JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES CERF

Sur des transformations de courbes de l'espace ordinaire avec application à la théorie des équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 299-338.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__299_0>

Sur des transformations de courbes de l'espace ordinaire avec application à la théorie des équations aux dérivées partielles;

PAR GEORGES CERF.

L'étude des transformations dans un espace à n dimensions s'attache surtout, en dehors des transformations ponctuelles et de leurs prolongées, à celles qui transforment des variétés à $n-1$ dimensions; il ne semble pas qu'on se soit occupé systématiquement de transformations qui, généralement, font correspondre à une variété à $n-k$ dimensions ($k>1$) une variété à un nombre égal de dimensions; une telle étude paraît capable d'être utile dans la théorie des systèmes différentiels; dans le travail qui suit, on s'est placé dans le cas le plus simple, celui de l'espace ordinaire (¹).

Au premier Chapitre, nous rappelons des propriétés générales des transformations de contact à une équation directrice; à cette occasion nous posons certaines questions relatives aux courbes qui sont transformées en courbes; ces questions sont résolues dans le Chapitre II par une méthode directe et pour ainsi dire sans calculs; en particulier, nous montrons qu'une transformation de contact irréductible transforme au plus ∞^1 courbes en courbes et elle s'obtient alors en multipliant à droite et à gauche une transformation dualistique par des transformations ponctuelles quelconques; il était aisé de prévoir cette solution; il n'y en a pas d'autres.

Nous montrons ensuite, dans le troisième Chapitre, qu'on peut associer à toute transformation de contact à une équation directrice une transformation de courbes s'appliquant à une courbe quelconque de l'espace. La discussion de cette transformation nous conduit à

(¹) *Cf.* une Note de l'auteur dans les *Comptes rendus*, t. 178, p. 1875.

présenter sommairement quelques considérations sur les solutions singulières des équations différentielles du deuxième et du troisième ordre à une et deux inconnues. En particulier, à chacune des transformations de courbes que nous avons introduites on associe une équation de Monge du deuxième ordre (équation différentielle du deuxième ordre à deux inconnues) dont les intégrales admettent en chacun de leurs points un contact du troisième ordre avec les surfaces du complexe qui définissent la transformation de contact; ces courbes se comportent dans la transformation d'une façon particulière. Les équations de Monge (du premier ordre) associées au complexe interviennent également pour définir une nouvelle catégorie de courbes exceptionnelles vis-à-vis de la transformation.

Après avoir étudié la transformation du point de vue de la théorie des systèmes de Pfaff, nous appliquons les résultats obtenus précédemment à l'étude des intégrales des équations de Monge-Ampère associées à la transformation de contact; parmi les solutions faisant partie de l'intégrale générale de ces équations nous en distinguons de deux sortes : des solutions sans arête de rebroussement apparent, analogues à celles dont Darboux a signalé l'existence pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, puis des solutions à ligne singulière le long de laquelle se raccordent deux nappes de la surface intégrale. Nous recherchons les relations les plus simples qu'on peut établir entre les solutions appartenant à l'intégrale générale et les solutions singulières, qui satisfont à une équation aux dérivées partielles du premier ordre; une étude complète de ces relations serait très longue et compliquée, comme il résulte de la comparaison avec ce qui se passe pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Enfin, un exemple très simple conduit à une propriété géométrique non encore signalée.

Voici les principaux travaux qui se rapportent plus ou moins directement aux questions étudiées.

Pour le Chapitre I :

Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, chap. I.

Lie-Engel *Drei Kapitel zur Geometrie der Berührungstransformationen* (*Math. Annalen*, t. 59, p. 193).

Pour le Chapitre III :

DARBOUX, *Sur les solutions singulières* ... (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVII, n° 2).

CARTAN, *Les systèmes de Pfaff à 5 variables* ... (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1910, p. 109).

HAMBURGER, *Ueber singulare Lösungen algebraischer Dfgleichungen* (*Journal de Crelle*, t. 121, p. 265).

GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*.

CHAPITRE I.

Généralités sur les transformations de contact. — Soit (T) une transformation de contact à une équation directrice :

$$F(X, Y, Z, x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Nous supposons que F est une fonction analytique des variables qui y figurent; nous aurons par la suite à présenter certaines restrictions. Cette transformation établit une correspondance entre les éléments de deux espaces (e) et (E), rapportés à des coordonnées cartésiennes rectangulaires, et où nous nous servirons respectivement des petites et des grandes lettres. Nous appelons (σ) une surface du complexe défini par la relation (1) où l'on suppose que l'on a attribué à X, Y, Z des valeurs constantes, arbitraires ; (Σ) désigne une surface du complexe déterminé dans (E) d'une façon analogue. Les formules qui définissent la transformation (T) s'obtiennent en adjoignant à (1) les relations (2) et (3) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{dX} &= F_X + PF_Z, \\ \frac{dF}{dY} &= F_Y + QF_Z, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= F_x + pF_z, \\ \frac{dF}{dy} &= F_y + qF_z, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

le symbole $\frac{d}{dx}$, par exemple, désigne la dérivée totale par rapport à x, quand z, et plus loin ses dérivées aussi, sont considérés comme fonctions de x et y.

Pour que le calcul de X, Y, Z, P, Q soit possible, il faut supposer qu'il existe un système de valeurs numériques des variables qui satisfasse aux relations précédentes sans annuler ni F_Z ni le déterminant fonctionnel ∇ des premiers membres des relations (1) et (3) par rapport à X, Y, Z; cela exige que ni F_Z, ni ∇, dont l'expression suit, ne soient nuls soit identiquement, soit comme conséquence de (1) :

$$\nabla = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z & F_0 \\ F_{Xx} & F_{Xy} & F_{Xz} & F_X \\ F_{Yx} & F_{Yy} & F_{Yz} & F_Y \\ F_{Zx} & F_{Zy} & F_{Zz} & F_Z \end{vmatrix};$$

la première de ses conditions est certainement remplie si F est une fonction algébrique et indécomposable; la deuxième exprime que les surfaces (σ) portent tous les éléments plans de contact de (e).

Pour que le calcul de x, y, z, p, q soit possible il suffit, par suite de la symétrie de ∇, d'ajouter aux précédentes la condition que F_z ne soit pas conséquence de (1).

Nous supposons désormais que les conditions que nous venons d'indiquer sont réalisées; les formules obtenues ne sont pas valables, en général, dans le domaine d'analycité de F pour toutes les valeurs soit de p et q, soit de P et Q; il existe des éléments singuliers: nous ne nous occupons pas de ceux qui correspondent à l'annulation de F_Z et F_z car ils répondent à des singularités non essentielles qui dépendent du choix des axes. Au contraire, l'annulation de ∇ se rapporte à une propriété géométrique des complexes (σ) ou (Σ) : un élément de contact de (e), par exemple, est admis en général par un certain nombre de surfaces (σ) distinctes les unes des autres; si l'élément est choisi de telle façon que ∇ soit nul comme conséquence de (1) et (3), deux de ces surfaces au moins sont confondues; nous réservons à de tels éléments le nom d'éléments singuliers; leurs coordonnées satisfont à la relation obtenue par l'élimination de X, Y, Z entre (1) (3) et (4) :

$$(4) \qquad \nabla = 0;$$

il peut se faire du reste qu'il n'existe pas d'éléments singuliers; mais, en général, il existe une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui les définit. Ce que nous venons de dire peut se répéter mot pour mot dans (E); l'équation du premier ordre s'obtient alors par l'élimination de x, y, z entre (1), (2) et (4).

A une surface (s) correspond généralement une surface (S), *à plusieurs nappes*, enveloppe des surfaces (Σ) répondant à tous les points de (s). Soit $z = \varphi(x, y)$ l'équation de (s); nous désignons par ($\bar{3}$), par exemple, ce que deviennent les relations (3) quand on y suppose que z, p, q sont pris sur (s) :

$$z = \varphi(x, y), \qquad p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Pour avoir l'équation de (S), on élimine x, y entre ($\bar{1}$) et ($\bar{3}$); cela suppose que la relation ($\bar{5}$) ne soit pas conséquence de ($\bar{1}$) et ($\bar{3}$) :

$$(5) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx^2} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dx\,dy} & \dfrac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad \frac{d^2F}{dx^2} = rF_z + p^2F_{z^2} + \ldots.$$

Il est en général possible d'éliminer X, Y, Z entre les relations (1), (3) et (5), et le résultat de l'élimination est, en général, une équation aux dérivées partielles du second ordre, en z, de la forme de Monge-Ampère

$$(6) \qquad u_2 = 0.$$

A une surface (s) intégrale de (6) correspond, en général, une courbe de (E); d'une façon plus précise, une des nappes de l'enveloppe des surfaces (Σ) correspondant aux divers points de (s) dégénère en une courbe; et réciproquement, on obtient l'intégrale générale de (6) en prenant l'enveloppe d'une suite simplement infinie de surfaces (σ) répondant aux points d'une courbe quelconque (C). L'équation (6) est l'équation des surfaces du complexe (σ). Des circonstances analogues se présentent dans (E), et il existe une équation du deuxième ordre

$$(7) \qquad U_2 = 0,$$

dont l'intégrale générale s'obtient en éliminant x entre les équations (1) et (8) :

$$F_x + F_y y' + F_z z' = 0, \tag{8}$$

où z et y sont considérés comme fonctions quelconques de x, y' et z' désignant leurs dérivées. Les intégrales de (7) sont donc engendrées par des courbes (A) dépendant de 5 paramètres : x, y, z, y', z' et définies par (1) et (8) ; ces courbes portent toutes les caractéristiques de (7). On définit d'une manière analogue les caractéristiques de (6).

Les équations (6) et (7) admettent chacune une intégrale singulière du premier ordre :

$$u_1 = 0, \tag{9}$$

$$U_1 = 0. \tag{10}$$

Ces équations s'obtiennent en éliminant soit X, Y, Z entre (1), (3) et (4), soit x, y, z entre (1), (2) et (4) : ce sont les équations que nous avons rencontrées plus haut et qui définissent les éléments singuliers de la transformation. Les surfaces (Σ) qui répondent aux différents points d'une intégrale de (9) sont osculatrices à leur enveloppe, celle-ci étant une intégrale de (10) ; et réciproquement.

De ce qui précède, il résulte qu'une transformation de contact transforme en général les courbes en surfaces. Pour savoir s'il existe des courbes transformées en courbes par la transformation T, on pourra chercher si la transformée de l'équation (6) par polaires réciproques admet des solutions communes avec l'équation des surfaces développables ; ces solutions communes sont les transformées par polaires réciproques des courbes cherchées, si ces dernières ne sont pas des droites : on peut procéder de la même façon sur (7) et finalement on n'aura plus qu'à rechercher les droites qui se transforment en droites, ce qu'on peut faire directement en employant la transformation d'Euler.

De même pour reconnaître s'il existe des transformations de contact à une équation directrice transformant toutes les courbes en courbes il faudra reconnaître si l'équation (6) peut être celle des surfaces développables. D'une manière toute semblable on peut traiter d'autres questions de cette nature ; nous allons employer une méthode plus directe.

CHAPITRE II.

1. *Impossibilité de transformations de contact irréductibles transformant une courbe quelconque en courbe.* — On appelle transformation de contact irréductible une transformation de contact qui n'est pas une transformation ponctuelle prolongée.

Soit (c) une courbe quelconque de (e); elle est le support ponctuel de ∞^2 éléments plans de contact du premier ordre répartis en ∞^1 faisceaux (f), chacun de ces faisceaux étant caractérisé par un élément linéaire tangent à (c); une transformation de contact arbitraire transforme ces ∞^2 éléments plans en ceux d'une surface. Supposons qu'il existe une transformation de contact T transformant toute courbe (c) de (e) en une courbe (C) de (E). Aux éléments de (e) appartenant à un des faisceaux (f) précédemment considérés correspondent[1] les éléments d'un faisceau de (E); car, autrement, toutes les courbes de c possédant le faisceau (f) se transformeraient en la même courbe; et, en définitive, toutes les courbes de (e) se transformant en la même courbe de (E), (T) ne serait pas une transformation s'appliquant à tous les éléments de (e) et (E), ce qui est contraire aux hypothèses. Donc *à tout faisceau d'éléments plans de contact de* (e) *correspond un faisceau de* (E); nous allons voir que *dans ces conditions* (T) *ne peut être qu'une transformation ponctuelle prolongée*. Il est clair d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que deux faisceaux soient issus d'un même point est qu'ils admettent un élément commun; il résulte de là que deux faisceaux issus d'un même point doivent se transformer en deux faisceaux jouissant de la même propriété; alors tous les faisceaux issus du même point m se transforment en les faisceaux issus du même point M et tous les éléments de (e) supportés par m se transforment en les éléments de (E) supportés par M.

---

(1) Nous excluons ainsi des considérations actuelles les courbes dont tous les éléments plans sont singuliers dans la transformation T; cela n'a pas d'importance pour la suite du raisonnement.

2. Devant l'impossibilité de transformer toutes les courbes en courbes par une transformation de contact irréductible, on peut se proposer de rechercher s'il existe des familles de courbes telles qu'une transformation de contact convenablement choisie transforme toute courbe de la famille en une autre courbe. On sait que les courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre jouissent de cette propriété : il suffit de considérer la transformation de contact à deux équations directrices définie au moyen d'un complexe de courbes prises dans la famille. Mais les courbes d'une telle famille ne supportent pas tous les éléments linéaires de l'espace, nous sommes conduits ainsi à nous poser le problème qui fait l'objet du paragraphe suivant.

3. *Transformations de contact irréductibles établissant une correspondance entre les courbes de deux familles supportant chacune tous les éléments linéaires de l'espace.* Les courbes d'une telle famille dépendant au moins de 4 paramètres, nous allons d'abord nous occuper de ce cas.

La condition nécessaire et suffisante pour que, par une transformation de contact irréductible (T) *à chacune de* ∞^4 *courbes* (C) *portant dans leur ensemble tous les éléments linéaires de l'espace, corresponde une courbe* (c) *est que les courbes* (C) *soient réparties sur* ∞^3 *surfaces* (Σ) *de telle façon que sur chaque* (Σ) *se trouvent* ∞^2 (C) *et que par chaque* (C) *il passe* ∞^1 (Σ).

Considérons deux courbes (C) et (c) correspondantes particulières mais quelconques. A chaque point m de (c), ou, d'une façon plus précise, à tout faisceau d'éléments tangents à (c) en m correspond sur (C) un bandeau; ce bandeau ne peut, en général, se réduire à un faisceau, le faisceau considéré de (c) étant un faisceau quelconque de (c) et (T) étant irréductible. Aux éléments de contact de (c) supportés par m correspondent donc des éléments supportés par tous les points de (C).

Examinons d'abord le cas où (T) serait à deux équations directrices. Aux ∞^2 éléments plans de contact supportés par m correspondraient alors les ∞^2 éléments d'une courbe (Γ); parmi les éléments de (Γ) seraient compris ceux du bandeau précédent, autrement dit (Γ) devrait correspondre à (c), la courbe (C) devrait se confondre avec (Γ) et les courbes (C) ne pourraient dépendre que de 3 paramètres, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : le cas où (T) serait à deux équations directrices est impossible.

4. Supposons maintenant que (T) soit à une seule équation directrice. A tout point m correspond une surface (Σ); tout bandeau, porté par une courbe (C), et correspondant à un faisceau issu de m, est donc porté par (Σ); à ∞^1 faisceaux de m comprenant les ∞^2 éléments de ce point correspondent ∞^1 bandeaux couvrant tout (Σ); un de ces bandeaux ne peut correspondre qu'à un nombre fini de faisceaux; (Σ) est donc couverte par ∞^2 bandeaux, correspondant aux ∞^2 faisceaux issus de m, et portés par ∞^2 courbes (C). D'autre part, chaque courbe (C) supporte ∞^1 bandeaux provenant des ∞^1 faisceaux de (c) portés par la courbe (c) correspondante; chaque courbe (C) doit donc se trouver sur les ∞^1 (Σ) répondant aux points de (c). La condition énoncée est donc nécessaire; nous allons montrer maintenant qu'elle est suffisante. Établissons une correspondance entre les ∞^3 (Σ) de (E) et les ∞^3 points m de (e) de manière à définir une transformation de contact; il faut montrer d'abord que cela est possible, c'est-à-dire que les ∞^3 (Σ) supportent tous les éléments plans de contact de (E); or, s'il n'en était pas ainsi, les (Σ) seraient intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et alors, par l'une quelconque des ∞^1 courbes (C) il ne pourrait en passer une infinité, puisque les caractéristiques d'une équation du premier ordre dépendent au plus de 3 paramètres. Il résulte aussi de ce que nous venons de dire que les ∞^1 (Σ) qui passent par une (C) sont tangentes à tous les éléments plans de cette courbe. D'ailleurs, par la transformation de contact que nous venons de définir (à une transformation ponctuelle près), à ces ∞^1 (Σ) contenant (c) correspondent ∞^1 points m dont le lieu est en général une courbe, sinon les paramètres dont dépendent les (Σ) ne seraient pas essentiels; nous appelons cette courbe (c). Les ∞^1 bandeaux portés par (C) et définis par les (Σ) correspondent aux ∞^1 faisceaux de (c), et inversement (C) correspond à (c) car elle est la courbe commune aux ∞^1 (Σ) qui répondent aux points de (c). La proposition est ainsi démontrée et l'on constate en plus que les courbes (c) dépendent de 4 paramètres.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que si

$$F(X, Y, Z, a_1, a_2, a_3) = 0$$

représente l'équation, analytiquement indécomposable d'une famille de ∞^3 surfaces (Σ) ayant la disposition indiquée, si l'on considère à présent X, Y, Z comme des paramètres et a_1, a_2, a_3 comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, la même équation représente ∞^3 surfaces ayant une disposition analogue.

5. Nous avons supposé que les courbes (C) dépendent de 4 paramètres; nous allons montrer qu'il est impossible qu'elles dépendent de plus de 4 paramètres, si la transformation est irréductible.

Considérons, en effet, une famille à 4 paramètres (C') comprise dans une famille donnée à plus de 4 paramètres et portant tous les éléments linéaires de l'espace; une autre courbe (C') de la famille primitive peut être considérée comme une enveloppe de courbes (C') et cette courbe (C') peut être choisie pour porter des faisceaux quelconques d'éléments de (E). S'il existait alors une transformation de contact irréductible transformant les courbes (C) en courbes, la courbe (C') et les (C') qu'elle enveloppe devraient se transformer en la même courbe, et aux courbes C' ne correspondraient pas ∞^1 courbes c'.

6. *Détermination des familles de ∞^4 courbes ayant la disposition indiquée.* — Le seul cas que nous ayons à envisager est donc celui de ∞^4 courbes (C) portées par ∞^3 surfaces (Σ), chaque (Σ) portant ∞^2 (C) et par chaque (C) passant ∞^1 (Σ). Si nous considérons une (Σ) particulière (Σ_0), et les (C_0) qui sont situées sur elles, les (Σ) qui contiennent ces (C_0) dépendent de 3 paramètres et constituent l'ensemble des (Σ); autrement dit, si a_1^0, a_2^0, a_3^0 sont les valeurs numériques des paramètres de (Σ_0), l'ensemble des deux équations

$$F(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0) = 0, \qquad F(X, Y, Z, a_1, a_2, a_3) = 0$$

définit des courbes dépendant de deux paramètres essentiels [on constate en passant que l'intersection de deux (Σ) quelconques est, au moins partiellement, une (C)].

Nous admettons que F est une fonction holomorphe des a et des x dans un certain domaine comprenant les valeurs a_1^0, a_2^0, a_3^0. La deuxième équation de l'intersection des surfaces (Σ_0) et (Σ) peut s'écrire, en tenant compte de la première.

$$(1)\quad \frac{\partial F}{\partial a_1}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)(a_1-a_1^0)+\frac{\partial F}{\partial a_2}(X, \ldots, a_3^0)(a_2-a_2^0) \\ +\frac{\partial F}{\partial a_3}(X, \ldots, a_3^0)(a_3-a_3^0)+\ldots=0,$$

les coefficients de $a_1-a_1^0$, $a_2-a_2^0$, $a_3-a_3^0$ ne pouvant être nuls, même en tenant compte de l'équation de (Σ_0) car nous supposons que (Σ_0) est quelconque dans la famille et qu'il résulte des hypothèses que les surfaces (Σ) ne sont pas intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Pour que l'expression qui se trouve dans le premier membre de (1) *ne dépende essentiellement que de deux combinaisons de* a_1, a_2, a_3, *il faut et il suffit que* F *soit de la forme*

$$(2)\qquad F=\Phi_1\psi_1+\Phi_2\psi_2+\Phi_3\psi_3+\psi_4,$$

où les Φ *sont fonctions distinctes des* a *seulement et les* ψ *de* X, Y, Z.

La condition est suffisante car les courbes d'intersection de deux surfaces (Σ), dont on obtient l'équation en égalant à o le deuxième membre de (2), ne dépendent évidemment que de 4 paramètres; il y en a ∞^2 sur chaque (Σ); de plus, la condition pour qu'une (Σ) passe par l'intersection de deux autres laisse substituer dans son équation un paramètre essentiel.

Pour montrer que la condition est nécessaire, remplaçons X, Y, Z par trois variables nouvelles ξ, η, ζ définies par les relations :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_1}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)+\xi\,\dfrac{\partial F}{\partial a_3}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)+\eta\,\dfrac{\partial F}{\partial a_3}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)=0, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \zeta=F(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0).$$

Ce changement de variables est toujours possible, au moins dans un domaine limité en dehors duquel ce qui suit ne s'applique pas [1], parce que, d'après la nature de la question, la relation

$$F(X, Y, Z, a_1, a_2, a_3) = 0$$

devant définir une transformation de contact, les relations (3) et la relation (4) où l'on a fait $\zeta = 0$ forment un système de trois relations que l'on peut résoudre par rapport à X, Y, Z, étant bien entendu que a_1^0, a_2^0, a_3^0 sont arbitraires.

Le premier membre de (1) peut être développé suivant les puissances de ξ, η, ζ; après y avoir fait $\zeta = 0$, on obtient une série entière en ξ et η où le terme indépendant de ξ et η est une fonction holomorphe en a_1, a_2, a_3 dont le développement commence par un seul terme du premier degré : $a_3 - a_3^0$; le développement du coefficient de ξ commence par $a_1 - a_1^0$ et celui de η par $a_2 - a_2^0$. Les développements de tous les autres coefficients commencent par des termes du deuxième degré au moins. Les trois premiers coefficients ne peuvent être identiquement nuls, en raison d'une remarque précédente; le premier membre de (1) dépend certainement d'une façon essentielle des rapports de $a_1 - a_1^0$ et $a_2 - a_2^0$ à $a_1 - a_1^0$; pour que le nombre des paramètres essentiels dans le premier membre de (1) fût 2, il faudrait que les autres coefficients fussent homogènes de degré 1 en $a_1 - a_1^0, a_2 - a_2^0$, $a_3 - a_1^0$; il est donc nécessaire que ces coefficients soient identiquement nuls. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} &F(X, Y, Z, a_1, a_2, a_3) - F(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0) \\ &\quad = \frac{\partial F}{\partial a_1}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)L + \frac{\partial F}{\partial a_2}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)M \\ &\qquad + \frac{\partial F}{\partial a_3}(X, Y, Z, a_1^0, a_2^0, a_3^0)N, \end{aligned}$$

L, M, N ne dépendant que de a_1, a_2, a_3.

7. *Conséquence*. — Les ∞^3 surfaces Σ forment un système linéaire, comme on s'en assure par un simple changement de paramètres.

---

[1] Nous touchons là, et à d'autres endroits aussi, à des problèmes difficiles que l'état actuel de l'analyse ne permet pas en général de résoudre.

D'autre part, une transformation ponctuelle permet de changer les Σ en les plans de l'espace, au moins dans un certain domaine. Il existe donc une transformation ponctuelle qui transforme les ∞^4 courbes C en les ∞^4 droites.

Lorsque les courbes d'une famille à 4 paramètres sont données par leurs équations finies, il est toujours possible, par des calculs de géométrie analytique qui traduisent les raisonnements que nous avons faits, de reconnaître si elles ont la disposition indiquée.

Il peut se faire que l'on connaisse seulement les courbes par leurs équations différentielles, c'est-à-dire par deux équations différentielles du deuxième ordre à deux inconnues. On peut néanmoins reconnaître si elles jouissent de la propriété en question : leurs équations différentielles doivent pouvoir être transformées par une transformation ponctuelle en le système

$$y'' = 0, \qquad z'' = 0,$$

qui définit les droites de l'espace. La caractéristique de ce dernier système est d'admettre comme plus grand groupe, le groupe projectif général sur trois variables. Donc le plus grand groupe de transformations ponctuelles laissant invariant le système donné doit être semblable au groupe projectif général sur trois variables, et cette propriété suffit évidemment. On est donc ramené à un problème classique de la théorie des groupes continus de transformations.

Conclusion. — Les transformations de contact que nous nous proposions de trouver au paragraphe 2 s'obtiennent donc en faisant le produit à droite, puis à gauche d'une transformation dualistique par une transformation ponctuelle quelconque.

CHAPITRE III.

1. *Définition d'une transformation de courbes.* — Bien qu'il n'existe aucune transformation de contact qui transforme une courbe quelconque en une autre courbe, nous allons montrer qu'on peut associer à toute transformation de contact (T) à une équation directrice une transformation de toutes les courbes de l'espace.

La transformation (T) associe à tout point m de (e) une surface (Σ); soit (γ) une courbe de (e), la transformation (T) lui fait correspondre l'enveloppe (S) des $\infty^1(\Sigma)$ associées à ses points. Cette surface (S), intégrale de l'équation (8) du Chapitre I, est engendrée par ∞^1 courbes (Λ), caractéristiques de cette équation, qui sont aussi des caractéristiques au sens de la théorie des enveloppes et admettent par conséquent, en général, une courbe enveloppe (Γ) arête de rebroussement de S: la transformation dont nous allons nous occuper est celle qui fait correspondre (Γ) à (γ).

Soient m, m', m'' trois points infiniment voisins de (γ); les trois surfaces (Σ), (Σ'), (Σ'') correspondant à m, m', m'' ont en commun un point M situé sur (Γ), c'est-à-dire que (Γ) a un contact de deuxième ordre avec (Σ) en M. D'ailleurs les trois points m, m', m'' doivent être situés sur la surface (σ) associée à M par la transformation (T), puisque M est à la fois sur (Σ), (Σ'), (Σ), donc (γ) a un contact du second ordre avec cette surface (σ). La courbe (γ) étant arbitraire, en chacun de ses points il passe une surface (σ) qui admet avec elle un contact du deuxième ordre, puisque les surfaces (σ) dépendent de 3 paramètres; il résulte de ce qui précède qu'on peut définir (Γ) comme le lieu des points associés aux surfaces (σ) qui passent ainsi en chaque point de (γ), de même que (γ) est le lieu des points associés aux surfaces (Σ) qui admettent avec (Γ) un contact du deuxième ordre.

Ce que nous venons d'exposer constitue une nouvelle définition de la correspondance entre (γ) et (Γ) qui montre la réciprocité de la transformation que nous avons introduite. (γ) est, en général, l'arête de rebroussement de la surface en laquelle (T) transforme (Γ).

Remarque. — Il est clair que les raisonnements précédents ne s'appliquent pas au cas où (γ) serait située sur une surface (σ) ou admettrait, en chacun de ses points, un contact d'ordre supérieur au deuxième avec une surface (σ).

2. *Étude analytique de la transformation.* — Nous allons traduire

analytiquement la définition géométrique de la transformation, puis établir les formules qui nous permettront de l'étudier plus à fond.

Nous indiquerons, en soulignant d'un trait, que l'on doit considérer dans une équation ou dans une expression y et z comme fonctions de la seule variable x. Nous supposons qu'on définisse la courbe (γ) par les expressions de y et z en fonction de x; la courbe (Γ) qui lui correspond est définie par les trois relations : $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$

$$\text{(1)} \qquad F(X, Y, Z, x, y, z) = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{dF}{dx} = F_x + y' F_y + z' F_z = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{d^2F}{dx^2} = F_{x^2} + 2y' F_{xy} + 2z' F_{xz} + y'^2 F_{y^2} + 2y'z' F_{yz} + z'^2 F_{z^2} + y'' F_y + z'' F_z = 0,$$

le symbole $\frac{d}{dx}$ a ici la signification d'une dérivée totale d'une fonction d'une variable. Nous désignons par d le symbole de différentiation le long de (γ), c'est-à-dire la différentiation où x, y, z sont variables mais X, Y, Z constants; par D nous désignons la différentiation le long de (Γ); mais pour désigner la dérivée totale prise k fois par rapport à X et h fois par rapport à x nous écrirons $\frac{d^{k+h}}{dX^k dx^h}$.

Les relations (2) et (3) peuvent s'écrire aussi sous la forme (2') et (3') qui nous sera souvent plus commode

$$\text{(2')} \qquad dF = 0,$$

$$\text{(3')} \qquad d^2 F = 0.$$

Pour avoir les équations de (Γ) en X, Y, Z on élimine x entre $(\underline{1})$, $(\underline{2})$ et $(\underline{3})$, en le calculant au moyen de $(\underline{3})$, ce qui exige que la relation $(\underline{4})$ n'est pas conséquence de $(\underline{1})$, $(\underline{2})$, $(\underline{3})$

$$\text{(4)} \qquad \frac{d^3F}{dx^3} = F_{x^3} + 3y' F_{x^2 y} + \ldots + y''' F_y + z''' F_z = 0.$$

Il convient d'observer qu'au point m répondent, en général, plusieurs points M situés sur des branches différentes de (Γ) et que certaines de ces branches, analytiquement distinctes du reste de (Γ), peuvent être communes à toutes les surfaces (Σ) associées aux points de (γ); nous laisserons de telles branches en dehors de nos considérations.

Plaçons-nous dans le cas général : l'élimination de x entre (1), (2) et (3) conduit à deux relations entre X, Y, Z, qui définissent (Γ); nous allons considérer Y et Z comme fonctions de X dont nous représenterons les dérivées par Y', Z', Y'',...; on écrit immédiatement les relations

$$(5)\qquad \frac{dF}{dX} = F_X + Y'F_Y + Z'F_Z,$$

$$(5')\qquad DF = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{d^2F}{dX\,dx} = \frac{\partial}{\partial X}(F_x + y'F_y + z'F_z) + Y'\frac{\partial}{\partial Y}(F_x + y'F_y + z'F_z) + Z'\frac{\partial}{\partial Z}(F_x + y'F_y + z'F_z)$$
$$= F_{Xx} + y'F_{Xy} + z'F_{Xz} + Y'(F_{Yx} + y'F_{Yy} + z'F_{Yz}) + Z'(F_{Zx} + y'F_{Zy} + z'F_{Zz}),$$

$$(6')\qquad D\,dF = 0.$$

Désignons par (7) les relations :

$$(7)\qquad \frac{F_{Xx} + y'F_{Xy} + z'F_{Xz}}{F_X} = \frac{F_{Yx} + y'F_{Yy} + z'F_{Yz}}{F_Y} = \frac{F_{Zx} + y'F_{Zy} + z'F_{Zz}}{F_Z}.$$

Le calcul des différentielles n'est possible que si les relations (7) ne sont pas conséquences toutes deux de celles qui ont déjà été considérées. Pour ne pas compliquer cet exposé nous admettons que la deuxième égalité n'est pas vérifiée, ce qui assure le calcul de Y' et Z'.

Les différentielles secondes le long de (Γ), et les dérivées secondes Y'' et Z'', sont obtenues par la différentiation des relations (5') et (6')

$$D^2F + D\,dF = 0, \qquad D^2\,dF + D\,d^2F = 0,$$

Ce qui procure, en tenant compte de (6'),

$$(8)\qquad \frac{d^2F}{dX^2} = F_Y Y'' + F_Z Z'' + \ldots + Z'^2 F_{Z^2} + \ldots + F_{X^2} = 0,$$

$$(8')\qquad D^2F = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{d^3F}{dX^2\,dx}\,dX + \frac{d^3F}{dX\,dx^2}\,dx = 0;$$

$$(9')\qquad D^2dF + D\,d^2F = 0,$$

où

$$\frac{d^3 F}{dX^2\,dx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dF}{dx}\right)Y'' + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{dF}{dx}\right)Z'' + \ldots,$$

$$\frac{d^3 F}{dX\,dx^2} = \frac{d}{dX}F_{x^2} + \ldots + \frac{d}{dX}F_y y'' + \frac{d}{dx}F_z z''.$$

La relation (8′) exprime que (Γ) a un contact du deuxième ordre en chacun de ses points avec une surface (Σ).

Introduisons les relations (10) et (10′) obtenues en différentiant (3)

$$\frac{d^3 F}{dX\,dx^2}\,dX + \frac{d^3 F}{dx^3}\,dx = 0, \tag{10}$$

$$D\,d^2 F + d^3 F = 0. \tag{10′}$$

La correspondance ponctuelle entre (Γ) et (γ) résulte des relations (9) et (10); si aucune des expressions $\frac{d^3 f}{dX^2\,dx}$, $\frac{d^3 f}{dX\,dx^2}$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$ n'est nulle en tenant compte des relations déjà écrites, l'élimination de dX et dx entre (9) et (10) donne la relation $(\underline{11})$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3 F}{dX^2\,dx} & \frac{d^3 F}{dX\,dx^2} \\ \frac{d^3 F}{dX\,dx^2} & \frac{d^3 F}{dx^3} \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Les relations $(\underline{8})$ et $(\underline{11})$ permettent de calculer Y″ et Z″ car la condition de possibilité de ce calcul est la même que celle du calcul de Y′ Z′ au moyen de $(\underline{5})$ et $(\underline{6})$.

Les différentielles troisièmes le long de Γ, et les dérivées Y‴ et Z‴ s'obtiennent en différentiant les relations $(\underline{8})$ et $(\underline{11})$ et en y remplaçant dX et dx par les valeurs proportionnelles tirées de $(\underline{9})$ ou $(\underline{10})$. Le déterminant des inconnues Y‴ et Z‴ dans les équations linéaires qui les déterminent est le même que celui qui s'est présenté dans les calculs des dérivées précédentes, il est donc différent de zéro. Le calcul des dérivées successives de Y et Z se poursuit sans arrêt.

5. *Formules de la transformation.* — Il résulte des considérations précédentes le moyen d'obtenir les formules générales de la transformation.

On calcule X, Y, Z au moyen des relations (1), (2) et (3). Formons l'équation dont le premier membre est le déterminant fonctionnel des premiers membres de ces trois relations par rapport à X, Y, Z

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} F_X & F_Y & F_Z \\ \left(\frac{dF}{dx}\right)_X & \left(\frac{dF}{dx}\right)_Y & \left(\frac{dF}{dx}\right)_Z \\ \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_X & \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_Y & \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_Z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation n'est pas une conséquence de (1), (2) et (3), car si l'on tire, par exemple, z' et z'' de (2) et (3) et qu'on porte les expressions obtenues dans (12), on obtient une expression où le coefficient de y'' est, au facteur F_z^2 près, le déterminant que nous avons appelé ∇ au Chapitre I : or, pour que la relation (1) puisse définir une transformation de contact, il est nécessaire comme nous l'avons vu que ce déterminant ne soit pas nul, même en tenant compte de (1).

Les formules que l'on calcule expriment X, Y, Z en fonction de x, y, z, y', z', y'', z''; mais elles ne sont valables qu'autant que l'élément linéaire du deuxième ordre de (c) ne satisfait pas à la relation

$$(13)\qquad \theta_2 = 0,$$

obtenue par l'élimination de X, Y, Z entre (1), (2), (3), (12), relation dont nous aurons à nous occuper plus loin.

On remarque que y'' et z'' ne figurent dans les formules générales que dépendamment l'une de l'autre sous une même combinaison.

On obtient ensuite Y′ et Z′ par les relations (5) et (6), où le déterminant de Y′ et Z′, quand on tient compte de (2), ne peut être nul que si ∇ l'est aussi; Y′ et Z′ s'expriment donc au moyen de x, y, z et leurs dérivées jusqu'au troisième ordre, d'une manière quelconque en y'' et z'', mais y''' et z''' figurant dépendamment l'un de l'autre sous une seule combinaison. Et ainsi de suite pour les dérivées successives de Y et Z, les dérivées d'ordre s'exprimant au moyen de x, y, z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, les dernières sous une seule combinaison, toujours la même à partir du troisième ordre.

Inversement, on peut exprimer x, y, z et leurs dérivées en X, Y, Z et leurs dérivées; les relations (1), (5), (8) permettent de calculer x, y, z en $X, Y, Z, Y', Z', Y'', Z''$ par des formules qui ne sont valables que pour des éléments linéaires du deuxième ordre de (E) qui ne satisfont pas à la relation

$$(14) \qquad \Theta_2 = 0$$

obtenue par l'élimination de x, y, z entre (1), (5), (8) et (15):

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \left(\frac{dF}{dX}\right)_x & \left(\frac{dF}{dX}\right)_y & \left(\frac{dF}{dX}\right)_z \\ \left(\frac{d^2F}{dX^2}\right)_x & \left(\frac{d^2F}{dX^2}\right)_y & \left(\frac{d^2F}{dX^2}\right)_z \end{vmatrix} = 0;$$

puis y' et z' par (2) et (6) en X, Y, Z et leurs dérivées jusqu'au second ordre, et ainsi de suite.

Il convient de remarquer que l'ordre de contact de deux courbes n'est pas conservé en général par la transformation, mais abaissé d'une unité. Toutefois, il n'est pas nécessaire que deux courbes admettent, en général, un contact du deuxième ordre pour être transformées en deux courbes tangentes. Considérons une courbe (γ), un point m de cette courbe et la tangente mt en ce point; la courbe (γ) est transformée en une courbe (Γ) où M correspond à m. Dans la relation (3) substituons à x, y, z, y', z' les valeurs en m, à X, Y, Z les valeurs en M; nous obtenons une relation linéaire en y'' et z''; toute courbe tangente à (γ) en m et pour laquelle y'' et z'', en ce point, sont liés par cette relation linéaire se transforme en une courbe tangente à (Γ) en M. Il est aisé de vérifier que toutes les courbes tangentes à (γ) en m et qui jouissent de la propriété ci-dessus ont leur centre de courbure sur un même cercle et que les courbes de (E) qui leur correspondent et sont tangentes entre elles en M ont de plus leurs centres de courbure sur un même cercle.

On définit ainsi les circonstances les plus générales de la transformation qui comportent de larges exceptions.

4. *Courbes exceptionnelles de la transformation.* — Pour trouver la courbe (Γ) qui correspond à (γ) nous avons supposé qu'on peut

tirer x de l'équation (3), c'est-à-dire que la relation (4) n'est pas conséquence de (1), (2), (3)

$$\frac{d^3 F}{dx^3} = 0. \tag{4}$$

Il est possible, en général, d'éliminer X, Y, Z entre (1), (2), (3) et (4); le résultat de l'élimination est l'équation différentielle (16) du troisième ordre, aux fonctions inconnues y et z de la variable indépendante x :

$$\theta_3 = 0. \tag{16}$$

Pour les courbes intégrales de cette équation, les calculs indiqués précédemment ne sont pas applicables. L'interprétation de l'équation (16) est immédiate : son intégrale générale est formée par les courbes situées sur les surfaces (σ), et avant d'aller plus loin, il nous paraît bon d'indiquer rapidement, indépendamment de la question qui fait l'objet de ce travail, et avec des notations plus simples, certaines propriétés des équations obtenues comme l'équation (16).

5. *Remarques sur la méthode d'élimination des constantes et la théorie des intégrales singulières.* — Considérons la relation

$$f(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0 \tag{17}$$

qui représente une famille de courbes planes dépendant de 3 paramètres essentiels; nous supposons que f est un polynome en c_1, c_2, c_3 dont les coefficients sont des fonctions analytiques, dans certains domaines, de x et y. Ces courbes constituent l'intégrale générale d'une équation différentielle du troisième ordre obtenue par l'élimination de c_1, c_2, c_3 entre les relations (17), (18), (19) et (20) :

$$f_1 = \frac{df}{dx} = f_x + y' f_y = 0, \tag{18}$$

$$f_2 = \frac{d^2 f}{dx^2} = f_{x^2} + \ldots + y'' f_y = 0, \tag{19}$$

$$f_3 = \frac{d^3 f}{dx^3} = f_{x^3} + \ldots + y''' f_y = 0. \tag{20}$$

Soit (21) l'équation obtenue :

$$\varphi_3 = 0. \tag{21}$$

L'équation (21) admet, en général, d'autres intégrales que les courbes (17). Pour s'en rendre compte, il suffit de constater que le problème de l'intégration de l'équation (21) est équivalent à celui qui a pour but de déterminer quatre fonctions y, c_1, c_2, c_3 de x qui satisfont aux équations (17), (18), (19), (20). De ces équations, par différentiation, on tire les relations

$$f_{c_1}\,dc_1 + f_{c_2}\,dc_2 + f_{c_3}\,dc_3 = 0, \tag{17'}$$

$$f_{1c_1}\,dc_1 + f_{1c_2}\,dc_2 + f_{1c_3}\,dc_3 = 0, \tag{18'}$$

$$f_{2c_1}\,dc_1 + f_{2c_2}\,dc_2 + f_{2c_3}\,dc_3 = 0. \tag{19'}$$

On y satisfait soit en imposant aux inconnues les conditions

$$dc_1 = dc_2 = dc_3 = 0,$$

qui procurent l'intégrale générale, soit en leur imposant de vérifier la nouvelle relation

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(c_1, c_2, c_3)} = 0. \tag{22}$$

L'élimination de c_1, c_2, c_3 entre (17), (18), (19) et (22) conduit, en général, à une équation différentielle du second ordre pour y :

$$\varphi_2 = 0, \tag{23}$$

dont les intégrales vérifient, en général, l'équation (21), et sont, en général, des solutions singulières de cette dernière équation. [Le lecteur est prié d'excuser la fréquence de l'emploi de la locution « en général »; les circonstances qui peuvent se présenter sont très nombreuses et nous nous sommes bornés, à indiquer celles qu'on rencontre lorsque les coefficients des développements en séries entières des fonctions analytiques de x et y qui figurent dans (17) sont choisis arbitrairement, dans les limites, bien entendu, qui assurent la convergence des séries où ils figurent. Il peut se faire que l'élimination de c_1, c_2, c_3 conduise à deux équations du second ordre en y, il peut se faire que certaines intégrales de (23) ne soient pas intégrales de (21) ou qu'elles en soient des intégrales particulières.]

Des relations (17), (18) et (19) on obtient, en tenant compte de (20) : (17'), (18') et (19''),

$$f_3\,dx + f_{2c_1}\,dc_1 + f_{2c_2}\,dc_2 + f_{2c_3}\,dc_3 = 0, \tag{19''}$$

et l'on est certain que les fonctions c_1, c_2, c_3, y déterminées par (17), (18), (19) et (22) satisfont à (20) si elles ne vérifient pas simultanément les deux relations (24) :

$$\frac{f_{c_1}}{f_{1c_1}} = \frac{f_{c_2}}{f_{1c_2}} = \frac{f_{c_3}}{f_{1c_3}}, \tag{24}$$

ce qui a évidemment lieu en général.

En général, aussi, l'élimination de c_1, c_2, c_3 entre (17), (18) et (24) conduit à une équation du premier ordre :

$$\varphi_1 = 0, \tag{25}$$

dont les intégrales ne satisfont pas à (21) et sont des solutions singulières de (23); en poursuivant encore, l'élimination de c_1, c_2 et c_3 entre (17) et les trois relations (26),

$$f_{c_1} = 0, \qquad f_{c_2} = 0, \qquad f_{c_3} = 0, \tag{26}$$

conduit, en général, à une relation entre x et y qui définit une solution singulière de (25) non intégrale de (23).

Il existe entre les intégrales des équations (21), (23) et (25) des relations de contact qui sont à peu près évidentes d'après la façon dont ces équations sont formées et que nous nous bornerons à indiquer; il s'agit, bien entendu, dans ce qui suit d'intégrales quelconques et de points arbitrairement pris sur elles.

En tout point d'une courbe intégrale de (23), il passe une courbe intégrale de (21), c'est-à-dire une courbe (17) qui admet avec elle un contact du troisième ordre. En tout point d'une courbe intégrale de (25), il passe une courbe intégrale de (23) qui admet avec elle un contact du deuxième ordre.

6. Nous allons appliquer les résultats qui viennent d'être obtenus à l'étude de l'ensemble des courbes tracées sur les surfaces d'une famille à 3 paramètres :

$$g(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0. \tag{27}$$

Ces courbes constituent l'intégrale générale d'une équation de Monge du troisième ordre :

$$\psi_3 = 0, \tag{28}$$

où y et z sont considérées comme fonctions inconnues de x et qui est obtenue par l'élimination de c_1, c_2, c_3 entre les relations (27), (29), (30) et (31) :

$$g_1 = \frac{dg}{dx} = 0, \tag{29}$$

$$g_2 = \frac{d^2 g}{dx^2} = 0, \tag{30}$$

$$g_3 = \frac{d^3 g}{dx^3} = g_x{}^3 + \ldots + g_y y''' + g_z z''' = 0. \tag{31}$$

L'élimination de c_1, c_2, c_3 entre les relations (27), (29), (30) et (32) conduit en général à une seule équation de Monge (33) du deuxième ordre d'un type particulier :

$$\frac{D(g, g_1, g_2)}{D(c_1, c_2, c_3)} = 0, \tag{32}$$

$$\psi_2 = 0. \tag{33}$$

En tout point d'une courbe appartenant à l'intégrale générale de (33) il passe une courbe intégrale de (28), c'est-à-dire une courbe située sur une surface (27), admettant avec elle un contact du troisième ordre. Il suffit, pour s'en rendre compte, de se rappeler que quand deux courbes gauches se projettent suivant la même courbe du plan des zx, la condition pour qu'elles admettent un contact d'ordre n est que leurs projections sur le plan des xy admettent un contact de cet ordre. Dès lors, si l'on considère z comme une fonction arbitraire de x (dans des limites convenables) et y comme l'inconnue, on est ramené au cas précédent.

D'une façon analogue, en tout point d'une courbe intégrale d'une certaine équation de Monge, il passe une courbe intégrale de (32) admettant avec elle un contact du deuxième ordre. Cette équation de Monge s'obtient par l'élimination de c_1, c_2, c_3 entre les équations (27), (29) et (34) :

$$\frac{g_{c_1}}{g_{1c_1}} = \frac{g_{c_2}}{g_{1c_2}} = \frac{g_{c_3}}{g_{1c_3}}. \tag{34}$$

Enfin, on peut associer à l'équation de Monge une surface à laquelle les courbes intégrales sont tangentes en un de leurs points.

Remarques. — I. La fonction z de x étant arbitraire, il est bon de remarquer qu'il sera facile de la choisir pour que les équations en y admettent des solutions singulières d'un type particulier.

II. Nous avons supposé, pour la simplicité de l'exposé, que les relations données sont algébriques par rapport aux constantes; on peut étendre les résultats à des cas plus généraux, mais pour éviter des complications nous supposerons dorénavant que F est algébrique en x, y, z, X, Y, Z.

7. *Les différentes classes de courbes exceptionnelles.* — Nous avons vu que les courbes intégrales de l'équation (16) font exception dans la transformation ; il leur correspond un point de l'espace (E). D'après la façon dont a été formée cette équation, nous pouvons lui appliquer les résultats du paragraphe précédent, X, Y, Z jouant le rôle des constantes c_1, c_2, c_3. L'équation (16) admet comme intégrale singulière une équation de Monge du deuxième ordre qui est précisément l'équation (13) obtenue ci-dessus; si l'on considère une courbe intégrale de (13), par chacun de ses points il passe une courbe tracée sur une surface (σ) et admettant avec elle un contact du troisième ordre ; *les courbes intégrales de l'équation* (13) *sont donc les courbes qui admettent en chacun de leurs points un contact du troisième ordre avec une surface du complexe* (σ). Nous avons vu que pour une courbe quelconque ce contact est du deuxième ordre.

Remarque. — Il peut se faire qu'on obtienne, par les éliminations indiquées, non pas une, mais deux équations du deuxième ordre. La transformation de Legendre offre l'exemple le plus simple de ce cas.

L'équation (13) admet comme intégrales singulières les intégrales de l'équation de Monge (35) :

$$\theta_1 = 0, \tag{35}$$

obtenue par l'élimination de X, Y, Z entre les relations (1), (2), et (7). Une courbe intégrale de (35) étant donnée, par chacun de ses points il passe une courbe intégrale de (13), admettant avec elle un contact du deuxième ordre; elle n'admet en général qu'un contact du deuxième ordre au plus, en chacun de ses points avec une surface (σ).

Enfin, l'élimination de X, Y, Z entre (1) et (6),

$$(36) \qquad F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0,$$

conduit en général à une surface (s_0), intégrale singulière de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, associée à l'équation de Monge du premier ordre.

Voyons maintenant comment se comportent les courbes exceptionnelles dans la transformation.

Tout d'abord, généralement, pour une courbe (γ) intégrale de (16),

$$(16) \qquad \theta_3 = 0$$

en raison de (4), on déduit de (10)

$$(36)' \qquad D\frac{d^2F}{dx^2} = 0,$$

et en comparant à (5) et (8), on constate que si (γ) n'est pas intégrale de (13), c'est-à-dire si (12) n'est pas satisfaite, on doit avoir

$$dX = dY = dZ = 0,$$

ce qui confirme qu'à (Γ) correspond un point de (E).

Supposons maintenant que (γ) soit solution de (16) et non de (35), les équations (36′), (5) et (8) se réduisent à deux seulement et à (γ) correspond une courbe (Γ) dans (E). La relation (36′) entraîne, d'après (9′),

$$D^2 dF = 0;$$

or la différentiation totale de (8′) donne

$$D^3F + D^2 dF = 0,$$

donc

$$D^3 F = 0.$$

Formons dans (E) l'équation (37) correspondant à (16):

$$(37) \qquad \Theta_3 = 0;$$

la courbe (Γ) doit être intégrale de (37); d'après ce que nous avons vu, (37) admet comme intégrale singulière l'équation (14) :

$$(14) \qquad \Theta_2 = 0;$$

(Γ) doit être une intégrale de (14), sans cela il lui correspondrait un point de (e). Rappelons-nous maintenant qu'une courbe quelconque est l'enveloppe de courbes (Λ) (les caractéristiques); le contact en chaque point caractéristique est en général du premier ordre : les différentielles premières sont les mêmes sur les deux courbes et sont déterminées par (5′) et (6′); il existe de plus une relation commune entre les différentielles secondes sur les deux courbes : (8′). Dans le cas présent, il en existe une deuxième :

$$(38) \qquad D^2 \frac{dF}{dx} = 0$$

qui est distincte de la première : le contact de (Γ) avec chacune des (Λ) qu'elle enveloppe est donc du deuxième ordre; la propriété correspondante existe évidemment dans (e).

Groupons les relations qui assurent la correspondance entre les courbes (γ) et (Γ) que nous venons de considérer,

$$(1)\quad F = 0, \qquad (2)\quad \frac{dF}{dx} = 0, \qquad (3)\quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0, \qquad (5)\quad \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$(8)\quad \frac{d^2F}{dX^2} = 0, \qquad (6)\quad \frac{d^2F}{dX\,dx} = 0 \qquad \text{et} \qquad (12).$$

Ces relations permettent d'exprimer X, Y, Z, Y', Z', Y'', Z'' en fonction de x, y, z, y', z', y'', z'', à condition que les relations (7) n'en soient pas conséquences, c'est-à-dire que (γ) ne soit pas intégrale de (35), ce qui est le cas; rappelons que $x, y, \ldots, z''$ sont liés par la relation (13).

L'inversion de ces formules est possible si (Γ) n'est pas intégrale de l'équation (39) analogue à (35) :

$$(39) \qquad \Theta_1 = 0$$

obtenue par l'élimination de x, y, z entre (1), (5) et (40) :

$$(40) \qquad \frac{\left(\frac{dF}{dX}\right)_x}{F_x} = \frac{\left(\frac{dF}{dX}\right)_y}{F_y} = \frac{\left(\frac{dF}{dX}\right)_z}{F_z}.$$

Nous constatons que deux courbes intégrales de (13) qui admettent en un point un contact du deuxième ordre se transforment en deux courbes intégrales de (14) qui admette en un point un contact de cet ordre.

On peut prolonger les formules de la transformation jusqu'à un ordre quelconque; à chaque prolongement, on fait intervenir les dérivées d'ordre immédiatement supérieur de chaque côté.

8. *Cas particulier.* — Nous voulons maintenant nous occuper du cas où (γ) est intégrale de l'équation (35). Cette équation a une autre signification qu'il convient d'indiquer : elle exprime la condition pour que les surfaces (Σ) correspondant à deux points infiniment voisins de (γ) de coordonnées x, y, z et $x+dx$, $y+dx$, $z+dx$, soient tangentes en un point de leur courbe d'intersection; ou bien, si l'on veut encore, parmi les $\infty^5(\Lambda)$, elle en particularise ∞^4 qui admettent en général un point double. L'élimination de y' et z' entre (2) et (7) donne la relation

$$V = 0 \tag{41}$$

que nous avons rencontrée plus haut; elle définit sur chaque (Σ) une courbe (H) qui est le lien des points doubles des (Λ) situés sur cette surface (Σ) [sur chaque (Σ) il y a $\infty^2 \Lambda$ dont ∞^1 ont un point double]. Les éléments plans de contact de (Σ) le long de (H) sont des éléments singuliers de la transformation de contact (T), c'est-à-dire aussi les éléments de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui définit les surfaces osculatrices aux surfaces (Σ).

Déterminons l'intersection de deux de ces éléments de contact infiniment voisins situés sur (Σ). Les plans tangents à (Σ) le long de (H) sont déterminés par l'équation

$$(\xi - X)\frac{dF_X}{dz} + (\eta - Y)\frac{dF_Y}{dz} + (\zeta - Z)\frac{dF_Z}{dx} = 0,$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées courantes, x, y, z constants et y', z' liés par la relation

$$F_x + y' F_y + z' G_z = 0,$$

X, Y, Z désignant un point de la courbe d'intersection de (1) et (41).

La caractéristique du plan tangent admet pour équations

$$\frac{(\xi - x)F_{xX} + (\eta - Y)F_{xY} + (\zeta - Z)F_{xZ}}{F_x}$$
$$= \frac{(\xi - X)F_{yX} + (\eta - Y)F_{yY} + (\zeta - Z)F_{yZ}}{F_y}$$
$$= \frac{(\xi - X)F_{zX} + (\eta - Y)F_{zY} + (\zeta - Z)F_{zZ}}{F_z},$$

c'est une génératrice du cône de l'équation de Monge du premier ordre (39); cela prouve que les équations (35) et (39) sont les équations associées aux équations de dérivées partielles du premier ordre

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0 \qquad \text{(Chap. I)},$$

car les éléments de contact tangents à (Σ) le long de (H) constituent une bande intégrale de la seconde de ces équations.

Considérons maintenant une courbe (γ) intégrale de (35) et le lieu (Γ) des points doubles des (Λ) qui correspondent à ses points. La courbe (Γ) est définie par les relations

$$\text{(1)} \qquad F = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\text{(7)} \qquad \frac{\frac{dF_X}{dx}}{F_X} = \frac{\frac{dF_Y}{dx}}{F_Y} = \frac{\frac{dF_Z}{dx}}{F_Z}$$

qui se réduisent à 3, puisque (35) en est une conséquence; la relation (4) résulte de l'élimination de y', z' entre (2) et (7).

Par différentiation de (1), en tenant compte de (2), on constate d'abord que

$$\text{(5')} \qquad DF = 0,$$

ce qui prouve que (Γ) est tangente en chacun de ses points à la surface (Σ) qui y passe; de plus, la différentiation de (5') donne

$$D^2F + D\,dF = 0,$$

et comme en tenant compte de (7) et (5')

$$\text{(6')} \qquad D\,dF = 0,$$

il en résulte que

$$(8') \qquad D^2 F = 0,$$

ce qui prouve que (Γ) admet avec la surface (Σ) un contact du deuxième ordre, mais la direction de la tangente à (Γ) en chacun de ses points ne dépend pas uniquement de celle de la tangente à (γ) au point correspondant; la deuxième relation qui en outre de $(5')$ définit la tangente à (Γ) est en effet obtenue en annulant un déterminant dont nous n'écrivons qu'une ligne

$$\left\| D\,\frac{\frac{dF_X}{dx}}{F_X} \qquad \frac{d}{dx}\,\frac{\frac{dF_X}{dx}}{F_X} \qquad 1 \right\| = 0;$$

dans la deuxième colonne interviennent évidemment les dérivées y'' et z''; entre ces deux quantités existe une relation obtenue en prenant la dérivée de l'équation (35), dérivée qui se calcule au moyen de $\frac{d^2F}{dx^2} = 0$; malgré cela on ne peut les faire disparaître du déterminant, cette question sera du reste reprise un peu plus loin.

Les courbes (Γ) correspondant aux intégrales de (35) ne sont donc pas intégrales d'une équation de Monge du premier ordre; elles le sont d'une équation du deuxième ordre qu'on obtient par l'élimination de x, y, z, entre (1), (5), (8) et (4); cette équation du reste n'est autre que celle qui résulte de la dérivée de (39).

Réciproquement, supposons que (Γ) soit intégrale de cette équation du deuxième ordre; rappelons que

$$(4') \qquad \nabla = 0$$

assure la compatibilité de (2) et (7) et soit y'_1, z'_1 les expressions de y' et z' qui satisfont à ces équations (2) et (7), la condition (4') étant remplie; soit d'une façon générale λ la valeur commune des rapports (7) et λ_1 la valeur particulière qui correspond à la compatibilité avec (2). On peut toujours écrire, si (4') est vérifiée,

$$\frac{dF_X}{dx} = (y' - y'_1)F_{Xy} + (z' - z'_1)F_{Xz} + \lambda_1 F_X.$$

Dans les circonstances où nous nous plaçons, les relations (1), (5'), (8') et (4') sont compatibles. De (5') et (8') on déduit (6'); or (6') s'écrit

$$\sum_{dX} \frac{dF_X}{dx} dX = \sum_{dX} (y'-y'_1) F_{Xy} dX + (z'-z'_1) F_{Xz} dX = 0,$$

le coefficient de λ_1 disparaissant à cause de (5'). D'autre part, de (1) et (5') on déduit la relation (2) qui peut s'écrire, puisque (4') est vérifiée,

$$F_y(y'-y'_1) + F_z(z'-z'_1) = 0,$$

et alors, deux cas peuvent se présenter : ou bien

$$y'-y'_1 = 0, \qquad z'-z'_1 = 0,$$

ou bien

$$\frac{\frac{dF_y}{dX}}{F_y} = \frac{\frac{dF_z}{dX}}{F_z}.$$

Dans le premier cas, la relation (7) étant vérifiée et les expressions trouvées de y' et z' étant bien les dérivées de y et z sur la courbe (γ) correspondant à (Γ), (γ) est intégrale à l'équation de Monge (35).

Dans le deuxième cas, les relations (2) et (5) permettent d'égaler le rapport écrit à $\frac{\frac{dF_x}{dX}}{F_x}$ et ainsi les équations (40) sont satisfaites; la courbe (Γ) est alors une intégrale de l'équation de Monge (39) et, d'après ce qui a été vu plus haut, il lui correspond une courbe intégrale de l'équation dérivée de (35) et qui n'est pas une intégrale de (35) en général.

Ainsi, nous avons obtenu une correspondance non pas entre les courbes intégrales des deux équations de Monge du premier ordre, mais entre les courbes intégrales de l'une d'elles et de la dérivée de l'autre.

La discussion qui précède n'avait pas pour but d'envisager tous les cas possibles mais de signaler l'essentiel, et, en résumé, nous avons obtenu trois types de transformations de courbes par correspondance entre les éléments linéaires de contact des divers ordres :

1° Une transformation s'appliquant à généralité des courbes de l'espace;

2° Une transformation entre courbes intégrales de deux équations de Monge du deuxième ordre, bien déterminées par les formules mêmes de la transformation, équations qui ne peuvent être des équations quelconques, mais dépendent d'une fonction arbitraire de cinq variables;

3° Une transformation entre courbes intégrales de deux équations de Monge du deuxième ordre, dérivées exactes d'équations du premier ordre, dépendant par conséquent d'une fonction arbitraire de quatre variables.

On est conduit ainsi à rechercher directement les transformations de courbes par correspondance des éléments de contact des divers ordres.

9. *Transformation du contact linéaire du premier ordre.* — Un élément de contact linéaire du premier ordre est représenté par l'ensemble des cinq nombres x, y, z, y', z'; deux éléments voisins sont unis si les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dy - y'\,dx = 0, \\ dz - z'\,dx = 0. \end{array} \right.$$

Les transformations qui font l'objet de ce paragraphe doivent porter sur les coordonnées de l'élément linéaire du premier ordre, et transformer deux courbes tangentes quelconques en deux autres courbes tangentes; elles doivent donc se traduire par les formules d'un changement de variables sur x, y, z, y', z', considérées comme variables indépendantes, et laissant invariant le système (41). Nous allons montrer *que les transformations ponctuelles prolongées seules jouissent de cette propriété*. Le système (41) représente la forme canonique d'un système de deux équations de Pfaff à cinq variables pour lequel le système qui détermine les éléments singuliers est complètement intégrable (¹) et admet pour intégrale générale :

$$x = c_1, \qquad y = c_2, \qquad z = c_3;$$

l'intégrale de ce dernier système se déduit aussi des relations obtenues

(¹) Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 316.

en égalant à des constantes arbitraires trois fonctions indépendantes quelconques de x, y, z; il existe donc une infinité de façons de ramener le système à cinq variables à sa forme canonique; elles se déduisent de l'une d'elles par une transformation ponctuelle arbitraire effectuée sur x, y, z et il n'existe manifestement que celles-là.

Mais on peut aussi démontrer directement cette proposition, soit :

$$(42)\qquad \begin{cases} dY - Y'\,dX = 0, \\ dZ - Z'\,dX = 0 \end{cases}$$

un autre mode de réduction du système donné; X, Y, Z, Y', Z' sont des fonctions de x, y, z, y', z' telles qu'il existe deux relations au moins

$$(43)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, X, Y) = 0, \\ G(x, y, z, X, Y) = 0 \end{cases}$$

(s'il en existait trois on aurait une transformation ponctuelle), d'où l'on déduit par une méthode connue les suivantes :

$$(44)\qquad \begin{cases} F_x + Y'F_y = 0, \\ G_x + Z'G_z = 0; \end{cases}$$

$$(45)\qquad \begin{cases} F_x + y'F_y + z'F_z = 0, \\ G_x + y'G_y + z'G_z = 0. \end{cases}$$

Les équations (44) et (45) sont évidemment indépendantes si

$$(46)\qquad \frac{F_y}{G_y} = \frac{F_z}{G_z}$$

n'est pas une conséquence de (43); dans ce cas, on est ramené à l'étude d'une transformation de contact à deux équations directrices (43) et de la correspondance entre les éléments linéaires des courbes des deux complexes définis par (43). Dans le cas où (46) est conséquence des relations (43), supposées indécomposables, on voit que la transformation, nécessairement ponctuelle, ne s'applique qu'aux éléments d'une équation de Monge.

10. *Transformations du contact linéaire d'ordre supérieur à* 1. — Pour préciser, nous nous occupons du deuxième ordre; des considérations analogues s'appliquent à un ordre quelconque. Nous appelons « élément linéaire du deuxième ordre » l'ensemble des sept nombres $x, y, z, y', z', y'', z''$; deux éléments voisins sont unis si :

$$(47)\qquad \begin{cases} \omega_1 = dy - y'\,dx = 0, \\ \omega_2 = dz - z'\,dx = 0, \\ \omega_3 = dy' - y''\,dx = 0, \\ \omega_4 = dz' - z''\,dx = 0. \end{cases}$$

Une transformation de contact linéaire du deuxième ordre, par définition, résulte d'un changement des sept variables indépendantes $x, \ldots, z''$ qui laisse invariant le système (47) : *il n'y en a pas d'autres que les transformations ponctuelles prolongées.* En effet : le système (47) est un système de quatre équations de Pfaff à sept variables dont le système dérivé est formé des deux premières équations, c'est-à-dire est le système (41).

Tout changement de variables laissant invariant (47) doit aussi laisser (41) invariant et, d'après le paragraphe précédent, la proposition est démontrée.

11. *Transformations du contact linéaire du deuxième ordre entre équations de Monge.* — Si l'on suppose que les variables $x, \ldots, z''$, au lieu d'être indépendantes, sont liées par une relation

$$(48)\qquad \psi(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0,$$

le raisonnement précédent ne s'applique plus. Le système dérivé de (47), (48) est formé des trois équations

$$(49)\qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \psi'_{z''}\omega_3 - \psi'_{y''}\omega_4 = 0,$$

et les transformations cherchées doivent laisser (49) invariant; on est amené ainsi à traiter une question plus générale : trouver des fonctions X, Y, Z, Y', Z' de $x, y, \ldots, z''$ telles que :

$$(50)\quad \begin{cases} dY - Y'dX = a\,(dy - y'dx) + b\,(dz - z'dx) + c\,(dy' - y''dx) + e\,(dz' - z''dx), \\ dZ - Z'dX = a_1(dy - y'dx) + b_1(dz - z'dx) + c_1(dy' - y''dx) + e_1(dz' - z''dx). \end{cases}$$

Une première solution consiste à prendre pour X, Y, Z des fonctions arbitraires de x, y, z, y', z'; on en déduit pour Y', Z' des expressions contenant en outre y'' et z''. Nous laissons ce cas de côté : il conduit à des transformations entre systèmes d'équations différentielles, et nous supposons dès lors qu'il n'existe que deux relations entre X, Y, Z et x, y, z, x', y'; il est clair qu'il en existe au moins deux :

$$(51)\qquad \begin{cases} Y + F(X, x, \ldots, z') = 0, \\ Z + G(X, x, \ldots, z') = 0. \end{cases}$$

Par un procédé connu, on en déduit deux nouvelles relations :

$$(52)\qquad \begin{cases} F_x + y'F_z + z'F_z + y''F_{y'} + z''F_{z'} = 0, \\ G_x + y'G_z + z'G_z + y''G_{y'} + z''G_{z'} = 0, \end{cases}$$

Y' et Z' étant donnés par

$$(53)\qquad Y' = -F_x, \qquad Z' = -G_x.$$

En général, l'élimination de X entre les relations (52) conduit à une équation de Monge du deuxième ordre, quelconque; on peut définir pour les intégrales de cette équation une transformation de courbes sur laquelle nous n'insisterons pas puisque les expressions de Y'' et Z'' renferment y''' et z''', à moins de retomber sur un cas précédemment étudié. Nous allons supposer que les relations (52) se réduisent à une seule, ce qui exige que l'on ait identiquement

$$\frac{F_{y'}}{G_{y'}} = \frac{F_{z'}}{G_{z'}},$$

autrement dit

$$-G = \Phi(-F, X, x, y, z),$$

ou encore

$$(54)\qquad Z = \Phi(Y, X, x, y, z).$$

La deuxième relation (52) devient alors

$$(55)\qquad \Phi_x + y'\Phi_y + z'\Phi_z = 0.$$

Pour que les circonstances que nous envisageons se réalisent, il faut que les quatre relations : 1^re^ (51), 1^re^ (52), (54) et (55) se réduisent à trois, donc que la première (49) et (53) se réduisent à une seule; autrement dit, on définira la transformation par les relations

$$Z = \Phi(Y, X, x, y, z), \Phi_x + y'\Phi_y + z'\Phi_z = 0, \qquad \Phi_{xx} + \ldots + z''\Phi_z = 0.$$

D'autre part, d'après (53),

$$Z' = \Phi_Y Y' + \Phi_X$$

et

$$Y' = -\frac{(\Phi_x + y'\Phi_y + z'\Phi_z)_X}{(\Phi_x + y'\Phi_y + z'\Phi_z)_Y},$$

c'est-à-dire que nous retrouvons la première transformation de courbes que nous avons définie (§ **1**).

X, Y, Z, Y', Z' s'expriment au moyen de $x, y, \ldots, z''$, les expressions de y'' et z'' font intervenir, en général, les dérivées troisièmes. Pour que y'' et z'' s'expriment eux-mêmes avec les dérivées des y et z jusqu'au deuxième ordre inclusivement, il est nécessaire, si l'on se reporte à la relation (11) que $\frac{d^3F}{dX^2\,dx}$ soit nul en tenant compte des relations déjà considérées; cela nous place dans les circonstances de la deuxième transformation que nous avons mise en évidence (§ **7**). Ce mode de transformation est donc le seul qui porte sur les éléments d'une équation de Monge du deuxième ordre; cette équation d'ailleurs n'est pas une équation quelconque.

12. *Sur les solutions de certaines équations de Monge-Ampère.* — Nous avons vu qu'à toute transformation de contact sont attachées deux équations de Monge-Ampère d'un type tout spécial, et admettant une intégrale singulière du premier ordre. Considérons, par exemple, l'équation que nous avons déjà nommée au Chapitre I :

$$U_2 = 0. \tag{56}$$

Pour avoir celles de ses solutions qui font partie de son intégrale générale, nous avons vu que, parmi les ∞^5 (A), on doit en choisir ∞^1 qui admettent une enveloppe (Γ); cette courbe (Γ) est une courbe arbitraire de l'espace et constitue pour la surface une arête de rebroussement, le contact entre (Γ) et ses enveloppes étant seulement du premier ordre [1].

---

[1] DARBOUX, *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, t. XXVII, n° 2, p. 39).

Mais nous savons que si (Γ) est une intégrale de l'équation de Monge du deuxième ordre (14), elle peut être considérée comme enveloppe de $\infty^1 (\Lambda)$ admettant avec elle un contact de deuxième ordre; on peut dire aussi que la surface intégrale de l'équation (56) est l'enveloppe de ∞^1 surfaces (Σ) admettant chacune avec (Γ) un contact du troisième ordre; dans ce cas, (Γ) n'est plus une arête de rebroussement apparent pour la surface intégrale.

Si, maintenant, (Γ) est une solution de l'équation dérivée de l'équation de Monge (39), la surface intégrale correspondante est engendrée, en général, par des (Λ) à point double et elle admet, comme nous l'allons montrer d'une façon précise, une ligne singulière le long de laquelle se raccordent deux nappes de la surface; on détermine ainsi un bandeau, le long de (Γ), qui est un bandeau intégral de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre déjà nommée :

$$U_1 = 0. \tag{57}$$

La démonstration que nous allons donner de cette propriété fixera plus nettement les conditions de la transformation des courbes intégrales de l'équation (35). Étudions localement la transformation considérée, autour des origines o et O dans (e) et (E) : nous supposons que la surface Σ_0, qui répond à o, est tangente en O au plan XOY et que son élément de contact à l'origine est un élément singulier de la transformation de contact (T); de plus, comme à un point de (H_0) correspond un élément du cône de Monge de sommet o, nous nous arrangeons pour que l'élément linéaire correspondant à O soit porté par ox. Avec ces hypothèses, nous pouvons définir la transformation (T) au voisinage des origines par la relation

$$\begin{aligned} Z = {} & a_{010}y + a_{001}z + a_{200}x^2 + \ldots + (a_{010}^{10}y + a_{001}^{10}z + \ldots)X \\ & + (a_{010}^{01}y + a_{001}^{01}z + \ldots)Y + (a^{20} + a_{100}^{20}x + \ldots)X^2 \\ & + (a^{11} + a_{100}^{11}x + \ldots)XY + (a^{02} + a_{100}^{02}x + \ldots)Y^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{58}$$

Une courbe intégrale (γ) de l'équation de Monge, tangente à ox a des équations de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots, \\ z &= \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots . \end{aligned} \right. \tag{59}$$

d'où

$$y' = 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots,$$
$$z' = 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \ldots.$$

Du reste, α_2 et β_2 ne sont pas indépendants, on trouve

$$(60) \qquad h = a_{010}\alpha_2 + a_{001}\beta_2 + a_{200} = 0.$$

La surface (S) correspondant à (γ) s'obtient en substituant à y et z' les expressions (59) dans (58) et en prenant l'enveloppe des surfaces (Σ) ainsi déterminées :

$$(58') \qquad \begin{aligned} Z = h x^2 + \ldots &+ [(a^{10}_{010}\alpha_2 + a^{10}_{001}\beta_2 + a^{10}_{002}) x^2 + \ldots] X \\ &+ [(a^{01}_{010}\alpha_2 + a^{01}_{001}\beta_2 + a^{01}_{002}) x^2 + \ldots] Y + [a^{20} + \ldots] X^2 \\ &+ [a^{11} + \ldots] XY + [a^{02} + \ldots] Y^2 \ldots \end{aligned}$$

dont la dérivée par rapport à x est

$$(61) \qquad \begin{aligned} 2hx + \ldots &+ [2(a^{10}_{010}\alpha_2 + a^{10}_{001}\beta_2 + a^{10}_{002}) x + \ldots] X \\ &+ [2(a^{01}_{010}\alpha_2 + a^{01}_{001}\beta_2 + a^{01}_{002}) x + \ldots] Y + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Si la relation (60) n'était pas vérifiée, on pourrait tirer x de (61) en fonction holomorphe de X et Y, et en portant dans (58') on aurait pour Σ un développement régulier autour de l'origine commençant par des termes du deuxième degré; on voit donc que si une courbe est simplement tangente à une courbe intégrale de (35), sans être elle-même une courbe intégrale, cela n'entraîne, en général pour la surface Σ correspondante, aucune singularité.

Mais si la courbe (γ) est une courbe intégrale de (35), alors la relation (60) est vérifiée, le coefficient de x dans (61) est nul; en général le coefficient du terme en x^2 ne l'est pas; on peut donc exprimer x en fonction algébroïde de X, Y par la résolution d'une équation du deuxième degré; on en déduit, en général, deux déterminations pour Z; de plus, dans (58'), le coefficient du terme en x^2 est nul; comme les développements des coefficients de X et Y commencent par des termes en x^2, il en résulte qu'on définit ainsi deux nappes de la surface S simplement tangentes en O.

Ce que nous venons de dire peut se répéter pour un point quelconque de (γ), ce qui démontre la proposition énoncée.

Pour ne pas allonger ce Mémoire, nous ne faisons qu'indiquer comment est définie la tangente à (Γ) en O; $\left(\frac{dX}{dx}\right)_0$ et $\left(\frac{dY}{dx}\right)_0$ désignant les paramètres de direction, il vient

$$2(a^{10}_{010}\alpha_2 + a^{10}_{001}\beta_2 + a^{10}_{002}) + 2\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 a^{20}_{100} + \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 a^{11}_{100} = 0,$$

$$2(a^{01}_{010}\alpha_2 + a^{01}_{001}\beta_2 + a^{01}_{002}) + \left(\frac{dX}{dx}\right)_0 a^{11}_{100} + \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 a^{02}_{100} = 0,$$

on en déduit aisément le coefficient angulaire de la tangente à (Γ) en O, qui en tenant compte de (60) s'exprime en α_2 par une fonction homographique; une discussion s'impose dont nous ne retiendrons que le rôle exceptionnel joué par la direction tangente à (H_0).

13. Nous venons de distinguer parmi les intégrales de l'équation (56) trois catégories de solutions :

a. Les solutions du caractère de la plus grande généralité, à arète de rebroussement apparente constituée par une couche arbitraire;

b. Les solutions pour lesquelles cette courbe étant convenablement choisie, le rebroussement n'est plus apparent;

c. Les solutions à ligne singulière le long de laquelle deux nappes se raccordent simplement en général.

Notons enfin que les surfaces (Σ) sont également des intégrales.

Disons maintenant quelques mots sur les rapports que représentent ces intégrales avec des solutions singulières déterminées par l'équation (57).

On sait d'abord que les surfaces (Σ) sont osculatrices en tout point de la courbe (H) qu'elles portent à des intégrales de (57).

Envisageons chacune des catégories précédentes :

a. Sur chaque surface se trouve, en général, un bandeau intégral de l'équation (57); il existe, en général, une intégrale singulière inscrite le long de ce bandeau.

b. En plus de la relation indiquée, on peut remarquer qu'on peut associer à toute intégrale de cette classe une infinité d'intégrales singulières dont, en général, les arètes de rebroussement ont un contact du deuxième ordre avec l'intégrale considérée en un point de la ligne de rebroussement non apparent.

c. Par la ligne singulière de raccordement passe une intégrale singulière inscrite.

14. *Sur une transformation de certaines équations de Monge-Ampère.* — La transformation de courbes dont nous venons de parler établit une correspondance entre les solutions des deux équations de Monge-Ampère associées à la transformation T : ces équations sont à direction de caractéristiques double et l'on excepte en général ce cas lorsqu'on étudie la théorie des transformations des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. On peut trouver aisément les relations de base qui définissent la correspondance indiquée, mais nous nous bornerons à ces indications.

15. *Exemple.* — Nous traitons sommairement le cas où la transformation de contact T est une dilatation caractérisée par la relation

$$(62)\qquad (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2,$$

où R est une constante.

La transformation de courbes définie au début du Chapitre III s'obtient en adjoignant à (62) les deux relations (63) et (64) :

$$(63)\qquad X-x+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0,$$

$$(64)\qquad -(1+y'^2+z'^2)+y''(Y-y)+z''(Z-z)=0;$$

la première représente le plan normal à (γ) (*qui est arbitraire pour l'instant*) au point m (x, y, z), la deuxième un plan passant par la droite polaire de (γ) relative au point m. D'ailleurs, sur la courbe (Γ) on obtient

$$(X-x)\,dX+(Y-y)\,dY+(Z-z)\,dz=0,$$
$$dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz=0,$$

d'où l'on déduit la proposition suivante :

Si sur la droite polaire relative à un point quelconque m d'une courbe arbitraire (γ) on détermine un point M par la condition de se trouver à une distance constante de m, le lieu de M est une courbe (Γ)

dont le plan normal en M contient la tangente en m à (γ) et la droite polaire de (Γ) relative à M passe en m.

D'autre part, les cercles attachés aux deux courbes par la transformation et dont nous avons signalé le rôle dans la théorie générale, sont ici deux cercles de diamètres Mm, l'un (c) tangent en M à (Γ), l'autre (C) tangent en m à (γ) et l'on obtient le complément suivant.

Si l'on considère une courbe (γ') tangente à (γ) en m et dont le centre de courbure en ce point se trouve sur (c), il lui correspond par la transformation une courbe (Γ'), tangente en M à (Γ) et dont le centre de courbure se trouve sur (C).

Les courbes d'exception les plus intéressantes sont celles qui admettent en chacun de leurs points une sphère osculatrice de rayon constant R; elles sont déterminées en adjoignant aux relations précédemment numérotées la relation

$$(65)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & y' & z' \\ 0 & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

qui définit le plan osculateur (γ) en m; par conséquent le point correspondant de (Γ) n'est autre que le centre de courbure de (γ), ce qui conduit à une proposition connue.

Enfin l'équation de Monge du premier ordre procure les lignes de longueur nulle.