JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES RIQUIER

Sur quelques problèmes relatifs à l'équation aux dérivées partielles $\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2}+\frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)^n u = 0$ (suite et fin)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 347-393.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__347_0>

Sur quelques problèmes relatifs à l'équation aux dérivées partielles $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0$

(Suite et fin);

PAR CHARLES RIQUIER.

CHAPITRE III.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0$: PREMIER PROBLÈME ; SOLUTION.

Énoncé et transformation du problème.

23. Soit $f(\theta)$ une fonction possédant, dans toute l'étendue de l'espace réel $[[\theta]]$, la double propriété d'être réelle et positive sans jamais s'annuler, et d'être olotrope et périodique à la période 2π. Par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY, tracés dans un plan, les formules

$$(1)\qquad x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta$$

définissent, comme on l'a vu plus haut (n° **21**), un contour analytique régulier ne passant pas par l'origine O, et dont les divers points s'obtiennent, chacun une seule fois, en faisant croître θ de zéro à $2\pi (0 \leqq \theta < 2\pi)$; toute demi-droite partant de l'origine rencontre d'ailleurs le contour en un point et en un seul.

Désignons maintenant par r une deuxième variable réelle, assujettie à se mouvoir dans la région $r \geqq 0$, et considérons les formules

$$(2)\qquad x = rf(\theta)\cos\theta, \qquad y = rf(\theta)\sin\theta.$$

Ces dernières définissent un contour, variable avec r, se réduisant, pour $r = 0$, à un point unique, l'origine O, et jouissant, pour $r > 0$, des diverses propriétés énumérées relativement au contour (1); d'ailleurs, si l'on donne à r deux valeurs positives distinctes, les contours correspondants, manifestement homothétiques par rapport à l'origine, n'ont aucun point commun (n° **21**). Nous rappellerons qu'en désignant d'une manière générale par $\mathfrak{C}_r$ le contour qui correspond à la valeur r, puis par R une valeur numérique particulière (> 0) de r, nous avons nommé *intérieur* du contour $\mathfrak{C}_R$ la région du plan qu'engendre le contour $\mathfrak{C}_r$ lorsqu'on fait varier r dans les limites assignées par la double relation $0 \leq r < R$. Nous conviendrons enfin de dire que telle ou telle propriété a lieu *dans l'intérieur du contour* $\mathfrak{C}_R$ *et un peu au delà*, si elle a lieu dans l'intérieur du contour $\mathfrak{C}_{R+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ et suffisamment petit).

Cela étant, voici l'énoncé de la question qui fait l'objet du présent Chapitre :

Problème $\mathfrak{P}_n$. — On se propose de *trouver une intégrale de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0 \tag{3}$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

1° *Cette intégrale, u, doit être olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{C}_1$ [défini par (1)].

2° *Sur le contour même, les n quantités*

$$u, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n-1} u$$

doivent se réduire à n fonctions olotropes données de θ (*admettant la période* 2π).

Comme on le verra, *une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée du problème* $\mathfrak{P}_1$ *et à $n(n-1)$ quadratures.*

Par la transformation

$$x + iy = v, \qquad x - iy = w,$$

qui, au lieu des deux variables *réelles* x, y, introduit les deux variables *imaginaires conjuguées* v, w, l'équation (3) devient

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \partial w^n} = 0, \tag{4}$$

et voici la question à laquelle on est alors ramené :

PROBLÈME ϖ_n. — *Trouver une intégrale réelle de l'équation aux dérivées partielles* (4) *qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :*

1° *Cette intégrale, u, doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{C}_1$ (*voir* n° **7**, IV, remarque finale).

2° *Sur le contour même, les n quantités*

$$u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial v^2 \partial w^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial v^{n-1} \partial w^{n-1}}$$

doivent se réduire à n fonctions olotropes (*réelles*) *données de* θ (*admettant la période* 2π).

Une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée du problème ϖ_1 *et à* $n(n-1)$ *quadratures.*

Propriétés générales des intégrales de l'équation $\dfrac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \partial w^n} = 0$.

26. Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \partial w^n} = 0, \tag{1}$$

où se trouve engagée la fonction inconnue u des variables v, w, considérons-en une intégrale quelconque, que nous supposerons être, soit olotrope (n° **2**) dans quelque région normale comprenant le point (v_0, w_0), soit quasi olotrope (n° **8**) dans quelque région quasi normale comprenant ce même point : quelle que soit celle des deux hypothèses où l'on se place, le développement taylorien qui exprime la valeur de l'intégrale dans un voisinage suffisamment rapproché du point (v_0, w_0), considéré comme initial, présentera toujours la forme très simple que nous allons indiquer.

Observons tout d'abord que, le second membre de l'équation (1) étant nul, l'expression générale des intégrales ainsi développées n'est autre, en vertu d'une proposition que l'on établit dans le *Calcul inverse de la dérivation* [1], que la détermination initiale schématique de l'inconnue u, c'est-à-dire le résidu de la coupure

$$(v-v_0)^n(w-w_0)^n,$$

pratiquée dans une série entière en $v-v_0$, $w-w_0$, à coefficients tous indéterminés. Pour effectuer cette coupure, nous grouperons comme il suit les termes de la série : un premier groupe comprendra l'ensemble des termes qui ne contiennent pas en facteur le produit $(v-v_0)(w-w_0)$; un deuxième groupe, l'ensemble des termes qui contiennent en facteur ce produit sans contenir en facteur son carré; un troisième groupe, l'ensemble des termes qui contiennent en facteur son carré sans contenir en facteur son cube; et ainsi de suite indéfiniment. Si, dans chacun de ces groupes, on fait abstraction de la puissance de $(v-v_0)(w-w_0)$ que ses divers termes contiennent en facteur commun, on obtient une certaine série entière en $v-v_0$, $w-w_0$, présentant la forme très particulière

$$\Gamma+(v-v_0)\Phi(v-v_0)+(w-w_0)\Psi(w-w_0),$$

où Γ désigne une constante indéterminée, et $\Phi(v-v_0)$, $\Psi(w-w_0)$ deux séries entières, l'une en $v-v_0$, l'autre en $w-w_0$, à coefficients tous indéterminés. Notre développement schématique, après l'ordination ci-dessus spécifiée, se trouvera donc représenté par l'expression

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\phantom{+(v-v_0)^{n-1}(w-w_0)^{n-1}[}\Gamma_0+(v-v_0)\Phi_0(v-v_0)+(w-w_0)\Psi_0(w-w_0)\\
+(v-v_0)(w-w_0)[\Gamma_1+(v-v_0)\Phi_1(v-v_0)+(w-w_0)\Psi_1(w-w_0)]\\
+(v-v_0)^2(w-w_0)^2[\Gamma_2+(v-v_0)\Phi_2(v-v_0)+(w-w_0)\Psi_2(w-w_0)]\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(v-v_0)^{n-1}(w-w_0)^{n-1}[\Gamma_{n-1}+(v-v_0)\Phi_{n-1}(v-v_0)+(w-w_0)\Psi_{n-1}(w-w_0)]\\
+(v-v_0)^n(w-w_0)^n[\Gamma_n+(v-v_0)\Phi_n(v-v_0)+(w-w_0)\Psi_n(w-w_0)]\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

dans les diverses lignes de laquelle les Γ, les Φ et les Ψ ont les significations indiquées.

---

[1] Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 93.

Cela étant, il est manifeste que le résidu de la coupure $(v - v_0)^n (w - w_0)^n$, pratiquée dans le développement (2), se compose des n premières lignes de celui-ci, savoir

$$
(3)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Gamma_0 + (v-v_0)\Phi_0(v-v_0) + (w-w_0)\Psi_0(w-w_0) \\
+ (v-v_0)\;\;(w-w_0)\;\;[\Gamma_1 + (v-v_0)\Phi_1(v-v_0) + (w-w_0)\Psi_1(w-w_0)] \\
+ (v-v_0)^2\;(w-w_0)^2\;[\Gamma_2 + (v-v_0)\Phi_2(v-v_0) + (w-w_0)\Psi_2(w-w_0)] \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (v-v_0)^{n-1}(w-w_0)^{n-1}[\Gamma_{n-1} + (v-v_0)\Phi_{n-1}(v-v_0) + (w-w_0)\Psi_{n-1}(w-w_0)].
\end{array}
\right.
$$

En disposant arbitrairement, sous la seule restriction que l'expression (3) converge dans certaines limites autour du point initial (v_0, w_0), des éléments schématiques qui figurent dans cette dernière, on aura l'intégrale générale cherchée de l'équation (1), nous voulons dire l'expression générale de toutes celles de ses intégrales qui sont développables en séries tayloriennes à partir de v_0, w_0.

Notons au passage la remarque suivante :

Si, au lieu de la fonction *schématique*, envisagée au début, des variables v, w, on considère une fonction *déterminée* de ces variables, il va sans dire, son développement taylorien à partir de v_0, w_0 étant *unique*, que les constantes Γ et les fonctions Φ, Ψ mises en évidence dans l'expression (2) sont elles-mêmes bien déterminées.

27. *Les variables v, w étant assujetties* désormais *à être imaginaires conjuguées*, posons

$$v = x + iy, \qquad w = x - iy,$$

et notons graphiquement le couple de valeurs réelles (x, y) à l'aide de deux axes rectangulaires OX, OY tracés dans un plan : le point (x, y) se mouvant dans une région quelconque, il est manifeste que la variable $v = x + iy$ se mouvra dans cette même région, et la variable $w = x - iy$ dans la *région conjuguée*, c'est-à-dire dans la région symétrique de la première par rapport à l'axe des quantités réelles OX. Choisissant x_0, y_0 comme valeurs initiales des variables réelles x, y, et, par suite, $x_0 + iy_0 = v_0$, $x_0 - iy_0 = w_0$ comme valeurs initiales des variables imaginaires conjuguées v, w, nous déduirons immédiatement du n° **18** la conséquence particulière suivante :

Pour qu'une intégrale de l'équation (1), *quasi olotrope dans une région,* $\mathfrak{R}_{x,y}$, *contenant le point* (x_0, y_0), *soit réelle dans toute l'étendue de cette région, il faut et il suffit que, dans son développement taylorien* (3), *les constantes*

$$\Gamma_p \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

soient réelles, et que les développements entiers

$$\Phi_p(v - v_0), \quad \Psi_p(w - w_0) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

aient leurs coefficients respectifs imaginaires conjugués.

28. Adoptant les diverses notions rappelées au début du n° **25**, considérons, dans le plan des deux axes rectangulaires OX, OY, la région intérieure au contour $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$, et en même temps la région conjuguée de celle-ci : chacune de ces deux régions est à la fois normale et monodromique (n° **22**). La première étant désignée, tantôt par la notation $\mathfrak{R}_{x,y}$, tantôt par la notation $\mathfrak{R}_v$, et la deuxième étant désignée par la notation $\mathfrak{R}_w$, nous établirons la propriété suivante :

Soient (x_0, y_0) un point particulier pris dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$; v_0 et w_0 les points correspondants des régions $\mathfrak{R}_v$ et $\mathfrak{R}_w$. Cela étant, *toute intégrale de* (1) *quasi olotrope dans* $\mathfrak{R}_{x,y}$ *peut, et d'une seule manière, se mettre sous la forme*

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & C_0 + (v - v_0)\,P_0(v) + (w - w_0)\,Q_0(w) \\ & + (v - v_0)(w - w_0)\,[C_1 + (v - v_0)\,P_1(v) + (w - w_0)\,Q_1(w)] \\ & + (v - v_0)^2 (w - w_0)^2\,[C_2 + (v - v_0)\,P_2(v) + (w - w_0)\,Q_2(w)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (v - v_0)^{n-1} (w - w_0)^{n-1}\,[C_{n-1} + (v - v_0)\,P_{n-1}(v) + (w - w_0)\,Q_{n-1}(w)], \end{aligned}\right.$$

où

$$(5)\qquad C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}$$

désignent des constantes, et où les fonctions

$$(6)\qquad P_0(v),\quad P_1(v),\quad P_2(v),\quad \ldots,\quad P_{n-1}(v),$$

$$(7)\qquad Q_0(w),\quad Q_1(w),\quad Q_2(w),\quad \ldots,\quad Q_{n-1}(w)$$

sont assujetties à être olotropes, les n premières, (6), *dans la région* $\mathfrak{R}_v$, *les n dernières,* (7), *dans la région* $\mathfrak{R}_w$.

Réciproquement, toute expression de la forme (4), *si elle remplit les conditions formulées, est une intégrale de* (1) *quasi olotrope dans* $\mathfrak{R}_{x,y}$.

La dernière partie de l'énoncé, celle qui se rapporte à la proposition réciproque, est évidente : car, si les conditions formulées se trouvent remplies, l'expression (4) définit, dans la région composée ($\mathfrak{R}_v$, $\mathfrak{R}_w$), une fonction olotrope des variables imaginaires entièrement indépendantes v, w qui satisfait à l'équation (1); si donc on assujettit ces dernières à être conjuguées, on aura une intégrale de (1) quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$.

En ce qui concerne la proposition directe, on voit immédiatement que la possibilité qu'elle formule, si elle existe, n'a certainement lieu que d'une seule manière : car, le développement taylorien, (3), de l'intégrale considérée étant unique (même dans le monde des fonctions quasi olotropes), les constantes

$$\Gamma_0,\quad \Gamma_1,\quad \Gamma_2,\quad \ldots,\quad \Gamma_{n-1}$$

et les développements

$$\begin{matrix} \Phi_0(v-v_0), & \Phi_1(v-v_0), & \Phi_2(v-v_0), & \ldots, & \Phi_{n-1}(v-v_0), \\ \Psi_0(w-w_0), & \Psi_1(w-w_0), & \Psi_2(w-w_0), & \ldots, & \Psi_{n-1}(w-w_0), \end{matrix}$$

qui y figurent, ne peuvent manquer de l'être eux-mêmes, et de là résulte, dans l'expression d'existence hypothétique (4), l'unicité des constantes (5) et des fonctions (6), (7).

Il nous reste donc à prouver que *l'intégrale considérée de l'équation* (1) *peut*, de quelque manière, *être mise sous la forme* (4).

I. La possibilité spécifiée a lieu pour $n = 1$.

Le développement taylorien de l'intégrale à partir de v_0, w_0 se réduit, en pareil cas, à la première ligne de l'expression (3),

$$\Gamma_0 + (v-v_0)\,\Phi_0(v-v_0) + (w-w_0)\,\Psi_0(w-w_0),$$

somme de trois termes dont le premier est une constante, le second une fonction de la seule variable v, le troisième une fonction de la seule variable w. Si l'on suppose que cette somme soit le développement d'une fonction (proprement dite) de v, w quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, il est manifeste que la pseudo-fonction définie par le développement fondamental $(v - v_0)\Phi_0(v - v_0)$ est assimilable à une fonction (proprement dite) de v olotrope dans $\mathfrak{R}_v$, et l'on en conclut aisément que la pseudo-fonction définie par le développement fondamental $\Phi_0(v - v_0)$ jouit de la même propriété. Semblablement, la pseudo-fonction définie par le développement fondamental $\Psi_0(w - w_0)$ est assimilable à une fonction (proprement dite) de w olotrope dans $\mathfrak{R}_w$.

II. Si la possibilité spécifiée a lieu pour $n = p$, elle ne peut manquer d'avoir lieu pour $n = p + 1$.

Effectivement, le développement taylorien, à partir de v_0, w_0, d'une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^{2p+2} u}{\partial v^{p+1}\,\partial w^{p+1}} = 0$$

est donné par l'expression

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}
\phantom{+(v-v_0)^{p}(w-w_0)^{p}[}\Gamma_0 + (v - v_0)\Phi_0(v - v_0) + (w - w_0)\Psi_0(w - w_0)\\
+ (v - v_0)(w - w_0)[\Gamma_1 + (v - v_0)\Phi_1(v - v_0) + (w - w_0)\Psi_1(w - w_0)]\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ (v - v_0)^{p-1}(w - w_0)^{p-1}[\Gamma_{p-1} + (v - v_0)\Phi_{p-1}(v - v_0) + (w - w_0)\Psi_{p-1}(w - w_0)]\\
+ (v - v_0)^{p}(w - w_0)^{p}[\Gamma_p + (v - v_0)\Phi_p(v - v_0) + (w - w_0)\Psi_p(w - w_0)],
\end{array}\right.$$

composée de $p + 1$ lignes. Si l'on suppose que l'expression (8) soit le développement fondamental d'une fonction (proprement dite) de v, w quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}_{v,w}$, les dérivées de tous ordres de l'expression (8) jouiront de cette même propriété, et, notamment, la dérivée que désigne le symbole $\frac{\partial^{2p}}{\partial v^p\,\partial w^p}$. D'autre part, si, dans l'expression (8), on fait abstraction de la dernière ligne, l'expression résultante, f, vérifie la relation $\frac{\partial^{2p} f}{\partial v^p\,\partial w^p} = 0$, en sorte que la dérivée considérée de l'expression (8) se réduit à la dérivée semblable de sa $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne

$$(v - v_0)^p (w - w_0)^p [\Gamma_p + (v - v_0)\Phi_p(v - v_0) + (w - w_0)\Psi_p(w - w_0)];$$

cette $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne pouvant s'écrire

$$\begin{array}{l}
(v - v_0)^p (w - w_0)^p \Gamma_p\\
\quad + (v - v_0)^{p+1}(w - w_0)^p \Phi_p(v - v_0) + (v - v_0)^p (w - w_0)^{p+1}\Psi_p(w - w_0),
\end{array}$$

sa dérivée $\frac{\partial^{2p}}{\partial v^p \partial w^p}$ se réduira à la somme

$$1.2\ldots p.1.2\ldots p\,\Gamma_p + 1.2\ldots p\,\frac{\partial^p}{\partial v^p}\left[(v-v_0)^{p+1}\Phi_p(v-v_0)\right]$$
$$+ 1.2\ldots p\,\frac{\partial^p}{\partial w^p}\left[(w-w_0)^{p+1}\Psi_p(w-w_0)\right],$$

dont le premier terme est une constante, et dont les deux autres ne dépendent, l'un que de la seule variable v, l'autre que de la seule variable w. Cette somme étant le développement fondamental d'une fonction (proprement dite) de v, w quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{v,w}$, il est manifeste que le second terme est le développement fondamental d'une fonction (proprement dite) de v olotrope dans $\mathfrak{R}_v$, et que le troisième est le développement fondamental d'une fonction (proprement dite) de w olotrope dans $\mathfrak{R}_w$.

Cela étant, considérons le développement fondamental

$$(v-v_0)^{p+1}\Phi_p(v-v_0)$$

et le développement qui s'en déduit par la dérivation $\frac{\partial^p}{\partial v^p}$: d'un lemme formulé ailleurs ([1]) il résulte que, pour remonter de ce dernier développement au précédent, il suffit d'exécuter sur lui p quadratures successives, en ayant soin que le résultat de chacune d'elles s'annule pour $v = v_0$. Le développement sur lequel on a à exécuter ces quadratures étant, comme nous l'avons dit, le développement fondamental d'une fonction de v olotrope dans la région $\mathfrak{R}_v$, il résulte de ce qui a été vu au n° **25** que la pseudo-fonction définie par le développement fondamental $(v-v_0)^{p+1}\Phi_p(v-v_0)$ est, dans cette région, assimilable à une fonction olotrope proprement dite de v. On en conclut aisément que la pseudo-fonction définie par le développement fondamental $\Phi_p(v-v_0)$ jouit de la même propriété.

Semblablement, la pseudo-fonction définie par le développement fondamental $\Psi_p(w-w_0)$ est assimilable, dans $\mathfrak{R}_w$, à une fonction olotrope proprement dite de w.

Ce double point étant acquis, il est évident que, si l'on considère pour un instant v, w comme deux variables entièrement indépendantes

([1]) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 82, I.

l'une de l'autre, la dernière ligne de l'expression (8) est le développement fondamental d'une certaine fonction (proprement dite) de v, w olotrope dans la région composée ($\mathfrak{R}_v$, $\mathfrak{R}_w$) : elle est donc aussi le développement fondamental d'une certaine fonction (proprement dite) des variables imaginaires conjuguées v, w quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$. Comme, par hypothèse, l'expression (8) tout entière est le développement fondamental d'une semblable fonction, la somme des p premières lignes de (8) jouit de la même propriété : dès lors, en vertu de ce qui est admis pour $n = p$, les développements fondamentaux

$$\Phi_0(v - v_0), \quad \Phi_1(v - v_0), \quad \ldots, \quad \Phi_{p-1}(v - v_0)$$

définissent autant de fonctions de v olotropes dans la région $\mathfrak{R}_v$, et les développements fondamentaux

$$\Psi_0(w - w_0), \quad \Psi_1(w - w_0), \quad \ldots, \quad \Psi_{p-1}(w - w_0)$$

autant de fonctions de w olotropes dans la région $\mathfrak{R}_w$.

Ainsi se trouve établi l'objet du présent alinéa II.

III. La possibilité spécifiée a lieu pour n quelconque.

C'est ce qui résulte du simple rapprochement des alinéas I et II.

29. Si, au lieu des valeurs fondamentales x_0, y_0, v_0, w_0, considérées dans ce qui précède, on en prenait d'autres, x'_0, y'_0, v'_0, w'_0, situées dans les mêmes régions, l'intégrale de (1) pourrait se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
& D_0 + (v - v'_0)\,M_0(v) + (w - w'_0)\,N_0(w) \\
+ (v - v'_0)(w - w'_0)\,& [D_1 + (v - v'_0)\,M_1(v) + (w - w'_0)\,N_1(w)] \\
+ (v - v'_0)^2 (w - w'_0)^2\,& [D_2 + (v - v'_0)\,M_2(v) + (w - w'_0)\,N_2(w)] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ (v - v'_0)^{n-1}(w - w'_0)^{n-1}\,& [D_{n-1} + (v - v'_0)\,M_{n-1}(v) + (w - w'_0)\,N_{n-1}(w)],
\end{aligned}$$

où les notations D, M, N auraient des significations analogues à celles des notations C, P, Q du numéro précédent : mais il va sans dire que les D, M, N ne seraient pas identiques aux C, P, Q.

Dans ce qui suit, lorsque nous considérerons une intégrale de (1) quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ spécifiée ci-dessus, nous dirons que, *par rapport au point* particulier (x_0, y_0) choisi dans cette région, les constantes (5) et les fonctions (6), (7), qui figurent dans l'expression (4), sont, les unes, (5), les *éléments paramétriques* de l'intégrale ; les autres, (6), (7), ses *éléments fonctionnels*.

30. La notation $\mathfrak{R}_{v,w}$ ayant le même sens qu'au numéro précédent, *pour qu'une intégrale de* (1), *dépendant des variables imaginaires conjuguées* v, w, *et quasi olotrope dans la région* $\mathfrak{R}_{v,w}$, *y soit identiquement nulle, il faut et il suffit que, un point particulier étant pris comme on le voudra dans la région, les éléments de l'intégrale, tant paramétriques que fonctionnels, relatifs à ce point, soient, les premiers tous nuls, les derniers tous identiquement nuls.*

La condition est manifestement suffisante.

Elle est d'ailleurs nécessaire. Effectivement, si l'intégrale dont il s'agit est identiquement nulle dans la région $\mathfrak{R}_{v,w}$, son développement taylorien à partir des valeurs initiales choisies a tous ses coefficients numériques égaux à zéro, ce qui revient à dire que, d'une part, les éléments paramétriques de l'intégrale relatifs à ce point sont tous égaux à zéro, et que, d'autre part, les développements tayloriens de ses éléments fonctionnels ont leurs coefficients numériques tous égaux à zéro : ces éléments fonctionnels sont donc, de toute nécessité, identiquement nuls.

La notation $\mathfrak{R}_{v,w}$ ayant le même sens que ci-dessus, *pour que deux intégrales de* (1), *dépendant des variables imaginaires conjuguées* v, w, *et quasi olotropes dans la région* $\mathfrak{R}_{v,w}$, *y soient identiquement égales, il faut et il suffit que, un point particulier étant pris comme on le voudra dans la région, les éléments de la première intégrale, tant paramétriques que fonctionnels, relatifs à ce point, soient respectivement identiques aux éléments, tant paramétriques que fonctionnels, de la deuxième.*

31. L'équation (1) étant supposée impliquer la fonction inconnue u des variables *imaginaires conjuguées* v, w, et les notations $\mathfrak{R}_{v,w}$, $\mathfrak{R}_v$, $\mathfrak{R}_w$ ayant le même sens qu'au n° **28**, *toute intégrale de* (1) *quasi olotrope dans la région* $\mathfrak{R}_{v,w}$ *est assimilable, dans la région composée* ($\mathfrak{R}_v$, $\mathfrak{R}_w$), *à une fonction olotrope des variables imaginaires* v, w, *considérées comme entièrement indépendantes l'une de l'autre.*

C'est ce qui résulte immédiatement de notre proposition du n° **28**.

32. Supposons actuellement que l'équation (1) implique la *fonction inconnue réelle u* des *variables imaginaires conjuguées v, w*; en d'autres termes, parmi les intégrales de (1) quasi olotropes dans la région $\mathfrak{R}_{v,w}$, astreignons-nous à ne considérer que celles dont les valeurs y sont constamment réelles. Pour une pareille intégrale, les éléments, tant paramétriques que fonctionnels, qui figurent dans l'expression (4), présentent les caractères suivants :

1° *Les constantes numériques* (5) *sont réelles;*

2° *Les fonctions olotropes* (6) *et* (7), *qui dépendent, les n premières de la variable v, les n dernières de la variable w, prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées.*

C'est ce que l'on déduit sans peine de l'ensemble des considérations développées dans tout ce qui précède.

Examen du problème $\mathfrak{E}_n$ formulé au n° 25.

33. Problème $\mathfrak{E}_n$. — On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \, \partial w^n} = 0,$$

impliquant la *fonction inconnue réelle u* des *variables imaginaires conjuguées v, w*, et l'on se propose d'en *trouver une intégrale qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :*

1° *Cette intégrale, u, doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour donné* $\mathfrak{C}_1$.

2° *Sur le contour même, les n quantités*

$$u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v \, \partial w}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial v^2 \, \partial w^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial v^{n-1} \, \partial w^{n-1}}$$

doivent se réduire à n fonctions olotropes (réelles) données de θ *(admettant la période* 2π*).*

Une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$ *et à* $n(n-1)$ *quadratures.*

I. $n = 1$.

On sait que l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} = 0$, à laquelle se réduit en ce cas l'équation (1), admet, conformément à l'énoncé ci-dessus, une intégrale (réelle), et une seule, possédant la double propriété d'être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$, et de se réduire, sur le contour même, à une fonction olotrope donnée de θ (admettant la période 2π). L'existence et l'unicité de cette intégrale étant assurées, la dernière partie de l'énoncé, relative à sa recherche, se trouve vraie d'elle-même.

A ces constatations, il convient d'ajouter diverses remarques :

1° *La fonction qui donne la solution (unique) du problème* $\mathfrak{T}_1$ *peut, et d'une seule manière, se mettre sous la forme*

$$C_0 + v P_0(v) + w Q_0(w), \tag{2}$$

C_0 *désignant une constante numérique réelle, et* $P_0(v)$, $Q_0(w)$ *deux fonctions jouissant de la double propriété d'être olotropes, la première à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{C}_1$, *la seconde dans la région conjuguée de celle-ci, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées.*

2° Soient, comme au n° **25**,

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta$$

les formules qui définissent le contour $\mathfrak{C}_1$, et qui peuvent s'écrire

$$x + iy = f(\theta)\, e^{i\theta}, \qquad x - iy = f(\theta)\, e^{-i\theta}.$$

Si, attribuant aux notations E_0, $R_0(v)$, $S_0(w)$ *des significations analogues à celles des notations* C_0, $P_0(v)$, $Q_0(w)$ *qui figurent dans l'expression* (2), *on a, quel que soit* θ,

$$\begin{aligned} &C_0 + f(\theta)e^{i\theta} P_0[f(\theta)e^{i\theta}] + f(\theta)e^{-i\theta} Q_0[f(\theta)e^{-i\theta}] \\ &= E_0 + f(\theta)e^{i\theta} R_0[f(\theta)e^{i\theta}] + f(\theta)e^{-i\theta} S_0[f(\theta)e^{-i\theta}], \end{aligned}$$

les constantes C_0, E_0 *sont numériquement égales, les fonctions* $P_0(v)$, $R_0(v)$ *identiquement égales, et les fonctions* $Q_0(w)$, $S_0(w)$ *identiquement égales.*

3° *Étant donnée la fonction olotrope (réelle)* $\upsilon(\theta)$ *de la variable réelle* θ, *admettant la période* 2π, *on peut, et d'une seule manière, la mettre sous la forme*

$$C_0 + f(\theta)\, e^{i\theta}\, P_0[f(\theta)\, e^{i\theta}] + f(\theta)\, e^{-i\theta}\, Q_0[f(\theta)\, e^{-i\theta}], \tag{3}$$

C_0 *désignant une constante numérique réelle, et* $P_0(v)$, $Q_0(w)$ *deux fonctions possédant la double propriété d'être olotropes, la première à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{C}_1$, *la seconde dans la région conjuguée de celle-ci, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées.*

Pour obtenir l'expression (3), *il suffit de rechercher l'intégrale (unique) de l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} = 0$ *qui, en choisissant* $\upsilon(\theta)$ *comme valeur donnée sur le contour, remplit l'ensemble des conditions imposées par l'énoncé du problème* $\mathfrak{S}_1$, *de mettre ensuite cette intégrale sous la forme* (2), *et d'introduire finalement dans* (2) *les hypothèses* $v = f(\theta)\, e^{i\theta}$, $w = f(\theta)\, e^{-i\theta}$.

Effectivement, supposons que $\upsilon(\theta)$ soit exprimable, dans les conditions indiquées au début de notre énoncé, à l'aide de la somme (3) : cela étant, la fonction (2), intégrale réelle de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} = 0$, sera nécessairement quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$, et se réduira, sur le contour même, à $\upsilon(\theta)$.

Réciproquement, supposons que la fonction (2), intégrale réelle de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} = 0$, remplisse ces deux dernières conditions : les fonctions $P_0(v)$, $Q_0(w)$ rempliront alors, à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$ et dans la région conjuguée, les conditions indiquées au début de notre énoncé, et, comme l'expression (2) se réduit, sur le contour, à la fonction $\upsilon(\theta)$, celle-ci se trouvera représentée par (3).

II. $n = 2$.

Voici ce que devient, en ce cas, l'énoncé du problème $\mathfrak{S}_n$:

Trouver une intégrale réelle de l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial v^2 \partial w^2} = 0$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

1° Cette intégrale, u, doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$.

2° Sur le contour même, les quantités u, $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}$ doivent se réduire à deux fonctions olotropes données, $\upsilon_0(\theta)$, $\upsilon_1(\theta)$, admettant la période 2π.

Comme on va le voir, une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution deux fois répétée du problème $\mathcal{C}_1$ et à deux quadratures.

D'après ce qui a été dit plus haut (I), la seconde des deux fonctions données, $\upsilon_1(\theta)$, peut, et cela d'une seule manière, être mise sous la forme

$$(5) \qquad D_1 + f(\theta)\, e^{i\theta}\, M_1[f(\theta)\, e^{i\theta}] + f(\theta)\, e^{-i\theta}\, N_1[f(\theta)\, e^{-i\theta}],$$

où D_1 désigne une constante numérique réelle, et où les deux fonctions $M_1(v)$, $N_1(w)$ remplissent la double condition d'être olotropes, la première à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$, la seconde dans la région conjuguée, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées; la recherche de l'expression (5), c'est-à-dire des éléments D_1, $M_1(v)$, $N_1(w)$, s'effectue d'ailleurs par la résolution du problème $\mathcal{C}_1$: nous supposerons connus ces trois élements.

Cela étant, si l'équation (4) admet quelque intégrale réelle, u, satisfaisant à l'ensemble des conditions que nous venons de formuler, cette intégrale peut, puisqu'elle satisfait, notamment, à la condition 1°, se mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$(6) \qquad u = C_0 + v P_0(v) + w Q_0(w) + vw[C_1 + v P_1(v) + w Q_1(w)],$$

où C_0, C_1 désignent des constantes numériques réelles provisoirement indéterminées, et $P_0(v)$, $P_1(v)$, $Q_0(w)$, $Q_1(w)$ des fonctions provisoirement indéterminées, assujetties à la double condition d'être olotropes, les deux premières à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$, les deux dernières dans la région conjuguée, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. Calculons maintenant à l'aide de la formule (6) la quantité $\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial w}$. Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$C_0 + v P_0(v) + w Q_0(w) = u_0,$$
$$C_1 + v P_1(v) + w Q_1(w) = u_1,$$

la formule (6) devient

$$u = u_0 + v w u_1;$$

le premier terme, u_0, du second membre vérifiant la relation $\frac{\partial^2 u_0}{\partial v\,\partial w} = 0$, il suffira de considérer le second terme, $v w u_1$. La dérivée $\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial w}$ de ce dernier a pour expression

$$u_1 + v\frac{\partial u_1}{\partial v} + w\frac{\partial u_1}{\partial w} + v w\frac{\partial^2 u_1}{\partial v\,\partial w},$$

c'est-à-dire, puisque u_1 vérifie la relation $\frac{\partial^2 u_1}{\partial v\,\partial w} = 0$,

$$u_1 + v\frac{\partial u_1}{\partial v} + w\frac{\partial u_1}{\partial w},$$

c'est-à-dire enfin, en remplaçant par leurs valeurs u_1 et ses dérivées premières,

$$C_1 + 2vP_1(v) + v^2P_1'(v) + 2wQ_1(w) + w^2Q_1'(w),$$

ou

$$(7) \qquad C_1 + v[2P_1(v) + vP_1'(v)] + w[2Q_1(w) + wQ_1'(w)].$$

Pour $v = f(0)e^{i0}$, $w = f(0)e^{-i0}$, l'expression (7) doit devenir égale à $\upsilon_1(0)$, qui n'est autre chose que l'expression (5) : il résulte alors de ce qui a été vu à l'alinéa I que l'on doit avoir la relation numérique $C_1 = D_1$, laquelle détermine pour C_1 une valeur réelle, puis l'identité en v

$$(8) \qquad vP_1'(v) + 2P_1(v) = M_1(v),$$

laquelle va servir à déterminer $P_1(v)$, puis enfin l'identité en w

$$(9) \qquad wQ_1'(w) + 2Q_1(w) = N_1(w),$$

laquelle va servir à déterminer $Q_1(w)$. Si l'on se reporte aux conditions imposées, il ne faudra retenir, parmi les intégrales de (8), que celles qui sont olotropes à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$, et, parmi les intégrales de (9), que celles qui sont olotropes à l'intérieur et un peu au delà du contour conjugué.

Considérons donc l'équation différentielle (8) : elle a pour intégrale générale

$$(10) \qquad P_1(v) = \frac{A}{v^2} + \frac{1}{v^2}\int_0^v v M_1(v)\,dv,$$

où A désigne une constante arbitraire. La fonction $M_1(v)$ étant olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$, il résulte de la remarque établie au n° **24** que la fonction $\frac{1}{v^2}\int_0^v v M_1(v)\,dv$ l'est également : la formule (10) nous montre dès lors que la seule intégrale de (8) satisfaisant à la condition d'être olotrope dans les limites requises s'obtiendra en donnant à la constante arbitraire A la valeur zéro. Il n'y a donc à retenir, parmi les intégrales de l'équation différentielle (8), que la fonction $\frac{1}{v^2}\int_0^v v M_1(v)\,dv$.

Et, semblablement, il n'y a à retenir, parmi les intégrales de l'équation différentielle (9), que la fonction $\frac{1}{w^2}\int_0^w w N_1(w)\,dw$.

Chacune des deux fonctions $P_1(v)$, $Q_1(w)$ s'obtient, comme on le voit, à l'aide d'une quadrature; d'ailleurs, les fonctions $M_1(v)$, $N_1(w)$ prenant, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées, il est manifeste que les fonctions $P_1(v)$, $Q_1(w)$ ainsi déterminées jouissent de la même propriété.

Les éléments C_1, $P_1(v)$, $Q_1(w)$ étant connus, le produit vwu_1 l'est aussi, et il se réduit, sur le contour, à une fonction olotrope (réelle) connue de θ, admettant la période 2π; on se trouve ainsi ramené au problème suivant :

Déterminer u_0, c'est-à-dire une intégrale réelle de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial w} = 0,$$

par les conditions : 1° que cette intégrale soit quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$; 2° que, sur le contour même, elle se réduise à une fonction olotrope donnée de θ, admettant la période 2π.

En d'autres termes, on se trouve ramené à la résolution du problème $\mathfrak{T}_1$.

En résumé donc, comme nous l'avions annoncé, on est conduit à résoudre deux fois le problème $\mathfrak{T}_1$ et à exécuter deux quadratures.

III. $n = 3$.

Voici ce que devient, en ce cas, l'énoncé du problème $\mathfrak{T}_n$:

Trouver une intégrale réelle de l'équation

$$(11) \qquad \frac{\partial^6 u}{\partial v^3 \partial w^3} = 0$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

1° Cette intégrale, u, doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$.

2° Sur le contour même, les quantités u, $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial v^2 \partial w^2}$ doivent se réduire à trois fonctions olotropes données, $\upsilon_0(\theta)$, $\upsilon_1(\theta)$, $\upsilon_2(\theta)$, admettant la période 2π.

Comme on va le voir, une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution trois fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$ et à six quadratures.

D'après ce qui a été vu plus haut (I), la dernière des fonctions données, $\upsilon_2(\theta)$, peut, et d'une seule manière, être mise sous la forme

$$(12) \qquad D_2 + f(\theta)\, e^{i\theta} M_2[f(\theta)\, e^{i\theta}] + f(\theta)\, e^{-i\theta} N_2[f(\theta)\, e^{-i\theta}],$$

où D_2 désigne une constante numérique réelle, et où les fonctions $M_2(v)$, $N_2(w)$ remplissent la double condition d'être olotropes, la première à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$, la seconde dans la région conjuguée de celle-ci, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées; la recherche de l'expression (12), c'est-à-dire des trois éléments D_2, $M_2(v)$, $N_2(w)$, s'effectue d'ailleurs par la résolution du problème $\mathfrak{T}_1$: nous supposerons connus ces trois éléments.

Cela étant, si l'équation (11) admet quelque intégrale, u, satisfaisant à l'ensemble des conditions que nous venons de formuler, cette intégrale peut, puisqu'elle satisfait, notamment, à la condition 1°, se mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$(13)\qquad \begin{aligned} u = {} & C_0 + vP_0(v) + wQ_0(w) \\ & + v\,w\,[C_1 + vP_1(v) + wQ_1(w)] \\ & + v^2w^2[C_2 + vP_2(v) + wQ_2(w)], \end{aligned}$$

où C_0, C_1, C_2 désignent des constantes numériques réelles provisoirement indéterminées, et $P_0(v)$, $P_1(v)$, $P_2(v)$, $Q_0(w)$, $Q_1(w)$, $Q_2(w)$ des fonctions provisoirement indéterminées, assujetties à la double condition d'être olotropes, les trois premières à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$, les trois dernières dans la région conjuguée, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. Calculons maintenant à l'aide de la formule (13) la quantité $\frac{\partial^4 u}{\partial v^2\,\partial w^2}$. Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$\begin{aligned} C_0 + vP_0(v) + wQ_0(w) &= u_0, \\ C_1 + vP_1(v) + wQ_1(w) &= u_1, \\ C_2 + vP_2(v) + wQ_2(w) &= u_2, \end{aligned}$$

la formule (13) devient

$$u = (u_0 + vwu_1) + v^2w^2u_2 ;$$

la parenthèse $(u_0 + vwu_1)$, qui figure dans le second membre, ayant sa dérivée $\frac{\partial^4}{\partial v^2\,\partial w^2}$ identiquement nulle, il suffira de considérer le dernier terme $v^2w^2u_2$. En tenant compte de ce que $\frac{\partial^2 u_2}{\partial v\,\partial w}$ est identiquement nul, la dérivée $\frac{\partial^4}{\partial v^2\,\partial w^2}$ du produit $v^2w^2u_2$ a pour expression

$$4u_2 + 8v\frac{\partial u_2}{\partial v} + 8w\frac{\partial u_2}{\partial w} + 2v^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial v^2} + 2w^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial w^2},$$

c'est-à-dire, en remplaçant par leurs valeurs u_2 et ses dérivées premières et secondes,

$$4C_2 + 12v\,P_2(v) + 12v^2\,P_2'(v) + 2v^3\,P_2''(v) \\ + 12w\,Q_2(w) + 12w^2\,Q_2'(w) + 2w^3\,Q_2''(w),$$

ou

$$(14) \qquad 4C_2 + 2v\,[6P_2(v) + 6v\,P_2'(v) + v^2\,P_2''(v)] \\ + 2w\,[6Q_2(w) + 6w\,Q_2'(w) + w^2\,Q_2''(w)].$$

Pour $v = f(0)\,e^{i\theta}$, $w = f(0)\,e^{-i\theta}$, l'expression (14) doit devenir égale à $u_2(0)$, qui n'est autre chose que l'expression (12) : il résulte alors de ce qui a été vu à l'alinéa I que l'on doit avoir la relation numérique $4C_2 = D_2$, laquelle détermine pour C_2 une valeur réelle, puis l'identité en v

$$(15) \qquad v^2\,P_2''(v) + 6v\,P_2'(v) + 6\,P_2(v) = \frac{1}{2}\,M_2(v),$$

laquelle va servir à déterminer $P_2(v)$, puis enfin l'identité en w

$$(16) \qquad w^2\,Q_2''(w) + 6w\,Q_2'(w) + 6\,Q_2(w) = \frac{1}{2}\,N_2(w),$$

laquelle va servir à déterminer $Q_2(w)$. Si l'on se reporte aux conditions imposées, il ne faudra retenir, parmi les intégrales de (15), que celles qui sont olotropes à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$, et, parmi les intégrales de (16), que celles qui sont olotropes à l'intérieur et un peu au delà du contour conjugué.

Considérons donc l'équation différentielle (15) : elle a pour intégrale générale

$$(17) \qquad P_2(v) = \frac{A}{v^2} + \frac{B}{v^3} + \frac{1}{2v^2}\int_0^v v\,M_2(v)\,dv - \frac{1}{2v^3}\int_0^v v^2\,M_2(v)\,dv,$$

où A et B désignent deux constantes arbitraires. La fonction $M_2(v)$ étant olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$, il résulte de la remarque établie au n° **24** que la fonction

$$(18) \qquad \frac{1}{2v^2}\int_0^v v\,M_2(v)\,dv - \frac{1}{2v^3}\int_0^v v^2\,M_2(v)\,dv$$

l'est également : la formule (17) nous montre dès lors que la seule intégrale de (15) satisfaisant à la condition d'être olotrope dans les limites requises s'obtiendra en donnant aux deux constantes arbitraires A, B la valeur zéro. Il n'y a donc à retenir, parmi les intégrales de l'équation différentielle (15), que la fonction (18).

Et, semblablement, il n'y a à retenir, parmi les intégrales de l'équation différentielle (16), que la fonction

$$\frac{1}{2w^2}\int_0^{w} w\,N_2(w)\,dw - \frac{1}{2w^3}\int_0^{w} w^2 N_2(w)\,dw.$$

Chacune des deux fonctions $P_2(v)$, $Q_2(w)$ s'obtient, comme on le voit, à l'aide de deux quadratures, ce qui nécessite en tout quatre quadratures; d'ailleurs, les fonctions $M_2(v)$, $N_2(w)$ prenant, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées, il est manifeste que les fonctions $P_2(v)$, $Q_2(w)$ ainsi déterminées jouissent de la même propriété.

Les éléments C_2, $P_2(v)$, $Q_2(w)$ étant connus, le produit $v^2 w^2 u_2$ l'est aussi, et il se réduit, sur le contour, à une fonction olotrope (réelle) connue de θ, admettant la période 2π; il en est de même de sa dérivée $\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial w}$; on se trouve ainsi ramené au problème suivant :

Déterminer $u_0 + vw u_1$, c'est-à-dire une intégrale réelle de l'équation $\frac{\partial^4 u}{\partial v^2\,\partial w^2} = 0$, par les conditions : 1° que cette intégrale, u, soit quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$; 2° que, sur le contour même, u et $\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial w}$ se réduisent à deux fonctions olotropes données de θ, admettant la période 2π.

En d'autres termes, on se trouve ramené à la résolution du problème $\mathfrak{T}_2$, lequel se ramène lui-même, comme il a été vu (II), à la résolution deux fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$ et à deux quadratures.

En résumé, donc, la résolution du problème $\mathfrak{T}_3$ se trouve bien, comme nous l'avions annoncé, ramenée à la résolution trois fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$ et à six quadratures.

IV. On traiterait de même le cas de $n = 4$, et l'on verrait que le problème $\mathfrak{T}_4$ admet une solution, et une seule, dont la recherche se ramène à la résolution quatre fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$ et à douze quadratures.

Le raisonnement peut se poursuivre indéfiniment : l'entier n étant quelconque, la résolution du problème $\mathfrak{C}_n$ se ramène à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{C}_1$ et à $n(n-1)$ quadratures.

Du problème analogue à $\mathfrak{C}_n$ pour l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = h(x,y).$$

34. Désignons par $h(x,y)$ une fonction (réelle) connue des deux variables réelles x, y, olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{S}_1$, et vérifiant, pour quelque valeur de l'entier k, la relation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k h(x,y)=0.$$

Cela étant, on se propose de *trouver une intégrale (réelle) de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = h(x,y) \tag{1}$$

satisfaisant à l'ensemble des conditions suivantes (les mêmes qui figurent dans l'énoncé du problème $\mathfrak{C}_n$, n° 25) :

1° *Cette intégrale, u, doit être olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{S}_1$*

2° *Sur le contour même, les n quantités*

$$u,\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u,\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u,\quad \ldots,\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n-1} u$$

doivent se réduire à n fonctions olotropes données de θ (admettant la période 2π).

Comme on le verra, *une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{C}_1$ et à $2n+n(n-1)$ quadratures.*

Par la transformation

$$x+iy=v,\qquad x-iy=w,$$

qui, au lieu des deux variables *réelles* x, y, introduit les deux variables *imaginaires conjuguées* v, w, la fonction connue $h(x, y)$ devient une fonction (réelle) connue, $H(v, w)$, quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{C}_1$, et vérifiant, pour quelque valeur de l'entier k, la relation

$$\frac{\partial^{2k} H(v, w)}{\partial v^k \partial w^k} = 0;$$

l'équation (1) devient d'ailleurs

$$4^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \partial w^n} = H(v, w),$$

ou, en posant $\frac{1}{4^n} H(v, w) = G(v, w)$,

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \partial w^n} = G(v, w); \tag{2}$$

et voici le problème auquel on se trouve alors ramené :

L'équation aux dérivées partielles (2) étant considérée comme impliquant la *fonction inconnue réelle* u des *variables imaginaires conjuguées* v, w, et son second membre $G(v, w)$ n'étant autre, au facteur 4^n près, que $H(v, w)$, *trouver une intégrale de cette équation qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes* (les mêmes qui figurent dans l'énoncé du problème $\mathfrak{T}_n$, n° **25**) :

1° *Cette intégrale*, u, *doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{C}_1$.

2° *Sur le contour même, les* n *quantités*

$$u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial v^2 \partial w^2}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial v^{n-1} \partial w^{n-1}}$$

doivent se réduire à n *fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π).

Une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n *fois répétée du problème* $\mathfrak{T}_1$ *et à* $2n + n(n-1)$ *quadratures.*

I. On observera tout d'abord que la fonction réelle $G(v, w)$ jouit des diverses propriétés énumérées il y a un instant pour $H(v, w)$, c'est-à-dire qu'elle est quasi olotrope dans une région comprenant et dépassant un peu l'intérieur du contour $\mathcal{C}_1$, et qu'elle vérifie, pour quelque valeur de l'entier k, la relation

$$\frac{\partial^{2k} G(v, w)}{\partial v^k \, \partial w^k} = 0.$$

On en conclut, en se reportant au n° **31**, que $G(v, w)$ est assimilable, dans la région composée résultant de l'association de la précédente avec sa conjuguée, à une fonction olotrope des deux variables imaginaires entièrement indépendantes v, w, laquelle fonction est exprimable par une somme de termes (en nombre limité) dont chacun a la forme

$$(3) \qquad v^a w^a [C + v R(v) + w S(w)];$$

dans la formule (3), a désigne un entier positif ou nul, C une constante numérique réelle, et $R(v)$, $S(w)$ deux fonctions remplissant la double condition d'être olotropes, la première à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$, la seconde dans la région conjuguée de celle-ci, et de prendre, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. Sur la fonction (3) opérons successivement *deux quadratures, l'une relative à* v, *l'autre relative à* w, en prenant zéro pour valeur initiale tant de la variable v que de la variable w, et en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse. En effectuant l'expression (3), il vient

$$C v^a w^a + v^{a+1} w^a R(v) + v^a w^{a+1} S(w),$$

et l'opération indiquée donne dès lors

$$(4) \qquad C \frac{v^{a+1} w^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{w^{a+1}}{a+1} \int_0^v v^{a+1} R(v)\, dv + \frac{v^{a+1}}{a+1} \int_0^w w^{a+1} S(w)\, dw.$$

Il est d'ailleurs facile d'apercevoir, par des raisonnements tout à fait analogues à d'autres que nous avons eu l'occasion d'exposer dans ce qui précède, que l'intégrale $\int_0^v v^{a+1} R(v)\, dv$ est le produit de v^{a+2} par une fonction jouissant de la propriété d'être olotrope dans les limites indiquées pour $R(v)$; que, semblablement, l'intégrale $\int_0^w w^{a+1} S(w)\, dw$

est le produit de w^{a+2} par une fonction jouissant de la propriété d'être olotrope dans les limites indiquées pour $S(w)$; et que l'expression (4) est de la forme

$$v^{a+1}w^{a+1}[D + vE(v) + wF(w)],$$

où les éléments D, $E(v)$, $F(w)$ jouissent des mêmes propriétés que les éléments C, $R(v)$, $S(w)$ de l'expression (3). L'expression (4) possède donc la double propriété d'être olotrope dans la région composée dont il a été question quelques lignes plus haut, et de prendre des valeurs réelles quand v et w sont imaginaires conjuguées.

II. Si, dans l'équation (2), on considère l'inconnue u comme une fonction des deux variables imaginaires entièrement indépendantes v, w, on obtiendra manifestement une intégrale particulière de cette équation en effectuant, sur $G(v, w)$, $2n$ quadratures successives, dont n relatives à v et n relatives à w, et en ayant soin que le résultat de chacune d'elles s'annule pour la valeur initiale zéro de la variable qu'elle intéresse : ces $2n$ quadratures pourront d'ailleurs être exécutées dans un ordre tel, que deux consécutives quelconques intéressent deux variables différentes. Cela étant, la conclusion de l'alinéa précédent I, appliquée n fois de suite, montre que *l'intégrale particulière finalement obtenue possède la double propriété d'être olotrope dans la région composée ci-dessus envisagée, et de prendre des valeurs réelles quand v et w sont imaginaires conjuguées.*

III. *L'équation aux dérivées partielles* (2), *considérée comme impliquant la fonction inconnue réelle u des variables imaginaires conjuguées v, w, admet certainement quelque intégrale particulière, U, quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour Σ_1.*

C'est ce qui résulte immédiatement de l'alinéa précédent II.

IV. Revenons au problème posé sur l'équation (2) au début du présent n° **34**.

Soit U l'intégrale particulière de (2) spécifiée à l'alinéa III, et qui s'obtient, comme on l'a vu, à l'aide de $2n$ quadratures : en opérant sur (2) la transformation $u = U + u'$, où u' désigne une nouvelle fonction inconnue introduite à la place de u, on se trouve ramené à la considération de l'équation

$$\frac{\partial^{2n} u'}{\partial x^n \partial y^n} = 0;$$

on aura alors, d'après ce qui a été établi, à résoudre n fois le problème $\mathfrak{T}_1$ et à exécuter $n(n-1)$ quadratures.

En résumé, donc, on se trouve bien conduit, comme nous l'avions annoncé, à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$ et à $2n + n(n-1)$ quadratures.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0$: DEUXIÈME PROBLÈME; SOLUTION DANS LE CAS D'UN CONTOUR CIRCULAIRE.

Dérivées d'une fonction de deux variables réelles prises suivant les normales à un contour.

53. Désignant par r, θ deux variables indépendantes réelles, et par r_0, R deux valeurs particulières fixes de la première $(r_0 < R)$, considérons, dans l'espace $[[r, \theta]]$, la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$, évidemment normale, définie par la double inégalité

$$r_0 < r < R \quad (\theta \text{ arbitraire});$$

relativement à deux axes rectangulaires Or, $O\theta$ tracés dans un plan, cette région se trouve graphiquement représentée par l'intérieur de la bande indéfinie comprise entre les deux droites

$$r = r_0, \qquad r = R,$$

parallèles à l'axe $O\theta$.

Soient maintenant

$$E(r, \theta), \quad F(r, \theta)$$

deux fonctions réelles, *olotropes* dans toute l'étendue de cette région, et y jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles admettent l'une et l'autre, par rapport à θ, la période 2π.

Inversement, les relations numériques

$$E(r_1, \theta_1) = E(r_2, \theta_2),$$
$$F(r_1, \theta_1) = F(r_2, \theta_2)$$

ne peuvent avoir lieu en même temps que si l'on a à la fois

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{multiple entier de } 2\pi.$$

2° Le déterminant différentiel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial r} & \frac{\partial E}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

est constamment différent de zéro.

Ces hypothèses entraînent diverses conséquences que nous nous bornerons à énumérer (¹) :

I. Soient x, y deux autres variables liées aux premières par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = E(r, \theta), \\ y = F(r, \theta); \end{cases}$$

à la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$ ci-dessus spécifiée correspond, dans l'espace $[[x, y]]$, une région, $\mathfrak{R}_{x,y}$, formée par l'ensemble des points qui, en vertu des formules (1), correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{R}_{r,\theta}$: *cette région $\mathfrak{R}_{x,y}$ est elle-même normale.*

II. Si, dans les formules (1), on donne à r une valeur fixe, on obtient une courbe pour laquelle les coordonnées x, y d'un point variable sont fonctions de θ; inversement, si l'on donne à θ une valeur fixe, on obtient une courbe où les coordonnées d'un point variable sont fonctions de r.

Cela étant :

1° La famille $r =$ const. se compose de courbes fermées dont chacune s'obtient tout entière en faisant varier θ de zéro à 2π.

(¹) On en trouvera la démonstration dans le Mémoire intitulé : *Sur l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions données le long d'un contour*, n° 1 (*Annales de l'École Normale*, 1913).

La famille $\theta = \text{const.}$ s'obtient tout entière en égalant θ aux diverses valeurs de ce même intervalle.

2° Aucune courbe des deux familles ne présente de point singulier, et deux courbes, $r = r_1$, $\theta = \theta_1$, appartenant respectivement aux deux familles, ne peuvent être tangentes au point commun fourni par (r_1, θ_1).

3° Si, dans une courbe $r = \text{const.}$, on fait croître θ de zéro à $2\pi (0 \leqq \theta < 2\pi)$, on n'obtient chaque point (x, y) qu'une seule fois. La même chose a lieu si, dans une courbe $\theta = \text{const.}$, on fait croître r de r_0 à R.

4° En supposant $r_1 - r_2$ différent de zéro, les deux courbes $r = r_1$, $r = r_2$ n'ont aucun point commun. Même chose pour les deux courbes $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, si $\theta_1 - \theta_2$ n'est pas un multiple entier de 2π.

Dans ce qui suit, nous nommerons *couronne* la région (normale) de l'espace $[[x, y]]$ comprise entre deux courbes de la famille $r = \text{const.}$ (on doit faire abstraction des deux courbes frontières).

36. Désignant par r, ρ, θ trois paramètres arbitraires, considérons actuellement les deux systèmes de formules

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{E}(r, \theta), \\ y = \mathrm{F}(r, \theta); \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{H}(\rho, \theta), \\ y = \mathrm{K}(\rho, \theta), \end{cases}$$

dont les seconds membres sont supposés satisfaire aux conditions suivantes :

1° Dans la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$ de l'espace $[[r, \theta]]$ définie par la double inégalité

$$(4) \qquad r_0 < r < \mathrm{R} \quad (\theta \text{ arbitraire}),$$

les fonctions $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$ jouissent des propriétés spécifiées au début du numéro précédent, c'est-à-dire qu'elles sont olotropes, admettent par rapport à θ la période 2π, possèdent un déterminant différentiel constamment différent de zéro, et qu'enfin les relations numériques

$$E(r_1, \theta_1) = E(r_2, \theta_2),$$
$$F(r_1, \theta_1) = F(r_2, \theta_2),$$

lorsqu'on les suppose simultanément vérifiées, entraînent de toute nécessité

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{mult. ent. de } 2\pi.$$

2° Semblablement, dans la région $\mathfrak{R}_{\rho,\theta}$ de l'espace $[[\rho, \theta]]$ définie par la double inégalité

(5) $$\rho_0 < \rho < P \quad (\theta \text{ arbitraire}),$$

les fonctions $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$ sont olotropes, admettent par rapport à θ la période 2π, possèdent un déterminant différentiel constamment différent de zéro, et les relations numériques

$$H(\rho_1, \theta_1) = H(\rho_2, \theta_2),$$
$$K(\rho_1, \theta_1) = K(\rho_2, \theta_2),$$

lorsqu'on les suppose simultanément vérifiées, entraînent de toute nécessité

$$\rho_1 = \rho_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{mult. ent. de } 2\pi.$$

3° Si l'on désigne par r', ρ' certaines valeurs numériques déterminées, vérifiant respectivement les relations

$$r_0 < r' < R, \qquad \rho_0 < \rho' < P,$$

l'hypothèse numérique $r = r'$, introduite dans les seconds membres de (2), fournit les deux mêmes fonctions de θ que l'hypothèse numérique $\rho = \rho'$, introduite dans les seconds membres de (3), en sorte que les deux systèmes de formules définissent alors un même contour.

Désignons maintenant par $u(x, y)$ une fonction de x et de y qui, si l'on considère la région définie par (2) et (4), soit olotrope dans une couronne suffisamment mince renfermant le contour $r = r'$, et qui, si l'on considère la région définie par (3) et (5), le soit dans une couronne suffisamment mince renfermant le contour $\rho = \rho'$: comme, par hypothèse, les deux contours coïncident, l'un quelconque de ces deux derniers faits est une conséquence de l'autre [1]. Si l'on forme alors les

[1] *Loc. cit.*, n° 2.

deux fonctions composées

$$u[E(r, \theta), F(r, \theta)], \tag{6}$$

$$u[H(\rho, \theta), K(\rho, \theta)], \tag{7}$$

l'hypothèse numérique $r = r'$, introduite dans la fonction (6) et ses dérivées de tous ordres relatives à r, les réduit à des fonctions olotropes de θ admettant la période 2π; et la même chose a lieu pour la fonction (7) et ses dérivées de tous ordres relatives à ρ dans l'hypothèse numérique $\rho = \rho'$.

Cela étant, *pour que la fonction composée* (6) *et ses* $n-1$ *premières dérivées relatives à* r *se réduisent, pour* $r = r'$, *à* n *fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π), *il faut et il suffit que la fonction composée* (7) *et ses* $n-1$ *premières dérivées relatives à* ρ *se réduisent, pour* $\rho = \rho'$, *à* n *autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*). *Pour calculer ces* n *dernières quand on se donne les* n *premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions* $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$, *exclusion faite de la composante* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise.*

Nous avons exposé dans un Mémoire antérieur la démonstration détaillée de cette proposition [1].

37. L'énoncé qui vient d'être formulé est susceptible d'une forme géométrique intéressante que nous indiquons un peu plus loin (n° **39**, *infra*). Nous poserons à cet effet la définition suivante :

Soient x, y deux variables indépendantes (réelles); $u(x, y)$ une fonction de ces deux variables, olotrope dans une certaine région; C une courbe de la région, représentée par les formules

$$x = \xi(r), \qquad y = \eta(r),$$

où r désigne un paramètre arbitraire : on ne considère cette courbe que dans une portion dépourvue de point singulier et où chaque point ne soit obtenu qu'une seule fois. Un sens positif ayant été adopté pour les arcs sur la courbe C, supposons que les coordonnées x, y d'un point variable de la courbe aient été exprimées *en fonctions de*

[1] *Loc. cit.*, n° 2.

l'arc s; en les remplaçant par ces nouvelles valeurs dans la fonction $u(x, y)$, on obtiendra une fonction composée, u_s, ne dépendant que de la seule variable s. Cela étant, nous nommerons *dérivée d'ordre* n de $u(x, y)$ *prise suivant la courbe* C la dérivée d'ordre n (par rapport à s) de la fonction composée u_s. Cette définition est visiblement indépendante de l'origine choisie sur la courbe pour compter les arcs; les dérivées des ordres impairs changent simplement de signe lorsqu'on change le sens positif.

38. Revenons actuellement aux formules (2), posées au début du n° **36**,

$$x = \mathrm{E}(r, \theta), \qquad y = \mathrm{F}(r, \theta),$$

et faisons sur leurs seconds membres, $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$, les diverses hypothèses qni s'y trouvent énumérées. Comme dans le passage cité, désignons par r' une valeur numérique déterminée comprise entre r_0 et $\mathrm{R}(r_0 < r' < \mathrm{R})$, et soit

$$x = \lambda(\theta), \qquad y = \mu(\theta) \tag{8}$$

le contour fermé fourni par les formules (2) dans l'hypothèse numérique $r = r'$: si l'on considère ce contour, dont un point variable dépend de θ, on peut dire qu'à chacun de ses points correspond, d'après les mêmes formules (2), une autre courbe dont un point variable dépend de r.

Cela étant, *pour qu'une fonction* $u(x, y)$ *et ses dérivées des ordres* $1, 2, \ldots, n-1$, *prises suivant les courbes* $\theta =$ const. *de la famille* (2), *se réduisent, sur le contour* (8), *à des fonctions olotropes données de* θ (*admettant nécessairement la période* 2π), *il faut et il suffit que la fonction composée*

$$u[\mathrm{E}(r, \theta), \mathrm{F}(r, \theta)]$$

et ses dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n-1$ *relatives à* r *se réduisent, pour* $r = r'$, *à certaines autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*). *Pour calculer ces dernières lorsqu'on se donne les premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions*

$E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, *exclusion faite de la composante* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise* (¹).

39. Le simple rapprochement des nᵒˢ **36** et **38** fournit immédiatement l'énoncé auquel nous avons fait allusion plus haut (nº **37**).

Considérant les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} x = E(r, \theta), \\ y = F(r, \theta) \end{cases}$$

et

$$(3) \qquad \begin{cases} x = H(\rho, \theta), \\ y = K(\rho, \theta), \end{cases}$$

posées au début du nº **36**, faisons sur leurs seconds membres, $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$, les diverses hypothèses qui s'y trouvent énumérées, et soit

$$(9) \qquad x = \lambda(\theta), \qquad y = \mu(\theta)$$

le contour fermé que fournissent concurremment, d'une part, les formules (2) dans l'hypothèse numérique $r = r'$, d'autre part, les formules (3) dans l'hypothèse numérique $\rho = \rho'$.

Cela étant, *pour qu'une fonction* $u(x, y)$ *et ses dérivées des ordres* $1, 2, \ldots, n-1$, *prises suivant les courbes* $\theta =$ const. *de la famille* (2), *se réduisent, sur le contour fermé* (9), *à* n *fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π), *il faut et il suffit que la fonction* $u(x, y)$ *dont il s'agit et ses dérivées des ordres* $1, 2, \ldots, n-1$, *prises suivant les courbes* $\theta =$ const. *de la famille* (3), *se réduisent, sur le même contour* (9), *à certaines autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*). *Pour calculer ces dernières lorsqu'on se donne les premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions* $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$, *exclusion faite de la fonction* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise*.

40. Nous allons examiner actuellement un choix particulier des

(¹) *Loc. cit.*, nᵒˢ 3 et 4.

quatre fonctions désignées dans ce qui précède par $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$.

Désignons par $\lambda(\theta)$, $\mu(\theta)$ deux fonctions réelles, *olotropes* dans toute l'étendue de l'espace réel $|[\theta]|$, et y jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles admettent l'une et l'autre la période 2π. Inversement, les relations numériques

$$\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2), \qquad \mu(\theta_1) = \mu(\theta_2)$$

ne peuvent avoir lieu en même temps que si $\theta_1 - \theta_2$ est un multiple entier de 2π.

2° Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix},$$

formé avec ces deux fonctions et leurs dérivées premières, est constamment différent de zéro.

[C'est ce qui a lieu, par exemple, si l'on prend

$$\lambda(\theta) = f(\theta) \cos\theta, \qquad \mu(\theta) = f(\theta) \sin\theta,$$

et si l'on suppose que, dans toute l'étendue de l'espace réel $|[\theta]|$, la fonction olotrope et réelle $f(\theta)$, admettant la période 2π, ne s'annule jamais.]

Cela étant, considérons les deux systèmes de formules

$$(10) \qquad \begin{cases} x = r\lambda(\theta), \\ y = r\mu(\theta), \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} x = \lambda(\theta) + \rho\mu'(\theta), \\ y = \mu(\theta) - \rho\lambda'(\theta); \end{cases}$$

si l'on représente graphiquement les systèmes de valeurs (x, y) à l'aide de deux axes rectangulaires Ox, Oy tracés dans un plan, les formules (10) définissent un contour homothétique du contour

$$(12) \qquad \begin{cases} x = \lambda(\theta), \\ y = \mu(\theta) \end{cases}$$

par rapport à l'origine O, le rapport d'homothétie étant r, et les formules (11) définissent la normale au contour (12) au point θ. Si, d'une part, on introduit dans les formules (10) l'hypothèse numérique $r=1$, on obtient le contour (12); si, d'autre part, on introduit dans les formules (11) l'hypothèse numérique $\rho=0$, on retombe sur ce même contour (12) : or, nous allons voir qu'en faisant varier r dans un intervalle suffisamment petit s'étendant de part et d'autre de la valeur 1, et ρ dans un intervalle suffisamment petit s'étendant de part et d'autre de la valeur zéro, les seconds membres des formules (10) et (11) remplissent les diverses conditions spécifiées au début du n° **56**.

En premier lieu, on voit que, dans toute l'étendue de l'espace réel $[[r, \theta]]$, les seconds membres de (10) sont olotropes; que, dans toute l'étendue de l'espace réel $[[\rho, \theta]]$, les seconds membres de (11) jouissent de la même propriété; et que, par rapport à θ, les uns et les autres admettent la période 2π.

On voit de plus que, si r n'est pas nul, le déterminant différentiel des seconds membres de (10) est différent de zéro, car il a pour valeur

$$r\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}:$$

et que, pour ρ numériquement assez petit, le déterminant différentiel des seconds membres de (11) est lui-même différent de zéro. Ce dernier a en effet pour valeur

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \mu' & \lambda'+\rho\mu'' \\ -\lambda' & \mu'-\rho\lambda'' \end{vmatrix} = \lambda'^2+\mu'^2+\rho(\lambda'\mu''-\mu'\lambda''),$$

quantité dont le module est supérieur à

$$\lambda'^2+\mu'^2-\operatorname{mod}\rho \operatorname{mod}(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'');$$

or, dans l'intervalle $0\leq\theta\leq 2\pi$, et par suite pour toutes les valeurs réelles de θ, la somme $\lambda'^2+\mu'^2$, qui ne s'annule jamais, reste constamment supérieure à quelque nombre positif fixe, l, convenablement choisi, tandis que, d'autre part, le module de $\lambda'\mu''-\mu'\lambda''$ reste constamment inférieur à un autre nombre positif fixe, L [1] : il vient

[1] Cela en vertu de propositions générales relatives aux régions à la fois limitées et complètes (voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chapitre I).

donc

$$\mathrm{mod}[\lambda'^2 + \mu'^2 + \rho(\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'')] > l - L\,\mathrm{mod}\,\rho,$$

d'où résulte que, pour ρ suffisamment petit, le premier membre de l'inégalité, et par suite le déterminant différentiel (13), sont constamment différents de zéro.

Reste à établir les deux points suivants :

1° Si, dans le plan de notation graphique du couple réel (r, θ), on considère, parallèlement à l'axe des θ, une bande indéfinie suffisamment mince ayant pour médiane $r = 1$, les relations numériques

$$(14)\qquad \begin{cases} r_1 \lambda(\theta_1) = r_2 \lambda(\theta_2), \\ r_1 \mu(\theta_1) = r_2 \mu(\theta_2) \end{cases}$$

n'y peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{mult. ent. de } 2\pi;$$

ou, ce qui revient au même, dans une bande suffisamment mince, limitée aux deux valeurs $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ (et les comprenant), les relations (14) ne peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{l'une des trois valeurs } 0,\ 2\pi,\ -2\pi.$$

2° Si, dans le plan de notation graphique du couple réel (ρ, θ), on considère, parallèlement à l'axe des θ, une bande indéfinie suffisamment mince ayant pour médiane $\rho = 0$, les relations numériques

$$(15)\qquad \begin{cases} \lambda(\theta_1) + \rho_1 \mu'(\theta_1) = \lambda(\theta_2) + \rho_2 \mu'(\theta_2), \\ \mu(\theta_1) - \rho_1 \lambda'(\theta_1) = \mu(\theta_2) - \rho_2 \lambda'(\theta_2) \end{cases}$$

n'y peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$\rho_1 = \rho_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{mult. ent. de } 2\pi;$$

ou, ce qui revient au même, dans une bande suffisamment mince, limitée aux deux valeurs $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ (et les comprenant), les relations (15) ne peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$\rho_1 = \rho_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{l'une des trois valeurs } 0,\ 2\pi,\ -2\pi.$$

Or, le deuxième point, 2°, se trouve exposé en détail dans un Mémoire antérieur ([1]).

Pour le premier point, 1°, si l'on pose $r - 1 = t$, les formules (10) prendront la forme

$$x = t\lambda(\theta) + \lambda(\theta),$$
$$y = t\mu(\theta) + \mu(\theta),$$

et l'on se trouvera ramené à établir ce qui suit :

Si, dans le plan de notation graphique du couple réel (t, θ), on considère, parallèlement à l'axe des θ, une bande suffisamment mince ayant pour médiane $t = 0$, et limitée aux deux valeurs $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ (qu'elle est supposée comprendre), les relations numériques

$$t_1\lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_1) = t_2\lambda(\theta_2) + \lambda(\theta_2),$$
$$t_1\mu(\theta_1) + \mu(\theta_1) = t_2\mu(\theta_2) + \mu(\theta_2)$$

n'y peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$t_1 = t_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{l'une des trois valeurs } 0,\ 2\pi,\ -2\pi.$$

Pour l'établir, on fera les mêmes raisonnements que s'il s'agissait de 2°.

41. Des nos **36**, **38** et **39**, rapprochés de **40**, on tire immédiatement la conséquence particulière suivante :

Soit $u(x, y)$ une fonction de x, y, olotrope dans l'intérieur d'une zone suffisamment mince s'étendant de part et d'autre du contour (12). *Pour que cette fonction et ses dérivées des ordres* $1, 2, \ldots, n-1$, *prises suivant les normales au contour, se réduisent, sur le contour même, à des fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π), *il faut et il suffit que la fonction composée*

$$u[r\lambda(\theta),\ r\mu(\theta)]$$

et ses dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n-1$ *relatives à* r *se réduisent,*

([1]) *Sur l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions données le long d'un contour* (*Annales de l'École Normale*, 1913). *Voir* les quatre dernières lignes de la page 41, et les pages 42, 43, 44; on y remplacera seulement la notation r par la notation ρ.

sur le contour dont il s'agit (c'est-à-dire pour $r = 1$), *à certaines autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*). *Pour calculer ces dernières lorsqu'on se donne les premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions* $\lambda(\theta)$, $\mu(\theta)$, *exclusion faite de la fonction* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise.*

Énoncé et transformation du deuxième problème.

42. Les mêmes choses étant posées et les mêmes notations étant adoptées qu'au début du n° **25**, le deuxième problème se formule comme il suit :

PROBLÈME $\mathfrak{Q}_n$. — On se propose de *trouver une intégrale de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0 \tag{1}$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

1° *Cette intégrale doit être olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{C}_1$ [défini à l'aide des formules $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$].

2° *En lui adjoignant ses* $n - 1$ *premières dérivées prises suivant la normale au contour, ces* n *quantités doivent se réduire, sur le contour même, à* n *fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π).

[On notera, au passage, que le problème $\mathfrak{Q}_1$ est identique au problème $\mathfrak{P}_1$ (*voir* le n° **25**).]

La condition 2° peut d'ailleurs, si l'on se reporte à ce qui vient d'être établi (n° **41**), être remplacée par la suivante :

La fonction composée qui se déduit de l'intégrale par la substitution

$$x = r f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r f(\theta)\sin\theta,$$

et les dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n-1$ *relatives à* r *de cette fonction composée, doivent, sur le contour* $\mathfrak{C}_1$ (c'est-à-dire pour $r = 1$), *se* *réduire à n fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π).

Par la transformation

$$x + iy = v, \qquad x - iy = w,$$

qui, au lieu des deux variables *réelles* x, y, introduit les deux variables *imaginaires conjuguées* v, w, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n \, \partial w^n} = 0,$$

et voici la question à laquelle on est alors ramené :

PROBLÈME $\mathcal{S}_n$. — *Trouver une intégrale réelle de l'équation aux dérivées partielles* (2) *qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :*

1° *Cette intégrale doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* Σ_1 (*voir* n° **7**, IV, remarque finale).

2° *La fonction composée qui se déduit de l'intégrale par la substitution*

$$v = r f(\theta) e^{i\theta}, \qquad w = r f(\theta) e^{-i\theta},$$

et les dérivées des ordres 1, 2, ..., $n-1$ *relatives à* r *de cette fonction composée, doivent, sur le contour* Σ_1, *se réduire à* n *fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π).

[On notera, au passage, que le problème $\mathcal{S}_1$ est identique au problème $\mathfrak{S}_1$ (*voir* le n° **25**).]

Avant de poursuivre, transformons une dernière fois l'énoncé de la condition 2°.

Les fonctions simples $rf(\theta)e^{i\theta}$, $rf(\theta)e^{-i\theta}$ étant linéaires par rapport à r, on sait qu'en désignant par u la composante (fonction de v et w), la dérivée d'ordre p relative à r de la fonction composée est symboliquement représentée par la formule

$$\left[f(\theta) e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial v} + f(\theta) e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial w} \right]^p u.$$

Il faudra donc que, pour l'intégrale cherchée, les n expressions

$$
\begin{gathered}
u, \\
\left[f(\theta)\, e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial v} + f(\theta)\, e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial w}\right] u, \\
\left[f(\theta)\, e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial v} + f(\theta)\, e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial w}\right]^2 u, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\left[f(\theta)\, e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial v} + f(\theta)\, e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial w}\right]^{n-1} u
\end{gathered}
$$

se réduisent sur le contour $\mathfrak{S}_1$, c'est-à-dire pour $v = f(\theta)\, e^{i\theta}$, $w = f(\theta)\, e^{-i\theta}$, à n fonctions olotropes données de θ; ou bien encore, que les n expressions

$$
u, \quad \left(v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}\right) u, \quad \left(v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 u, \quad \ldots, \quad \left(v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{w}\right)^{n-1} u
$$

se réduisent, dans cette même hypothèse, à n fonctions olotropes données de θ.

Finalement, donc, l'intégrale cherchée de l'équation (2), où se trouve impliquée la *fonction inconnue réelle* u des *variables imaginaires conjuguées* v, w, doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° *Cette intégrale doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* $\mathfrak{S}_1$.

2° *Sur le contour même*, c'est-à-dire pour $v = f(\theta)\, e^{i\theta}$, $w = f(\theta) e^{-i\theta}$, *les* n *quantités*

$$
u, \quad \left(v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}\right) u, \quad \left(v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 u, \quad \ldots, \quad \left(v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-1} u
$$

doivent se réduire à n fonctions olotropes données de θ (*admettant la période* 2π).

43. Aux considérations générales qui viennent d'être exposées nous adjoindrons la remarque suivante :

Désignons par $h(x, y)$ une fonction (réelle) connue des variables réelles x, y, olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathfrak{S}_1$, et vérifiant, pour quelque valeur de l'entier k, la relation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k h(x,y)=0.$$

Cela étant, *si, au lieu de l'équation* (1), *on considère l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u=h(x,y),$$

et qu'on assujettisse son intégrale à l'ensemble des conditions imposées par l'énoncé du problème $\mathfrak{Q}_n$, *on se trouve, moyennant* $2n$ *quadratures, ramené à l'équation* (1) *elle-même.*

Même raisonnement qu'au n° **34**.

Examen du deuxième problème dans le cas d'un contour circulaire.

44. D'après ce qui a été vu au n° **12**, et en supposant, comme il est toujours permis de le faire, le rayon du cercle égal à 1, le problème à résoudre se ramène au suivant :

On considère, d'une part, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial v^n\,\partial w^n}=0, \tag{1}$$

impliquant la *fonction inconnue réelle* u des *variables imaginaires conjuguées*

$$v=x+iy,\qquad w=x-iy;$$

d'autre part, le contour *circulaire*, C, défini à l'aide des formules

$$x=\cos\theta,\qquad y=\sin\theta;$$

et l'on se propose de *trouver une intégrale de l'équation* (1) *qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :*

1° *Cette intégrale,* u, *doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour* C.

2° *Sur le contour même,* c'est-à-dire pour $v=e^{i\theta}$, $w=e^{-i\theta}$, *les*

n quantités

$$u, \quad \left(v\frac{\partial}{\partial v} + w\frac{\partial}{\partial w}\right)u, \quad \left(v\frac{\partial}{\partial v} + w\frac{\partial}{\partial w}\right)^2 u, \quad \ldots, \quad \left(v\frac{\partial}{\partial v} + w\frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-1} u$$

doivent se réduire à n fonctions olotropes données de θ (*admettant la période* 2π).

Comme on va le voir, *une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée* du problème $\mathcal{S}_1$, identique à $\mathcal{E}_1$, ou, ce qui revient au même, *du problème* $\mathcal{T}_1$ (envisagé dans le cas du contour circulaire C).

I. $n = 1$.

On sait que l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial w} = 0$, à laquelle se réduit en ce cas l'équation (1), admet, conformément à l'énoncé ci-dessus, une intégrale (réelle), et une seule, possédant la double propriété d'être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour circulaire C, et de se réduire, sur le contour même, à une fonction olotrope donnée de θ (admettant la période 2π). L'existence et l'unicité de cette intégrale étant assurées, la dernière partie de l'énoncé, relative à sa recherche, se trouve vraie d'elle même.

II. $n = 2$.

Voici ce que devient, en ce cas, l'énoncé du problème :

Trouver une intégrale (réelle) de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial v^2\,\partial w^2} = 0 \tag{2}$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

1° Cette intégrale, u, doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour C.

2° Sur le contour même, les quantités

$$u, \quad v\frac{\partial u}{\partial v} + w\frac{\partial u}{\partial w}$$

doivent se réduire à deux fonctions olotropes données de θ (admettant la période 2π).

Comme on va le voir, une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution deux fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$.

D'après ce qui a été vu au Chapitre précédent (n° **35, I**), les deux fonctions données de θ peuvent se mettre sous les formes respectives

$$(3)\qquad \begin{cases} D_0 + e^{i\theta}M_0(e^{i\theta}) + e^{-i\theta}N_0(e^{-i\theta}), \\ D_1 + e^{i\theta}M_1(e^{i\theta}) + e^{-i\theta}N_1(e^{-i\theta}), \end{cases}$$

où D_0, D_1 désignent deux constantes numériques réelles, et $M_0(v)$, $M_1(v)$, $N_0(w)$, $N_1(w)$ quatre séries entières admettant toutes un rayon de convergence plus grand que 1, telles, d'ailleurs, que dans chacun des couples

$$M_0(v),\quad N_0(w);\qquad M_1(v),\quad N_1(w),$$

les deux séries prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. La recherche de ces six éléments n'est autre chose que la résolution deux fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$, et nous les supposerons connus.

Cela étant, si l'équation (2) admet quelque intégrale (réelle), u, satisfaisant à l'ensemble des conditions que nous venons de formuler, cette intégrale peut, puisqu'elle satisfait, notamment, à la condition 1°, se mettre sous la forme

$$(4)\qquad u = C_0 + vP_0(v) + wQ_0(w) + vw[C_1 + vP_1(v) + wQ_1(w)],$$

où C_0, C_1 désignent des constantes numériques réelles provisoirement indéterminées, et

$$P_0(v),\quad Q_0(w);\qquad P_1(v),\quad Q_1(w)$$

deux couples provisoirement indéterminés de séries entières, dont chacun est assujetti à la double condition que les deux séries dont il se compose admettent un rayon de convergence plus grand que 1, et qu'elles prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. On déduit d'ailleurs de (4)

$$(5)\quad v\frac{\partial u}{\partial v} + w\frac{\partial u}{\partial w} = vP_0(v) + v^2P_0'(v) + wQ_0(w) + w^2Q_0'(w) \\ + vw[2C_1 + 3vP_1(v) + v^2P_1'(v) + 3wQ_1(w) + w^2Q_1'(w)].$$

Or, l'hypothèse $v = e^{i\theta}$, $w = e^{-i\theta}$, introduite dans les expressions (4) et (5), les transforme respectivement en

$$C_0 + C_1 + e^{i\theta}[P_0(e^{i\theta}) + P_1(e^{i\theta})] + e^{-i\theta}[Q_0(e^{-i\theta}) + Q_1(e^{-i\theta})]$$

et

$$2C_1 + e^{i\theta}[P_0(e^{i\theta}) + e^{i\theta}P'_0(e^{i\theta}) + 3P_1(e^{i\theta}) + e^{i\theta}P'_1(e^{i\theta})]$$
$$+ e^{-i\theta}[Q_0(e^{-i\theta}) + e^{-i\theta}Q'_0(e^{-i\theta}) + 3Q_1(e^{-i\theta}) + e^{-i\theta}Q'_1(e^{-i\theta})].$$

On doit donc avoir, par comparaison avec les expressions (3), les relations numériques

$$C_0 + C_1 = D_0, \qquad 2C_1 = D_1,$$

lesquelles déterminent pour C_0 et C_1 des valeurs réelles, puis les identités en v

$$(6) \qquad P_0(v) + P_1(v) = M_0(v),$$
$$(7) \qquad P_0(v) + 3P_1(v) + vP'_0(v) + vP'_1(v) = M_1(v),$$

lesquelles vont servir à déterminer $P_0(v)$ et $P_1(v)$, puis enfin les identités en w

$$(8) \qquad Q_0(w) + Q_1(w) = N_0(w),$$
$$(9) \qquad Q_0(w) + 3Q_1(w) + wQ'_0(w) + wQ'_1(w) = N_1(w),$$

lesquelles vont servir à déterminer $Q_0(w)$ et $Q_1(w)$.

Considérons d'abord les identités (6) et (7). On a, en différentiant (6),

$$(10) \qquad P'_0(v) + P'_1(v) = M'_0(v).$$

Si, dans (7), on tient compte de (6) et (10), il vient

$$2P_1(v) = \ldots,$$

le second membre (non écrit) étant une série connue, entière en v, qui admet un rayon de convergence plus grand que 1 ; après quoi on tirera de (6), pour $P_0(v)$, une expression de même nature.

Semblablement les relations (8) et (9) fourniront pour $Q_0(w)$ et $Q_1(w)$ des séries entières en w admettant un rayon de convergence plus grand que 1.

Et il est manifeste que, dans chacun des couples

$$P_0(v), \quad Q_0(w); \qquad P_1(v), \quad Q_1(w)$$

ainsi déterminés, les deux séries prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées.

III. $n = 3$.

Voici ce que devient, en ce cas, l'énoncé du problème :

Trouver une intégrale (réelle) de l'équation

$$\frac{\partial^6 u}{\partial v^3\, \partial w^3} = 0 \tag{11}$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

1° Cette intégrale, u, doit être quasi olotrope à l'intérieur et un peu au delà du contour C.

2° Sur le contour même, les quantités

$$u, \quad v\frac{\partial u}{\partial v} + w\frac{\partial u}{\partial w}, \quad v^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2vw\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} + w^2\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$$

doivent se réduire à trois fonctions olotropes données de θ (admettant la période 2π).

Comme on va le voir, une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution trois fois répétée du problème $\mathfrak{E}_1$.

D'après ce qui a été vu au Chapitre précédent (n° **33**, I), les trois fonctions données de θ peuvent se mettre sous les formes respectives

$$\left\{\begin{array}{l} D_0 + e^{i\theta}M_0(e^{i\theta}) + e^{-i\theta}N_0(e^{-i\theta}), \\ D_1 + e^{i\theta}M_1(e^{i\theta}) + e^{-i\theta}N_1(e^{-i\theta}), \\ D_2 + e^{i\theta}M_2(e^{i\theta}) + e^{-i\theta}N_2(e^{-i\theta}), \end{array}\right. \tag{12}$$

où D_0, D_1, D_2 désignent trois constantes numériques réelles, et $M_0(v)$, $M_1(v)$, $M_2(v)$, $N_0(w)$, $N_1(w)$, $N_2(w)$ six séries entières admettant toutes un rayon de convergence plus grand que 1, telles d'ailleurs que, dans chacun des couples

$$M_0(v),\ N_0(w); \qquad M_1(v),\ N_1(w); \qquad M_2(v),\ N_2(w),$$

les deux séries prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. La recherche de ces neuf éléments n'est autre chose que la résolution trois fois répétée du problème $\mathfrak{T}_1$, et nous les supposerons connus.

Cela étant, si l'équation (11) admet quelque intégrale (réelle), u, satisfaisant à l'ensemble des conditions que nous venons de formuler, cette intégrale peut, puisqu'elle satisfait, notamment, à la condition 1°, se mettre sous la forme

$$
(13)\qquad \begin{aligned} u = {} & C_0 + vP_0(v) + wQ_0(w) \\ & + vw\,[C_1 + vP_1(v) + wQ_1(w)] \\ & + v^2w^2[C_2 + vP_2(v) + wQ_2(w)], \end{aligned}
$$

où C_0, C_1, C_2 désignent des constantes réelles provisoirement indéterminées, et

$$
P_0(v),\ \ Q_0(w);\qquad P_1(v),\ \ Q_1(w);\qquad P_2(v),\ \ Q_2(w)
$$

trois couples provisoirement indéterminés de séries entières, dont chacun est assujetti à la double condition que les deux séries dont il se compose admettent un rayon de convergence plus grand que 1, et qu'elles prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées. On déduit d'ailleurs de (13)

$$
(14)\qquad \begin{aligned} v\frac{\partial u}{\partial v} + w\frac{\partial u}{\partial w} = {} & vP_0(v) + v^2P_0'(v) + wQ_0(w) + w^2Q_0'(w) \\ & + vw\,[2C_1 + 3vP_1(v) + v^2P_1'(v) + 3wQ_1(w) + w^2Q_1'(w)] \\ & + v^2w^2[4C_2 + 5vP_2(v) + v^2P_2'(v) + 5wQ_2(w) + w^2Q_2'(w)] \end{aligned}
$$

et

$$
(15)\qquad \begin{aligned} & v^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2vw\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial w} + w^2\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \\ & = 2v^2P_0'(v) + v^3P_0''(v) \\ & \qquad + 2w^2Q_0'(w) + w^3Q_0''(w) \\ & + vw\,[2C_1 + 6vP_1(v) + 6v^2P_1'(v) + v^3P_1''(v) + 6wQ_1(w) \\ & \qquad + 6w^2Q_1'(w) + w^3Q_1''(w)] \\ & + v^2w^2[12C_2 + 20vP_2(v) + 10v^2P_2'(v) + v^3P_2''(v) + 20wQ_2(w) \\ & \qquad + 10w^2Q_2'(w) + w^3Q_2''(w)]. \end{aligned}
$$

Or, l'hypothèse $v = e^{i\theta}$, $w = e^{-i\theta}$, introduite dans les expressions

(13), (14) et (15), les transforme respectivement en les suivantes :

$$(16)\qquad C_0+C_1+C_2+e^{i\theta}[P_0(e^{i\theta})+P_1(e^{i\theta})+P_2(e^{i\theta})] \\ +e^{-i\theta}[Q_0(e^{-i\theta})+Q_1(e^{-i\theta})+Q_2(e^{-i\theta})];$$

$$(17)\qquad 2C_1+4C_2+e^{i\theta}[P_0(e^{i\theta})+e^{i\theta}P'_0(e^{i\theta})+3P_1(e^{i\theta})+e^{i\theta}P'_1(e^{i\theta}) \\ +5P_2(e^{i\theta})+e^{i\theta}P'_2(e^{i\theta})] \\ +e^{-i\theta}[Q_0(e^{-i\theta})+e^{-i\theta}Q'_0(e^{-i\theta})+3Q_1(e^{-i\theta})+e^{-i\theta}Q'_1(e^{-i\theta}) \\ +5Q_2(e^{-i\theta})+e^{-i\theta}Q'_2(e^{-i\theta})];$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &2C_1+12C_2 \\ &+e^{i\theta}[2e^{i\theta}P'_0(e^{i\theta})+e^{2i\theta}P''_0(e^{i\theta})+6P_1(e^{i\theta})+6e^{i\theta}P'_1(e^{i\theta}) \\ &\qquad +e^{2i\theta}P''_1(e^{i\theta})+20P_2(e^{i\theta})+10e^{i\theta}P'_2(e^{i\theta})+e^{2i\theta}P''_2(e^{i\theta})] \\ &+e^{-i\theta}[2e^{-i\theta}Q'_0(e^{-i\theta})+e^{-2i\theta}Q''_0(e^{-i\theta})+6Q_1(e^{-i\theta})+6e^{-i\theta}Q'_1(e^{-i\theta}) \\ &\qquad +e^{-2i\theta}Q''_1(e^{-i\theta})+20Q_2(e^{-i\theta})+10e^{-i\theta}Q'_2(e^{-i\theta})+e^{-2i\theta}Q''_2(e^{-i\theta})]. \end{aligned}\right.$$

La comparaison des expressions (16), (17), (18) avec les trois expressions respectives (12) donnera alors :

En premier lieu, les relations numériques

$$C_0+C_1+C_2=D_0,\qquad 2C_1+4C_2=D_1,\qquad 2C_1+12C_2=D_2,$$

lesquelles déterminent pour C_0, C_1 et C_2 des valeurs réelles;

En deuxième lieu, les identités en v

$$(19)\qquad P_0(v)+P_1(v)+P_2(v)=M_0(v),$$

$$(20)\qquad P_0(v)+vP'_0(v)+3P_1(v)+vP'_1(v)+5P_2(v)+vP'_2(v)=M_1(v),$$

$$(21)\qquad 2vP'_0(v)+v^2P''_0(v)+6P_1(v)+6vP'_1(v)+v^2P''_1(v) \\ +20P_2(v)+10vP'_2(v)+v^2P''_2(v)=M_2(v),$$

lesquelles vont servir à déterminer $P_0(v)$, $P_1(v)$ et $P_2(v)$;

En troisième et dernier lieu, les identités en w

$$(22)\qquad Q_0(w)+Q_1(w)+Q_2(w)=N_0(w),$$

$$(23)\qquad Q_0(w)+wQ'_0(w)+3Q_1(w)+wQ'_1(w)+5Q_2(w)+wQ'_2(w)=N_1(w),$$

$$(24)\qquad 2wQ'_0(w)+w^2Q''_0(w)+6Q_1(w)+6wQ'_1(w)+w^2Q''_1(w) \\ +20Q_2(w)+10wQ'_2(w)+w^2Q''_2(w)=N_2(w),$$

lesquelles vont servir à déterminer $Q_0(w)$, $Q_1(w)$ et $Q_2(w)$.

Considérons d'abord les identités (19), (20) et (21). Si l'on tient compte de (19) et de sa conséquence

$$P'_0(v)+P'_1(v)+P'_2(v)=M'_0(v),$$

la relation (20) devient

$$2P_1(v) + 4P_2(v) = \ldots, \tag{25}$$

le second membre (non écrit) de (25) étant une série connue, entière en v, qui admet un rayon de convergence plus grand que 1. Si l'on tient compte de la relation déduite de (20) par différentiation, la relation (21) devient

$$6P_1(v) + 2vP_1'(v) + 20P_2(v) + 4vP_2'(v) = \ldots, \tag{26}$$

le second membre de (26) étant une série connue, entière en v, qui admet un rayon de convergence plus grand que 1. Enfin, si l'on tient compte de (25) et de la relation qu'on en déduit par différentiation, la relation (26) devient

$$8P_2(v) = \ldots, \tag{27}$$

le second membre de (27) jouissant, comme ceux de (25) et (26), de la propriété que nous venons d'indiquer. De (27) on tirera $P_2(v)$; de (25) on tirera ensuite $P_1(v)$; et finalement, de (19) on tirera $P_0(v)$: les trois expressions ainsi obtenues seront d'ailleurs des séries entières en v admettant un rayon de convergence plus grand que 1.

Semblablement, les relations (22), (23) et (24) fourniront, pour $Q_0(w)$, $Q_1(w)$ et $Q_2(w)$, des séries entières en w admettant un rayon de convergence plus grand que 1.

Et il est manifeste que, dans chacun des couples

$$P_0(v),\quad Q_0(w);\qquad P_1(v),\quad Q_1(w);\qquad P_2(v),\quad Q_2(w)$$

ainsi déterminés, les deux séries prennent, pour des valeurs imaginaires conjuguées de leurs variables respectives, des valeurs imaginaires conjuguées.

IV. Ce raisonnement peut se poursuivre indéfiniment. Pour n quelconque, la recherche de l'intégrale unique remplissant les conditions énoncées se ramène à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{S}_1$, ou, ce qui revient au même, du problème $\mathfrak{T}_1$.