JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. LEAU

Cas extrême d'une intégrale de Cauchy et limite de certaines intégrales

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 211-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__211_0>

Cas extrême d'une intégrale de Cauchy et limite de certaines intégrales;

PAR L. LEAU.

Je me propose de donner une démonstration rigoureuse de la proposition suivante :

Soit un domaine plan borné simplement connexe D *limité par une courbe* C *continue, rectifiable, sans point double. Soit ensuite une fonction $f(z)$ continue dans le domaine fermé.*

Si c est une portion de C *on peut trouver à l'intérieur de* D *une suite de lignes c_n (une infinité de pareilles suites) telle que*

$$\lim \int_{c_n} f(z)\,dz = \int_c f(z)\,dz.$$

La ligne c_n tend vers c : entre les points de c_n et ceux de c s'établit une correspondance univoque et réciproque pour laquelle la distance de deux points associés est inférieure à r_n, r_n tendant vers zéro quand n croît indéfiniment.

En particulier, si $f(z)$, continu dans le domaine fermé, est holomorphe dans le domaine ouvert, on a

$$\int_c f(z)\,dz = 0.$$

1. A tout nombre positif ε on peut faire correspondre η de manière que si z' et z'' sont deux points quelconques du domaine fermé satisfaisant à $|z'' - z'| < \eta$, on a

$$|f(z'') - f(z')| < \varepsilon.$$

2. Si les équations paramétriques de la courbe sont

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

de période ω, il est permis de supposer que pour $t = 0$, $x = y = 0$. On sait que C étant rectifiable, les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont les différences de fonctions continues non décroissantes qui sont respectivement leurs variations totales positive et négative dans l'intervalle $(0, t)$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \qquad \psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t).$$

Pour $t = 0$, ces quatre fonctions sont nulles. Et

$$\varphi_1(t + \omega) = \varphi_1(t) + \varphi_1(\omega), \qquad \dots.$$

Dans un intervalle (t', t'') on a

$$x_1 = \varphi_1(t') - \varphi_2(t'') \leqq x \leqq \varphi_1(t'') - \varphi_2(t') = x_2.$$

Ainsi x est situé sur un segment de longueur

$$\varphi_1(t'') - \varphi_1(t') + \varphi_2(t'') - \varphi_2(t').$$

De même y est certainement sur un segment de longueur

$$\psi_1(t'') - \psi_1(t') + \psi_2(t'') - \psi_2(t').$$

Posons

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \psi_1(t) + \psi_2(t) = \sigma(t).$$

L'arc (t', t'') est situé dans un rectangle dont le demi-périmètre est $\sigma(t'') - \sigma(t')$.

La fonction $\sigma(t)$ est une fonction continue non décroissante. Elle est même croissante, car si $\sigma(t'') = \sigma(t')$ les quatre fonctions φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 seraient constantes dans (t', t'') et le point (x, y) serait fixe.

Posons $\sigma(t) = u$; t est aussi une fonction croissante et continue de u. Dès lors prenant u au lieu de t comme paramètre les formules précédentes deviennent

$$x = \Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u), \qquad y = \Psi(u) = \Psi_1(u) - \Psi_2(u)$$

avec

$$\Phi_1(u) + \Phi_2(u) + \Psi_1(u) + \Psi_2(u) = u.$$

Les fonctions Φ et Ψ ont toutes une période Ω correspondant à la période ω pour t. Le rectangle ci-dessus dans lequel est situé l'arc (u', u'') a pour demi-périmètre $u''-u'$. La distance de deux points quelconques du rectangle est au plus égale à $u''-u'$. Si s est la longueur de l'arc de o à u, on a

$$\frac{u''-u'}{2} \leqq s''-s' \leqq u''-u'.$$

Enfin u croîtra de o à Ω.

3. Si nous subdivisons l'arc (u', u'') en plusieurs autres par les points $u_0 = u' < u_1 < u_2 < \ldots < u_h = u''$, les abscisses initiale et finale d'un nouveau rectangle, relatif à (u_{i-1}, u_i), seront

$$\Phi_1(u_{i-1}) - \Phi_2(u_i), \quad \Phi_1(u_i) - \Phi_2(u_{i-1})$$

et appartiennent par conséquent à l'intervalle (x_1, x_2). Ainsi le système des nouveaux rectangles forme un domaine d'un seul tenant couvert par le rectangle primitif.

En remplaçant un rectangle par un rectangle homothétique par rapport au centre avec un coefficient compris entre 1 et k, nombre fixe que nous choisirons un peu supérieur à 1, il est clair que la distance de deux points quelconques du rectangle serait inférieure à $k(u''-u')$ et que la longueur de l'arc serait comprise entre $\frac{u''-u'}{2k}$ et $k(u''-u')$.

Si ensuite on subdivisait l'arc (u', u'') en plusieurs parties, on pourrait amplifier de la même façon les nouveaux rectangles avec des coefficients assez peu supérieurs à 1 pour que la nouvelle aire fût encore couverte par le rectangle primitif préalablement amplifié.

4. Lorsque la distance de deux points quelconques $M_1(u_1)$, $M_2(u_2)$ de C est au plus égale à δ, il existe pour la plus petite des quantités $|u_2-u_1|$ et $\Omega - |u_2-u_1|$ une limite supérieure positive v; la fonction $v = \lambda(\delta)$ décroît et tend vers zéro avec δ.

De même, si l'on considère les couples de points pour lesquels la plus petite des quantités $|u_2-u_1|$, $\Omega - |u_2-u_1|$ est au plus égale à la quantité fixe w, x il y a pour M_1M_2 une limite supérieure δ et la fonction $\delta = \mu(w)$ diminue et tend vers zéro avec w.

5. Divisons l'intervalle de variation de u, à partir de o par exemple, en m parties égales et posons $\Omega_1 = \frac{\Omega}{m}$, les demi-périmètres des rectangles correspondants sont inférieurs à $k\Omega_1$.

En raison de l'indétermination laissée dans leur construction, on peut supposer que deux quelconques d'entre eux n'ont pas deux segments communs ni un segment commun sur leurs périmètres. Ils forment une aire $\mathcal{A}'$, inférieure à $\frac{\Omega^2}{4m}$, donc aussi petite que l'on veut, d'un seul tenant qui (si m est assez grand) est limitée intérieurement au moins par un et peut-être par plusieurs contours polygonaux constituant la ligne ou le système de lignes Γ'. Examinons ce dernier cas :

Les contours polygonaux sont extérieurs les uns aux autres, ils limitent des aires $D_1, D_2, \ldots, D_h$. Dans chacune d'elles prenons un point; on peut les joindre deux à deux par des lignes continues situées à l'intérieur de D. Soient $\mathcal{L}$ leur ensemble, d leur plus courte distance à C. Divisons chacun des intervalles de u en un nombre j de parties égales assez grand pour que le maximum des demi-périmètres des rectangles correspondants $k\frac{\Omega}{mj} = k\Omega_2$ soit inférieur à d. Posons

$$mj = n.$$

La nouvelle bande de rectangles forme une aire d'un seul tenant $\mathcal{A}_1$, intérieure à $\mathcal{A}'$, extérieure à $\mathcal{L}$. Les aires D_i sont remplacées par un domaine simplement connexe qui les contient et qui est limité par un contour polygonal Γ; d'autres espaces lacunaires ont pu être introduits par $\mathcal{A}_1$, situés dans l'aire $\mathcal{A}'$, ne contenant évidemment aucun point de C; je les adjoins à $\mathcal{A}_1$ pour former une aire $\mathcal{A}$ qui, finalement, couvre donc C, est limitée intérieurement par Γ et borne par cette ligne un domaine intérieur Δ simplement connexe.

J'appelle en tout cas δ une limite supérieure des demi-périmètres des rectangles et le nombre n a pu être choisi assez grand pour que $k\Omega_2 = \delta$ soit aussi petit que l'on veut.

6. Joignons un point fixe O intérieur à C et, nous pouvons le supposer, à Γ, respectivement à des points M de C, μ de Γ.

Faisons décrire Γ au point μ dans le sens direct. Deux côtés consécutifs quelconques de Γ, γ_1 et γ_2, proviennent de deux rectangles R', R'' qui empiètent l'un sur l'autre et qui sont relatifs à des arcs a', a'' dont deux points quelconques sont fournis par les arguments u', u''. On a

$$M'M'' < 2\delta, \qquad |u''-u'| \quad (\text{ou } \Omega - |u''-u'|) \leqq \lambda(2\delta),$$

u décrivant l'intervalle $u'u''$ (ou, selon le cas, u'', $u'+\Omega$, si $u'<u''$) M pourra parcourir, outre une partie des arcs a', a'' un ensemble a_1 d'arcs partiels réunissant a' et a''. Tandis que μ suit le segment γ_1 faisons décrire à M, toujours dans le même sens, mais à cela près d'une façon arbitraire soit l'arc a' et le système d'arcs a_1, soit ce dernier système seul si, le mouvement étant déjà commencé, M vient d'être amené à celle des extrémités de a' qui est le point de suture avec a_1. Ainsi se trouvent associés les deux mobiles; mais alors que μ se déplace toujours dans le sens positif, M peut avoir un certain nombre d'oscillations.

La distance de deux points M_1, M_1 de l'arc $a'a_1$ est au plus égale à $\mu[\lambda(2\delta)]$ et celle de l'un deux M_1 à un point μ_1 de γ_1 à

$$\mu[\lambda(2\delta)] + \delta = \alpha.$$

On peut donc avoir choisi δ assez petit pour que la distance de deux points associés M et μ et l'angle géométrique $\mu O M$ soient respectivement inférieurs à des quantités positives arbitraires α et φ.

Il en résulte que $O\mu$ effectuant finalement un tour dans le sens positif, il en va de même pour M.

7. Ceci posé, soient M_1, M_2, ..., M_p p points M correspondant aux valeurs croissantes u_1, u_2, ..., u_p; p a été préalablement choisi ainsi que les u de manière que $u_i - u_{i-1}$ et $u_1 + \Omega - u_p$ soient inférieurs à un nombre positif arbitraire θ; le nombre n des paragraphes précédents est ensuite pris aussi grand que l'on veut de manière à satisfaire aux conditions en nombre limité que nous rencontrons.

En premier lieu, α peut être supposé assez petit pour que les cercles γ_i de rayon α et de centres M_i soient extérieurs les uns aux autres; tout point μ_i associé à M_i est dans γ_i et si μ_i et μ'_i sont tous deux associés à M_i, il existe une bande de nos rectangles contenant $M_i\mu_i\mu'_i$, placés dans γ_i, constituant une aire située dans $\mathcal{A}$ et nous pouvons joindre μ_i et μ'_i par une ligne brisée λ_i n'ayant pas d'autres points en commun avec Γ.

Lorsque μ fait à partir d'un point arbitraire le tour de Γ dans le sens positif, M décrit un certain nombre d'arcs dont la somme algébrique donne C. Supprimons tout arc parcouru successivement deux fois en sens inverses; nous avons une description de C par M toujours dans le même sens, sens positif, qui amène M en $M_1, M_2, \ldots, M_p$, et qui correspond à une partie du chemin de μ, c'est-à-dire à des portions de Γ suivies par ce point dans le sens positif. Soit alors μ'_i la position, ou une des positions qui dans ce mouvement par sauts brusques ont donné M_i. Les points $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p$ sont échelonnés dans le sens du mouvement de μ, c'est-à-dire dans cet ordre et dans le sens positif comme $M_1, M_2, \ldots, M_p$ le sont sur C.

Ne considérons plus maintenant que le mouvement complet des points géminés μ et M. Soit μ_i l'un des points associés à M_i; je dis que, dans l'ensemble des μ'_j, μ_i vient se placer auprès de μ'_i. Supposons par exemple un point μ_3 placé entre μ'_1 et μ'_2. Quand μ va de μ'_1 à μ_3 M va, peut-être avec des oscillations, de M_1 à M_3, il passe donc au moins une fois par M_2 pour une position μ_2 et l'on a la disposition

$$\mu'_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu'_2\,\mu'_3.$$

Nous avons deux contours fermés

$$\mu_2\mu_3,\quad \mu_3\mu'_2,\quad \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_3\mu'_2,\quad \mu'_2\mu'_3,\quad \lambda_3$$

qui ont une partie commune $\mu_3\mu'_2$ et celle-là seulement. Deux dispositions possibles : ils sont extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre. Si un point intérieur à l'un est intérieur à Δ ce contour renferme Δ et une partie de Γ est extérieure à Δ. Sinon, ou la partie commune $\mu_3\mu'_2$ ou celle des portions $\mu_2\mu_3$, $\mu'_2\mu'_3$ qui est intérieure à l'autre contour est extérieure à Δ. Notre hypothèse est donc fausse.

On en conclut immédiatement, et par le même raisonnement, que si deux points sont associés à deux M_i consécutifs, par exemple μ_2 et μ_3 lesquels sont isolément voisins de μ'_2 et μ'_3 ils se présentent dans l'ordre de leurs indices; car si l'on avait l'ordre

$$\mu'_1\,\mu'_2\,\mu_3\,\mu_2\,\mu'_3$$

ce serait aux accents près la disposition dont on vient de constater l'impossibilité.

De là deux conséquences : 1° dans une oscillation, M ne revient jamais d'un M_i au point M_{i-1} précédent. La variation d'argument u dans une oscillation reste donc toujours inférieure à θ ; 2° une suite quelconque μ_1, μ_2, ..., μ_p de points associés respectivement à M_1, M_2, ..., M_p se présentent sur Γ dans cet ordre et dans le sens positif. Nous faisons choix d'une telle suite.

Observons ensuite que la longueur de Γ est bornée, le périmètre d'un des n rectangles étant inférieur à $\frac{2k\Omega}{n}$.

Enfin joignons par exemple par des segments de droite les M_i aux points associés μ_i et soit l_i le contour $M_i\mu_i\mu_{i+1}M_{i+1}M_i$ formé par ces segments et par les petits chemins M_iM_{i+1}, $\mu_i\mu_{i+1}$ sur C et Γ. La distance de deux points de l'arc M_iM_{i+1} ne dépasse pas $\mu(\theta)$, d'un point de l'arc M_iM_{i+1} au point ou à l'un quelconque de ses points associés sur $\mu_i\mu_{i+1}$ la quantité α, d'un point de l'arc M_iM_{i+1} à un point de la ligne brisée $\mu_i\mu_{i+1}$ la somme $\mu(2\theta) + \alpha = r$ (puisque μ décrivant $\mu_i\mu_{i+1}$ l'oscillation de u en dehors de l'intervalle u_iu_{i+1} est inférieure à θ). Il en résulte que z étant quelconque sur ces deux lignes et z_i l'affixe de M_i $|f(z) - f(z_i)|$ peut être supposé inférieur à un nombre ε arbitrairement petit.

8. Faisons parcourir à z les portions $\mu_i\mu_{i+1}$, M_iM_{i+1} et posons

$$f(z) = f(z_i) + g_i(z)$$

$$\int_{\mu_i\mu_{i+1}} f(z)\,dz - \int_{M_iM_{i+1}} f(z)\,dz$$

$$= f(z_i)\int_{l_i} dz + \int_{\mu_i\mu_{i+1}} g(x)\,dz - \int_{M_iM_{i+1}} g_i(z)\,dz$$

$$+ \int_{M_{i+1}\mu_{i+1}} f(z_i)\,dz - \int_{M_i\mu_i} f(z_i)\,dz.$$

Ajoutons toutes les égalités analogues. Une limite supérieure de la somme des modules des termes des membres de droites est, si B désigne une borne supérieure de $f(z)$ sur C,

$$\varepsilon[C + 2k\Omega] + 2pB\alpha,$$

quantité inférieure à un nombre positif arbitraire β dès que θ a d'abord été choisi assez petit, puis n assez grand.

On peut faire correspondre d'une manière univoque et réciproque M et μ sur leurs chemins respectifs; il suffira de faire décrire simultanément dans les sens directs et d'une façon d'ailleurs arbitraire les lignes M_iM_{i+1}, $\mu_i\mu_{i+1}$ aux points M et μ; leur distance restera inférieure à r.

L'analyse précédente s'applique évidemment si l'on prend $\int f(z)\,dz$ sur une portion seulement du contour et non sur le contour entier.

La proposition est donc démontrée, et, si $f(z)$ est holomorphe dans le domaine D ouvert et continu dans le domaine fermé, elle établit que l'égalité de Cauchy $\int f(z)\,dz = 0$ a lieu lorsque l'intégrale est prise sur le contour même.