JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

IV. TZÉNOFF

Sur le mouvement des systèmes non holonomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 193-207.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__193_0>

Sur le mouvement des systèmes non holonomes;

PAR M. IV. TZÉNOFF.

---

1. Imaginons un système assujetti d'abord à des liaisons exprimables par des relations en termes finis entre les coordonnées des divers points. Soit, en tenant compte de ces liaisons, $k+p$ le nombre des paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$ qui fixent la position du système.

Supposons maintenant qu'on ajoute aux liaisons précédentes de nouvelles liaisons dépendant du temps, exprimables par p relations différentielles entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$, de la forme

$$(1)\quad dq_{k+i}=\sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}dq_\alpha+a_i dt \quad \text{ou} \quad q'_{k+i}=\sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}q'_\alpha+a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, p).$$

Désignons par T_0 et S_0 la demi-force vive et la demi-énergie d'accélération du système, calculées en ne tenant compte que des liaisons finies imposées au système.

D'autre part désignons par T et S les quantités analogues, en tenant compte aussi des liaisons différentielles données par (1).

Enfin désignons par T_1 la fonction T_0, considérée comme fonction de $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$ seulement, et par S_1 la fonction S_0, considérée comme fonction de $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ seulement, en n'oubliant pas, bien entendu, que $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$ pour T_1, et $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ pour S_1 sont déterminées par (1).

Alors on peut mettre les équations du mouvement des systèmes non holonomes sous la forme suivante :

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha}+\frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha}=Q_\alpha \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, k)$$

ou

$$(2')\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha}-\frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha}=Q_\alpha \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, k),$$

Q_α étant le coefficient de δq_α dans l'expression de la somme des travaux virtuels des forces appliquées.

Nous avons obtenu ces résultats en suivant une méthode analogue à celle de Lagrange pour les systèmes holonomes ([1]).

2. Les fonctions T_0 et S_0 sont liées par la relation

$$\frac{\partial S_0}{\partial q''_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_s}-\frac{\partial T_0}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \ldots, k, \ldots, k+p).$$

En effet, nous avons

$$(3)\qquad 2T_0=\sum m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2),$$

$$(4)\qquad 2S_0=\sum m(x_0''^2+y_0''^2+z_0''^2).$$

On a

$$(5)\qquad x'_0=\frac{\partial x_0}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k+p}\frac{\partial x_0}{\partial q_s}q'_s, \qquad y'_0=\ldots, \qquad z'_0=\ldots,$$

$$(6)\qquad x''_0=\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{dt}+\sum_{s=1}^{k+p}\frac{\partial x_0}{\partial q_s}q''_s+\sum_{s=1}^{k+p}q'_s\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial q_s}, \qquad y''_0=\ldots, \qquad z''_0=\ldots$$

L'équation (4) donne, en tenant compte de (5) et (6),

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_0}{\partial q''_s}&=\sum m\left(x''_0\frac{\partial x''_0}{\partial q''_s}+\ldots+\ldots\right)=\sum m\left(x''_0\frac{\partial x'_0}{\partial q'_s}+\ldots+\ldots\right)\\&=\frac{d}{dt}\sum m\left(x'_0\frac{\partial x'_0}{\partial q'_s}+\ldots+\ldots\right)-\sum m\left(x'_0\frac{d}{dt}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_s}+\ldots+\ldots\right)\\&=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_s}-\sum m\left(x'_0\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial q_s}+\ldots+\ldots\right),\end{aligned}$$

([1]) IV. TZÉNOFF, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1920.

d'où l'on tire, en observant que $\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial q_s} = \frac{\partial x'_0}{\partial q_s}, \ldots,$

$$\frac{\partial S_0}{\partial q''_s} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_s} - \frac{\partial T_0}{\partial q_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k, \ldots, k+p). \tag{7}$$

3. En tenant compte de la relation (7), on a

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial S_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}.$$

En se servant des relations (7) pour $s = k+1, \ldots, k+p$, et de la relation

$$\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

qu'on déduit facilement de (1), le terme complémentaire prend la forme

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right]. \tag{8}$$

Il s'ensuit que le terme complémentaire qu'il faut ajouter au premier membre des équations de Lagrange, pour obtenir les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes, *ne contient pas les dérivées secondes par rapport au temps.*

Alors les équations du mouvement (2) sont :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right] = Q_\alpha, \\ &\qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \\ &q'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}q'_\alpha + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ceci nous montre que pour pouvoir écrire les équations du mouvement d'un système non holonome, il n'est pas nécessaire de connaître la fonction S de M. Appell, ni la fonction S_1 que nous avons introduite. Ceci simplifie beaucoup les calculs, parce que la fonction S se calcule difficilement.

4. Nous allons maintenant *déduire les équations de M. Appell des nôtres et inversement.*

Nous partirons de l'équation

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

En tenant compte de l'équation (7) pour $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial S_0}{\partial q''_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha, \tag{10}$$

en posant

$$\frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S_0}{\partial q''_{k+i}} \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}.$$

La fonction S de M. Appell représente l'énergie d'accélération du système, en tenant compte de toutes les liaisons finies et différentielles; elle peut s'obtenir de S_0 en tenant compte des relations (1). Alors

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial q''_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S_0}{\partial q''_{k+i}} \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial q''_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha},$$

ce qui est égal à Q_α d'après (10). Donc, on a les équations de M. Appell

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Inversement, comme

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial q''_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial S_0}{\partial q''_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha},$$

nous aurons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

On en tire facilement les équations (2) en tenant compte de ce que

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha}.$$

5. Nous allons *obtenir les équations du mouvement* (2) *ou* (2') *d'une autre manière*, en partant de l'équation générale de la dynamique, écrite sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha}-\frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}-\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\right)\delta q_{k+i}=\sum_{\alpha=1}^{k}Q^0_\alpha\delta q_\alpha+\sum_{i=1}^{p}Q^0_{k+i}\delta q_{k+i}.$$

Si l'on tient maintenant compte des liaisons différentielles (1) :

$$q'_{k+i}=\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i\alpha}q'_\alpha+a_i \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

alors

$$\delta q_{k+i}=\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i\alpha}\delta q_\alpha$$

et l'équation générale de la dynamique prend la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha}-\frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha}+\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}-\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\right)a_{i\alpha}\right]\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{k}Q_\alpha\delta q_\alpha;$$

en tenant compte des relations (7) pour $s=k+1,\ldots,k+p$, et de ce que

$$a_{i\alpha}=\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha},$$

alors

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}-\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\right)a_{i\alpha}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial S_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}=\frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha},$$

et nous aurons

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha}-\frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha}\right)\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{k}Q_\alpha\delta q_\alpha;$$

comme les δq_α sont arbitraires, nous obtenons les équations (2').

6. Nous pouvons *déduire le théorème des forces vives* des équations (2) ou (2'). Le théorème, déduit du principe de d'Alembert, s'énonce ainsi : si les liaisons sont indépendantes du temps, la différentielle de la demi-force vive est égale à la somme des travaux élémentaires des forces données. Comme les liaisons sont indépendantes du temps, les déplacements réels sont compris parmi les déplacements virtuels, compatibles avec les liaisons; c'est pourquoi on peut remplacer δq_s $(s = 1, 2, \ldots, k+p)$ par dq_s. Les équations (1) dans ce cas sont :

$$(11)\qquad q'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les coefficients $a_{i\alpha}$ étant des fonctions de $q_1, \ldots, q_{k+p}$.

Le théorème des forces vives s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha q'_\alpha.$$

Il s'agit de déduire cette équation des équations (2) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Multiplions-les par q'_α et ajoutons-les. Nous obtenons alors, en supposant les équations (2) remplacées par (9) :

$$(12)\qquad \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial q_{k+i}}{\partial q_\alpha} \right) q'_\alpha$$
$$- \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha q'_\alpha.$$

Comme la fonction T est une forme quadratique des $q'_1, \ldots, q'_k$, on a

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = 2T.$$

par conséquent

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa}q'_\varkappa=\frac{d}{dt}\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa}q'_\varkappa-\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa=\frac{d_2 T}{dt}-\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa$$

$$=\frac{d_2 T}{dt}-\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa-\sum_{\varkappa=1}^{k}q''_\varkappa\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}$$

$$=\frac{d_2 T}{dt}-\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa.$$

Le deuxième terme de (12) s'écrit :

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}q'_\varkappa=\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T_0}{\partial q_\varkappa}q'_\varkappa+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}q'_\varkappa.$$

Alors l'équation (12) prendra la forme

$$\frac{d_2 T}{dt}-\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T_0}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa-\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial T_0}{\partial q_\varkappa}q'_\varkappa-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}q''_\varkappa+\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}q'_\varkappa\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}q'_\varkappa=\sum_{\varkappa=1}^{k}Q_\varkappa q'_\varkappa,$$

ou bien en tenant compte des équations (11) :

$$\frac{d_2 T}{dt}-\sum_{s=1}^{k+p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_s}q''_s-\sum_{s=1}^{k+p}\frac{\partial T_0}{\partial q_s}q'_s=\sum_{\varkappa=1}^{k}Q_\varkappa q'_\varkappa;$$

enfin

$$\frac{d_2 T}{dt}-\frac{d T_0}{dt}=\frac{dT}{dt}=\sum_{\varkappa=1}^{k}Q_\varkappa q'_\varkappa \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

7. Cherchons maintenant la forme que doivent avoir les liaisons différentielles imposées au système pour que *l'équation de Lagrange puisse s'appliquer à l'un des paramètres*.

Nous allons considérer le cas spécial où toutes les liaisons sont indépendantes du temps, et où les quantités $q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ ne figurent pas dans les équations du mouvement. Alors les équations (1) ont la forme

$$(13) \qquad dq_{k+i} = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{i\varkappa} dq_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les $a_{i\varkappa}$ ne dépendant que des $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Dans ce cas, les équations (9) prennent la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\varkappa} - \frac{d}{dt}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}\right) = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

$$q'_{k+i} = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{i\varkappa} q'_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Mais

$$\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\varkappa} - \frac{d}{dt}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa} = \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\varkappa} - \frac{d}{dt} a_{i\varkappa}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\varkappa} q'_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{i\varkappa}}{\partial q_j} q'_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial a_{i\varkappa}}{\partial q_j}\right) q'_j,$$

et les équations du mouvement sont :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial a_{i\varkappa}}{\partial q_j}\right) q'_j = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \\ &q'_{k+i} = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{i\varkappa} q'_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Si l'on avait

$$(15) \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial a_{i\varkappa}}{\partial q_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix},$$

alors l'équation de Lagrange, par rapport au paramètre $q_\varkappa$, donnerait une équation différentielle du mouvement du système non holonome.

Nous allons définir p fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ par les conditions

$$F_s = \int_{q_\varkappa^0}^{q_\varkappa} a_{s\varkappa} dq_\varkappa \qquad (s = 1, 2, \ldots, p);$$

on en déduit

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_\varkappa} = a_{s\varkappa};$$

de même

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_\gamma} = \int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} \frac{\partial a_{s\alpha}}{\partial q_\gamma} dq_\alpha = \int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} \frac{\partial a_{s\gamma}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = a_{s\gamma} - a_{s\gamma}^0,$$

d'après (15) et en désignant par $a_{s\gamma}^0$ la valeur de $a_{s\gamma}$ pour $q_\alpha = q_\alpha^0$.

Alors

$$\begin{aligned}\frac{dF_s}{dt} &= a_{s1} q'_1 + \ldots + a_{s\alpha} q'_\alpha + \ldots + a_{sk} q'_k \\ &\quad - a_{s1}^0 q'_1 - \ldots - 0 - \ldots - a_{sk}^0 q'_k;\end{aligned}$$

l'équation (13) nous donne

$$dq'_{k+s} = \frac{dF_s}{dt} + a_{s1}^0 q'_1 + \ldots + a_{s\,\alpha-1}^0 q'_{\alpha-1} + a_{s\,\alpha+1}^0 q'_{\alpha+1} + \ldots + a_{sk}^0 q'_k.$$

Donc, les liaisons différentielles prennent la forme

$$dq_{k+i} = dF_i + \sum_{r=1}^{\alpha-1} a_{ir}^0 dq_r + \sum_{r=\alpha+1}^{k} a_{ir}^0 dq_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Par conséquent, *l'équation de Lagrange est applicable au paramètre q_α si les liaisons imposées (13) peuvent se mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte suivie d'une expression différentielle ne contenant pas q_α.*

8. On sait que les équations de Lagrange peuvent être mises sous une autre forme donnée par Hamilton et qu'il a appelée *forme canonique*. Nous nous proposons de faire la même chose avec les équations (9),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right] = Q_\alpha \\ &\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \\ &\frac{dq_\alpha}{dt} = q'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \\ &\frac{dq_{k+i}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} q'_\alpha + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).\end{aligned}\right.$$

Ces équations, au nombre de $2k+p$, déterminent $q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}, q'_1, \ldots, q'_k$ en fonction de t.

Prenons comme nouvelles variables, au lieu de $q'_1, \ldots, q'_k$, les quantités

$$(17) \qquad p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \qquad p_k = \frac{\partial T}{\partial q'_k};$$

ces équations sont linéaires par rapport à $q'_1, \ldots, q'_k$. On en tire inversement $q'_1, \ldots, q'_k$ en fonction de $p_1, \ldots, p_k$, et les équations (16) détermineront $q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}, p_1, \ldots, p_k$ en fonction de t. Nous chercherons la forme que prennent les équations (16) quand on effectue ce changement de variables.

La fonction T dépend de $t, q_1, \ldots, q_{k+p}, q'_1, \ldots, q'_k$. Laissons t fixe et donnons aux variables $q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k$ des accroissements infiniment petits, indépendants et arbitraires. $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k, \delta p_1, \ldots, \delta p_k$. On tire les accroissements $\delta q_{k+1}, \ldots, \delta q_{k+p}$ des équations

$$(18) \qquad \delta q_{k+i} = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{i\varkappa}\,\delta q_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et les accroissements $\delta q'_1, \ldots, \delta q'_k$ des équations (17), supposées résolues par rapport aux $q'_1, \ldots, q'_k$.

Alors la variation de T sera

$$\delta T = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\delta q_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q'_\varkappa}\delta q'_\varkappa + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}\delta q_{k+i},$$

ou bien, en tenant compte des équations (17) et (18),

$$\delta T = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa \delta q'_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} a_{i\varkappa}\right)\delta q_\varkappa.$$

Si l'on pose

$$(19) \qquad K = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa q'_\varkappa - T,$$

on aura

$$\delta K = \sum_{\varkappa=1}^{k} q'_\varkappa \delta p_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}\,\frac{\partial q_{k+i}}{\partial q'_\varkappa}\right)\delta q_\varkappa.$$

Nous avons obtenu ainsi une expression pour la différentielle totale δK qui remplace δT. Nous aurons une nouvelle expression pour δK en supposant que K est exprimé en fonction de t, q_1, ..., q_k, ..., q_{k+p}, p_1, ..., p_k, et que q_1, ..., q_k, p_1, ..., p_k subissent des variations arbitraires δq_1, ..., δq_k, δp_1, ..., δp_k. Alors

$$\delta K = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial K}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right)\delta q_\alpha.$$

En identifiant ces deux expressions pour δK, on obtient

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial K}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).\\ &q'_\alpha = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, les dérivées partielles de T sont prises en considérant T comme une fonction de t, q_1, ..., q_k, ..., q_{k+p}, q'_1, ..., q'_k, tandis que K est supposé exprimé en fonction de t, q_1, ..., q_k, ..., q_{k+p}, p_1, ..., p_k.

Alors, d'après (20), les équations (16), en remarquant que

$$\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} = \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} + \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+j}}\frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q_{k+i}}$$

et

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}}\frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q'_\alpha}$$

prennent la forme suivante :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial K}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\\ &\qquad + \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}}\frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q'_\alpha}\right)\right] = Q_\alpha\\ &\qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),\\ &\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),\\ &\frac{dq_{k+i}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);\end{aligned}\right.$$

le quatrième terme de la première équation, en vertu de la deuxième et de la troisième équation, est une fonction de t, q_1, q_2, ..., q_k, ..., q_{k+p}, p_1, ..., p_k.

Ces équations (21) au nombre de $2k+p$ sont donc du premier ordre par rapport aux $2k+p$ variables q_1, ..., q_{k+p}, p_1, ..., p_k. On peut les résoudre et obtenir les variables ci-dessus comme fonctions de t et de $2k+p$ constantes arbitraires.

Supposons maintenant que les forces données dérivent d'une fonction U, qui dépend de t, q_1, q_2, ..., q_{k+p}, mais ne dépend pas de p_1, p_2, ..., p_k; alors $\frac{\partial U}{\partial p_\varkappa} = 0$. On a

$$Q_\varkappa^0 = \frac{\partial U}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

$$Q_{k+i}^0 = \frac{\partial U}{\partial q_{k+i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$Q_\varkappa = Q_\varkappa^0 + \sum Q_{k+i}^0 \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Alors, en posant

$$H = K - U,$$

nous aurons

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial K}{\partial p_\varkappa}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial K}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial U}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{k+i}} = \frac{\partial K}{\partial q_{k+i}} - \frac{\partial U}{\partial q_{k+i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et les équations (21) prennent la forme

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \frac{dp_\varkappa}{dt} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial H}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa} \\ & \quad + \sum_{i=1}^{p} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\varkappa} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q_{k+j}} \frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q'_\varkappa} \right) \right] = -\frac{\partial H}{\partial q_\varkappa} \\ & \qquad\qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \\ & \frac{dq_\varkappa}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \\ & \frac{dq_{k+i}}{dt} = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{i\varkappa} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Ces équations représentent la forme canonique avec un terme complémentaire des équations du mouvement des systèmes non holonomes.

Cas particulier. — Supposons que les liaisons soient indépendantes du temps; alors t ne figurera pas dans H et T_0; les a_i seront nulles. Alors T sera une forme quadratique par rapport aux $q'_1, \ldots, q'_k$ et par conséquent

$$\sum_{\alpha=1}^{k} q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = \Sigma q'_\alpha p_\alpha = 2T,$$

$$K = \Sigma p_\alpha q'_\alpha - T = 2T - T = T,$$

et

$$H = K - U = T - U. \tag{23}$$

Le théorème des forces vives, donné par l'équation

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha q'_\alpha,$$

devient ici

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k}\left(Q^0_\alpha + \sum_{i=1}^{p} Q^0_{k+i} a_{i\alpha}\right) q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial U}{\partial q_{k+i}} q'_{k+i} = \frac{dU}{dt},$$

ou bien en intégrant

$$T = U + h, \qquad \text{d'où} \qquad H = h.$$

On peut déduire ce résultat des équations (22). En effet, la fonction H dépend de $q_1, \ldots, q_{k+p}, p_1, \ldots, p_k$. Pendant le mouvement, ces quantités sont des fonctions du temps, et par conséquent

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt}\right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial H}{\partial q_{k+i}}\frac{dq_{k+i}}{dt},$$

qui devient en tenant compte de (22), et de ce que $a_i = 0$,

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{\alpha=1}^{k} q'_\alpha \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left(\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} \frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q'_\alpha} \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{k} q'_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} q'_{k+j} \right).$$

Mais on a

$$q''_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} q'_{k+j} + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha,$$

d'autre part

$$q''_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha;$$

en comparant, on tire

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} q'_{k+j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

donc

$$\frac{dH}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad H = h.$$

Dans le cas plus particulier où T_0 et T ne dépendent pas des paramètres $q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$, les équations (22) prennent la forme

$$\frac{dp_\alpha}{dt} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} \right) \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dq_{k+i}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

9. On sait que dans le cas des systèmes holonomes on peut obtenir les équations de Lagrange en partant de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha \delta q_\alpha \right) dt.$$

Il est facile de montrer que dans le cas des systèmes non holonomes, il faut ajouter à la demi-force vive T les fonctions $-T_1$ et T_1^0, T_1^0 désignant la fonction T_0, considérée comme fonction seulement des $q'_{k+1}, \dots, q'_{k+p}$, et par conséquent T_1 est la fonction T_1^0 en tenant compte des liaisons différentielles (1) ; alors les équations du mouvement d'un système non holonome se déduisent de l'équation

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - T_1 + T_1^0) + \Sigma Q_\alpha \delta q_\alpha]\, dt = 0,$$

à condition que

$$\delta q_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} \delta q_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les δq_α étant arbitraires.