une limite supérieure finie, indépendante du choix du point M sur la surface (S_0). D'autre part, puisque C_0 représente la valeur de la fonction v_0 au centre de la sphère (Σ), la quantité $|C_0|$ aura aussi une limite supérieure finie, indépendante du choix du point M sur la surface (S_0). Ces remarques faites, revenons au système de coordonnées auquel se rapporte la relation (24). On n'éprouvera pas de difficulté à conclure de (27) à l'existence d'une constante positive C_2, indépendante du choix du point M sur la surface (S_0) et telle que les relations (21) entraînent la suivante :

$$|v_0(0, 0, z)|^2 < C_2 . \log\frac{2R}{z},$$

résultat qu'il nous sera plus commode de formuler ainsi : la valeur $v_0(M')$ de la fonction $v_0(x, y, z)$ en un point M' situé, dans le domaine (D), sur la normale à la surface (S_0) en un point M, satisfait à la relation

$$(30) \qquad |v_0(M')|^2 < C_2 \log \frac{2R}{d}, \qquad \text{pour} \qquad 0 < d \leqq R,$$

où d représente la longueur du segment $\overline{MM'}$.

Pour aller plus loin, désignons par a'_1 un nombre positif inférieur au nombre a_1 qui figure dans (17) mais, à cela près, choisi arbitrairement et soit (S'_0) la portion de la surface (S_0) située dans le domaine défini par la relation

$$(31) \qquad x^2 + y^2 \leqq a'^2_1.$$

Tout point de (S'_0) jouira de la propriété (A) (XIV, p. 151) par rapport à l'ensemble des nombres α et β, puisqu'il en est ainsi de tout point de la surface (S_0). Cela posé, soit Q un point choisi arbitrairement sur la surface (S'_0). Prenons le point Q pour origine des coordonnées en ayant soin de diriger l'axe des z suivant la normale à (S'_0) en Q, vers l'intérieur du domaine (D). Il existera alors une fonction $f_0(x, y)$ telle que l'ensemble de tous les points communs au domaine (D) et au domaine

$$(32) \qquad x^2 + y^2 \leqq \alpha^2, \qquad |z| \leqq \beta$$

se confonde avec l'ensemble de tous ceux des points du domaine précédent dont chacun satisfait à l'inégalité

$$(33) \qquad z > f_0(x, y).$$

La fonction $f_0(x, y)$ admettra des dérivées continues jusqu'au second ordre inclusivement dans le domaine

$$(34) \qquad x^2 + y^2 < \alpha^2,$$

et ces dérivées admettront, par rapport à la frontière du domaine précédent, des valeurs périphériques finies et bien déterminées, les dérivées $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ s'annuleront pour $x = y = 0$ et, dans tout le domaine (32), nous aurons

$$|f_0(x, y)| < \beta. \tag{35}$$

Considérons maintenant la surface définie par l'ensemble des relations

$$x^2 + y^2 \leqq \alpha^2 \tag{36}$$

et

$$z = f_0(x, y) + (x^2 + y^2)^3. \tag{37}$$

Il existera un nombre positif α' ($\alpha' \leqq \alpha$), indépendant du choix du point Q sur (S'_0), tel que la relation

$$x^2 + y^2 \leqq \alpha'^2 \tag{38}$$

entraîne les inégalités

$$|f_0(x, y) + (x^2 + y^2)^3| < \beta \tag{39}$$

et

$$(x^2 + y^2)^3 < R^6,$$

où R est la longueur qui figure dans (30), et qu'en outre il corresponde à tout point vérifiant (37) et (38) une normale à (S_0) passant par ce point. Désignons maintenant par (Δ_0) la portion du domaine (D) qui se confond avec le domaine

$$\left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 \leqq \alpha'^2, \\ & f_0(x, y) + (x^2 + y^2)^3 < z \leqq \beta \end{aligned}\right. \tag{40}$$

et par (Δ_1) le reste du domaine (D).

Posons maintenant :

$$F_0(x, y, z) = \iiint_{(\Delta_0)} \{\text{grad.}\, v_0\} . \left\{\text{grad.}\, \frac{1}{r}\right\} dx'\,dy'\,dz', \tag{41}$$

$$F_1(x, y, z) = \iiint_{(\Delta_1)} \{\text{grad.}\, v\} . \left\{\text{grad.}\, \frac{1}{r}\right\} dx'\,dy'\,dz'. \tag{42}$$

Les diverses déterminations de la fonction v (lorsqu'elle n'est pas uniforme) ayant même gradient, il résulte des formules précédentes et de la formule (9) que nous aurons

$$\Phi(x, y, z) = F_0(x, y, z) + F_1(x, y, z). \tag{43}$$

Considérons les deux points $(0, 0, z)$ et $(0, 0, -z)$ en supposant que l'on ait

$$(44)\qquad 0 < z < \beta.$$

Le point $(0, 0, z)$ sera situé à l'intérieur du domaine (40) et le point $(0, 0, -z)$, à l'extérieur de ce domaine. D'ailleurs, à cause de (30) et du choix du nombre α', il existera une constante positive C_3, indépendante du choix du point Q sur la surface (S'_0), telle que, en tout point (x, y, z) vérifiant les relations (37) et (38) et distinct du point Q, l'on ait

$$(45)\qquad |v_0(x, y, z)|^2 < C_3.\log\frac{2R}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ces remarques faites, la formule (41) et une application facile du théorème de Green, légitimée par (45), nous donnera

$$F_0(0, 0, z) = 4\pi v_0(0, 0, z) - \int\int_{(F)} v_0 \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r_1}\right) ds,$$

$$F_0(0, 0, -z) = -\int\int_{(F)} v_0 \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r_2}\right) ds,$$

en désignant par (F) la frontière du domaine (Δ_0). Ces formules et l'équation (43) donnent

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\Phi(0, 0, z) + \Phi(0, 0, -z) \\ &\quad = 4\pi v_0(0, 0, z) - \int\int_{(F)} v_0 \left\{\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_2}\right\} ds \\ &\quad + F_1(0, 0, z) + F_1(0, 0, -z). \end{aligned}$$

Or, les expressions qui entrent dans l'équation précédente donnent lieu aux remarques suivantes :

1° La fonction $\Phi(x, y, z)$ étant, comme cela résulte de l'expression (7) de cette fonction, continue à la traversée de la surface (S_0), la somme

$$\Phi(0, 0, z) + \Phi(0, 0, -z)$$

tend vers une limite déterminée pour $z = 0$ et cela uniformément par rapport à toutes les positions du point Q sur (S'_0).

2° Il en est de même de la somme

$$F_1(o, o, z) + F_1(o, o, -z)$$

comme on le prouve aisément en s'appuyant sur (42) et en tenant compte de la forme particulière du domaine (Δ_1) dans le voisinage de l'origine des coordonnées.

3° Il en est encore de même de l'intégrale

$$\int\int_{F_1} v_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_2} \right\} ds$$

ainsi qu'on l'établira aisément en s'appuyant sur l'inégalité (45).

Par conséquent, il résulte de (46) que la fonction $v_0(o, o, z)$ tend vers une limite déterminée pour $z = o$ et cela *uniformément* par rapport à l'ensemble de toutes les positions du point Q sur la surface (S'_0).

Cela prouve que la fonction v_0 admet une valeur périphérique finie et parfaitement déterminée en tout point de (S'_0). Il suffit maintenant de considérer que le choix des nombres a'_1 et a_1 est uniquement subordonné à la condition d'avoir

$$o < a'_1 < a_1 < a,$$

pour reconnaître l'exactitude du lemme XVII, qu'il s'agissait précisément de démontrer.

Les lemmes XVI et XVII étant établis, il en est de même du théorème XV qu'il s'agissait de démontrer.

Le théorème XV nous apprend que le problème de Neumann est possible pour une classe étendue de domaines dont les frontières présentent des arêtes et des angles, résultat que les méthodes employées jusqu'à présent ne permettaient pas d'établir. Toutefois, il y aurait lieu de compléter le résultat précédent par l'étude de l'allure de la solution v du problème III (p. 8) dans le voisinage des points qui ne jouissent pas de la propriété (A)(XIV; il y aurait lieu en outre de rechercher les conditions que doit remplir le vecteur désigné par $\vec{V}$ dans l'énoncé III pour que la fonction v soit uniforme lorsque le domaine (D) n'est pas simplement connexe par rapport aux lignes. Pour le moment, je n'ai pas encore réussi à combler ces lacunes.