JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. FATOU

Sur l'itération analytique et les substitutions permutables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 1-49.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (¹)

(SUITE);

PAR P. FATOU.

CHAPITRE III.

L'ITÉRATION ANALYTIQUE DANS LE DOMAINE D'UN POINT DOUBLE DE MULTIPLICATEUR + 1.

Quand une substitution uniforme présente un point double de multiplicateur $+1$, il existe, comme je l'ai démontré dans mes recherches antérieures sur l'itération, une fonction, analytique dans certains secteurs ayant leur sommet au point double, qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel relative à cette substitution et qui joue, au point de vue de l'itération analytique, le même rôle que la fonction de M. Kœnigs pour le cas d'un point double attractif. J'ai donné l'expression asymptotique de cette fonction au voisinage du point double

(¹) La première Partie du présent Mémoire a paru dans ce journal, 9ᵉ série, t. II, 1923, p. 343.

qui est, en général, un point singulier transcendant de la fonction ([1]). Je vais montrer qu'on peut obtenir une expression asymptotique plus précise, utile pour une étude plus approfondie de l'itération analytique, et qui s'obtient par un procédé équivalent au fond à l'emploi de la formule de Stirling pour l'évaluation approchée de la fonction Γ.

Je considère donc une substitution ayant à l'infini un point double de multiplicateur $+1$, et qui est de la forme

$$z_1 = R(z) = z + a + \frac{b}{z} + \chi(z).$$

Je supposerai tout d'abord $a \neq 0$, et même réel et positif, ce à quoi on parvient par une transformation linéaire préalable; $R(z)$ n'est pas nécessairement rationnelle, ni même uniforme à l'infini; nous supposons seulement que dans un secteur d'angle $2\pi - \eta$ ([2]), ayant son sommet sur la partie positive de l'axe réel et pour bissectrice intérieure la direction positive de cet axe, la fonction $\chi(z)$ est holomorphe et vérifie les inégalités

$$|\chi(z)| < \frac{C}{|z|^{\gamma}},$$
$$|\chi'(z)| < \frac{C}{|z|^{\gamma+1}}$$

avec $\gamma > 1$; le point à l'infini pourrait donc être pour $R(z)$ un point critique algébrique, par exemple. Enfin dans le secteur considéré la fonction $R(z)$ est univalente; ce secteur contient ses conséquents obtenus par itération de $R(z)$, et de telle manière qu'on ait uniformément

$$|z_n| = |R_n(z)| > Kn \qquad (K > 0).$$

Pour la justification de ces différentes hypothèses et leur dépendance mutuelle, je renverrai à mon Mémoire cité ([3]). La fonction d'Abel

---

([1]) Voir *Bull. Soc. Math. Fr.* (1919). *Sur les équations fonctionnelles* (Chap. II, § 9-12).

([2]) η est positif, mais peut être aussi petit que l'on veut.

([3]) Toutes ces conditions sont remplies par un choix convenable de T, lorsque $\chi(z)$ est régulière ou algébroïde à l'infini et d'un ordre infinitésimal > 1 en $\frac{1}{z}$.

qu'il s'agit d'étudier est la limite pour n infini de l'expression

$$u_n = z_n - na - \frac{b}{a}\log n,$$

ou, si l'on veut, la somme de la série convergente

$$A(z) = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + \ldots.$$

On obtient ensuite :

$$u_1 = R(z) - a = z + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \ldots,$$

$$u_{n+1} - u_n = b\left[\frac{1}{z_n} - \frac{1}{a}\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] + \chi(z_n),$$

$$A(z) = \sum_0^\infty \chi(z_n) + z + b\left[\frac{1}{z} + \sum_1^\infty\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{a}\log\frac{n+1}{n}\right)\right],$$

$$(1)\qquad A(z) = \sum_0^\infty \chi(z_n) + z + bB(z),$$

en posant

$$(2)\qquad B(z) = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty\left[\frac{1}{z+na} - \log\frac{n+1}{n}\right] + \sum_1^\infty\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z+na}\right).$$

Remarquons d'abord que la série $\sum_0^\infty \chi(z_n)$ est uniformément convergente dans le secteur considéré T, considéré comme domaine fermé, puisque $|\chi(z_n)| < \frac{C'}{n^\gamma}$ $(\gamma > 1)$; elle représente une fonction de z holomorphe dans T, continue et nulle à l'infini.

Évaluons maintenant la dernière somme qui figure dans l'expression de $B(z)$. On a [1] :

$$-\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z+na} = \frac{z_n - (z+na)}{z_n(z+na)},$$

$$|z_p| > Kp,$$

$$|z + pa| > K'p.$$

[1] Je désigne par K, K', K'', ... des constantes positives relatives au domaine T; la même lettre pourra désigner quelquefois deux constantes différentes.

cette dernière inégalité s'obtient de suite au moyen d'une figure. On a, d'ailleurs,

$$z_n - (z + na) = b\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_1} + \ldots + \frac{1}{z_{n-1}}\right) + \sum_0^{n-1} \chi(z_p).$$

En tenant compte de ce qui précède et de l'expression de la somme des n premiers termes de la série harmonique, on en conclut

$$|z_n - (z + na)| < K'' \log n,$$
$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z + na}\right| < \frac{K''' \log n}{n^2},$$

terme d'une série convergente. La série $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z + na}\right)$ représente donc une fonction holomorphe dans T, continue et nulle à l'infini, car elle est uniformément convergente dans le domaine fermé T. On peut donc écrire, en désignant par $\varepsilon_1(z)$, une fonction holomorphe dans T, continue et nulle à l'infini,

$$\text{(3)} \qquad A(z) = \varepsilon_1(z) + z + b H(z),$$

en posant

$$\text{(4)} \qquad H(z) = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{z + na} - \frac{1}{a} \log \frac{n + 1}{n}\right].$$

Cette dernière fonction peut être évaluée au moyen des formules de la théorie des fonctions eulériennes, car elle se ramène à $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)$; mais nous procéderons directement; posons

$$z = at,$$
$$H(z) = \frac{1}{a} \sum_1^\infty \left[\frac{1}{t + n} - \log \frac{n + 1}{n}\right] = \frac{1}{a} \psi(t).$$

On peut encore écrire

$$\psi(t) = \lim_{n = \infty} \psi_n(t),$$
$$\psi_n(t) = \left(\sum_1^n \frac{1}{t + p}\right) - \log(n + 1).$$

En tenant compte des identités évidentes

$$\log t = \log \frac{t}{t+1} + \log \frac{t+1}{t+2} + \ldots + \log \frac{t+n}{t+n+1} - \log(t+n+1),$$

$$\log \frac{t+p-1}{t+p} = \log\left(1 - \frac{1}{t+p}\right),$$

on obtient

$$\psi_n(t) + \log t = \sum_1^n \left[\frac{1}{t+p} + \log\left(1 + \frac{1}{t+p}\right)\right] + \log \frac{t+n}{n}.$$

Le dernier terme tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, on a

$$\psi(t) + \log t = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{t+p} + \log\left(1 + \frac{1}{t+p}\right)\right].$$

On doit prendre la détermination du logarithme réelle pour t positif; le point $t = \frac{z}{a}$ restant dans un domaine qui laisse à son extérieur le demi-axe réel négatif, le second membre est convergent. D'une manière précise, on a, au moins dès que $|t|$ est suffisamment grand,

$$|t+p| < \mathrm{K}p,$$

$$\left|\frac{1}{t+p} + \log\left(1 - \frac{1}{t+p}\right)\right| = \left|\frac{1}{2(t+p)^2} - \frac{1}{3(t+p)^3} + \ldots\right| < \frac{\mathrm{K}'}{|t+p|^2} < \frac{\mathrm{K}''}{p^2}.$$

On en conclut que la fonction $\psi(t) + \log t$ est continue et nulle à l'infini quand t reste dans le domaine $\frac{1}{a}(\mathrm{T})$. On est ainsi conduit à l'expression suivante de la fonction d'Abel, valable dans le domaine T,

$$\mathrm{A}(z) = z - \frac{b}{a}\log\frac{z}{a} + \varepsilon(z), \tag{5}$$

$\varepsilon(z)$ désignant toujours une fonction holomorphe dans T, continue et nulle à l'infini.

Il n'est pas difficile de préciser l'ordre de grandeur de $\varepsilon(z)$. Il suffit, pour cela, sachant que $\mathrm{A}(z)$ vérifie l'équation

$$\mathrm{A}[\mathrm{R}(z)] = \mathrm{A}(z) + a \tag{6}$$

d'en déduire l'équation fonctionnelle que vérifie $\varepsilon(z)$, et de rechercher l'ordre des termes principaux, parmi les termes connus de cette nouvelle équation. On déduit de (5) et (6)

$$\varepsilon(z)-\varepsilon(z_1)=z_1-(z+a)-\frac{b}{a}\log\frac{z_1}{z}$$

en posant $z_1=R(z)$. En remplaçant, dans le second membre, z_1 par sa valeur, et développant en série $\log\left(1+\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{\chi(z)}{z}\right)$, il vient

$$\varepsilon(z)-\varepsilon(z_1)=\chi(z)+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

en désignant, avec M. Landau, par $O(x)$ une quantité variable dont le rapport à x reste borné en module; en appelant β le plus petit des deux nombres γ et 2, comme $\chi(z)=O\left(\frac{1}{z^\gamma}\right)$, on a

$$\varepsilon(z)-\varepsilon(z_1)=O\left(\frac{1}{z^\beta}\right). \tag{7}$$

Écrivons les égalités analogues à (7), en remplaçant z successivement par z_1, z_2, ..., et ajoutons ces égalités en remarquant que z_n tendant vers l'infini, $\varepsilon(z_n)$ tend vers zéro; il vient

$$|\varepsilon(z)|<K\left[\frac{1}{|z|^\beta}+\frac{1}{|z_1|^\beta}+\frac{1}{|z_2|^\beta}+\ldots\right]. \tag{8}$$

Remarquons maintenant que $\left|\frac{z}{z_n}\right|$ reste borné uniformément dans T; nous avons déjà démontré ce point (*loc. cit.*, § **72**); en voici une autre démonstration. On a d'abord, en considérant la figure du domaine T,

$$|z+na|>|z|\sin\eta,$$
$$|z+na|>na\sin\eta.$$

D'autre part, nous avons obtenu plus haut

$$z_n-(z+na)=O(\log n),$$

d'où

$$\frac{z_n}{z+na}=1+\frac{O(\log n)}{z+na},$$

$\frac{O(\log n)}{z+na}$ est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$ puisque $z+na$ est au moins de l'ordre de n; donc $\frac{z_n}{z+na}$ tend uniformément vers $\frac{1}{n}$ pour n infini et, comme il n'est jamais nul, on a

$$\left|\frac{z_n}{z+na}\right| > \mathrm{K}' > 0.$$

Comme, en outre, par ce qui précède,

$$\left|\frac{z+na}{z}\right| > \mathrm{K}'' > 0,$$

on a bien

$$\left|\frac{z_n}{z}\right| > \mathrm{K}''' > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Revenons maintenant à la relation (8), et évaluons le second membre en nous rappelant que $|z_n| > \mathrm{K}^{(1)} n$. Soit N la partie entière de $|z|$; faisons d'abord la sommation de o à $\mathrm{N}-1$. D'après le lemme que je viens de démontrer, j'aurai

$$\sum_{0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{|z_p|^\beta} < \frac{\mathrm{N}}{(\mathrm{K}'''|z|)^\beta}.$$

Comme N est de l'ordre de $|z|$, on voit que la somme $\sum\limits_{1}^{\mathrm{N}-1}$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{|z|^{\beta-1}}$. D'autre part, on a, pour les termes suivants :

$$\sum_{\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{|z_p|^\beta} < \sum_{\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{K}^{(4)} p)^\beta} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}^{\beta-1}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^{\beta-1}}\right).$$

On a donc finalement

$$\varepsilon(z) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^{\beta-1}}\right).$$

En particulier, si $\mathrm{R}(z)$ n'a pas de point critique à l'infini, on a toujours

$$\mathrm{A}(z) = z - \frac{b}{a}\log\frac{z}{a} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Nous allons évaluer de même l'ordre de grandeur de $\varepsilon'(z)$. Faisons d'abord quelques remarques qui découlent facilement de ce qui précède. En dérivant l'expression de $\mathrm{R}(z)$ et tenant compte de l'hypothèse faite sur $\chi'(z)$, on obtient

$$R'(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

De cette relation et de l'identité

$$R'_n(z) = R'(z) R'(z_1) \ldots R'(z_{n-1}),$$

on déduit

$$|R'_n(z) - 1| < \left(1 + \frac{k}{|z|^2}\right)\left(1 + \frac{k}{|z_1|^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{k}{|z_{n-1}|^2}\right) - 1$$
$$< e^{K\sum\limits_0^{n-1}\frac{1}{|z_p|^2}} - 1 < e^{K\sum\limits_0^{\infty}\frac{1}{|z_p|^2}} - 1.$$

En appliquant le calcul précédent au cas de $\beta = 2$, on voit que l'exposant qui figure dans le dernier terme de ces inégalités est au plus de l'ordre de $\frac{1}{|z|}\cdot$ On a, par conséquent,

$$R'_n(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il s'ensuit, en particulier, que $R'_n(z)$ est uniformément bornée dans T et que sa limite, qui n'est autre que $A'(z)$, est continue à l'infini et de valeur 1 en ce point quand on ne sort pas de T.

Nous allons maintenant faire l'évaluation de $\varepsilon'(z)$ en deux étapes; nous montrerons d'abord que $\varepsilon'(z)$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{z}$, puis, en nous servant de l'équation fonctionnelle que vérifie cette fonction, qu'elle est au plus de l'ordre de $\frac{1}{z^\beta}\cdot$

On a, en égalant les deux expressions (1) et (5) de $A(z)$,

$$\varepsilon(z) = \frac{b}{z} + \frac{b}{a}\log\frac{z}{a} + b\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{a}\log\frac{n+1}{n}\right) + \sum_0^{\infty}\chi(z_n),$$

d'où, par dérivation,

$$\varepsilon'(z) = -\frac{b}{z^2} + \frac{b}{a}\frac{1}{z} + b\sum_1^{\infty}\frac{R'_n(z)}{z_n^2} + \sum_0^{\infty}\chi'(z_n)R'_n(z).$$

Il faut montrer que cette expression est au plus de l'ordre de $\frac{1}{z}$; il suffit de le faire pour le troisième et le quatrième terme; pour le troisième, c'est évident puisque $R'_n(z)$ est uniformément bornée et que

$$\sum \frac{1}{|z_n|^2} = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Pour le quatrième, on a

$$R'_n(z) = O(1),$$
$$\chi'(z_n) = O(z_n^{-\gamma-1}),$$

d'où l'on déduit, d'après ce qui précède,

$$\sum_0^\infty \chi'(z_n) R'_n(z) = O\left(\frac{1}{z_n^\gamma}\right).$$

Comme $\gamma > 1$, notre assertion est exacte.

Précisons maintenant la valeur de $\varepsilon'(z)$ en nous servant de l'équation fonctionnelle

$$\varepsilon(z) - \varepsilon(z_1) = R(z) - z - a - \frac{b}{a}\log R(z) + \frac{b}{a}\log z,$$

d'où, par dérivation,

$$\varepsilon'(z) - \varepsilon'(z_1)R'(z) = -\frac{b}{z^2} + \chi'(z) - \frac{b}{a}\,\frac{1 - \frac{b}{z^2} + \chi'(z)}{z + a + \frac{b}{z} + \chi(z)} + \frac{b}{az}.$$

En développant en série $\dfrac{1}{z + a + \frac{b}{z} + \chi(z)}$, on obtient, toutes réductions faites,

$$\varepsilon'(z) - \varepsilon'(z_1)R'(z) = \chi'(z) + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Au premier membre, on peut remplacer $R'(z)$ par $1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$; le produit de $\varepsilon'(z_1)$, qui est au plus de l'ordre de $\frac{1}{z}$, par $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, donnera $O\left(\frac{1}{z^3}\right)$ qu'on fera passer dans le second membre, d'où :

$$\varepsilon'(z) - \varepsilon'(z_1) = \chi'(z) + O\left(\frac{1}{z^3}\right) = O\left(\frac{1}{z^{\beta+1}}\right),$$

β étant toujours le plus petit des deux nombres γ et 2. J'opère alors comme pour évaluer $\varepsilon(z)$; j'ajoute les égalités obtenues en remplaçant z par $z_1, z_2, \ldots$, et, remarquant que $\lim \varepsilon'(z_n) = 0$, j'obtiens

$$\varepsilon'(z) = O\left(\frac{1}{z^\beta}\right).$$

Je pense qu'une application judicieuse de cette méthode permettrait d'obtenir, au moins dans le cas où $R(z)$ est développée suivant les puissances entières de z, un développement asymptotique pour la fonction $A(z)$, procédant suivant les puissances entières de z et de $\log z$; mais ce serait sans doute le résultat d'une analyse longue et laborieuse qui nous détournerait de l'objet principal que nous avons en vue, à savoir l'étude des substitutions permutables à R.

Dans tous les cas, on voit que la fonction d'Abel, dont nous avions déjà obtenu une expression asymptotique, se trouve définie maintenant avec une précision déjà grande par les formules

$$A(z) = z - \frac{b}{a}\log\frac{z}{a} + O\left(\frac{1}{z^{\beta-1}}\right),$$
$$A'(z) = 1 - \frac{b}{az} + O\left(\frac{1}{z^\beta}\right)$$

qui mettent très facilement en évidence les propriétés de la représentation conforme, donnée par cette fonction, du domaine T dans lequel elle est univalente pourvu que le sommet de ce secteur T soit suffisamment éloigné de l'origine vers la droite. Aux deux demi-droites qui limitent T, la relation $Z = A(z)$ fait correspondre dans le plan des Z deux courbes, de forme parabolique en général, la direction limite de la tangente étant définie par l'angle $\pi \pm \eta$ avec OX, le même que la droite correspondante du plan des z fait avec Ox. La région du plan, T', à droite de ces deux courbes, correspond d'une manière univoque à T, les frontières se correspondant point par point d'une manière continue, y compris les points à l'infini des deux plans. Si l'on remplace les deux plans par les sphères de Riemann, on peut dire qu'à deux courbes se coupant sous un certain angle à l'infini, correspondent deux courbes se coupant sous le même angle. De la relation

$$Z = z - \frac{b}{a}\log\frac{z}{a} + \varepsilon(z) = A(z),$$

on déduit inversement

$$z = Z + \frac{b}{a}\log\frac{Z}{a} + \varepsilon_1(Z) = \theta(Z).$$

Aux points $R_n(z)$ correspondent les points $Z + na$; on est donc conduit à définir l'itération analytique par la formule

$$R_\lambda(z) = \theta(Z + \lambda a) = \theta[\lambda a + A(z)]$$

qui donne lieu à l'identité

$$R_\lambda[R_\mu(z)] = R_{\lambda+\mu}(z)$$

et définit ainsi un groupe de substitutions à un paramètre, isomorphe à un groupe de translations. Il est inutile de s'étendre davantage sur ces généralités que j'ai déjà développées ailleurs; mais il y a lieu d'insister sur un point qui n'est pas aussi simple que dans le cas du point double attractif, à savoir l'identité, sous certaines conditions de continuité, des substitutions permutables à R, avec celles qui sont définies par l'itération analytique. Cherchons d'abord la forme analytique, dans le voisinage du point à l'infini, des itérées d'indice quelconque :

$$\begin{aligned}\theta(Z + \lambda a) &= Z + \lambda a + \frac{b}{a}\log\frac{Z + \lambda a}{a} + \varepsilon_1(Z + \lambda a)\\ &= z + \lambda a + \frac{b}{a}\log\frac{Z + \lambda a}{z} + \varepsilon(z) + \varepsilon_1(Z + \lambda a).\end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{Z + \lambda a}{z} = 1 - \frac{b}{az}\log\frac{z}{a} + \frac{\lambda a}{z} + \frac{\varepsilon(z)}{z},$$

le logarithme de cette quantité pour z très grand est un infiniment petit dont le terme principal est $-\frac{b}{az}\log\frac{z}{a}$, si $b \neq 0$. On obtient donc

$$\theta(Z + \lambda a) = R_\lambda(z) = z + \lambda a + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant infiniment petit avec $\frac{1}{z}$. Pour $R(z)$ uniforme ($\gamma = 2$), le terme principal de $\varphi(z)$ est, en général, un terme en $\frac{\log z}{z}$.

Cherchons maintenant les substitutions permutables à R qui, à l'infini, ont la même forme que R_λ, cette forme étant d'ailleurs celle de toute substitution ayant à l'infini un point double de multiplicateur $+1$, et régulière en ce point. Supposons donc la substitution S analytique dans T, ou du moins dans une partie T_1 de T comprenant un angle non nul ayant l'axe réel pour bissectrice; on a, symboliquement,

$$RS = SR$$

et, d'autre part,

$$S = z + \lambda a + \varepsilon(z).$$

Posons ensuite

$$\Sigma = R_{-\lambda} = z - \lambda a + \varepsilon_1(z).$$

De $RS = SR$ et $R\Sigma = \Sigma R$, on déduit

$$RS\Sigma = S\Sigma R.$$

$S\Sigma$ est permutable à R, et de la forme

$$z + \varepsilon_2(z),$$

ε, ε_1, ε_2 nulles à l'infini. Nous allons montrer que toute substitution permutable à R, qui à l'infini est de la forme précédente, se réduit à la substitution identique.

Nous supposerons que R est de la forme

$$R(z) = z + a + \frac{b}{z^p} + \frac{c}{z^{p+q}} + \ldots,$$

p, $p+q$, ... nombres entiers ou fractionnaires positifs ([1]); soit

$$S(z) = z + \varepsilon(z).$$

On a identiquement

$$R(z) + \varepsilon(z_1) = z + a + \varepsilon(z) + \frac{1}{(z+\varepsilon)^p}\left[b + \frac{c}{(z+\varepsilon)^q} + \ldots\right],$$

d'où

$$\varepsilon(z_1) - \varepsilon(z) = \frac{1}{(z+\varepsilon)^p} f(z+\varepsilon) - \frac{1}{z^p} f(z),$$

en posant

$$f(z) = b + \frac{c}{z^q} + \ldots \qquad (q \geq 0)$$

ou encore

$$\varepsilon(z_1) - \varepsilon(z) = \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{z^p} + f(z+\varepsilon)\left[(z+\varepsilon)^{-p} - z^{-p}\right].$$

([1]) La conclusion subsiste si p est compris entre 0 et 1.

Nous avons écrit au second membre ε au lieu de $\varepsilon(z)$, et au premier membre z_1 au lieu de $R(z)$. En appliquant le théorème des accroissements finis pour les fonctions de variable complexe, on a

$$f(z+\varepsilon)-f(z)=\varepsilon\,O\left(\frac{1}{z^{q+1}}\right),$$

$$(z+\varepsilon)^{-p}-z^{-p}=\varepsilon\,O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right).$$

Comme $f(z+\varepsilon)=O(1)$, on obtient finalement

$$\frac{\varepsilon(z_1)-\varepsilon(z)}{\varepsilon(z)}=O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right)=\frac{1}{z^{p+1}}\beta(z),$$

$\beta(z)$ étant bornée dans T_1, ou

$$\frac{\varepsilon(z_1)}{\varepsilon(z)}=1+\frac{\beta(z)}{z^{p+1}}.$$

En remplaçant z par $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ qu'on peut supposer tous compris dans T_1 et multipliant membre à membre, on a

$$\varepsilon(z_n)=\varepsilon(z)\prod_0^{n-1}\left[1+\frac{\beta(z_i)}{z_i^{p+1}}\right].$$

Comme $\varepsilon(z_n)$ tend vers zéro pour n infini, et que, d'autre part, le produit infini des quantités $1+\frac{\beta(z_i)}{z_i^{p+1}}$ est convergent à cause de l'inégalité $|z_i|>Ki$ et différent de zéro pour $|z|$ suffisamment grand, il faut que $\varepsilon(z)$ soit identiquement nulle. *On voit donc que les itérées analytiques fournissent toutes les substitutions permutables à* R, *se comportant à l'infini de la manière indiquée.*

On peut encore remarquer que ces itérées $R_\lambda(z)$ ont une dérivée continue et de valeur limite égale à 1 au point à l'infini; cela tient à ce que dans T la valeur limite de $A'(z)$ à l'infini est égale à 1, et qu'inversement dans T′, la dérivée de la fonction inverse a aussi pour limite 1 à l'infini; toute courbe ayant une direction de tangente déterminée au point à l'infini est ainsi transformée par $R_\lambda(z)$, en une courbe tangente à l'infini à la première.

Nous devons maintenant examiner le cas où le terme constant de

$R(z)$ est nul :

$$z_1 = R(z) + \frac{a}{z^{m-1}} + \ldots,$$

le second membre étant ordonné suivant les puissances entières descendantes de z. Nous avons déjà démontré (*loc. cit.*, Chap. II, § **12**) que l'on ramène ce cas au premier, en transformant la substitution donnée par deux transformations conformes auxiliaires, la première régulière dans le domaine du point double à l'infini

$$w = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \ldots + \frac{\alpha_{m-2}}{z^{m-2}} = Q(z),$$

la seconde de la forme

$$t = w^m;$$

on obtient, par un choix convenable des α_i, une substitution transformée qui s'exprime par

$$t_1 = \rho(t) = t + ma + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^{1+\frac{1}{m}}} + \ldots.$$

Au domaine T du plan des t défini comme précédemment correspondent m domaines, secteurs curvilignes dont l'ouverture est la $m^{\text{ième}}$ partie de celle de T, c'est-à-dire $\frac{2\pi}{m} - \frac{\eta}{m}$, et relativement à chacun desquels on pourra définir la fonction d'Abel et l'itération analytique ; les m fonctions d'Abel ainsi définies ne sont pas, en général, le prolongement analytique les unes des autres. $\rho(t)$ contient généralement des exposants fractionnaires, c'est pourquoi nous avons dû considérer ce cas lorsque le terme constant de $R(z)$ n'était pas nul. Considérons la fonction d'Abel relative à la substitution $[t \mid \rho(t)]$; il importe de spécifier la détermination choisie pour le radical $t^{\frac{1}{m}}$, c'est-à-dire celui des m domaines $D^{(i)}$ du plan des z qu'on fait correspondre à T; la fonction $A(t)$ ainsi obtenue et qui est la limite pour n infini de

$$\rho_n(t) - nma - \frac{B}{ma} \log n$$

vérifie l'équation

$$A[\rho(t)] = A(t) + ma.$$

Elle a pour expression asymptotique

$$\mathrm{A}(t) = t - \frac{\mathrm{B}}{ma} \log \frac{t}{ma} + \varepsilon(t),$$

$\varepsilon(t)$ étant, en général, de l'ordre de $t^{\frac{1}{m}}$. En remplaçant t par sa valeur en fonction de z, on obtient

$$\mathrm{A}(t) = \mathcal{A}(z),$$
$$\mathcal{A}[\mathrm{R}(z)] = \mathcal{A}(z) + ma.$$

L'expression asymptotique de $\mathcal{A}(z)$ sera

$$w^m - \frac{\mathrm{B}}{ma} \log \frac{w^m}{ma} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{w}\right)$$

ou

$$\left(\mathrm{Z} + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \ldots + \frac{\alpha_{m-1}}{z^{m-1}}\right)^m - \frac{\mathrm{B}}{a} \log(z + \alpha_0 + \ldots) + \frac{\mathrm{B}}{ma} \log ma + \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Elle sera donc de la forme

$$\mathrm{Z} = \mathrm{P}_m(z) - \frac{\mathrm{B}}{a} \log z + \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$\mathrm{P}_m(z)$ étant un polynome de degré m. La correspondance entre le plan des z et le plan des Z n'a plus un caractère aussi simple que précédemment; mais il y a toujours correspondance continue, même au point à l'infini, entre un domaine $\mathrm{D}^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$) du plan des z et le domaine T′ du plan des Z, deux courbes qui se coupent à l'infini dans $\mathrm{D}^{(i)}$ ayant pour images deux courbes, qui font entre elles un angle m fois plus grand, du domaine T′. On devra toujours, pour l'étude de cette correspondance, se servir des variables intermédiaires w et t.

L'itération analytique se définit toujours de la même manière; les itérées analytiques définissent dans le plan des z un groupe de transformations qui est l'image du groupe des translations du plan des Z; elles s'obtiennent en transformant la relation

$$t' = \rho_\lambda(t)$$

par la transformation qui fait passer de t à z, et qui change le domaine T dans le domaine $D^{(i)}$; les transformations qui en résultent, permutables entre elles et avec R, laissent invariantes les directions asymptotiques des courbes du domaine $D^{(i)}$. Il est facile d'obtenir l'expression asymptotique de $R_\lambda(z)$, en partant de celle de $\rho_\lambda(t)$; on a

$$t' = \rho_\lambda(t) = t + m\lambda a + \varepsilon(t),$$

d'où

$$w' = [w^m + \lambda m a + \varepsilon_1(w)]^{\frac{1}{m}} = w\left[1 + \frac{m\lambda a}{w^m} + \frac{\varepsilon_1}{w^m}\right]^{\frac{1}{m}},$$

$$w' = w + \frac{\lambda a + \varepsilon_2(w)}{w^{m-1}},$$

ε_1, ε_2 nulles à l'infini; la détermination du radical a été choisie convenablement puisque les directions asymptotiques se correspondent. Si maintenant on transforme cette dernière relation par

$$w = z + \alpha_0 + \ldots + \frac{\alpha_{m-2}}{z^{m-2}} = Q(z),$$
$$w' = Q(z'),$$

on obtient encore une relation de même forme; c'est là une vérification algébrique facile, qu'on abrège en remarquant que si l'on pose

$$w' = w + \frac{\sigma}{w^{m-1}},$$

la quantité $\sigma = \lambda a + \varepsilon_2$ étant regardée momentanément comme un paramètre, on définit une correspondance (w', w) qui a $m + 1$ points doubles confondus en un seul à l'infini; si l'on transforme cette correspondance par la substitution $w = Q(z)$, qui est biunivoque à l'infini, la correspondance transformée aura encore un point double de même ordre à l'infini; d'autre part z' sera développable suivant les puissances descendantes de z, le premier terme étant z; une vérification facile montre que

$$z' = z + \frac{\sigma}{z^{m-1}} + O(z^{-m}).$$

Par suite, on a encore

$$z' = z + \frac{\lambda a}{z^{m-1}} + \frac{\varepsilon_3(z)}{z^{m-1}}.$$

On établit ensuite, sans difficulté, que toute substitution de cette forme, permutable à R, est fournie par l'itération analytique, ce principe se ramenant à celui qui a été déjà établi pour la fonction $\rho(t)$; la forme considérée de substitution permutable est supposée valable pour un secteur $D^{(i)}$. Nous laissons de côté, pour l'instant, la question de savoir s'il existe des substitutions permutables à R et qui ne seraient pas de cette forme; nous y reviendrons à propos des substitutions rationnelles.

Nous pouvons maintenant, dans le cas où $R(z)$ est une fonction rationnelle, étudier la nature des fonctions auxquelles conduit l'itération analytique et développer à ce sujet une théorie analogue à celle du Chapitre I. Nous allons supposer d'abord $a \neq 0$; en ramenant le point double à l'origine par une transformation homographique, on a

$$R(0) = 0, \qquad R'(0) = 1, \qquad R''(0) \neq 0.$$

Il existe un domaine invariant D_0, comprenant notamment un secteur d'angle aussi voisin qu'on le veut de 2π ayant son sommet à l'origine, et dans lequel les $R_n(z)$ tendent vers zéro, de manière que les conséquents d'un point de D_0 se répartissent sur une courbe invariante, tangente à l'origine à une demi-droite qui sera, pour fixer les idées, le demi-axe réel positif. La fonction $A(z)$, solution fondamentale de l'équation d'Abel, a pour expression asymptotique dans un secteur d'angle $2\pi - \varepsilon$ ayant pour bissectrice ce demi-axe :

$$Z = A(z) = \frac{1}{z} + k \log z + k' + O(z).$$

$A(z)$ est holomorphe et uniforme dans D_0; en général, tous les points de la frontière f de D_0 sont pour $A(z)$ des points d'indétermination complète auxquels aboutissent, d'autre part, des chemins de détermination infinie; mais ce point est plus difficile à établir que la propriété analogue de la fonction $\Sigma(z)$ de M. Kœnigs, et il peut y avoir des cas où la démonstration que nous en avons donnée ne s'applique pas. Nous devrons donc tenir compte de cette circonstance dans ce qui suit.

On peut admettre que les antécédents des points critiques de la fonction algébrique $R_{-1}(z)$ ne sont jamais à l'infini. On a ensuite

$$A'(z) = \lim_{n=\infty} R'_n(z) = \lim_{n=\infty} R'(z) R'(z_1) \ldots R'(z_{n-1}),$$

d'où il suit que les points racines de $A'(z)$ dans D_0 sont les points racines de $R'(z)$ compris dans ce même domaine (il en existe toujours), et leurs antécédents. Nous devons maintenant étudier les singularités de la fonction $\theta(Z)$, inverse de $A(z)$; nous savons déjà que quand z décrit un domaine Δ ayant l'origine sur sa frontière et comprenant notamment un secteur dont la bissectrice est l'axe réel positif, $A(z)$ décrit un domaine simplement couvert du plan des Z, que la correspondance de ces deux domaines est biunivoque et continue même aux points frontières, l'infini du plan des Z correspondant à l'origine; nous pouvons choisir comme domaine du plan des Z un demi-plan à droite d'une parallèle à l'axe imaginaire qui jouera le même rôle que le cercle Γ de la démonstration du Chapitre I et que nous désignerons toujours par Γ; le domaine correspondant Δ du plan des z sera tangent à l'axe imaginaire, à droite de ce dernier, et voisin, comme forme, d'un cercle. La correspondance conforme entre Δ et Γ définit une branche de fonction $\theta_0(Z)$ continue et nulle à l'infini, régulière et univalente dans Γ, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\theta_0(Z+a) = R[\theta_0(Z)] \qquad (a > 0)$$

qui permet d'en faire le prolongement; en appelant $\overline{R}_{-1}(z)$, la branche de fonction inverse de R, nulle à l'origine, la fonction

$$\theta(Z) = \overline{R}_{-1}[\theta_0(Z+a)],$$

qui coïncide avec $\theta_0(Z)$ dans Γ, se trouve définie dans le domaine

$$\Gamma_{-a} > \Gamma,$$

déduit de Γ par la translation $-a$; elle est algébroïde dans Γ_{-a}, car Z décrivant ce dernier domaine, $\theta_0(Z+a) = z$ décrit Δ et $\overline{R}_{-1}(z)$ décrit Δ_{-1} antécédent de Δ qui contient Δ et le touche à l'origine.

$\theta(Z)$ aura des points critiques algébriques dans Γ_{-a}, si $R_{-1}(z)$ a des points critiques dans Δ. D'une manière générale

$$\theta(Z) = \overline{R}_{-n}[\theta_0(Z+na)]$$

définit $\theta(Z)$ algébroïde dans Γ_{-na}, identique à $\theta_0(Z)$ dans Γ et dont les valeurs dans Γ_{-na} recouvrent Δ_{-n}, $n^{\text{ième}}$ antécédent de Δ, contenant Δ et tendant vers D_0 pour n infini. Soient c, c', c'', ... les points critiques de $\overline{R}_{-1}(z)$ restreinte au domaine D_0, ceux de $\overline{R}_{-n}(z)$ sont $R_p(c)$, $R_p(c')$, ..., p variant de o à $n-1$; le point Z^* deviendra critique pour $\theta(Z)$, si l'on a

$$\theta_0(Z^* + na) = R_p(c)$$

ou

$$\begin{aligned} Z^* + na &= A[R_p(c)] = A(c) + pa \\ Z^* &= A(c) - (n-p)a \end{aligned} \qquad (n-p \geqq 1).$$

On en conclut exactement, comme au Chapitre I, que les seuls points critiques possibles, à distance finie pour $\theta(Z)$, sont :

$$A(c) - qa, \quad A(c') - qa, \quad \ldots \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots)$$

qu'on peut encore désigner par

$$A(\zeta) - ma, \quad A(\zeta') - ma, \quad \ldots \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

ζ, ζ', ... étant les zéros de $R'(z)$ dans D_0. On poursuivra le raisonnement toujours de la même manière qu'au Chapitre I, et l'on montrera que les points ci-dessus désignés sont effectivement des points critiques algébriques pour certaines branches de $\theta(Z)$, réguliers pour d'autres.

Faisons voir maintenant que la fonction $A(z)$ ne peut pas exister en dehors du domaine D_0 ; pour le cas de la fonction $\Sigma(z)$ de M. Kœnigs, ce fait résultait de ce que tous les points frontières de D_0 sont des points d'indétermination de la fonction, alors que nous n'avons pas pu établir le même fait d'une manière absolument générale pour $A(z)$. Mais le procédé de prolongement par lequel on définit $\theta(Z)$ montre que cette fonction n'a d'une part que des points critiques algébriques isolés comme singularités à distance finie, d'autre part que les valeurs qu'elle prend sont toujours intérieures au domaine D_0. Il en résulte que $A(z)$ ne peut pas exister en dehors de D_0. La chose paraîtra évidente à tous les géomètres qui sont familiarisés avec l'étude des fonctions inverses des fonctions uniformes. Esquissons la démonstration qui, du reste, n'a rien de nouveau (1). Il s'agit, en somme, de montrer que si une fonction ou branche de fonction $A(z)$ est holomorphe dans

---

(1) Pour ces généralités, on consultera avec intérêt les premières pages de l'excellente Thèse de M. Iversen (Helsingfors, 1914) sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes.

un domaine connexe D, les valeurs de la fonction inverse pourront toujours être obtenues par voie de prolongement analytique à partir d'un élément de cette fonction inverse prenant en Z_0 la valeur z_0, z_0 désignant un point de D, et Z_0 la valeur $A(z_0)$. Nous supposons $A'(z_0) \neq 0$ et nous joignons $z_0 z_1$, z_1 étant un autre point de D, par une ligne simple intérieure à D, formée par exemple de segments de droite en nombre fini et sur laquelle $A'(z) \neq 0$; soit $\mathcal{L}$ cette ligne; z décrivant $\mathcal{L}$, $Z = A(z)$ décrit une autre ligne L, formée d'arcs analytiques réguliers, pouvant avoir des points doubles, mais sur laquelle peut définir un sens de parcours correspondant au sens adopté pour $\mathcal{L}$. Tout point de $\mathcal{L}$ est le centre d'un cercle dans lequel $A(z)$ est holomorphe et ne prend jamais deux fois la même valeur; nous considérons le plus grand de ces cercles intérieur à D; si nous prenons un cercle de rayon deux fois moindre, sa circonférence aura pour image une courbe fermée simple entourant le point correspondant Z de L, et si δ est la plus courte distance de cette petite courbe fermée à Z, δ a un minimum non nul r quand z et Z décrivent respectivement $\mathcal{L}$ et L. Si de chaque point L comme centre on décrit un cercle de rayon r, chacun de ces cercles sera l'image par $A(z)$ d'un petit domaine entourant le point de $\mathcal{L}$ qui correspond à son centre; on pourra couvrir L à l'aide d'un nombre fini de ces cercles, de manière que chacun coupe le précédent et le suivant; il est clair que l'un de ces cercles de centre Z' est le cercle de convergence d'un élément de fonction $z(Z)$ tel que l'on ait $f(z) = Z$, et prenant en Z' la valeur z', si z' est le point correspondant à Z' sur $\mathcal{L}$; que, d'autre part, ces éléments se prolongent mutuellement; on obtiendra donc la valeur z_1 de la fonction $z(Z)$, par prolongement analytique à partir de l'élément initial le long de la ligne L ou $Z_0 Z_1$.

Dans le cas qui nous occupe, on voit bien que $A(z)$ ne peut pas être prolongée au delà de D_0, puisqu'on peut faire le prolongement de $\theta(Z)$ le long d'une ligne arbitraire (en admettant les éléments algébriques), et que les valeurs obtenues pour la fonction sont toujours représentées par des points intérieurs à D_0. En outre, si un chemin du plan des z aboutit à un point frontière de D_0, supposé accessible, les valeurs correspondantes de $Z = A(z)$ ou bien ne tendent vers aucune limite, ou bien tendent vers l'infini, sinon $\theta(Z)$ aurait un point critique transcendant à distance finie, ce qui n'a pas lieu ([1]).

Je dis que l'infini est un point critique transcendant pour $\theta(Z)$; en effet, si z tend vers zéro, en restant par exemple dans le domaine Δ, $A(z)$ tend vers l'infini qui est donc une valeur asymptotique pour $A(z)$, par suite un point critique trancendant pour la fonction inverse; et même pour toutes les branches de la fonction inverse (*voir* Chap. I), parce que les points frontières de D_0 formant un ensemble parfait sont pour $A(z)$ des points singuliers d'espèce transcendante.

On peut encore remarquer que le groupe des substitutions algébriques

$$R_n(z) = R_n(z') \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

qui est discontinu dans D_0, admet $A(z)$ comme invariant absolu et caractéristique, c'est-à-dire que deux nombres z et z' font acquérir la même valeur à $A(z)$ s'ils sont liés par une relation de la forme précédente et seulement dans ce cas.

On peut maintenant, toujours en suivant la même voie qu'au Chapitre I, définir les singularités des itérées analytiques

$$R_\lambda(z) = \theta[A(z) + \lambda a].$$

Elles ont, en général, dans D_0, une infinité de points critiques algébriques définis par

$$A(z) = A(\xi) - ma - \lambda a \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

où l'on remplacera ξ par les diverses racines intérieures à D_0 de l'équation $R'(z) = 0$. Pour que certains de ces points cessent d'être critiques, il faut que λ vérifie une relation de la forme

$$\lambda a = B^{(K)} + pa,$$

$B^{(K)}$ étant une quantité qui ne peut recevoir qu'un nombre fini de valeurs; les indices d'itération λ, correspondants, sont donc congrus (mod 1) à un nombre fini d'entre eux. Si la fonction $R_\lambda(z)$ est algébrique, ces indices sont de plus commensurables et l'on a par suite, pour toute substitution algébrique S ayant à l'origine un point double

---

([1]) On montre facilement que le domaine limite d'indétermination de Z n'est pas borné quand z tend vers la frontière de D_0 suivant un chemin continu.

de multiplicateur $+1$ et permutable à R, une relation de la forme

$$S_p(z) = R_n(z),$$

n et p entiers, et $\frac{n}{p}$ n'ayant (mod 1) qu'un nombre fini de valeurs. La même propriété a lieu quand on suppose $R_\lambda(z)$ uniforme dans le domaine D_0.

Quant aux points frontières de D_0, ils sont pour les valeurs arbitraires de λ, qui ne satisfont pas à une relation de la forme précédemment indiquée, critiques transcendants pour toutes les branches de la fonction; ce dernier point ne s'obtient, en toute rigueur, par l'analyse du Chapitre I, qu'en écartant certains cas singuliers (*loc. cit.*, Chap. VII, p. 74-75).

Dans tous les cas, nous voyons que la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$R[S(z)] = S[R(z)],$$

assujettie aux conditions de continuité exprimées plus haut, possède une infinité de points critiques algébriques mobiles, c'est-à-dire dépendant de la constante arbitraire, et une infinité de points singuliers transcendants fixes.

Les résultats qui précèdent subsistent essentiellement dans le cas où le coefficient a de tout à l'heure est nul, c'est-à-dire où la substitution donnée est de la forme

$$z_1 = z - c z^{m+1} + \ldots \qquad (m > 1).$$

Il y a alors m points doubles de multiplicateurs 1 confondus en un seul, mais les m domaines correspondants analogues à D_0 sont distincts et non équivalents par les substitutions du groupe dérivé de R et de son inverse. Il y a pour chacun d'eux une fonction d'Abel qui y sera encore holomorphe, étant la limite d'une suite de fonctions rationnelles uniformément convergente. De plus, nous avons démontré que chacun de ces domaines renferme au moins une racine de $R'(z)$. La théorie qui précède est donc encore applicable, avec des modifications insignifiantes.

On peut encore définir l'itération analytique d'une substitution rationnelle possédant un point double de l'espèce que nous étudions en ce moment, par un procédé analogue à celui du Chapitre II, comme on peut le prévoir *a priori* par le fait que le point double singulier considéré est la conjonction d'un point double attractif et d'un point double répulsif; les itérées analytiques obtenues par ce nouveau procédé n'auront ni le même domaine d'existence, ni les mêmes caractères analytiques que celles dont nous venons de parler. Nous partons toujours de la substitution

$$z_1 = \mathrm{R}(z) = z + a + \frac{b}{z} + \ldots \qquad (a > 0)$$

et nous considérons la substitution inverse

$$z_{-1} = \mathrm{R}_{-1}(z) = z - a - \frac{b}{z} + \ldots$$

dont on fait l'itération analytique par le procédé de l'alinéa précédent. Au point de vue local, il n'y a absolument rien de changé, si ce n'est que a étant remplacé par $-a$, le domaine T a une disposition symétrique par rapport à l'origine de celle de tout à l'heure. Mais ici, R étant rationnelle, R_{-1} est multiforme; il en est de même de la solution fondamentale de l'équation d'Abel qui est, en revanche, la fonction inverse d'une fonction uniforme et méromorphe; nous désignerons par $\varphi(u)$ cette dernière fonction, dont nous avons déjà fait connaître d'intéressantes propriétés et qui vérifie l'équation

$$\varphi(u + a) = \mathrm{R}[\varphi(u)],$$

par $\mathrm{X}(z)$ la fonction inverse; les itérées analytiques de R_{-1}, c'est-à-dire les substitutions permutables à R, et qui, dans un secteur comprenant cette fois le demi-axe réel négatif, sont supposées de la forme $z + \lambda a$ augmenté d'un terme infiniment petit avec $\frac{1}{z}$, auront pour expression

$$z' = f(z) = \varphi[\mathrm{X}(z) + \lambda a].$$

Les fonctions ainsi définies existent dans tout le plan, ont leurs points critiques algébriques et transcendants fixes, c'est-à-dire indépendants de λ; on pourra répéter à leur sujet ce qui a été dit au sujet des fonctions analogues du Chapitre II; on pourrait montrer notamment qu'il ne peut pas exister, pour une fonction φ, une autre relation de la forme

$$\varphi(u + a') = S[\varphi(u)],$$

S étant rationnelle, $\frac{a'}{a}$ imaginaire ou incommensurable; mais il est inutile de refaire cette démonstration qui ne nous apprendrait rien de nouveau, car nous savons déjà que deux substitutions rationnelles permutables R et S satisfont toujours à une relation de la forme $R_n = S_p$, quand l'une d'elles présente un point double de multiplicateur $+1$; elle est d'ailleurs facile, après ce qui a déjà été dit à ce sujet.

Remarquons que la fonction $\varphi(u)$ n'est pas définie uniquement par la propriété d'être méromorphe et de vérifier une équation de la forme précédente; il faut encore et il suffit d'y ajouter les propriétés suivantes : $\varphi(u)$ est infiniment grande à l'infini dans un angle comprenant l'axe réel négatif et sa dérivée y a pour valeur limite 1; elle est alors définie au changement près de u en $u + h$. Il existe d'autres fonctions méromorphes vérifiant la même équation fonctionnelle, notamment les fonctions périodiques obtenues en changeant u en e^{ku} dans la fonction de Poincaré (Chap. II); ces dernières fonctions existent pour des formes générales de R, celles que nous étudions, seulement pour des formes particulières de R.

Dans le cas où $R(z)$ est de la forme

$$z + \frac{a}{z^{m-1}} + \ldots \qquad (m > 1),$$

il existe m fonctions méromorphes analogues à $\varphi(u)$, vérifiant la même équation fonctionnelle

$$\varphi(u + ma) = R[\varphi(u)]$$

et se distinguant, notamment, par les valeurs limites de l'argument de $\varphi(u)$, quand u décrit par exemple l'axe réel négatif, ces valeurs différant entre elles de multiples de $\frac{2\pi}{m}$; on reconnaîtra facilement que les m solutions correspondantes du problème de l'itération analytique sont essentiellement distinctes, sauf dans le cas où R est permutable à une substitution linéaire $(z \mid \omega z)$, avec $\omega^m = 1$. Rendons-nous compte de ceci sur un exemple :

$$z_1 = \mathrm{R}(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}.$$

Comme il n'y a pas de terme en $\frac{1}{z^2}$, il suffira, pour être ramené au cas de $a \neq 0$, de poser

$$z_1^2 = t_1, \qquad z^2 = t.$$

La relation $z_1 = \mathrm{R}(z)$ devient par cette transformation

$$t_1 = t + 2 + \frac{3}{t} + \frac{2}{t\sqrt{t}} + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^2\sqrt{t}} + \frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^3\sqrt{t}} + \frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^4\sqrt{t}} + \frac{1}{t^5}$$

ou

$$t_1 = \rho(t).$$

On en déduit inversement la valeur de t en fonction de t_1 au moyen d'une série procédant suivant les puissances descendantes de $\sqrt{t_1}$, et dont les premiers termes sont donnés par

$$t = \rho_{-1}(t_1) = t_1 - 2 - \frac{3}{t_1} - \frac{2}{t_1\sqrt{t_1}}, \qquad \cdots.$$

La solution fondamentale de l'équation d'Abel correspondant à cette substitution est holomorphe dans un domaine du plan des t_1 contenant tout le plan, sauf un angle ε ayant pour bissectrice l'axe réel positif. Mais $\rho_{-1}(t_1)$ a ici deux valeurs suivant la détermination choisie pour le radical; prenons la valeur du radical égale à $+i\infty$ pour $t_1 = -\infty$. Nous obtenons une première fonction A^0, telle que

$$\mathrm{A}^0[\rho_{-1}^0(t_1)] = \mathrm{A}(t_1) - 2$$

ou

$$\mathrm{A}^0(t) = \mathrm{A}^0[\rho^0(t)] - 2.$$

Faisons la substitution $t = z^2$, qui fait correspondre au domaine considéré du plan des t un domaine du plan des z limité par deux courbes se coupant à l'infini sous l'angle $\pi - \frac{\varepsilon}{2}$, et comprenant les points $+iy$ pour y infiniment grand positif. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^0(t) &= \mathrm{X}^0(z), \\ \mathrm{A}^0[\rho^0(t)] &= \mathrm{X}^0[\mathrm{R}(z)], \\ \mathrm{X}^0[\mathrm{R}(z)] &= \mathrm{X}^0(z) + 2; \end{aligned}$$

$u = X^0(z)$ est définie pour l'instant dans le domaine précédemment décrit du plan des z; elle est uniforme et même univalente dans ce domaine, ses valeurs couvrant un domaine du plan des u qui comprend les valeurs négatives très grandes et qui est limité par deux courbes simples se coupant à l'infini sous l'angle $2\pi - \varepsilon$. On a inversement

$$z = \varphi^0(u) = \sqrt{u + \frac{3}{2}\log\left(\frac{-u}{2}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{2}}\right)},$$

uniforme dans cette région du plan des u, et, par suite de l'équation fonctionnelle

$$\varphi^0(u+2) = R[\varphi^0(u)],$$

méromorphe dans tout le plan. En outre,

$$\varphi^0(-\infty) = +i\infty.$$

En partant de la fonction $A^1(t)$, correspondant à l'autre valeur du radical, on arrive de même à la fonction méromorphe $\varphi^1(u)$, pour laquelle

$$\varphi^1(-\infty) = -i\infty.$$

Les itérées analytiques ont pour expression

$$\varphi^0[2\lambda + X^0(z)],$$
$$\varphi^1[2\lambda + X^1(z)].$$

Remarquons d'abord qu'en vertu d'un raisonnement connu, ces deux fonctions ont les mêmes points critiques, indépendants de λ, qui sont les points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$ et points critiques algébriques également pour ces itérées, et certains points limites des précédents qui sont points critiques transcendants, notamment l'infini. Je dis que les fonctions des deux groupes ne sont pas les mêmes, ou, ce qui revient au même, que les deux substitutions définies paramétriquement par

$$\begin{cases} z = \varphi^0(u), \\ f(z) = \varphi^0(u+\lambda); \end{cases}$$
$$\begin{cases} z = \varphi^1(v), \\ g(z) = \varphi^1(v+\lambda') \end{cases}$$

forment deux groupes qui n'ont en commun qu'une infinité dénombrable d'éléments. Si une branche de fonction f et une branche de fonction g sont identiques pour certaines valeurs de λ et λ', on aura

$$\begin{aligned} \varphi^0(u) &= \varphi^1(v), \\ \varphi^0(u+\lambda) &= \varphi^1(v+\lambda'), \end{aligned}$$

la seconde équation étant vérifiée pour des valeurs constantes de λ et λ' quand on y remplace v par l'une des branches de fonctions de u, en infinité dénombrable, déduite de la première; or cette seconde équation définit alors λ' en fonction analytique de u et de λ; si cette fonction $\lambda'(u, \lambda)$ dépendait uniquement de λ, on aurait

$$\frac{d\varphi^0}{du}(u+\lambda) = \frac{d\varphi^1}{dv}(v+\lambda')\frac{dv}{du} = \frac{d\varphi^1}{dv}(v+\lambda')\frac{d\lambda'}{d\lambda};$$

par suite, $\frac{dv}{du} = \frac{d\lambda'}{d\lambda}$, la valeur commune de ces dérivées étant alors une constante absolue; donc v serait une fonction linéaire de u, de la forme $au+b$; on aurait, par suite,

$$\varphi^0(u) = \varphi^1(au+b),$$

ce qui est incompatible avec l'expression asymptotique indiquée plus haut pour les fonctions φ^0 et φ^1, et qui est valable quand la variable est à l'intérieur d'un domaine comprenant un angle infiniment voisin de 2π, ayant son sommet sur l'axe réel négatif. En élevant au carré les deux membres de l'équation précédente, on aurait en effet

$$u + \frac{3}{2}\log\left(\frac{-u}{2}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{2}}\right) = au + b + \frac{3}{2}\log\left(\frac{-au-b}{2}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{2}}\right),$$

l'argument de u étant choisi, ce qui est possible, de manière que les points u et $au+b$ appartiennent tous deux au domaine en question; on déduirait de là $a=1$, donc

$$\varphi^0(u) = \varphi^1(u+b),$$

ce qui est encore incompatible avec les égalités limites

$$\begin{aligned} \varphi^0(-\infty) &= +i\infty, \\ \varphi^1(-\infty) &= -i\infty; \end{aligned}$$

λ' est donc fonction à la fois de u et de λ, et ne peut devenir indépendant de u que pour des valeurs particulières de λ, en infinité dénombrable. La démonstration est évidemment générale, bien que nous ayons raisonné sur un exemple.

Il y a toujours cependant des éléments communs aux deux groupes de fonctions, à savoir les itérées d'indice entier.

Qu'arrive-t-il maintenant si la substitution $(z \mid -z)$ est permutable à R, c'est-à-dire si R ne renferme que des termes de degré impair, par exemple

$$R(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}?$$

Dans ce cas, $\rho(t)$ ne contenant plus de termes à exposant fractionnaire, les deux fonctions désignées plus haut par $A^0(t)$ et $A^1(t)$ sont identiques; les fonctions $X^0(z)$, $X^1(z)$, ou plus exactement les branches initiales de ces deux fonctions, considérées respectivement dans les deux domaines D et D' symétriques par rapport à l'origine, satisfont aux identités

$$\overline{X^0}(z) = \overline{X^1}(-z),$$

$$\overline{X^1}(z) = \overline{X^0}(-z);$$

par suite,

$$\varphi^0(u) = -\varphi^1(u).$$

On voit alors que les deux substitutions

$$[z \mid f(z)] \quad \text{et} \quad [z \mid g(z)],$$

pour une même valeur de λ, sont transformées l'une de l'autre par la substitution $(z \mid -z)$, laquelle n'appartient à aucun des deux groupes, bien qu'elle soit permutable à R. Réciproquement, si

$$\varphi^0(u) = -\varphi^1(u),$$

en restant toujours dans le cas de $m = 2$, c'est-à-dire si les deux substitutions que l'on vient de considérer sont transformées par $(z \mid -z)$, comme ces deux substitutions sont permutables à R, $(z \mid -z)$ est aussi permutable à R qui ne renferme que des termes de degré impair. Tout ceci s'étend naturellement au cas de $m > 2$, sauf les complications d'écriture : on définit bien, comme nous l'avions annoncé, m fonctions méromorphes distinctes auxquelles correspondent m groupes distincts de substitutions permutables à R.

Pour terminer ce qui concerne les substitutions analytiques possédant un point double de multiplicateur $+1$, faisons voir comment on obtiendra, sans nouveaux développements, une démonstration indépendante de celle obtenue au Chapitre II, du fait suivant : si une substitution rationnelle R possède un point double de multiplicateur $+1$, toute substitution rationnelle S qui lui est permutable vérifie une identité de la forme $R_n = S_p$. D'abord on sait qu'il existe une puissance R_m de R ayant un point double, toujours de même nature, en commun avec $S_{m'}$, m et m' entiers positifs; la permutabilité de R_m et de $S_{m'}$ exige que ce point possède, relativement à $S_{m'}$, un multiplicateur de la forme $e^{2i\pi\frac{p}{q}}$, R_m et $S_{m'}$ ne se réduisant pas à la substitution identique. On obtient donc deux substitutions permutables R_m et $S_{m'q}$, qui sont toutes deux de la forme

$$z_1 = z + a + \frac{b}{z} + \ldots,$$

le point double étant à l'infini. Si $a \neq 0$ pour l'une d'elles, on est ramené à une question qui a été traitée tout à l'heure à l'aide du premier mode d'itération analytique, employant la fonction d'Abel uniforme. Si l'on a deux expressions telles que

$$z + \frac{a}{z^{\mu-1}} + \ldots,$$

$$z + \frac{a'}{z^{\mu'-1}} + \ldots,$$

μ et $\mu' > 1$, la question a été résolue de la même manière sous réserve de l'hypothèse $\mu = \mu'$ qu'il faut maintenant justifier; or, sur une circonférence de rayon infiniment grand ayant son centre à l'origine, il existe μ arcs distincts sur lesquels les itérées de la première fraction rationnelle convergent vers l'infini, ces μ arcs étant infiniment voisins de $\frac{2\pi}{\mu}$ et de plus séparés par des points de l'ensemble parfait F, comme appartenant à des domaines de convergence distincts; la même circonstance se produit pour l'autre fonction, μ étant remplacé par μ'; si l'on se rappelle que les deux ensembles F sont identiques, on voit de suite que $\mu = \mu'$. Je donne cette démonstration parce qu'elle est intuitive, mais on trouvera facilement une démonstration plus générale, ne s'appliquant pas seulement aux fonctions rationnelles, en se servant des transformations conformes auxiliaires maintes fois utilisées dans cette étude. Le résultat annoncé relatif aux substitutions permutables est donc démontré par une voie différente de celle du Chapitre II, ce qui permet, par exemple, de ne pas utiliser cette propriété assez cachée, que les puissances d'une substitution rationnelle admettent toujours, à partir d'un certain rang, des points doubles répulsifs.

Je signale enfin la remarque suivante; si l'on écrit *a priori*

$$R(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots,$$

$$S(z) = z + u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \ldots,$$

$$R[S(z)] = S[R(z)],$$

on vérifie qu'il est toujours possible de calculer les u de manière à satisfaire formellement à cette identité, en se donnant arbitrairement u_0 et u_1; il résulte de ce qui précède que la série obtenue est presque toujours divergente. Je me contente de poser la question de reconnaître si ces séries peuvent être sommables et quelle serait leur signification.

CHAPITRE IV.

L'ITÉRATION ANALYTIQUE DANS LE DOMAINE D'UN POINT DOUBLE DE MULTIPLICATEUR NUL.

Le point double étant à l'origine, on peut, par une transformation $(z \mid kz)$, ramener la substitution à la forme

$$z_1 = R(z) = z^m + a\, z^{m+1} + \ldots \qquad (m > 1).$$

Il existe une fonction régulière dans le domaine de l'origine

$$\Phi(z) = z + c\, z^2 + \ldots,$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Phi[R(z)] = [\Phi(z)]^m$$

et qui permet de résoudre le problème de l'itération analytique.

Si l'on pose

$$Z = \Phi(z),$$

on a inversement

$$z = \theta(Z) = Z - cZ^2 + \ldots,$$

régulière au voisinage de $Z = 0$. La substitution donnée, transformée par

$$z = \theta(Z), \qquad z_1 = \theta(Z_1),$$

est ainsi ramenée à la forme canonique

$$Z_1 = Z^m,$$

et la recherche des substitutions permutables à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$f(Z^m) = [f(Z)]^m.$$

Si l'on se borne aux solutions pour lesquelles $Z = 0$ est un point singulier isolé, la fonction tendant vers zéro en même temps que Z dans un secteur qui contient à la fois Z et Z^m, on a

$$f(Z) = \omega Z^\alpha = \omega\, e^{\alpha \log Z},$$

avec $\omega^{m-1} = 1$, la partie réelle de α étant positive. L'itération analytique de $R(z)$ sera donc définie par

$$R_\lambda(z) = \theta[\omega \Phi^\alpha(z)]$$

en posant

$$m^\lambda = \alpha.$$

On définit ainsi un groupe de substitutions à un paramètre contenant la substitution donnée et la substitution unité, du moins en prenant $\omega = 1$; dans le cas de $m > 2$, en donnant à ω les $m - 1$ valeurs qu'il peut prendre, on définit un groupe mixte, résultant de la composition du groupe continu $(Z|Z^\alpha)$, avec le groupe cyclique fini $(Z|\omega Z)$. Mais l'origine étant un point critique pour les substitutions du groupe, le caractère commutatif de ce groupe est plus formel que réel, ou du moins ne se manifeste qu'en prenant les précautions habituelles dans ce genre de questions, par exemple, si l'on se borne aux valeurs réelles de λ, par le tracé d'une coupure invariante, trajectoire d'un point Z pour λ variable.

Étudions en particulier le cas où $R(z)$ est rationnelle.

La fonction $\Phi(z)$, définie dans un petit domaine entourant l'origine et correspondant à un petit cercle du plan des Z, pourra être prolongée dans tout le domaine invariant D_0 contenant l'origine et contigu à F, par le moyen de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(z) = \{\Phi^0[R_n(z)]\}^{\frac{1}{m^n}},$$

le radical étant choisi de manière que l'argument du second membre soit égal à celui de z pour z infiniment petit.

Si Δ est le petit domaine initial du plan des z correspondant au cercle Γ de rayon ρ du plan des Z, on définit ainsi en partant de l'élément initial $\Phi_0(z)$, une fonction algébroïde dans le domaine Δ_{-n}, $n^{\text{ième}}$ antécédent de Δ renfermant Δ, les valeurs de la fonction ainsi prolongée couvrant le cercle Γ_{-n} de rayon $\rho^{\frac{1}{n}}$. Comme $\Phi_0(z)$ ne devient nulle que pour $z = 0$ et jamais infinie dans Δ, nous voyons que $\Phi(z)$ ne pourra acquérir un point critique que si $R_n(z)$ devient nulle dans Δ_{-n} pour $z \neq 0$. Il peut arriver que D_0 ne contienne aucun point antécédent de l'origine autre que l'origine elle-même; alors $\Phi(z)$ est uniforme dans D_0, puisque Δ_{-n} tend vers D_0, et représente D_0 sur le cercle unité du plan des Z d'une manière biunivoque. Je vais démontrer, en effet, que deux points distincts du plan des z correspondent à deux points distincts du plan des Z : cela revient à dire que la fonction $\theta(Z)$, prolongée à partir de l'élément initial défini dans $\Gamma(|Z| \leq \rho)$, et cela au moyen de la formule

$$\theta(Z) = \overline{R}_{-n}\{\theta_0(Z^{m^n})\},$$

est uniforme pour $|Z| < 1$; dans la formule qui précède, $\overline{R}_{-n}(z)$ désigne la branche de fonction nulle à l'origine et dont l'argument est infiniment petit quand z est pris sur l'axe réel positif, très près de l'origine; les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ n'ont pas de points critiques autres que l'origine dans D_0, sinon $\overline{R}_{-n}(0)$ admettrait dans D_0 des déterminations non nulles, ce qui n'a pas lieu; comme $\theta_0(Z^{m^n})$ ne s'annule que pour $Z=0$, $\theta(Z)$ est uniforme pour $|Z|<\rho^{\frac{1}{m^n}}$, quel que soit n, c'est-à-dire pour $|Z|<1$. En un mot, les fonctions $\Phi(z)$ et $\theta(Z)$ sont celles qui représentent d'une manière conforme l'un sur l'autre, le domaine D_0, simplement connexe, et le cercle unité, de manière que l'origine corresponde au centre du cercle, les directions positives des axes réels se correspondant également; en outre, le grandissement linéaire à l'origine se trouve être égal à 1. Nous avons obtenu antérieurement (*loc. cit.*, Chap. VI, § **40-44**) ces propriétés de la représentation conforme de D_0 comme cas particulier d'une recherche plus générale; nous savons que, sauf dans les deux cas banals déjà examinés au Chapitre II, la fonction $\theta(Z)$ admet son cercle de convergence comme coupure, $\Phi(z)$ n'existant inversement que dans D_0.

L'itération analytique définie par

$$R_\lambda(z)=\theta[\omega Z^{m^\lambda}]=\theta[[\Phi(z)]^{m^\lambda}]$$

conduit à des substitutions qui, dans le domaine D_0, qu'elles laissent invariant, n'ont d'autre point singulier que l'origine, la similitude étant ici parfaite entre le groupe qu'elles constituent et le groupe correspondant

$$Z'=\omega Z^{m^\lambda}$$

du plan des Z; $R_\lambda(z)$ sera uniforme pour m^λ entier, et seulement dans ce cas.

Considérons en particulier le cas d'une substitution rationnelle et entière, et le point double de multiplicateur nul situé à l'infini; si en outre les points racines de $R(z)$ n'appartiennent pas au domaine D_∞, on se trouve dans le cas que nous venons d'étudier; les fonctions itérées $R_\lambda(z)$ ne peuvent d'ailleurs pas être rationnelles si λ est incommensurable, en laissant de côté les deux cas d'exception étudiés au Chapitre II; si donc on prend m^λ égal à un entier p et de manière que l'on n'ait pas

$$m^\alpha=p^\beta$$

avec α et β entiers, la fonction $R_\lambda(z)$ sera uniforme dans D_0 et non rationnelle. Elle admettra comme coupure la frontière continue de D_0, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

« Toute fonction $f(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$f[R(z)] = R[f(z)],$$

où $R(z)$ désigne un polynome; qui, en outre, n'admet dans le domaine du point à l'infini relatif à $R(z)$ que des points ordinaires ou des pôles, ne peut exister en dehors de ce domaine que si elle est rationnelle. »

Considérons d'une manière un peu plus générale une substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, avec un point double attractif dont le domaine total D est d'un seul tenant, et par suite complètement invariant, c'est-à-dire invariant par toutes les branches de la substitution inverse de R; une fonction $f(z)$ méromorphe en tout point de D d'une part, en tout point d'un domaine δ contenant un point de l'ensemble frontière F de D d'autre part; $f(z)$ est supposée vérifier dans D la relation

$$f[R(z)] = Q[f(z)],$$

Q étant une fonction rationnelle. Je dis que $f(z)$ en général est rationnelle. On a par itération, en posant

$$z_n = R_n(z),$$

la relation

$$f(z_n) = Q_n[f(z)].$$

Cette relation définit $f(z)$ dans δ_n, $n^{\text{ième}}$ conséquent de δ par R. La fonction ainsi définie est uniforme dans δ_n. En effet, soient z et z' deux points équivalents par rapport au groupe G'_n des substitutions algébriques exprimées par la relation

$$R_n(z) = R_n(z'),$$

d'où l'on tire pour z' plusieurs déterminations

$$z' = a(z),$$

$a(z)$ étant une fonction ou branche de fonction algébrique ou rationnelle. Si $\psi(z)$ est une fonction analytique de z et si $\psi(z) = \psi(z')$ dans une partie du domaine d'existence de cette fonction, cette relation subsistera dans tout domaine déduit du premier par voie de prolongement analytique et contenant z' en même temps que z. D'après cela, on aura toujours dans δ

$$Q_n[f(z)] = Q_n[f(z')]$$

pour deux points z et z' équivalents par rapport à G'_n qui y sont contenus, puisque les deux membres de cette égalité ont pour valeur $f(z_n)$ quand z est dans D. On voit donc que $f(z_n)$ n'a qu'une valeur en chaque point de δ_n, non seulement quand on regarde δ_n comme un morceau de surface de Riemann à plusieurs feuillets, mais aussi quand on le considère comme un domaine, en général à connexion multiple, du plan simple. Cette fonction est continue, au sens large, d'après les propriétés des fonctions algébriques, puisqu'on a

$$f(z_n) = Q_n[f[R_{-n}(z_n)]],$$

$R_{-n}(z_n)$ étant algébrique, et $Q_n[f(z)]$ méromorphe dans δ. Elle a une dérivée unique en chaque point définie par

$$f'(z_n)\,R'_n(z) = Q'_n[f(z)]\,f'(z).$$

C'est donc une fonction algébroïde dont les seuls points critiques possibles sont ceux de $R_{-n}(z_n)$, qui correspondent aux zéros de $R'_n(z)$ situés dans δ. Mais la fonction est uniforme, puisqu'une circulation autour d'un point critique de $R_{-n}(z_n)$, aussi bien qu'autour d'un trou de δ_n, a pour effet de changer z en un point z' équivalent, ce qui redonne la même valeur de $f(z_n)$ par application de la formule

$$f(z_n) = Q_n[f(z)].$$

D'après les propriétés connues de l'itération des fractions rationnelles, δ_n couvre tout le plan pour une valeur finie de n, sauf peut-être l'entourage d'un point exceptionnel, à savoir — lorsque R est la transformée d'une substitution entière — le correspondant du point à l'infini ([1]). Supposons que ce point exceptionnel ou bien n'existe pas, ou bien soit intérieur à D. $f(z)$ ayant en tout point le caractère d'une fonction rationnelle est rationnelle.

Supposons au contraire qu'il existe un point exceptionnel. Un changement de variable linéaire nous ramène au cas où $R(z)$ est un

([1]) Nous laissons de côté le cas où $R(z)$ se ramène à $z^{\pm m}$.

polynome; le point à l'infini n'étant pas atteint par le processus que nous venons d'indiquer peut être un point d'indétermination pour $f(z)$ qui serait alors une transcendante méromorphe ou entière; le cas d'une fonction entière ne peut pas se présenter, comme le montre la démonstration que nous avons donnée au Chapitre II, pour l'équation

$$f[R(z)] = R[f(z)]$$

et qui est encore applicable si le second membre est remplacé par

$$Q[f(z)], \quad Q \neq R.$$

Mais la discussion complète de cette équation dans les autres cas exigerait d'assez longs développements. Nous la laisserons de côté [1].

Dans tous les cas nous voyons bien qu'*il existe, dans certains cas, des substitutions permutables à une substitution rationnelle et entière, qui sont uniformes et pourvues d'une ligne singulière.*

Revenons maintenant à l'étude de l'itération analytique dans le domaine d'un point double de multiplicateur nul placé à l'origine, quand ce domaine renferme des antécédents de l'origine autres que l'origine elle-même. Dans ce cas la fonction $\Phi(z)$ n'est pas uniforme, mais possède une infinité de points critiques algébriques tendant vers tous les points frontières de D_0. Cela résulte aisément de l'équation

$$\Phi(z) = \{\Phi_0[R_n(z)]\}^{\frac{1}{m^n}}.$$

Si ζ est un antécédent de rang n de l'origine, tel que $R_n(\zeta) = 0$, $R_{n-1}(\zeta) \neq 0$, ce sera pour $\Phi(z)$ un point critique algébrique au moins pour n suffisamment grand; en effet dans la suite des points distincts, $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$, antécédents de l'origine de rangs $n, n-1, \ldots, 1$

---

[1] Si Q est un polynome, la démonstration donnée pour $Q = R$ est valable sans modifications; si Q est fractionnaire, $f(z)$ étant entière, $Q[f(z)]$ ne peut renfermer en dénominateur qu'un seul monome $[f(z) - a]^p$, $f(z) - a$ étant de la forme $e^{g(z)}$. Si le minimum de $e^{(g z)}$ pour $|z| = r$, ne tend pas vers zéro, r tendant vers l'infini par valeurs discrètes, la même démonstration est applicable. Dans le cas contraire on remarquera que le maximum de $|e^{g(z)}|$ sur certains cercles est comparable au maximum de $|e^{g(z)}|$ (Borel) et l'on sera ramené à la même démonstration.

respectivement, les seuls qui puissent être éventuellement points racines de $R'(z)$ sont parmi les h derniers, h étant fixe (indépendant de n et du choix de ζ), puisque ces points racines sont en nombre fini et que d'autre part les points limites des ζ sont sur la frontière de D_0. Or si $y = F(z)$ est une fonction holomorphe de z, $G(y)$ une fonction holomorphe de y, z_0 une racine de l'équation

$$G[F(z)] = 0,$$

et y_0 la quantité $F(z_0)$, l'ordre de multiplicité de z_0 comme racine de l'équation précédente sera égal à l'ordre de multiplicité de y_0 comme racine de

$$G(y) = 0,$$

pourvu que $F'(z_0)$ ne soit pas nul. D'après les identités

$$R_n(z) = R_h[R_{n-h}(z)],$$
$$R'_{n-h}(z) = R'(z)R'(z_1), \dots, R'(z_{n-h-1}),$$

on aura $R'_{n-h}(\zeta) \neq 0$ et ζ sera racine de $R_n(z)$ avec un ordre de multiplicité ne dépassant pas celui des racines de $R_h(z)$, par conséquent borné puisque h est fixe. D'après l'équation fonctionnelle qui définit $\Phi(z)$, on voit alors que tous les points ζ, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, seront des points critiques algébriques, le nombre des branches permutées autour du point ζ croissant même indéfiniment. $\Phi(z)$ a donc une infinité de points critiques algébriques tendant vers tous les points frontières de D_0.

La fonction inverse $\theta(Z)$ est également multiforme. En effet joignons un point z intérieur à D_0 (supposé ne pas contenir le point à l'infini), à l'origine, par une ligne brisée intérieure à D_0 et dont le dernier segment est un segment de l'axe réel positif; la $n^{\text{ième}}$ conséquente $\mathcal{L}_n$ de cette ligne $\mathcal{L}$ sera pour n suffisamment grand intérieure au petit domaine Δ où la fonction $Z = \Phi(z)$ est uniforme et univalente, son image dans le plan des Z étant le cercle Γ; à $\mathcal{L}_n$ correspond dans Γ la ligne L_n tangente à l'axe réel positif joignant l'origine au point Z_n et sur laquelle on fixera un sens de parcours correspondant au sens adopté pour $\mathcal{L}$. Transformons L_n par la transformation

$$Z' = Z^{\frac{1}{m^n}},$$

la ligne transformée L étant tangente à l'axe réel positif grâce à un choix convenable de l'argument; la formule

$$\theta\left(Z^{\frac{1}{m^n}}\right) = \overline{R}_n[\theta(Z)]$$

permet de faire le prolongement de $\theta(Z)$ le long de la ligne L (on pourra facilement s'arranger pour éviter les points critiques algébriques), de manière que Z décrivant L, $\theta(Z)$ décrit $\mathfrak{L}$ qui aboutit au point z fixé à l'avance dans D_0. On définit ainsi une fonction algébroïde dans un cercle de rayon $\zeta^{\frac{1}{m^n}}$ qui tend vers l'unité pour n infini, qui prend toute valeur z de D_0 pour n suffisamment grand et n'en prend pas d'autre. Si cette fonction était uniforme, sa dérivée ne s'annulerait pas; en effet soit Z' le plus petit zéro en module de $\theta'(Z)$; on a

$$m\theta'(Z'^m)Z'^{m-1} = R'[\theta(Z')]\theta'(Z').$$

$\theta'(Z')$ étant nul et $R'[\theta(Z')]$ non infini, on aurait $\theta'(Z'^m) = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que Z' est la plus petite racine; $\theta'(Z)$ n'étant jamais nul ni infini, il résulte de l'équation

$$R'(z) = \frac{m\theta'(Z^m)Z^{n-1}}{\theta(Z)},$$

que $R'(z)$ n'aurait pas de zéros dans D_0 autres que $z = 0$, puisque le second membre ne s'annule que pour $Z = 0$, et que l'équation $\theta(Z) = z$ a toujours une racine quand z est dans D_0. Le point $z = 0$ n'aurait alors d'autre antécédent que lui-même dans D_0, ce qui est contraire à l'hypothèse. *Il est donc démontré que les deux fonctions* $\theta(Z)$ *et* $\Phi(z)$, *inverses l'une de l'autre sont en même temps multiformes ou uniformes.* Si elles sont multiformes, ce qui est le cas qui nous occupe en ce moment, il est visible que les itérées analytiques

$$\theta\{\omega[\Phi(z)]^\alpha\}$$

ont des points critiques, en nombre infini, qui dépendent de la constante arbitraire et sont, de plus, d'espèce transcendante pour α quelconque. Nous ne chercherons pas à déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles ces fonctions deviennent par exemple algébriques; cette étude pourrait se faire comme dans le cas du Chapitre I, mais elle est un peu plus compliquée.

CHAPITRE V.

CONCLUSIONS.

Il résulte de l'ensemble des discussions que nous venons de faire que la résolution de l'équation fonctionnelle

$$f[R(z)] = R[f(z)],$$

où $R(z)$ est une fonction rationnelle donnée, conduit à des résultats très différents suivant les hypothèses supplémentaires que l'on est obligé de faire au sujet des valeurs et du caractère analytique de la fonction inconnue en certains points.

Si l'on considère un point double de la substitution R, supposé placé à l'origine, et que l'on se propose de trouver les substitutions permutables à R possédant ce même point double, satisfaisant en outre à certaines conditions d'analyticité ou de continuité, on est conduit à deux sortes de solutions suivant la nature du point double considéré pour R; les fonctions obtenues définissent toujours un groupe commutatif de substitutions à un paramètre, mais tantôt ces fonctions possèdent une infinité de points critiques mobiles, c'est-à-dire dépendant de la constante arbitraire, et en outre une infinité de points critiques fixes transcendants (cas A); tantôt au contraire, on obtient des solutions possédant des points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants de la constante arbitraire, les pôles seuls pouvant être mobiles, et le domaine d'existence des fonctions du groupe comprenant tout le plan sauf quelquefois un point, ou même deux points (dans un cas très particulier). Quand cette deuxième sorte de solutions se présentera, nous dirons que nous sommes dans le cas B.

Dans l'un et l'autre cas la solution générale n'est pas uniforme, et le caractère commutatif du groupe s'en trouve atténué d'une manière plus ou moins profonde.

Ceci dit, récapitulons les différentes hypothèses que nous avons examinées :

1° On a $0 < |R'(0)| < 1$. On suppose en outre $f(0) = 0$, et $f(z)$ régulière à l'origine. La solution obtenue est de l'espèce A.

2° On a $|R'(0)| > 1$, $f(0) = 0$, $f(z)$ régulière à l'origine. La solution obtenue est de l'espèce B.

3° On a $R'(0) = 1$, et la première dérivée d'ordre > 1 de R qui ne s'annule pas à l'origine est d'ordre $m + 1$, de sorte que

$$R(z) = z - az^{m+1} + \ldots.$$

Nous devons considérer alors les secteurs d'un cercle de rayon ρ suffisamment petit, ayant son centre à l'origine, et obtenus de la manière suivante. Joignons l'origine aux points racines de l'équation

$$x^m = a.$$

Nous obtenons un premier système de secteurs S_i ayant pour bissectrices ces droites, et un angle compris entre o et $\frac{2\pi}{m}$ d'ailleurs aussi petit que l'on veut.

Joignons l'origine aux points racines de l'équation

$$x^m = -a.$$

Nous obtenons un second système de secteurs Σ_i ayant pour bissectrices ces droites, d'angles toujours compris entre ces mêmes limites.

Supposons maintenant $f(0) = 0$, et en outre :

a. $f(z)$ régulière à l'intérieur d'un secteur S_i et continue à l'origine dans ce secteur. La solution obtenue est de l'espèce A. En outre aux m secteurs considérés correspondent m groupes essentiellement distincts, les fonctions qui les définissent ayant des domaines d'existence distincts.

b. $f(z)$ régulière à l'intérieur d'un secteur Σ_i, continue à l'origine. La solution obtenue est de l'espèce B. Aux m secteurs correspondent m groupes distincts. Toutefois quand la substitution linéaire

$$\left(z \mid e^{\frac{2i\pi}{m}} z\right)$$

est permutable à R, ces m groupes sont les transformés de l'un d'eux par les puissances de cette substitution.

4° $R'(o) = o$. On suppose en outre $f(o) = o$, l'origine étant pour $f(z)$ un point critique isolé, non un point d'indétermination. Ce cas se divise encore en deux autres :

a. Soit D_0 le domaine (unique) défini par la condition de contenir l'origine à son intérieur, d'être invariant par R, d'être d'un seul tenant et d'avoir plus d'un point frontière. Si D_0 renferme au moins un point racine de $R(z)$ autre que l'origine, on est dans le cas A, les points critiques mobiles étant en général transcendants.

b. Si D_0 ne renferme aucun point racine de $R(z)$ autre que l'origine, on est dans le cas B; le groupe obtenu est alors semblable au groupe mixte, obtenu en combinant les substitutions

$$Z' = Z^{\alpha}$$

avec les puissances de la substitution linéaire

$$Z' = e^{\frac{2i\pi}{m-1}} Z,$$

où m est l'ordre de la première dérivée de R qui ne s'annule pas à l'origine; et la similitude étant parfaite, c'est-à-dire résultant d'une transformation conforme sans points singuliers du domaine D_0, qui est le domaine d'existence des fonctions $f(z)$; ces fonctions ne sont alors singulières qu'à l'origine.

Ces résultats concernent la solution générale. Si maintenant on cherche des solutions particulières présentant des caractères analytiques plus simples, on obtient toujours les itérées d'ordre entier positif qui sont rationnelles et les itérées d'ordre entier négatif qui sont algébriques. On se rendra compte par les discussions qui ont été faites, et l'on pourrait préciser un peu plus ce point, que dans le cas général, c'est-à-dire si l'on ne suppose aucune égalité particulière entre les coefficients de $R(z)$, ce sont les seules solutions qui présentent des singularités moins compliquées que la solution générale.

Si l'on cherche les solutions uniformes, on voit que dans tous les cas celles qui n'ont que des points singuliers essentiels isolés n'en possèdent en réalité aucun, c'est-à-dire sont rationnelles.

L'hypothèse 4°, *b*, fournit au contraire des solutions uniformes ayant une ligne singulière essentielle, c'est probablement le seul cas où le fait se présente, mais nous ne l'avons pas complètement démontré.

Si, enfin, on se propose de trouver toutes les substitutions rationnelles S permutables à R, et sans faire aucune hypothèse particulière, on est conduit à cette conclusion, qu'en général R et S ne sont pas indépendantes, c'est-à-dire sont liées par une relation

$$R_n = S_p,$$

pour des valeurs entières positives de n et p. Mais ici deux cas sont à distinguer. Appelons F l'ensemble dérivé des points racines des équations

$$R_n(z) = z \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

I. Si F couvre tout le plan nous ne connaissons pas toutes les formes de R pour lesquelles il existe des substitutions permutables S qui ne vérifient aucune relation de la forme $R_n = S_p$, mais seulement des exemples fournis par les formules de multiplication des fonctions elliptiques [1].

II. Si F ne couvre pas tout le plan, R et S supposées indépendantes peuvent être ramenées par une même transformation linéaire à la forme

$$(R) \qquad Z = z^m,$$
$$(S) \qquad Z = az^{m'},$$

m et m' entiers positifs ou négatifs, $a^{m-1} = 1$.

Ou bien encore R et S seront transformables de la même manière

---

[1] Il résulte des recherches de M. Ritt, parues depuis la rédaction de ce Mémoire dans les *Transactions of the American Mathematical Society* (1922-1923) que toutes les substitutions rationnelles permutables et indépendantes s'obtiennent, si elles n'appartiennent pas aux classes étudiées dans l'alinéa suivant, au moyen des formules de multiplication de la fonction $\wp u$ de Weierstrass. Ces démonstrations de M. Ritt se rattachent à des considérations d'algèbre essentiellement différentes des problèmes de théorie des fonctions étudiés ici.

en

$$(\mathrm{R}) \qquad Z = \varepsilon \cos(m \operatorname{arc} \cos z),$$

$$(\mathrm{S}) \qquad Z = \varepsilon' \cos(m' \operatorname{arc} \cos z),$$

m, m' entiers, $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$, les signes étant convenablement choisis.

On verra facilement que ces formes de R et S sont les seules pour lesquelles le problème de l'itération analytique qui correspond à 2° conduit au même résultat que l'un des autres problèmes d'itération analytique énumérés plus haut (ici le problème 4°, *b*).

Enfin si S est du premier degré (R étant toujours de degré > 1), S est toujours périodique et l'on a

$$S_p = 1.$$

Quant à la recherche des substitutions rationnelles qui satisfont aux deux conditions

$$RS = SR,$$
$$R_n = S_p,$$

c'est là un problème de nature algébrique que je n'ai pas entièrement discuté. On se rendra compte que ces deux relations peuvent exister sans que R et S soient les itérées d'ordre entier d'une même fonction rationnelle par l'exemple

$$R = \frac{3z + z^5}{1 + z^4},$$

$$S = \frac{i(3z + z^5)}{1 + z^4},$$

qui donne

$$RS = SR,$$
$$R_4 = S_4,$$

R et S qui sont de degré premier, n'étant pas les itérées de fonctions de degré moindre. Il semble certain que, chaque fois que cette circonstance se produit, R et S sont les itérées d'ordre entier d'une même fonction rationnelle, mais à une substitution linéaire près du type elliptique ; c'est là une conclusion à laquelle je ne suis parvenu que par induction.

Enfin la recherche des substitutions permutables est identique à celle des fonctions possédant deux théorèmes de multiplication distincts. Poincaré dit qu'une fonction $\varphi(u)$ admet un théorème de multiplication, si l'on a

$$\varphi(su) = \mathrm{R}[\varphi(u)],$$

s étant une constante, R une fraction rationnelle. En outre Poincaré suppose que l'origine est pour la fonction $\varphi(u)$ un point ordinaire ou un pôle, que $\varphi'(0) = 1$, et qu'enfin $|\mathrm{S}| > 1$. (La définition précédente est d'ailleurs un cas particulier d'une autre plus générale qui concerne non pas une, mais un système de plusieurs fonctions d'une variable.)

Ceci étant nous disons que $\varphi(u)$ admet deux théorèmes essentiellement distincts, si l'on a

$$\varphi(su) = \mathrm{R}[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'u) = \mathrm{S}[\varphi(u)],$$

s et s' ne vérifiant aucune relation de la forme $s^n = s'^p$, avec n et p entiers. Nous avons obtenu au Chapitre II les fonctions entières qui possèdent deux théorèmes de multiplication distincts et montré qu'elles se ramènent par une substitution $(\varphi \mid a\varphi + b)$ à l'une des formes

$$\varphi(u) = \frac{e^{ku}}{k} \qquad (k^m = 1),$$
$$\varphi(u) = \cos(i\sqrt{2u}),$$
$$\varphi(u) = \cos(ku + h) \qquad \left(h = \pi\frac{p}{q}, \qquad k = \frac{-1}{\sin h}\right),$$

les multiplicateurs correspondants s étant des entiers en nombre infini.

Quant aux fonctions méromorphes qui possèdent deux théorèmes de multiplication distincts, elles comprennent outre les transformées homographiques des fonctions entières précédentes, des fonctions elliptiques et peut-être encore d'autres fonctions ([1]).

Faisons maintenant disparaître certaines des hypothèses de Poincaré. D'abord celle qui concerne la valeur de $\varphi'(0)$ n'a pas une grande importance; si $\varphi'(0) \neq 0$, il suffit de changer u en ku pour obtenir $\varphi'(0) = 1$. Supposons maintenant $\varphi'(0) = 0$. Un calcul d'identifi-

---

([1]) Pour la solution de cette dernière question, *voir* les travaux de M. F. Ritt cités plus haut.

cation, tout élémentaire, montre qu'en posant

$$R(z) = az^p + bz^{p+1} + \ldots,$$
$$z = \varphi(u) = Au^h + Bu^{h+1} + \ldots,$$
$$\varphi(su) = R(z),$$

$a.As \neq 0$, on a nécessairement $p = 1$, et qu'ensuite le développement de $\varphi(u)$ prend la forme

$$\varphi(u) = A_1 u^h + A_2 u^{2h} + A_3 u^{3h} + \ldots,$$

de sorte qu'il suffit de faire le changement de variable, $u^h = v$ pour être ramené au cas de $\varphi'(0) \neq 0$.

Supposons maintenant $0 < |s| < 1$, et soit toujours

$$\varphi(su) = R[\varphi(u)],$$
$$\varphi'(0) = 1, \qquad \varphi(0) = 0,$$

d'où

$$R'(0) = s.$$

On trouve alors pour $\varphi(u)$ une fonction étudiée au Chapitre I, qui n'est pas uniforme, qui d'ailleurs ne peut pas admettre un second théorème de multiplication essentiellement distinct du premier

$$\varphi(s'u) = S[\varphi(u)],$$

puisqu'on aurait nécessairement, comme nous l'avons vu en étudiant l'itération analytique au voisinage d'un point double attractif,

$$s^n = s'^p,$$
$$R_n = S_p.$$

Supposons maintenant $|S| = 1$. Si s était une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on aurait

$$R_n(z) = z,$$

R serait une substitution linéaire elliptique; nous laissons de côté ce cas particulier. Si $s = R'(0) = e^{2i\pi\omega}$, ω incommensurable, l'équation

$$\varphi(s^n u) = R_n[\varphi(u)]$$

montre que les fonctions $R_n(z)$ forment une suite normale dans un domaine du plan des z entourant l'origine; donc F ne couvre pas tout le plan, et comme R n'est pas une substitution du type II (les substitutions de ce type n'ayant que des points doubles répulsifs ou de multiplicateur nul), toute substitution S permutable à R satisfait à une relation $S_n = R_p$, autrement dit la fonction $\varphi(u)$ ne peut admettre une seconde formule de multiplication pour le multiplicateur s' que si $s^n = s'^p$.

Je ne sais d'ailleurs pas si cette fonction $\varphi(u)$ peut exister, mais on verra facilement que si elle existe, elle est uniforme dans un cercle de rayon fini qui constitue son domaine d'existence.

Enfin remarquons que l'hypothèse d'un pôle placé à l'origine pour la fonction $\varphi(u)$ se ramène au cas où ce point est ordinaire par le changement de φ en $\frac{1}{\varphi}$.

Nous arrivons finalement aux conclusions suivantes : supprimons les deux dernières conditions auxquelles sont assujetties les fonctions admettant, d'après Poincaré, un théorème de multiplication; nous pouvons dire que :

1° Toute fonction admettant un théorème de multiplication (au sens large que nous venons de définir) ne peut être uniforme et à domaine d'existence illimité, que si elle est méromorphe ou entière.

2° Toute fonction admettant deux théorèmes de multiplication est méromorphe ou entière; les fonctions transcendantes entières de cette espèce se ramènent aux fonctions e^u, $\cos\sqrt{u}$, $\cos\left(u + \pi\frac{p}{q}\right)$ par des substitutions de la forme $(\varphi \mid a\varphi + b)$ effectuées sur la fonction et $(u \mid cu^m)$ effectuées sur la variable, m étant un entier.

CHAPITRE VI.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE.

Nous nous sommes appuyés pour établir les résultats obtenus au Chapitre II, sur le théorème suivant : Si les deux nombres réels a et b ne sont liés par aucune équation de la forme

$$pa + qb + r = 0,$$

p, q, r étant des entiers non tous trois nuls, les équations

$$x - az = \alpha,$$
$$y - bz = \beta$$

peuvent être, quels que soient les nombres réels α et β, résolues en nombres entiers x, y, z avec telle approximation que l'on voudra. C'est là un résultat connu, qui découle d'un théorème plus général dû à Kronecker et concernant la résolution approchée en nombres entiers d'un système d'équations linéaires à un nombre quelconque d'inconnues. Si l'on a égard seulement au cas particulier que nous venons d'énoncer, et si l'on se propose seulement de montrer la possibilité d'une telle résolution sans chercher à l'obtenir effectivement, on peut y parvenir par une méthode tout à fait intuitive; comme ce mode de démonstration est très voisin de ceux que j'ai utilisés fréquemment dans l'étude des substitutions rationnelles et se rattache aux questions traitées dans ce Mémoire, nous allons l'exposer brièvement.

Il s'agit simplement de montrer que l'ensemble dérivé E′ de l'ensemble E des points

$$\zeta = \alpha + i\beta = x - az + i(y - bz)$$

comprend tout le plan x, y, z prenant toutes les valeurs entières.

Remplaçons d'abord l'hypothèse faite sur a et b par cette autre moins restrictive : l'un au moins de ces nombres est incommensurable; nous admettrons que, s'il en est ainsi, E′ contient l'origine; cela revient à admettre le théorème de Jacobi sur l'impossibilité d'existence d'une fonction uniforme à plus de deux périodes, ou, si l'on veut, le fait que tout système de périodes qui comprend trois périodes indépendantes, ou deux périodes dont le rapport est réel et incommensurable, contient des périodes infiniment petites, ce qui est démontré dans tous les cours d'analyse.

Ceci posé, si E contient ζ_1, ζ_2, ζ_3, ..., il contient aussi

$$m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + m_3\zeta_3 + \ldots,$$

pour m_1, m_2, m_3, ..., entiers quelconques; en particulier si E contient les deux points P et Q, il est invariant par la translation $\overline{PQ}$ et ses multiples. On voit immédiatement que cette propriété de E appartient aussi à E'; mais E contient des points infiniment voisins de l'origine, il est donc invariant par des translations infinitésimales; on en déduit que E est contenu dans E', lequel est également invariant par des translations infinitésimales; l'ensemble ouvert $\mathcal{E}(E')$, complémentaire de E', possède naturellement la même propriété.

Supposons que E ne couvre pas tout le plan; soit alors M un point de $\mathcal{E}(E')$; ce dernier ensemble renferme donc un cercle de centre M et de rayon non nul; il est d'autre part invariant par une translation non nulle, mais de segment plus petit que le diamètre de ce cercle; il contient donc une file de cercles égaux se coupant deux à deux et s'étendant à l'infini dans les deux sens, et par conséquent aussi une bande de largeur finie comprise entre deux droites parallèles et dont la ligne médiane passe par M. Je dis que deux pareilles bandes B et B_1 appartenant à $\mathcal{E}(E')$ sont parallèles; supposons qu'elles se traversent; en choisissant une translation de segment plus petit que la largeur de B et de B_1, et non parallèle à l'une d'elles, par exemple B, qui laisse invariante $\mathcal{E}(E')$, et répétant cette translation indéfiniment dans les deux sens, on balayerait tout le plan, ce qui est impossible puisque E' renferme au moins un point à distance finie : l'origine.

Nos bandes sont donc parallèles à une direction fixe Δ; si P est un point de E', E' contient la parallèle à Δ menée par P. E' est donc formé d'un faisceau de parallèles à Δ. Supposons que E' renferme plus d'une droite; si E' contient Δ_1 et Δ_2, il renferme le faisceau de droites parallèles équidistantes qui contient les deux droites consécutives Δ_1 et Δ_2, puisqu'il est invariant par la translation qui fait passer d'un point de Δ_1 à un point de Δ_2. En coupant E' par une droite D perpendiculaire à Δ on obtient donc comme section un ensemble fermé e' qui est illimité dans les deux sens: il existe alors un segment contigu à e', soit PQ, de longueur l. Deux droites quelconques Δ_3 et Δ_4 de E' ne peuvent pas être distantes l'une de l'autre d'une quantité inférieure à l; en effet si la perpendiculaire commune à Δ_3 et Δ_4 était de longueur $l' < l$, comme elle représente un segment de translation qui laisse E' invariant, on obtiendrait sur D un point P' compris entre P et Q, à la distance l' de P, et PQ ne serait pas un segment contigu à e'.

On en déduit que tous les points de e' sont isolés, et que e' est l'ensemble des points représentés par les nombres entiers quand on prend pour unité de longueur la distance de deux points consécutifs, l'origine étant toujours, si l'on veut, l'origine des coordonnées du plan. Comme tous les points de E sont de E′, on voit qu'il est possible de faire un changement de coordonnées sans changement d'origine, tel que les abscisses de tous les points de E deviennent des nombres entiers; il existe donc deux nombres k et k', non tous deux nuls, tels que

$$k(x - az) + k'(y - bz)$$

soit toujours un entier pour x, y, z entiers. En faisant successivement

$$x = 1, \quad y = z = 0; \quad x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1,$$

on voit que k et k' sont des nombres, puis que a et b sont liés par une relation linéaire à coefficients entiers.

Si donc une telle relation n'existe pas, c'est que E′ couvre tout le plan. C.Q.F.D.

Inversement, si une telle relation a lieu on en déduit immédiatement que E est formé de points qui sont denses sur une série, infinie dans les deux sens, de droites parallèles équidistantes. Le cas de E′ réduit à une seule droite ne peut pas se présenter ici.