// JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-E. TRAYNARD

Transformations et fonctions abéliennes (premier mémoire): Sur les transformations des fonctions abéliennes et sur les fonctions intermédiaires singulières

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 189-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__189_0>

Transformations et fonctions abéliennes (premier Mémoire) : *Sur les transformations des fonctions abéliennes et sur les fonctions intermédiaires singulières;*

Par C.-E. TRAYNARD.

Le problème de la transformation des fonctions abéliennes a été posé par Hermite (¹) et résolu par ce géomètre dans le cas des fonctions abéliennes générales. G. Humbert (²) a étudié les transformations des fonctions abéliennes singulières, c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles les périodes sont liées par une relation singulière. Les deux problèmes sont d'ailleurs compris dans le même énoncé que je reproduis sous la forme donnée par G. Humbert :

« Soit un premier système de fonctions abéliennes à deux variables U et V admettant comme périodes normales $(1, 0)$, $(0, 1)$, (G, H), (H, G'); soit de même un second système analogue de variables u, v et de périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'); trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions abéliennes du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes du second et cela en établissant entre les variables des relations de la forme

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

λ, μ, λ', μ' désignant des constantes.

(¹) *Comptes rendus*, t. 40, 1855; *Œuvres*, t. 1, p. 444.
(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. 6, 1900.

« Sous forme géométrique, le problème s'énonce ainsi :

« Soit S une surface hyperelliptique générale pour laquelle les coordonnées d'un point s'expriment en fonction abélienne des variables U, V du premier système, soit de même s une surface analogue répondant aux variables u, v du second système; dans quel cas la correspondance (1) établie entre les points des deux surfaces, fait-elle à un point u, v de s répondre un et un seul point U, V de S?

« Nous dirons que la transformation (1) fait passer des périodes G, H, G′ aux périodes g, h, g' ou des variables U, V aux variables u, v; ou de la surface S à la surface s. »

G. Cotty dans sa Thèse (1) a généralisé les résultats précédents dans le cas où la première période est divisée par un entier.

Je me propose dans la première partie de ce travail de reprendre plus en détail certains des résultats de G. Cotty et de les compléter sur des points qu'il avait laissés de côté, s'étant plutôt tourné du côté des applications à la théorie des nombres. J'ai eu surtout en vue de préciser les définitions et les principes de la théorie et j'ai réservé les applications pour plus tard.

Dans la seconde partie, je m'occupe des fonctions intermédiaires; ces fonctions ont été étudiées par G. Humbert dans le cas où les périodes sont (1, 0), (0, 1), (g, h), (h, g'); j'étudie en détail le cas où la première période est divisée par un entier et j'obtiens ainsi des résultats qui rejoignent ceux que j'ai exposés auparavant dans ma Thèse (2) sur les fonctions thêta relatives aux mêmes périodes. Là aussi j'ai laissé de côté toutes les applications.

CHAPITRE I.

TRANSFORMATIONS ORDINAIRES DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

Je reprendrai très rapidement les principes d'après G. Cotty (3).

---

(1) *Thèse de la Faculté des Sciences de Paris*, n° 1492, 1912.
(2) *Thèse de la Faculté des Sciences de Paris*, n° 1257, 1907.
(3) *Thèse*, p. 24.

Les variables U, V admettent le tableau de périodes

$$T_N \begin{vmatrix} \frac{1}{N} & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{vmatrix}.$$

Les variables u, v admettent le tableau de périodes

$$T_n \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix}.$$

Je poserai $U = U_1 + iU_2$, $V = V_1 + iV_2$, ..., et en général pour toutes les quantités telles que les variables et les périodes, je désignerai la partie réelle et la partie imaginaire par la même lettre avec les indices 1 et 2.

J'établis entre les variables la correspondance

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v$$

de façon que, à tout couple de valeurs u, v, corresponde un seul couple de valeurs U, V.

Il en résulte que si l'on augmente u, v d'une période du tableau T_n, U, V doivent augmenter d'une période du tableau T_N. Par conséquent, on a, conformément aux notations d'Hermite, les a_i, b_i, c_i, d_i étant des entiers qui seront désignés sous le nom d'*entiers caractéristiques de la transformation*,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\lambda}{n} &&= \frac{a_0}{N} + a_3 G + a_2 H, && \frac{\lambda'}{n} &&= a_1 + a_3 H + a_2 G'; \\ &\mu &&= \frac{b_0}{N} + b_3 G + b_2 H, && \mu' &&= b_1 + b_3 H + b_2 G'; \\ &\lambda g + \mu h &&= \frac{d_0}{N} + d_3 G + d_2 H, && \lambda' g + \mu' h &&= d_1 + d_3 H + d_2 G'; \\ &\lambda h + \mu g' &&= \frac{c_0}{N} + c_3 G + c_2 H, && \lambda' h + \mu' g' &&= c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{aligned} \right.$$

En tirant λ, λ', μ, μ' des quatre premières équations et portant dans les suivantes, on obtient g, h, g' en fonction de G, H, G' ou inversement sous la forme suivante [en posant $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$] :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{NG} &= \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02}\,ng + [(bc)_{02} - n(ad)_{02}]\,h + (db)_{02}\,g' + (ab)_{02}\,n(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}\,ng + [(bc)_{23} - n(ad)_{23}]\,h + (db)_{23}\,g' + (ab)_{23}\,n(h^2 - gg')},\\
\mathrm{G}' &= \frac{(cd)_{31} + (ac)_{31}\,ng + [(bc)_{31} - n(ad)_{31}]\,h + (db)_{31}\,g' + (ab)_{31}\,n(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}\,ng + [(bc)_{23} - n(ad)_{23}]\,h + (db)_{23}\,g' + (ab)_{23}\,n(h^2 - gg')},\\
-\mathrm{NH} &= \frac{(cd)_{03} + (ac)_{03}\,ng + [(bc)_{03} - n(ad)_{03}]\,h + (db)_{03}\,g' + (ab)_{03}\,n(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}\,ng + [(bc)_{23} - n(ad)_{23}]\,h + (db)_{23}\,g' + (ab)_{23}\,n(h^2 - gg')},\\
\mathrm{H} &= \frac{(cd)_{12} + (ac)_{12}\,ng + [(bc)_{12} - n(ad)_{12}]\,h + (db)_{12}\,g' + (ab)_{12}\,n(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}\,ng + [(bc)_{23} - n(ad)_{23}]\,h + (db)_{23}\,g' + (ab)_{23}\,n(h^2 - gg')},\\
\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}') &= \frac{(cd)_{01} + (ac)_{01}\,ng + [(bc)_{01} - n(ad)_{01}]\,h + (db)_{01}\,g' + (ab)_{01}\,n(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}\,ng + [(bc)_{23} - n(ad)_{23}]\,h + (db)_{23}\,g' + (ab)_{23}\,n(h^2 - gg')}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
ng &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\,\mathrm{NG} + [(db)_{03} - \mathrm{N}(db)_{12}]\,\mathrm{H} + (db)_{02}\,\mathrm{G}' + (db)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ab)_{03} - \mathrm{N}(ab)_{12}]\,\mathrm{H} + (ab)_{02}\,\mathrm{G}' + (ab)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')},\\
g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ac)_{03} - \mathrm{N}(ac)_{12}]\,\mathrm{H} + (ac)_{02}\,\mathrm{G}' + (ac)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ab)_{03} - \mathrm{N}(ab)_{12}]\,\mathrm{H} + (ab)_{02}\,\mathrm{G}' + (ab)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')},\\
-nh &= \frac{(bc)_{01} + (bc)_{31}\,\mathrm{NG} + [(bc)_{03} - \mathrm{N}(bc)_{12}]\,\mathrm{H} + (bc)_{02}\,\mathrm{G}' + (bc)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ab)_{03} - \mathrm{N}(ab)_{12}]\,\mathrm{H} + (ab)_{02}\,\mathrm{G}' + (ab)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')},\\
h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ad)_{03} - \mathrm{N}(ad)_{12}]\,\mathrm{H} + (ad)_{02}\,\mathrm{G}' + (ad)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ab)_{03} - \mathrm{N}(ab)_{12}]\,\mathrm{H} + (ab)_{02}\,\mathrm{G}' + (ab)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')},\\
n(h^2 - gg') &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31}\,\mathrm{NG} + [(cd)_{03} - \mathrm{N}(cd)_{12}]\,\mathrm{H} + (cd)_{02}\,\mathrm{G}' + (cd)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,\mathrm{NG} + [(ab)_{03} - \mathrm{N}(ab)_{12}]\,\mathrm{H} + (ab)_{02}\,\mathrm{G}' + (ab)_{23}\,\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')}.
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les deux valeurs de h fournies par le système (4), on obtient une relation linéaire et à coefficients entiers en NG, H, G′, $\mathrm{N}(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')$ qui est donc une relation singulière entre les périodes G, H, G′.

Je supposerai d'abord que cette relation est identiquement nulle, me plaçant ainsi dans le cas des transformations ordinaires caractérisées par les relations suivantes entre les seize entiers caractéristiques :

$$
(\mathrm{I})\quad \left\{
\begin{aligned}
& n(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \qquad n(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,\\
& n(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0, \qquad n(ad)_{31} + (bc)_{31} = 0,\\
& n(ad)_{03} + (bc)_{03} = \mathrm{N}[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] = \mathfrak{N}.
\end{aligned}
\right.
$$

J'appellerai [1] transformation abélienne ordinaire de type (N, n) .

[1] J'ai dû préciser cette définition en raison des applications où interviennent des diviseurs N et n différents et changer celle qu'avait donnée G. Cotty à la

toute transformation (T) dont les entiers caractéristiques satisfont aux relations (I) et je dirai que cette transformation fait passer du tableau T_N au tableau T_n de périodes ou de la surface hyperelliptique S à la surface s.

Le degré de la transformation est la valeur du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Avant d'aller plus loin, je ferai deux remarques sur les nombres caractéristiques.

Tout d'abord, $\mathfrak{M}$ étant divisible par N et n, on peut, en appelant θ le plus grand commun diviseur de N et n, N' et n' leurs quotients par θ et $\varkappa$ un entier (dont le signe est celui de $\mathfrak{M}$), poser

$$\mathfrak{M} = \varkappa\theta N' n'.$$

On appelle $\varkappa$ l'ordre de la transformation.

Ceci posé, le changement de signe simultané de a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, g, h, g' ne change pas le système d'équations (2) et change le signe de $\mathfrak{M}$. D'autre part, je montrerai, en appliquant la transformation définie par ces équations à une fonction $\Theta(U, V)$, que, d'après les conditions de convergence de ces fonctions, G_2 et g_2 sont de même signe si $\mathfrak{M}$ est positif, et de signes contraires si $\mathfrak{M}$ est négatif. Pour rester dans les hypothèses habituelles, on supposera $\mathfrak{M} > 0$, c'est-à-dire $\varkappa > 0$, en changeant au besoin le signe des a_i et des b_i [1].

Je voudrais maintenant examiner l'influence de la division de tous les entiers caractéristiques par un même nombre p entier. Sans préciser, pour le moment, si ce nombre est ou non un diviseur commun des seize entiers, il est bien évident par la seule inspection des sys-

page 24 de sa Thèse. En fait, les façons de parler de Humbert et de Cotty sont opposées et j'ai suivi les notations de Humbert. D'ailleurs, dans les équations (1) comme dans tout changement de variable, les variables explicitées U, V sont les variables initiales.

(1) Hermite avait supposé implicitement que k, qui joue dans sa théorie le rôle de $\mathfrak{M}$, est > 0 et l'hypothèse $\mathfrak{M} > 0$ est également faite implicitement dans plusieurs démonstrations de la Thèse de Cotty.

tèmes (1) et (2) que la division par p revient à remplacer λ, λ', μ, μ', par $\frac{\lambda}{p}$, $\frac{\lambda'}{p}$, $\frac{\mu}{p}$, $\frac{\mu'}{p}$ et u, v par $u' = pu$, $v' = pv$; autrement dit, la transformation T′ qui conduit des variables U, V aux variables u', v' est composée de la transformation T et de la transformation

$$u = \frac{u'}{p}, \qquad v = \frac{v'}{p}$$

qu'on pourra convenir d'appeler la division (1).

Au point de vue des périodes, la division par p ne change rien à la valeur des périodes initiales ou finales; d'ailleurs les relations des systèmes (3) et (4) n'en sont pas affectées, étant homogènes et de degré zéro par rapport aux entiers caractéristiques.

Je reviens maintenant aux équations (I) ; elles peuvent recevoir l'interprétation suivante : soient P_1, P_2, P_3, P_4, p_1, p_2, p_3, p_4 respectivement les périodes des variables U, V et u, v; les équations (2) expriment que si u, v augmentent d'une période p_1, p_2, p_3, p_4, U, V augmentent d'une combinaison correspondante de P_1, P_2, P_3, P_4 et la correspondance est établie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
p_1 &= a_0 P_1 + a_1 P_2 + a_2 P_4 + a_3 P_3,\\
p_2 &= b_0 P_1 + b_1 P_2 + b_2 P_4 + b_3 P_3,\\
p_3 &= d_0 P_1 + d_1 P_2 + d_2 P_4 + d_3 P_3,\\
p_4 &= c_0 P_1 + c_1 P_2 + c_2 P_4 + c_3 P_3.
\end{aligned}$$

A la période $p = x_0 p_1 + x_1 p_2 + x_2 p_4 + x_3 p_3$ correspond la période $P = X_0 P_1 + X_1 P_2 + X_2 P_4 + X_3 P_3$, les X étant donnés par le système

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned}
X_0 &= a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3,\\
X_1 &= a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3,\\
X_2 &= a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3,\\
X_3 &= a_3 x_0 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + d_3 x_3,
\end{aligned}\right.$$

où les x_i et les X_i ont des valeurs entières.

---

(1) C'est la conclusion même des auteurs qui, comme Krazer (*Lehrbuch der Thetafunctionen*), considèrent des systèmes de seize nombres caractéristiques rationnels. Le seul avantage de tels systèmes est que toute transformation admet une transformation inverse et que, par suite, les transformations forment un groupe.

Cette substitution (S) appliquée à des valeurs quelconques des X_i et des x_i et non plus seulement à des valeurs entières, définit une correspondance entre les points X_0, X_1, X_2, X_3 de l'espace E et les points x_0, x_1, x_2, x_3 de l'espace e. Entre les droites de ces espaces, définies par leurs coordonnées pluckériennes, existent les relations suivantes [1]:

$$
(6)\quad \begin{cases}
p_{01} = (ab)_{01}P_{01} + (ab)_{23}P_{23} + (ab)_{02}P_{02} + (ab)_{31}P_{31} + (ab)_{03}P_{03} + (ab)_{12}P_{12}, \\
p_{23} = (cd)_{01}P_{01} + (cd)_{23}P_{23} + (cd)_{02}P_{02} + (cd)_{31}P_{31} + (cd)_{03}P_{03} + (cd)_{12}P_{12}, \\
p_{02} = (ac)_{01}P_{01} + (ac)_{23}P_{23} + (ac)_{02}P_{02} + (ac)_{31}P_{31} + (ac)_{03}P_{03} + (ac)_{12}P_{12}, \\
p_{31} = (db)_{01}P_{01} + (db)_{23}P_{23} + (db)_{02}P_{02} + (db)_{31}P_{31} + (db)_{03}P_{03} + (db)_{12}P_{12}, \\
p_{03} = (ad)_{01}P_{01} + (ad)_{22}P_{23} + (ad)_{02}P_{02} + (ad)_{31}P_{31} + (ad)_{03}P_{03} + (ad)_{12}P_{12}, \\
p_{12} = (bc)_{01}P_{01} + (bc)_{23}P_{23} + (bc)_{02}P_{02} + (bc)_{31}P_{31} + (bc)_{03}P_{03} + (bc)_{12}P_{12};
\end{cases}
$$

$$
(7)\quad \begin{cases}
P_{01} = (cd)_{23}p_{01} + (ab)_{23}p_{23} + (db)_{23}p_{02} + (ac)_{23}p_{31} + (bc)_{23}p_{03} + (ad)_{23}p_{12}, \\
P_{23} = (cd)_{01}p_{01} + (ab)_{01}p_{23} + (db)_{01}p_{02} + (ac)_{01}p_{31} + (bc)_{01}p_{03} + (ad)_{01}p_{12}, \\
P_{02} = (cd)_{31}p_{01} + (ab)_{31}p_{23} + (db)_{31}p_{02} + (ac)_{31}p_{31} + (bc)_{31}p_{03} + (ad)_{31}p_{12}, \\
P_{31} = (cd)_{02}p_{01} + (ab)_{02}p_{23} + (db)_{02}p_{02} + (ac)_{02}p_{31} + (bc)_{02}p_{03} + (ad)_{02}p_{12}, \\
P_{03} = (cd)_{12}p_{01} + (ab)_{12}p_{23} + (db)_{12}p_{02} + (ac)_{12}p_{31} + (bc)_{12}p_{03} + (ad)_{12}p_{12}, \\
P_{12} = (cd)_{03}p_{01} + (ab)_{03}p_{23} + (db)_{03}p_{02} + (ac)_{03}p_{31} + (bc)_{03}p_{03} + (ad)_{03}p_{12}.
\end{cases}
$$

Les équations (6) donnent en tenant compte des relations (I)

$$
(8)\qquad n p_{03} + p_{12} = \frac{\mathcal{N}}{N}(NP_{03} + P_{12});
$$

autrement dit, les relations (I) expriment que la substitution (S) transforme le complexe

$$
\Gamma_N : NP_{03} + P_{12} = 0
$$

dans le complexe

$$
\gamma_n : n p_{03} + p_{12} = 0.
$$

Les équations (7) donnent aussi

$$
(9')\qquad NP_{03} + P_{12} = [(cd)_{03} + N(cd)_{12}]p_{01} + [(ab)_{03} + N(ab)_{12}]p_{23} \ldots,
$$

---

[1] Ce sont les systèmes R_1 et R_2 donnés par G. Cotty (*Thèse*, p. 15 et 16) avec quelques modifications correspondant à celles de la définition de (T).

d'où par comparaison le système de relations fondamentales

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{ll} (cd)_{03}+\mathrm{N}(cd)_{12}=0, & (ab)_{03}+\mathrm{N}(ab)_{12}=0,\\ (db)_{03}+\mathrm{N}(db)_{12}=0, & (ac)_{03}+\mathrm{N}(ac)_{12}=0,\\ (bc)_{03}+\mathrm{N}(bc)_{12} = n[(ad)_{03}+\mathrm{N}(ad)_{12}]=\mathfrak{N}, & \end{array}\right.$$

entièrement équivalent au système (I).

La comparaison des valeurs de $\mathfrak{N}$ donne

$$(bc)_{03}=\mathrm{N}n(ad)_{12}, \qquad n(ad)_{03}=\mathrm{N}(bc)_{12}.$$

L'équation (9') s'écrit alors

$$(9)\qquad \mathrm{NP}_{03}+\mathrm{P}_{12}=\frac{\mathfrak{N}}{n}(np_{03}+p_{12}).$$

Par conséquent les p_{ik} et les P_{ik} qui figurent dans les systèmes (6) et (7) ne sont pas les mêmes et diffèrent par un facteur de proportionnalité. D'une façon plus précise, le système (7) donne l'équation (9); en résolvant le système (7) par rapport aux p_{ik}, on obtiendrait le système (6) où les p_{ik} seraient multipliés par le facteur λ et qui donnerait l'équation

$$np_{03}+p_{12}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{N}}(\mathrm{NP}_{03}+\mathrm{P}_{12}),$$

d'où par comparaison

$$\lambda=\frac{\mathfrak{N}^2}{\mathrm{N}n}.$$

La quantité λ n'est autre que δ, comme on va le voir bientôt.

La substitution (S) de type (N, n) conduit des variables X_i aux variables x_i par les équations (5), et des coordonnées P_{ik} aux coordonnées p_{ik} par les équations (7). Son degré est la valeur du déterminant δ.

Le déterminant

$$\delta=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3\\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

jouit de propriétés remarquables.

Son déterminant adjoint est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathcal{M}}{N} d_3 & \mathcal{M} d_2 & -\mathcal{M} d_1 & -\dfrac{\mathcal{M}}{N} d_0 \\ \dfrac{\mathcal{M}}{Nn} c_3 & \dfrac{\mathcal{M}}{n} c_2 & -\dfrac{\mathcal{M}}{n} c_1 & -\dfrac{\mathcal{M}}{Nn} c_0 \\ -\dfrac{\mathcal{M}}{Nn} b_3 & -\dfrac{\mathcal{M}}{n} b_2 & \dfrac{\mathcal{M}}{n} b_1 & \dfrac{\mathcal{M}}{Nn} b_0 \\ -\dfrac{\mathcal{M}}{N} a_3 & -\mathcal{M} a_3 & \mathcal{M} a_1 & \dfrac{\mathcal{M}}{N} a_0 \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{M}^4 \delta}{N^2 n^2}.$$

D'où

$$\delta^3 = \frac{\mathcal{M}^4 \delta}{N^2 n^2}, \qquad \delta^2 = \frac{\mathcal{M}^4}{N^2 n^2}, \qquad \delta = \frac{\mathcal{M}^2}{N n}.$$

Le choix du signe de la racine carrée est fait en prenant par exemple $n = N = a_0 = b_1 = c_2 = d_3 = 1$ et les autres nombres caractéristiques nuls.

Il résulte de la forme des termes du déterminant adjoint des caractères de divisibilité qui ont été exposés en détail par G. Cotty.

L'expression des termes du déterminant adjoint permet de démontrer directement l'équivalence des systèmes (I) et (II). En effet le système (I) seul permet d'obtenir les termes de l'adjoint et l'on en déduit

$$a_0 \frac{\mathcal{M}}{N} d_3 + a_1 \mathcal{M} d_2 - a_2 \mathcal{M} d_1 - a_3 \frac{\mathcal{M}}{N} d_0 = \delta,$$

$$(ad)_{03} + N(ad)_{12} = \frac{\mathcal{M}}{n}$$

et de même pour les autres relations du système (II).

La comparaison des formules (3) et (4) d'une part, (6) et (7) d'autre part, conduit à considérer les droites dont les coordonnées sont définies ainsi qu'il suit :

$$(D_N) \qquad \frac{P_{01}}{1} = \frac{P_{23}}{N(H^2 - GG')} = \frac{P_{02}}{G'} = \frac{P_{31}}{NG} = \frac{P_{03}}{H} = \frac{P_{12}}{-NH},$$

$$(d_n) \qquad \frac{p_{01}}{1} = \frac{p_{23}}{n(h^2 - gg')} = \frac{p_{02}}{g'} = \frac{p_{31}}{ng} = \frac{p_{03}}{h} = \frac{p_{12}}{-nh}.$$

Moyennant ces définitions, les équations (4) et (6) sont les mêmes ainsi que les équations (3) et (7).

La droite D_N appartient au complexe

$$\Gamma_N : N P_{03} + P_{12} = 0.$$

La droite d_n appartient au complexe

$$\gamma_n : n\,p_{03} + p_{12} = 0.$$

Et ainsi il revient au même de dire que la transformation (T) fait passer des périodes du tableau T_N aux périodes du tableau T_n ou de dire que la substitution (S) change la droite D_N en la droite d_n.

G. Cotty a étudié en détail les propriétés des substitutions (S) et de leurs adjointes (*Thèse*, Chap. II); je rappellerai ici seulement que la transformation et la substitution adjointes sont formées avec les entiers caractéristiques :

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{N}}{N} d_3 & \frac{\mathfrak{N}}{Nn} c_3 & -\frac{\mathfrak{N}}{Nn} b_3 & -\frac{\mathfrak{N}}{N} a_3 \\ \mathfrak{N} d_2 & \frac{\mathfrak{N}}{n} c_2 & -\frac{\mathfrak{N}}{n} b_2 & -\mathfrak{N} a_2 \\ -\mathfrak{N} d_1 & -\frac{\mathfrak{N}}{n} c_1 & \frac{\mathfrak{N}}{n} b_1 & \mathfrak{N} a_1 \\ -\frac{\mathfrak{N}}{N} d_0 & -\frac{\mathfrak{N}}{Nn} c_0 & \frac{\mathfrak{N}}{Nn} b_0 & \frac{\mathfrak{N}}{N} a_0 \end{vmatrix}.$$

Elles font passer des périodes du tableau T_n aux périodes du tableau T_N ou de la droite d_n à la droite D_N. Pour leur action sur les variables, il y a lieu de tenir compte du facteur que peuvent avoir en commun les mineurs pris pour entiers caractéristiques.

Pour préciser la relation déjà établie entre la transformation (T) et la substitution (S), je pose [1]

$$(10)\quad \begin{cases} U = U_1 + iU_2 = \dfrac{X_0}{N} + X_3 G + X_2 H, \\ V = V_1 + iV_2 = X_1 + X_3 H + X_2 G'; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} u = u_1 + iu_2 = \dfrac{x_0}{n} + x_3 g + x_2 h, \\ v = v_1 + iv_2 = x_1 + x_3 h + x_2 g'; \end{cases}$$

---

[1] *Cf.* Paul Lévy, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8e série, t. 4, 1921.

les x_i et les X_i étant des quantités réelles quelconques liées par les équations (5). Les relations (10) et (11) établissent la représentation des variables U, V et u, v respectivement dans les espaces E et e et, d'autre part, elles sont équivalentes à l'ensemble des équations (1) et (2). Par conséquent la transformation (T) et la substitution (S) ne sont pas distinctes au fond.

Comme application de cette interprétation, je démontrerai deux propositions importantes.

Je considère les déterminants fonctionnels suivants :

$$\frac{D(U_1, V_1, U_2, V_2)}{D(X_0, X_1, X_2, X_3)} = \frac{1}{N}(H_2^2 - G_2 G_2'),$$

$$\frac{D(u_1, v_1, u_2, v_2)}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{n}(h_2^2 - g_2 g_2'),$$

$$\frac{D(X_0, X_1, X_2, X_3)}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} = \delta,$$

$$\begin{aligned}\frac{D(U_1, V_1, U_2, V_2)}{D(u_1, v_1, u_2, v_2)} &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & -\lambda_2 & -\mu_2 \\ \lambda_1' & \mu_1' & -\lambda_2' & -\mu_2' \\ \lambda_2 & \mu_2 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2' & \mu_2' & \lambda_1' & \mu_1' \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1\mu_1' - \lambda_1'\mu_1 - \lambda_2\mu_2' + \lambda_2'\mu_2)^2 \\ &\quad + (\lambda_1\mu_2' - \lambda_2'\mu_1 - \lambda_1'\mu_2 + \lambda_2\mu_1')^2 = \mathfrak{M}^2.\end{aligned}$$

D'où la relation

$$h_2^2 - g_2 g_2' = \mathfrak{M}^2 \delta \frac{n}{N}(H_2^2 - G_2 G_2') = \mathfrak{M}^2 \varkappa^2 n'^2 (H_2^2 - G_2 G_2'). \tag{12}$$

Par conséquent $h_2^2 - g_2 g_2'$ a le même signe que $H_2^2 - G_2 G_2'$. La permanence de ce signe résultera également de la transformation des fonctions thêta [1].

Je considère les points x_i non congruents correspondant à un point X_i; ils sont en nombre égal au volume du parallélépipède correspondant au parallélépipède unitaire des X_i; par conséquent ils sont au nombre de δ. Il en résulte que le nombre des points u, v correspondant à un point U, V est égal à δ [2].

---

[1] *Cf.* HERMITE, *Œuvres*, t. 1, p. 457.

[2] *Cf.* G. HUMBERT, premier Mémoire, n° 143. — G. COTTY, *Thèse*, p. 33.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATIONS ORDINAIRES DES RELATIONS SINGULIÈRES.

On dit que les périodes G, H, G′ vérifient une relation singulière de diviseur N (1) si elles sont liées par la relation

$$\text{(13)} \qquad ANG + BH + CG' + DN(H^2 - GG') + E = 0,$$

A, B, C, D, E étant des entiers que l'on peut toujours supposer premiers entre eux dans leur ensemble.

Une transformation de type (N, n) change la relation (13) en une autre de même espèce et de diviseur n, comme on le voit en remplaçant NG, H, G′, N($H^2 - GG'$) par leurs valeurs fournies par les formules (3).

Le résultat de cette substitution est

$$\text{(14)} \qquad \alpha_1 ng + \beta_1 h + \gamma_1 g' + \delta_1 n(h^2 - gg') + \varepsilon_1 = 0$$

en posant

$$\alpha_1 = A(ac)_{02} + B(ac)_{12} + C(ac)_{31} + D(ac)_{01} + E(ac)_{23},$$

$$\gamma_1 = A(db)_{02} + B(db)_{12} + C(db)_{31} + D(db)_{01} + E(db)_{23},$$

$$\delta_1 = A(ab)_{02} + B(ab)_{12} + C(ab)_{31} + D(ab)_{01} + E(ab)_{23},$$

$$\varepsilon_1 = A(cd)_{02} + B(cd)_{12} + C(cd)_{31} + D(cd)_{01} + E(cd)_{23},$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 = {} & A[(bc)_{02} - n(ad)_{02}] + B[(bc)_{12} - n(ad)_{12}] \\
& + C[(bc)_{31} - n(ad)_{31}] + D[(bc)_{01} - n(ad)_{01}] + E[(bc)_{23} + n(ad)_{23}] \\
= {} & 2A(bc)_{02} + B\left[2(bc)_{12} - \frac{\mathfrak{N}}{N}\right] + 2C(bc)_{31} + 2D(bc)_{01} + 2E(bc)_{23} \\
= {} & -2nA(ad)_{02} - B\left[2n(ad)_{12} - \frac{\mathfrak{N}}{N}\right] - 2nC(ad)_{31} - 2nD(ad)_{01} - 2nE(ad)_{33}.
\end{aligned}$$

Les coefficients α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1 admettent un plus grand commun diviseur ω et leurs quotients par ce plus grand commun diviseur

---

(1) Je dirai diviseur et non pas genre, comme G. Cotty, le genre ayant déjà beaucoup de significations en mathématiques. Le terme de diviseur a été introduit par MM. Enriques et Severi.

sont a, b, c, d, e, donnant la relation transformée

$$(14') \qquad a n g + b h + c g' + d n (h^2 - g g') + e = 0.$$

Posant

$$\nabla = B^2 - 4NAC - 4NDE,$$
$$\Delta = b^2 - 4nac - 4nde,$$

qu'on appelle les invariants des relations singulières (13) et (14), on a

$$(15) \qquad \omega^2 \Delta = \frac{\mathfrak{N}^2}{N^2} \nabla = \varkappa^2 n'^2 \nabla$$

ou, en introduisant le degré de la transformation $\delta = \varkappa^2 N' n'$,

$$\omega^2 \Delta = \delta \frac{n}{N} \nabla.$$

Sous la première forme on voit que le rapport $\frac{\Delta}{\nabla}$ est carré parfait.

Par les formules (4) je transforme de même la relation (14) en

$$(16) \qquad \varkappa_2 N G + \beta_2 H + \gamma_2 G' + \delta_2 N (H^2 - GG') + \varepsilon_2 = 0.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{\varkappa_2}{A} = \frac{\beta_2}{B} = \frac{\gamma_2}{C} = \frac{\delta_2}{D} = \frac{\varepsilon_2}{E} = \delta.$$

Par la même opération, la relation (14′) aurait été transformée en

$$\omega' [ANG + BH + CG' + DN(H^2 - GG') + E] = 0$$

et il résulte de la comparaison des deux transformées la relation fondamentale

$$\omega\omega' = \delta = \varkappa^2 N' n'.$$

La valeur minimum de $\omega\omega'$ est $N'n'$ obtenue pour $\varkappa = \pm 1$ (¹). Si $N = n$, on a $N' = n' = 1$, d'où $\omega = \omega' = 1$ et $\Delta = \nabla$; on dit alors que les deux relations singulières sont équivalentes.

Les coefficients B et b de deux relations équivalentes de diviseur N

(¹) On doit ici admettre des valeurs positives et négatives de $\varkappa$, le changement de signe de g, h, g' entraînant des changements de signe dans les coefficients de la relation singulière.

sont liés par l'équation

$$b = 2N\sigma + \varepsilon B$$

où σ est un entier et $\varepsilon = \pm 1$ l'ordre de la transformation.

En particulier étant donnée la relation singulière (13) dont l'invariant est

$$\nabla = B^2 - 4NAC - 4NDE,$$

si l'on détermine un système de nombres β, γ par les équations

$$\beta^2 + 4N\gamma = \nabla, \qquad \varepsilon\beta \equiv B \pmod{2N}, \qquad 0 \leqq \beta \leqq N,$$

la relation (13) est équivalente à la relation

$$NG + \beta H - \gamma G' = 0 \tag{17}$$

et la transformation qui conduit de (13) à (17) est d'ordre ε ([1]).

Le nombre β est appelé le type de la relation singulière.

Toutes les relations singulières de même diviseur, de même invariant et de même type forment une classe de relations équivalentes entre elles et qui comprend une relation réduite de la forme (17).

Il sera commode, dans certaines applications, de considérer d'autres relations réduites, par exemple de la forme

$$N\alpha G + \beta H - G' = 0.$$

G. Cotty (p. 55) a déterminé toutes les transformations ([2]) qui font passer d'une relation singulière à sa relation réduite en utilisant une interprétation géométrique qui découle de celle qui a été introduite pour les périodes.

Je reprends ses définitions que j'ai dû légèrement modifier : j'ai introduit les droites D_N et d_n dont les coordonnées sont :

$$(D_N) \qquad \frac{NG}{P_{31}} = \frac{H}{P_{03}} = \frac{-NH}{P_{12}} = \frac{G'}{P_{02}} = \frac{N(H^2 - GG')}{P_{23}} = \frac{1}{P_{01}},$$

$$(d_n) \qquad \frac{ng}{p_{31}} = \frac{h}{p_{03}} = \frac{-nh}{p_{12}} = \frac{g'}{p_{02}} = \frac{n(h^2 - gg')}{p_{23}} = \frac{1}{p_{01}}.$$

([1]) Pour les développements, *voir* G. Cotty. *Thèse*, Chap. III.

([2]) On doit remarquer que la deuxième équation (31) de G. Cotty a son second nombre égal à $+1$ et non pas à εn ; il en résulte quelques modifications sans grande importance dans la démonstration.

Ces définitions font correspondre à la relation singulière

$$ANG + BH + CG' + DN(H^2 - GG') \pm E = 0$$

le complexe

$$AP_{31} + BP_{03} + CP_{02} + DP_{23} + EP_{01} = 0.$$

Autrement dit, les droites D_N qui représentent les périodes du tableau T_N, liées par la relation singulière (13), appartiennent à deux complexes linéaires à coefficients entiers, savoir

$$\Gamma_N : NP_{03} + P_{12} = 0 \quad \text{et} \quad AP_{31} + BP_{03} + CP_{02} + DP_{23} + EP_{01} = 0.$$

Elles appartiennent par suite aux complexes du faisceau

$$C_{lk} \equiv k(AP_{31} + BP_{03} + CP_{02} + DP_{23} + EP_{01}) + l(P_{12} + NP_{03}) = 0$$

et forment une congruence linéaire. Les directrices de cette congruence qui sont rencontrées par toutes les droites D_N ont pour coordonnées

$$P_{23} = E, \qquad P_{01} = D, \qquad P_{31} = C, \qquad P_{02} = A,$$
$$P_{12} = \frac{B + \varepsilon\sqrt{\nabla}}{2}, \qquad P_{03} = \frac{-B + \varepsilon\sqrt{\nabla}}{2N}.$$

Ce sont deux droites conjuguées par rapport à Γ_N et à coordonnées rationnelles; elles constituent le couple δ_N.

Inversement si la droite D_N, qui représente les périodes d'un tableau T_N, appartient à deux complexes à coefficients entiers, ces périodes sont liées par une relation singulière.

Avec ces interprétations, le problème de la recherche des substitutions (S) qui font passer d'un couple de droites δ_N à un autre couple δ_n comprend celui de la recherche des transformations (T) qui font passer d'une relation singulière de diviseur N à une autre de diviseur n.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES.

J'ai supposé (p. 192) que la relation en G, H, G' résultant de l'élimination de g, h, g', λ, μ, λ', μ' entre les équations (2), disparaît identiquement; les transformations ainsi obtenues sont dites ordinaires par opposition avec les transformations singulières obtenues dans le cas où cette relation en G, H, G' n'est pas identiquement nulle; c'est une relation singulière entre les périodes initiales. D'après l'équivalence des systèmes (I) et (II) de relations entre les entiers d'une transformation ordinaire, la relation en g, h, g' résultant de l'élimination de G, H, G', λ, μ, λ', μ' entre les équations (2) est, en même temps, identiquement nulle. Autrement dit, les périodes initiales et finales, liées par une transformation singulière, satisfont en même temps ou ne satisfont pas à des relations singulières.

Soit

$$ang + bh + cg' + dn(h^2 - gg') + e = 0 \tag{18}$$

la seule relation ([1]) singulière à laquelle satisfont les périodes g, h, g'; par identification avec le résultat de l'élimination, on a les relations

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} (ac)_{03} + N(ac)_{12} = ak, & (db)_{03} + N(db)_{12} = ck, \\ (ab)_{03} + N(ab)_{12} = dk, & (cd)_{03} + N(cd)_{12} = ek, \\ (bc)_{03} + N(bc)_{12} - n[(ad)_{03} + N(ad)_{12}] = bk, & \end{cases}$$

a, b, c, d, e sont des entiers sans diviseur commun; k est un entier dont le signe est tel que le premier des trois nombres a, b, d qui n'est pas nul est positif.

On pose, en outre, $l = (ad)_{03} + N(ad)_{12}$; l et k sont les indices de la transformation (T); δ valeur du déterminant (a_i, b_i, c_i, d_i) en est le degré. Si l'on a obtenu un système d'entiers satisfaisant aux équations (III), on en déduit les valeurs de λ, μ, λ', μ', et par suite, G, H, G' en fonction de g, h, g' et inversement comme dans le cas de la transformation ordinaire et par les mêmes formules.

En remplaçant dans la relation (18) g, h, g', $(h^2 - gg')$ par leurs valeurs fournies par les équations (4), on obtient la relation singulière entre les périodes de T_N ([2])

$$A_1 NG + B_1 H + C_1 G' + D_1 N(H^2 - GG') + E_1 = 0.$$

([1]) Ce n'est que dans des cas particuliers que l'on a étudié les périodes liées par plusieurs relations singulières ou autres.

([2]) On ne peut plus ici parler de la transformée de la relation (18) par les équations (4), car si l'on emploie la troisième de ces équations au lieu de la quatrième qui est utilisée ici, le résultat n'est plus le même et diffère par un facteur de proportionnalité.

Les coefficients de cette relation ont les valeurs suivantes :

$$A_1 = a(db)_{31} + b(ad)_{31} + c(ac)_{31} + d(cd)_{31} + e(ab)_{31},$$
$$C_1 = a(db)_{02} + b(ad)_{02} + c(ac)_{02} + d(cd)_{02} + e(ab)_{02},$$
$$D_1 = a(db)_{23} + b(ad)_{23} + c(ac)_{23} + d(cd)_{23} + e(ab)_{23},$$
$$E_1 = a(db)_{01} + b(ad)_{01} + c(ac)_{01} + d(cd)_{01} + e(ab)_{01},$$
$$B_1 = a[(db)_{03} - N(db)_{12}] + b[(ad)_{03} - N(ad)_{12}] + c[(ac)_{03} - N(ac)_{12}] + d[(cd)_{03} - N(cd)_{12}] + e[(ab)_{03} - N(ab)_{12}],$$

qui se transforment en

$$kA_1 = l[(bc)_{13} + n(ad)_{13}],$$
$$kC_1 = l[(bc)_{20} + n(ad)_{20}],$$
$$kD_1 = l[(bc)_{32} + n(ad)_{32}],$$
$$kE_1 = l[(bc)_{10} + n(ad)_{10}],$$
$$kB_1 = l[(bc)_{30} + n(ad)_{30}] - Nl[(bc)_{21} + n(ad)_{21}].$$

En divisant A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 par leur plus grand commun diviseur ω', on obtient la relation singulière initiale sous la forme canonique

$$\text{(19)} \qquad ANG + BH + CG' + DN(H^2 - GG') + E = 0,$$

ω' étant choisi d'un signe tel que le premier des trois coefficients A, B, D qui n'est pas nul soit positif.

Les résultats précédents conduisent à poser

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} (bc)_{13} + n(ad)_{13} = AK, \qquad (bc)_{20} + n(ad)_{20} = CK, \\ (bc)_{32} + n(ad)_{32} = DK, \qquad (bc)_{10} + n(ad)_{10} = EK, \\ (bc)_{30} + n(ad)_{30} - N[(bc)_{21} + n(ad)_{21}] \quad = BK, \end{cases}$$

et la façon même dont ce système est obtenu montre qu'il est équivalent au système (III). On posera également $L = (bc)_{03} + n(ad)_{03}$.

Comme dans le cas d'une transformation ordinaire, on a la relation

$$\text{(12)} \qquad h_2^2 - g_2 g'_2 = \mathfrak{M}^2 \delta \frac{n}{N} (H_2^2 - G_2 G'_2),$$

d'où la conclusion généralisant celle de G. Humbert que seules les transformations de degré positif font passer d'un système de périodes normales à un autre système de périodes normales.

Le nombre de points u, v correspondant à un point U, V est égal à δ. Enfin, comme dans le cas d'une transformation ordinaire, on peut changer simultanément les signes de a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 ce qui entraîne, les périodes et la relation initiales étant données, le changement des signes de a, b, c, g, h, g', l, K, L et par suite le changement de signe de $bk+2nl$; or, ainsi qu'on le verra plus loin, la transformation (T) appliquée à une fonction thêta de périodes G, H, G' conduit à une fonction intermédiaire pour laquelle g_2 est positif comme G_2 si $bk+2nl$ l'est aussi; inversement il en résulte que G_2 et g_2 sont de même signe si $bk+2nl$ est positif et de signes contraires si $bk+2nl$ est négatif.

En même temps que la transformation (T), je considérerai la transformation associée (T_1) dont le tableau d'entiers est

$$\begin{matrix} nd_3 & c_3 & -b_3 & -na_3 \\ Nnd_2 & Nc_2 & -Nb_2 & -Nna_2 \\ -Nnd_1 & -Nc_1 & Nb_1 & Nna_1 \\ -nd_0 & -c_0 & b_0 & na_0 \end{matrix}$$

Ce tableau peut être simplifié et les conséquences de la division de ses termes par un facteur commun sont celles qui ont été exposées pour les transformations singulières; en le prenant sans simplification, le degré de (T_1) est $N^2n^2\delta$.

Le produit des deux déterminants de (T) et (T_1) (effectué ligne par colonne) est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} nl & -nkc & nke & 0 \\ ka & bk+nl & 0 & -ke \\ -kd & 0 & bk+nl & -kc \\ 0 & nkd & nka & nl \end{vmatrix} = [nl(bk+nl)+n(ac+de)k^2]^2,$$

d'où, en choisissant le signe,

$$Nn\delta = nl(bk+nl)+n(ac+de)k^2,$$

$$(20) \qquad 4Nn\delta = (2nl+bk)^2-\Delta k^2 \qquad [\Delta = b^2-4n(ac+de)].$$

De même, en faisant le produit colonne par ligne, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} L & -NCK & NEK & 0 \\ AK & BK+L & 0 & -EK \\ -DK & 0 & BK+L & -CK \\ 0 & NDK & NAK & L \end{vmatrix} = [L(BK+L)+N(AC+DE)K^2]^2,$$

d'où

$$N n \delta = L(BK+L)+N(AC+DE)K^2,$$

$$(21) \qquad 4Nn\delta = (2L+BK)^2 - \nabla K^2 \qquad [\nabla = B^2 - 4N(AC+DE)].$$

La transformation associée (T_1) fait passer des périodes du tableau T_n aux périodes du tableau T_N.

En effet, en changeant dans les équations du système (III) n en N, a en A, b en B, c en C, d en D, e en E et en remplaçant les a_i, b_i, c_i, d_i par les quantités qui occupent la même place dans le tableau des entiers de T_1, on obtient pour la première équation

$$Nn[(bc)_{13}+n(ad)_{13}] = AK_1,$$

et de même pour les trois suivantes; par conséquent le deuxième indice de (T_1) est $K_1 = NnK$.

On obtient pour la cinquième équation

$$Nn\{(bc)_{30}+n(ad)_{30} - N[(bc)_{21}+n(ad)_{21}]\} = BK_1.$$

D'autre part, l se transforme en $n^2(ad)_{03}+n(bc)_{03}$ et le premier indice est $L_1 = Nn\frac{L}{N}$; mais le facteur $\frac{1}{N}$ ne présente d'intérêt que pour la symétrie des formules, c'est pourquoi je ne l'ai pas conservé.

Chaque transformation (T) peut être remplacée par une substitution (S) de la façon exposée pour une transformation ordinaire.

Le système (III) exprime que la substitution (S) transforme, par les équations (7), le complexe

$$NP_{03}+P_{12}=0$$

identiquement dans le complexe

$$k(ap_{31}+bp_{03}+cp_{02}+dp_{23}+ep_{01})+l(np_{03}+p_{12})=0,$$

Le système (IV) exprime que la substitution (S) transforme, par les équations (7), le complexe

$$K(AP_{31}+BP_{03}+CP_{02}+DP_{23}+EP_{01})-\frac{BK+L}{N}(NP_{03}+P_{12})=0$$

identiquement dans le complexe

$$-\delta(np_{03}+p_{12})=0.$$

L'invariant de chaque complexe se reproduit multiplié par le degré de la substitution, ce qui donne pour le premier

$$N\delta=k^2(ac+de)+l(bk+nl)$$

et pour le deuxième

$$K^2(AC+DE)+\frac{L}{N}(BK+L)=n\delta.$$

Ces relations ont été déjà établies par une autre voie.

L'invariant simultané des deux complexes donne la relation

$$BK+2L=bk+2nl \tag{22}$$

qu'il est facile de vérifier directement.

La comparaison des équations (20), (21) et (22) donne

$$\begin{gathered}\Delta k^2=\nabla K^2,\\ k\sqrt{\Delta}=\varepsilon K\sqrt{\nabla}.\end{gathered} \tag{23}$$

Si $\varepsilon=+1$, la substitution est dite droite; si $\varepsilon=-1$, elle est dite gauche. Ce caractère dépend d'ailleurs essentiellement de la définition des signes de k et K [1].

La relation (23) montre aussi que, pour les transformations singulières comme pour les transformations ordinaires, le rapport $\frac{\Delta}{\nabla}$ est carré parfait.

L'interprétation géométrique des transformations va permettre d'établir simplement les formules de composition de deux transformations.

---

[1] La définition est inverse pour G. Cotty qui a changé les signes des premiers membres du système (IV).

Soit (S_1) une transformation singulière conduisant des variables U, V, et des périodes du tableau T_N liées par la relation singulière

$$ANG + BH + CG' + DN(H^2 - GG') + E = 0 \quad \text{d'invariant } \nabla$$

aux variables $u_1 v_1$ et aux périodes du tableau T_{n_1} liées par la relation singulière

$$\alpha n_1 \mathcal{G} + \beta \mathcal{H} + \gamma \mathcal{G}' + \delta n_1 (\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + \varepsilon = 0 \quad \text{d'invariant } \Delta_1.$$

Les indices de cette transformation sont l_1, k_1, L_1, K_1 ; son degré est δ_1.

Soit de même (S_2) une transformation singulière conduisant des variables u_1, v_1 et des périodes du tableau T_{n_1} aux variables u, v et aux périodes du tableau T_n liées par la relation singulière

$$ang + bh + cg' + dn(h^2 - gg') + e = 0 \quad \text{d'invariant } \Delta.$$

Les indices de cette transformation sont l_2, k_2, L_2, K_2; son degré est δ_2.

Soit enfin (S) la transformation composée conduisant des variables U, V et des périodes du tableau T_N aux variables u, v et aux périodes du tableau T_n. Il s'agit de calculer ses indices l, k, L, K et son degré δ en fonction des indices et des degrés des composantes.

(S_1) transforme le complexe

$$-\frac{BK_1 + L_1}{N}(NP_{03} + P_{12}) + K_1(AP_{31} + BP_{03} + CP_{02} + DP_{23} + EP_{01}) = 0$$

en

$$-\delta_1(n_1 \varpi_{03} + \varpi_{12}) = 0$$

qui est lui-même transformé par (S_2) en

$$-\delta_1[l_2(np_{03} + p_{12}) + k_2(ap_{31} + bp_{03} + cp_{02} + dp_{23} + ep_{01})] = 0.$$

Par conséquent (S) transforme le complexe

$$-\frac{BK_1 + L_1}{N}(NP_{03} + P_{12}) + K_1(AP_{31} + BP_{03} + CP_{02} + DP_{23} + EP_{01}) = 0$$

en

$$-\delta_1[l_2(np_{03} + p_{12}) + k_2(ap_{31} + bp_{03} + cp_{02} + dp_{23} + cp_{01})] = 0.$$

La relation d'invariance donne

$$\left[K_1^2(AC+DE)+\frac{L_1}{N}(BK_1+L_1)\right]\delta=\delta_1^2[k_2^2(ac+de)+l_2(bk_2+nl_2)]$$

ou

$$\delta=\delta_1\delta_2,$$

ce qui était évident *a priori*.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}&-\frac{BK_1+L_1}{N}(NP_{03}+P_{12})+K_1(AP_{31}+\ldots)\\ &=\frac{K_1}{K}\left[-\frac{BK+L}{N}(NP_{03}+P_{12})+K(AP_{31}+\ldots)\right]\\ &\quad-\left(\frac{BK_1+L_1}{N}-\frac{K_1}{K}\frac{BK+L}{N}\right)(NP_{03}+P_{12})\end{aligned}$$

et sous cette forme on voit que ce complexe est transformé par (S) en

$$\begin{aligned}&-\frac{K_1}{K}\delta(np_{03}+p_{12})-\left(\frac{BK_1+L_1}{N}-\frac{K_1}{K}\frac{BK+L}{N}\right)\\ &\times[l(np_{03}+p_{12})+k(ap_{31}+bp_{03}+cp_{02}dp_{23}+ep_{01})]=0.\end{aligned}$$

On en déduit par comparaison

$$(24)\qquad \frac{K_1}{K}\delta+\frac{L_1K-LK_1}{NK}l=\delta_1 l_2,\qquad k\frac{L_1K-LK_1}{NK}=\delta_1 k_2.$$

De même (S_1) transforme le complexe $NP_{03}+P_{12}=0$ en

$$l_1(\varpi_{12}+n_1\varpi_{03})+k_1(\alpha\varpi_{31}+\beta\varpi_{03}+\gamma\varpi_{02}+\delta\varpi_{23}+\varepsilon\varpi_{01})=0,$$

qui s'écrit

$$\begin{aligned}&\frac{k_1}{K_2}\left[-\frac{\beta K_2+L_2}{n_1}(n_1\varpi_{03}+\varpi_{12})+K_2(\alpha\varpi_{31}+\beta\varpi_{03}+\gamma\varpi_{021}+\delta\varpi_{23}+\varepsilon\varpi_{01})\right]\\ &\quad+\left(l_1+\frac{k_1}{K_2}\frac{\beta K_2+L_2}{n_1}\right)(n_1\varpi_{03}+\varpi_{12})=0.\end{aligned}$$

Sous cette forme on voit que (S_2) le transforme en

$$\begin{aligned}&-\frac{k_1}{K_2}\delta_2(np_{03}+p_{12})+\left(l_1+\frac{k_1}{K_2}\frac{\beta K_2+L_2}{n_1}\right)\\ &\times[l_2(np_{03}+p_{12})+k_2(ap_{31}+bp_{03}+cp_{02}+dp_{23}+ep_{01})]=0.\end{aligned}$$

D'autre part, (S) transforme $NP_{03}+P_{12}=0$ en

$$l(np_{03}+p_{12})+k(ap_{31}+bp_{03}+cp_{02}+dp_{23}+ep_{01})=0,$$

d'où par comparaison

$$(25)\qquad k = k_2\left(l_1 + \frac{k_1}{K_2}\,\frac{\beta K_2 + L_2}{n_1}\right), \qquad l = -\frac{k_1}{K_2}\delta_2 + \left(l_1 + \frac{k_1}{K_2}\,\frac{\beta K_2 + L_2}{n_1}\right) l_2.$$

Ces équations (24) et (25) résolvent le problème posé.

On déduit des équations (24) par élimination de $\dfrac{L_1 K - LK_1}{NK}$

$$\frac{K_1}{K}\delta + l\delta_1\frac{k_2}{k} = \delta_1 l_2,$$

de même on déduit des équations (25)

$$l = -\frac{k_1}{K_2}\delta_2 + \frac{k}{k_2}l_2,$$

d'où en éliminant l

$$(26)\qquad \frac{K_1}{K} = \frac{k_2}{k}\,\frac{k_1}{K_2}.$$

Or on a

$$K\sqrt{\nabla} = \varepsilon k\sqrt{\Delta}, \qquad K_1\sqrt{\nabla} = \varepsilon_1 k_1\sqrt{\Delta_1}, \qquad K_2\sqrt{\Delta_1} = \varepsilon_2 k_2\sqrt{\Delta},$$

et l'on est ainsi conduit à la relation

$$\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Donc le produit de deux transformations de même sens est une transformation droite, le produit de deux transformations de sens différents est une transformation gauche [1].

Pour transformer l'expression de k, je rappelle la relation

$$\beta K_2 + 2L_2 = bk_2 + 2nl_2,$$

qui donne, en portant dans la première équation (25)

$$k = l_1 k_2 + \frac{k_1 k_2}{2K_2 n_1}(\beta K_2 + bk_2 + 2nl_2),$$

$$(27)\qquad 2n_1 k = k_2(\beta k_1 + 2n_1 l_1) + \varepsilon_2\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\,k_1(bk_2 + 2nl_2).$$

---

[1] On remarquera qu'avec la définition donnée pour k' ou K par G. Cotty, ε change de signe et l'énoncé actuel est remplacé par l'énoncé inverse moins naturel.

On a de même

$$l = -\frac{k_1}{K_2}\,\frac{(2nl_2+bk_2)^2-\Delta k_2^2}{4nn_1} + l_1 l_2 + \frac{k_1 l_2}{n_1 K_2}(\beta K_2 + L_2),$$

$$(28) \qquad 2n_1(bk+2nl) = (\beta k_1 + 2n_1 l_1)(bk_2+2nl_2) + \varepsilon_2\sqrt{\Delta\Delta_1}\,k_1 k_2.$$

Les équations (27) et (28) donnent les expressions cherchées pour k et l.

Cas particuliers. — Je suppose d'abord que (S_1) soit ordinaire. On a dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= (bc)_{03} + n(ad)_{03} = N[(bc)_{12} + n(ad)_{12}] \\ &= (bc)_{03} + N(bc)_{12} = n[(ad)_{03} + N(ad)_{12}] \end{aligned}$$

et le degré de la transformation est

$$\delta = \frac{\mathcal{K}^2}{Nn}.$$

Ceci s'accorde avec les notations d'une transformation singulière en posant

$$\mathcal{K} = nl = L, \qquad k = K = 0, \qquad \delta = \frac{nl^2}{N} = \frac{L^2}{nN}.$$

Par conséquent la transformation (S_1) transforme

$$P_{12} + NP_{03} = 0 \qquad \text{en} \qquad l_1(\varpi_{12} + n_1\varpi_{03}) = 0$$

qui lui-même est transformé par (S_2) en

$$l_1[l_2(p_{12}+np_{03}) + k_2(ap_{31}+bp_{03}+cp_{02}+dp_{23}+ep_{01})] = 0.$$

On a donc pour les indices de (S)

$$l = l_1 l_2, \qquad k = l_1 k_2.$$

C'est ce que donnent les équations générales quand on y fait $k_1 = 0$.
Je suppose maintenant (S_2) ordinaire et (S_1) singulière. Le complexe

$$-\frac{\beta K_1 + L_1}{N}.(P_{12}+NP_{03}) + K_1(AP_{31}+BP_{03}+CP_{02}+DP_{23}+EP_{01}) = 0$$

est transformé par (S_1) en

$$-\delta_1(\varpi_{12} + n_1\varpi_{03}) = 0$$

qui est lui-même transformé par (S_2) en

$$-\delta_2 l_2(p_{12}+np_{03})=0.$$

On a déjà vu que (S) transforme

$$-\frac{BK_1+L_1}{N}(P_{12}+NP_{03})+K_1(AP_{31}+BP_{03}+CP_{02}+DP_{23}+EP_{01})=0$$

en

$$-\frac{K_1}{K}\delta(p_{12}+np_{03})-\left(\frac{BK_1+L_1}{N}+\frac{K_1}{K}L\right)$$
$$\times[l(p_{12}+np_{03})+k(ap_{31}+bp_{03}+cp_{02}+dp_{23}+ep_{01})=0;$$

d'où il résulte par comparaison

$$-\frac{K_1}{K}\delta-\left(\frac{BK_1+L_1}{N}+\frac{K_1}{K}L\right)l=-\delta_1 l_2,\qquad \left(\frac{BK_1+L_1}{N}+\frac{K_1}{K}L\right)k=0,$$

k étant différent de zéro, ce système est équivalent au suivant

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\frac{k_1}{k}\delta=\delta_1 l_2,\qquad \frac{BK_1+L_1}{N}+\frac{K_1}{K}L=0.$$

La première équation se transforme facilement en la suivante

$$2n_1 k=\varepsilon_2\frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta}}2nk_1 l_2$$

qui n'est autre que la formule générale (27) où l'on a fait $k_2=0$.

Pour transformer l'équation (28), je prends la formule générale

$$4Nn\delta=(2nl+bk)^2-\Delta k^2,$$

qui donne

$$(2nl+bk)^2=\frac{n^2}{n_1^2}[l_2^2(2n_1 l_1+\beta k_1)^2-\Delta_1 k_1^2 l_2^2\pm\Delta_1 k_1^2 l_2^2].$$

Le signe à choisir pour la racine carrée s'obtient en remarquant que le signe + donne le même résultat qu'en faisant $k_2=0$ dans la formule générale; par conséquent, on a

$$2n_1(2nl+bk)=2nl_2(\beta k_1+2n_1 l_1).$$

CHAPITRE IV.

FONCTIONS INTERMÉDIAIRES SINGULIÈRES.

Étant donné le tableau de périodes (1)

$$T_n \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix}$$

avec $g_2 > 0$, $h_2^2 - g_2 g'_2 < 0$, j'appelle fonction intermédiaire singulière toute fonction entière de u, v qui se reproduit multipliée par une exponentielle $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$ quand u, v sont augmentés d'une période.

Après multiplication par un facteur exponentiel convenable, ces fonctions satisfont aux conditions

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u + \frac{1}{n}, v\right) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v + 1) &= \varphi(u, v)\, e^{\theta u},\\
\varphi(u + g, v + h) &= \varphi(u, v)\, e^{\lambda u + \mu v + \nu},\\
\varphi(u + h, v + g') &= \varphi(u, v)\, e^{\lambda' u + \mu' v + \nu'}.
\end{aligned}$$

Ces équations combinées deux à deux donnent les conditions de compatibilité

$$\frac{\theta}{n} = -2p\pi i, \qquad \frac{\lambda}{n} = -2l\pi i, \qquad \frac{\lambda'}{n} = -2k\pi i,$$

$$\mu = \theta g - 2m\pi i, \qquad \mu' = \theta h - 2m'\pi i, \qquad \lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h - 2q\pi i,$$

p, q, l, k, m, m' étant des entiers.

D'où la relation obtenue en éliminant λ, λ', μ, μ' et θ

$$nkg - (nl - m')h - mg' + np(h^2 - gg') + q = 0.$$

C'est une relation singulière à moins que

$$k = nl - m' = m = p = q = 0.$$

---

(1) L'exposé des Chapitres IV et V suit celui de G. Humbert dans son premier Mémoire (*Journal de Math.*, 5e série, t. V). Je n'ai pas reproduit certaines démonstrations qui restent à peu près les mêmes.

En ce cas les fonctions $\varphi\,(u, v)$ satisfont aux relations

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v),\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2nl\pi i u+\nu},\\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2nl\pi i v+\nu'}.
\end{aligned}$$

Ce sont les fonctions thêta d'ordre nl que j'ai étudiées dans ma Thèse.

Je suppose maintenant les périodes liées par une seule relation singulière de la forme réduite

$$ng+\beta h-\gamma g' = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{k}{1} = \frac{nl-m'}{-\beta} = \frac{m}{\gamma} = \frac{p}{0} = \frac{q}{0}.$$

Les fonctions $\varphi\,(u, v)$ satisfont alors aux relations

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v),\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i(nlu+\gamma k v)+\nu},\\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i(nku+\overline{nl+\beta k}v)+\nu'}.
\end{aligned}$$

J'appelle δ le déterminant des coefficients de nu, v dans les exponentielles

$$\delta = l(nl+\beta k)-\gamma k^2 = nl^2+\beta kl-\gamma k^2,$$

en général il n'est pas nul, car $\delta = 0$ donne

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2+4n\gamma}}{2n},$$

ce qui exige que $\beta^2+4n\gamma$ soit carré parfait.

Pour élucider ce cas particulier :

$$\beta^2+4n\gamma = \sigma^2, \qquad \frac{l}{k} = \frac{-\beta\pm\sigma}{2n},$$

je considère les deux combinaisons $u+\lambda v$ qui n'admettent que deux périodes et qui sont obtenues pour

$$\lambda = \frac{\beta\pm\sigma}{2n}.$$

Le même raisonnement que celui de G. Humbert conduit au même résultat :

Les fonctions intermédiaires sont des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable.

C'est pourquoi le cas où $\delta = 0$ est appelé le cas elliptique.

Je reprends maintenant le cas général des fonctions intermédiaires d'indices l et k et je fais le changement de variables

$$n\delta U = nlu + \gamma k v, \qquad n\delta V = nku + (nl + \beta k)v,$$

d'où, δ n'étant pas nul,

$$u = (nl + \beta k)U - \gamma k V, \qquad v = n(-kU + lV).$$

$\varphi(u, v)$ devient $\theta(U, V)$ qui satisfait aux relations

$$\theta\left(U + \frac{l}{n\delta}, V + \frac{k}{n\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{\gamma k}{n\delta}, V + \frac{nl + \beta k}{n\delta}\right) = \theta(U, V),$$

d'où

$$\theta\left[U + \frac{\lambda l + \mu\gamma k}{n\delta}, V + \frac{\lambda k + \mu(nl + \beta k)}{n\delta}\right] = \theta(U, V),$$

λ et μ étant des nombres entiers.

Pour les valeurs $\lambda = nl + \beta k$, $\mu = -k$, d'une part, $\lambda = -nk$, $\mu = nl$, d'autre part, on a

$$\theta\left(U + \frac{1}{n}, V\right) = \theta(U, V + 1) = \theta(U, V). \tag{29}$$

En posant

$$G = \frac{nlg + \gamma kh}{n\delta}, \qquad H = \frac{nlh + \gamma kg'}{n\delta} = \frac{nkg + (nl + \beta k)h}{n\delta},$$
$$G' = \frac{nkh + (nl + \beta k)g'}{n\delta},$$

on a de même

$$\left\{\begin{array}{l} \theta(U + G, V + H) = \theta(U, V)\, e^{-2\pi i n\delta U + \nu}, \\ \theta(U + H, V + G) = \theta(U, V)\, e^{-2\pi i n\delta V + \nu'}. \end{array}\right. \tag{29}$$

La fonction $\theta(U, V)$ est donc une fonction thêta d'ordre $n\delta$ aux périodes

$$T_n \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & h & g \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix}$$

car on peut en augmentant les variables de constantes convenables supposer

$$\nu = 2\pi i n \frac{\delta}{2} G, \qquad \nu' = 2\pi i n \frac{\delta}{2} G'.$$

Mais c'est une fonction thêta particulière qui satisfait aux relations

$$(30) \qquad \theta\left(U + \frac{l}{n\delta}, V + \frac{k}{n\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{\gamma k}{n\delta}, V + \frac{nl + \beta k}{n\delta}\right) = \theta(U, V).$$

Pour qu'une telle fonction existe, il faut que ses périodes remplissent deux conditions :

1° $H_2^2 - G_2 G'_2 < 0$; or on a

$$H_2^2 - G_2 G'_2 = \frac{1}{n\delta}(h_2^2 - g_2 g'_2),$$

ce qui donne, puisque $h_2^2 - g_2 g'_2 < 0$,

$$\delta > 0 \qquad \text{ou} \qquad nl^2 + \beta kl - \gamma k^2 > 0;$$

2° G_2 et $n\delta$ de même signe, ce qui donne

$$G_2 > 0 \qquad \text{ou} \qquad nlg_2 + \gamma kh_2 > 0.$$

Ces inégalités se déduisent de celles qui ont été étudiées par G. Humbert en remplaçant l par nl, γ par $-\gamma$ et α par n; les conclusions sont donc les mêmes :

Le point l, k doit être dans l'angle des droites $nl^2 + \beta kl - \gamma k^2 = 0$ qui comprend la partie positive de l'axe des l.

On peut d'ailleurs remplacer ces inégalités par la suivante qui les entraîne

$$2nl + \beta k > \sqrt{\Delta}\,|k|.$$

Les fonctions thêta qui satisfont aux relations (29) sont fonctions linéaires et homogènes de $n\delta^2$ fonctions ($0 \leqq p < \delta$, $0 \leqq q < n\delta$)

$$\Theta_{pq}(U, V) = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e^{2\pi i [n(p+\rho\delta) U + (q + n\sigma\delta) V]}$$
$$\times e^{-\frac{\pi i}{n\delta}[n^2(p+\rho\delta)^2 G + 2n(p+\rho\delta)(q+n\sigma\delta) H + (q+n\sigma\delta)^2 G']}.$$

Les conditions (30) donnent en outre

$$nlp + kq = \lambda n \delta, \qquad n\gamma kp + (nl + \beta k) q = \mu n \delta,$$

λ et μ étant des entiers; d'où en résolvant

$$p = (nl + \beta k)\lambda - k\mu, \qquad q = n[-\gamma k \lambda + l\mu].$$

Il est facile de voir que le nombre de solutions distinctes est δ.

On a donc finalement le résultat suivant :

Soit un tableau de périodes

$$T_n \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix}$$

liées par la relation singulière

$$ng + \beta h - \gamma g' = 0$$

d'invariant Δ, où β et γ sont des entiers. Les parties imaginaires de ces périodes satisfont aux inégalités

$$h_2^2 - g_2 g'_2 < 0, \qquad g_2 > 0;$$

l et k étant deux entiers tels que

$$\delta = nl^2 + \beta kl - \gamma k^2 > 0,$$

il existe des fonctions intermédiaires singulières d'indices l et k vérifiant les relations

$$\varphi\left(u + \frac{1}{n}, v\right) = \varphi(u, v + 1) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u + g, v + h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i (nlu + \gamma k v) + \nu},$$
$$\varphi(u + h, v + g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i (nku + \overline{nl + \beta k} v) + \nu};$$

où ν et ν' sont des constantes données. Ces fonctions s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Je me propose de déterminer le nombre des zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières; la question ne se pose que pour deux fonctions relatives au même tableau : soient les fonctions d'indices l, k et l', k' relatives au tableau T_n; ce sont aussi des fonctions d'indices nl, k et nl', k' relatives au tableau T_1; à ce point de vue, le nombre de leurs zéros communs est

$$N(nl, k; nl', k') = 2n^2 ll' + n\beta(k'l + kl') - 2n\gamma kk'.$$

Mais si u, v est l'un de ces zéros, tous les zéros

$$u + \frac{\lambda}{n}, v \qquad (0 \leqq \lambda < n)$$

au nombre de n comptent pour un seul relativement au tableau T_n; par conséquent :

Deux fonctions intermédiaires singulières d'indices l, k et l', k', relatives au tableau T_n, ont en commun un nombre de zéros égal à

$$N(l, k; l', k') = 2n ll' + \beta(k'l + kl') - 2\gamma kk'.$$

Les transformations singulières établissent entre les fonctions thêta et les fonctions intermédiaires singulières une correspondance que je vais préciser.

Soit la transformation singulière

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

que j'applique à la fonction thêta d'ordre mN relative au tableau T_N et vérifiant les relations

$$\Theta\left(U + \frac{1}{N}, V\right) = \Theta(U, V + 1) = \Theta(U, V),$$
$$\Theta(U + G, V + H) = \Theta(U, V)\, e^{2\pi i m N U + \nu},$$
$$\Theta(U + H, V + G') = \Theta(U, V)\, e^{-2\pi i m N V + \nu'}.$$

Par la transformation (1), $\Theta(U, V)$ devient $\psi(u, v)$ qui satisfait aux relations

$$
\begin{aligned}
\psi\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= \Theta\left(\mathrm{U}+\frac{\lambda}{n}, \mathrm{V}+\frac{\lambda'}{n}\right)\\
&= \Theta\left(\mathrm{U}+\frac{a_0}{\mathrm{N}}+a_3\mathrm{G}+a_2\mathrm{H}, \mathrm{V}+a_1+a_3\mathrm{H}+a_2\mathrm{G}'\right)\\
&= \Theta(\mathrm{U}', \mathrm{V}')\, e^{-2\pi i m\mathrm{N}(a_3\mathrm{U}+a_2\mathrm{V})+\text{const.}}\\
&= \psi(u, v)\; e^{-2\pi i m\mathrm{N}[(a_3\lambda+a_2\lambda')u+(a_3\mu+a_2\mu')v]+\text{const.}},\\
\psi(u, v+1) &= \psi(u, v)\; e^{-2\pi i m\mathrm{N}[(b_3\lambda+b_2\lambda')u+(b_3\mu+b_2\mu')v]+\text{const.}},\\
\psi(u+g, v+h) &= \psi(u, v)\; e^{-2\pi i m\mathrm{N}[(d_3\lambda+d_2\lambda')u+(d_3\mu+d_2\mu')v]+\text{const.}},\\
\psi(u+h, v+g') &= \psi(u, v)\; e^{-2\pi i m\mathrm{N}[(c_3\lambda+c_2\lambda')u+(c_3\mu+c_2\mu')v]+\text{const.}}.
\end{aligned}
$$

En posant $\varphi(u, v) = \psi(u, v)e^{\mathrm{P}(u, v)}$, $\mathrm{P}(u, v)$ étant un polynome du second degré

$$\mathrm{P}(u, v) = \mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2 + 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{E}v,$$

on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi\left(u+\frac{1}{n}, v\right)}{\varphi(u, v)} &= \frac{\psi\left(u+\frac{1}{n}, v\right)}{\psi(u, v)}\, e^{2\frac{\mathrm{A}}{n}u+2\frac{\mathrm{B}}{n}v+2\frac{\mathrm{D}}{n}},\\
\frac{\varphi(u, v+1)}{\varphi(u, v)} &= \frac{\psi(u, v+1)}{\psi(u, v)}\, e^{2\mathrm{B}u+2\mathrm{C}v+2\mathrm{E}}.
\end{aligned}
$$

Si l'on prend

$$
2\frac{\mathrm{A}}{n} = 2\pi i m\mathrm{N}(a_3\lambda + a_2\lambda'), \qquad \frac{2\mathrm{B}}{n} = 2\pi i m\mathrm{N}(a_3\mu + a_2\mu'),
$$
$$
2\mathrm{C} = 2\pi i m\mathrm{N}(b_3\mu - b_2\mu'),
$$

et si l'on annule les constantes dans les exposants des deux premiers multiplicateurs, on obtient toutes réductions faites

$$
(21)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\varphi\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i mn[(ab)_{03}+\mathrm{N}(ab)_{12}]u},\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i mn\left\{[(ad)_{03}+\mathrm{N}(ad)_{12}]u+[(bd)_{03}+\mathrm{N}(bd)_{12}]\frac{v}{n}+[(ab)_{03}+\mathrm{N}(ab)_{12}]gv\right\}+\text{const.}},\\
\varphi(u+g, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i mn\left\{[(ac)_{03}+\mathrm{N}(ac)_{12}]u-[(bc)_{03}+(bc)_{12}\frac{v}{n}]+[\mathrm{N}(ab)_{03}+\mathrm{N}(ab)_{12}]hv\right\}+\text{const.}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si g, h, g' sont liées par la relation singulière réduite

$$ng + \beta h - \gamma g' = 0,$$

les équations du système (III) permettent d'écrire les relations précédentes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{2\pi i m[nlu+\gamma kv]+\text{const.}}, \\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m[nku+(nl+\beta k)v]+\text{const.}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, une transformation singulière de type (N, n) et d'indices l, k transforme une fonction thêta d'ordre $m\mathrm{N}$ relative au tableau T_{N} en une fonction intermédiaire singulière d'indices ml, mk relative au tableau T_n.

Si dans la fonction thêta m est positif, on a aussi $\mathrm{H}_2^2 - \mathrm{G}_2\mathrm{G}'_2 < 0$, $\mathrm{G}_2 > 0$. De même, dans la fonction φ, à $\delta = nl^2 + \beta kl - \gamma k^2 > 0$ correspond, comme on vient de le voir, $h_2^2 - g_2 g'_2 < 0$ et à $2nl + \beta k > \sqrt{\Delta}\,|k|$ correspond $g_2 > 0$. De l'identité qui vient d'être établie entre les indices de la transformation et ceux de la fonction transformée, résultent les propriétés déjà énoncées antérieurement :

Une transformation singulière de degré positif fait passer d'un système de périodes pour lequel $\mathrm{H}_2^2 - \mathrm{G}_2\mathrm{G}'_2$ est négatif à un autre système pour lequel $h_2^2 - g_2 g'_2$ est aussi négatif.

Une transformation singulière pour laquelle $2nl + \beta k$ est positif fait passer d'un système de périodes pour lequel G_2 est positif à un autre système pour lequel g_2 est aussi positif.

Si g, h, g' ne sont liées par aucune relation, les équations du système (II) permettent d'écrire les relations (31) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m \mathfrak{N} u+\nu}, \\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m \mathfrak{N} v+\nu'}.
\end{aligned}$$

Par conséquent une transformation ordinaire change une fonction thêta relative au tableau T_{N} en une fonction thêta relative au tableau T_n. De là résulte, en supposant $\mathfrak{N} > 0$, que $\mathrm{H}_2^2 - \mathrm{G}_2\mathrm{G}'_2$ et $h_2^2 - g_2 g'_2$ d'une part, G_2 et g_2 d'autre part, conservent leurs signes.

CHAPITRE V.

FONCTIONS INTERMÉDIAIRES SINGULIÈRES NORMALES.

La fonction intermédiaire singulière la plus générale étant le produit d'une fonction $\varphi_{l,k}(u, v)$ par une exponentielle $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, celles de ces fonctions qui sont paires ou impaires sont de la forme

$$e^{du+fv}\varphi_{lk}(u, v) = F(u, v).$$

On en déduit que $F(u, v)$ satisfait aux relations

$$\begin{aligned}
F\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= A_1 F(u, v),\\
F(u, v+1) &= B_1 F(u, v),\\
F(u+g, v+h) &= A_2 F(u, v)\, e^{-2\pi i(nlu+\gamma kv)},\\
F(u+h, v+g') &= B_2 F(u, v)\, e^{-2\pi i[nku+(nl+\beta k)v]},\\
F(-u, -v) &= \pm F(u, v).
\end{aligned}$$

Par conséquent les fonctions intermédiaires paires ou impaires d'indices l et k relatives au tableau T_n vérifient les relations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
F\left(u+\frac{1}{n}, v\right) &= e^{\omega\pi i} F(u, v),\\
F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v),\\
F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i}\, e^{-2\pi i(nlu+\gamma kv)-\pi i(nlg+\gamma kh)} F(u, v),\\
F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i}\, e^{-2\pi i[nku+(nl+\beta k)v]-\pi i[nkh+(nl+\beta h)g']} F(u, v),
\end{aligned}\right.$$

où ω, ω', θ, θ' sont des nombres égaux à 0 ou 1.

Plus généralement les fonctions qui satisfont à ces relations seront appelées fonctions intermédiaires normales.

Le tableau $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ est la caractéristique de la fonction $F(u, v)$.

Pour trouver le développement en série de ces fonctions, je remarque que les équations (32) donnent

$$F(u+1, v) = e^{n\omega\pi i} F(u, v) = e^{\omega_1\pi i} F(u, v)$$

avec

$$\omega_1 \equiv n\omega \pmod 2.$$

Il en résulte que les développements cherchés sont compris dans les suivants :

$$\Phi_{pq}(u, v) = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e^{2\pi i\left(p + nl\rho + nk\sigma + \frac{\omega_1}{2}\right)u + 2\pi i\left[q + k\gamma\rho + (nl+\beta k)\sigma + \frac{\omega'}{2}\right]v} e^{\pi i(\rho\theta + \sigma\theta')}$$
$$\times e^{\pi i f\left(p + nl\rho + nk\sigma + \frac{\omega_1}{2},\ q + k\gamma\rho + \overline{nl+\beta k}\sigma + \frac{\omega'}{2}\right)},$$

$f(x, y)$ désignant la forme

$$G_0 x^2 + 2H_0 xy + G'_0 y^2$$

avec

$$G_0 = \frac{(nl+\beta k)g - k\gamma h}{n\delta},$$
$$H_0 = \frac{-nkg + nlh}{n\delta} = \frac{(nl+\beta k)h - k\gamma g'}{n\delta},$$
$$G'_0 = \frac{-nkh + nlg'}{n\delta}.$$

Il suffit de remplacer l par nl, α par n et γ par $-\gamma$ dans les développements donnés par G. Humbert.

Pour que la fonction $\Phi_{pq}(u, v)$ se reproduise multipliée par $e^{\omega\pi i}$ quand on augmente u de $\frac{1}{n}$, il suffit que p soit divisible par n; cette fonction est donc de la forme

$$\Phi_{pq}(u, v) = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} e^{2\pi i n\left(p + l\rho + k\sigma + \frac{\omega}{2}\right)u + 2\pi i\left[q + k\gamma\rho + (nl+\beta k)\sigma + \frac{\omega'}{2}\right]v} e^{\pi i(\rho\theta + \sigma\theta')}$$
$$\times e^{\pi i f\left[n\left(p + l\rho + k\sigma + \frac{\omega}{2}\right),\ q + k\gamma\rho + (nl+\beta k)\sigma + \frac{\omega'}{2}\right]}.$$

Le nombre de systèmes de nombres entiers p, q est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs

$$l + ik\gamma, \qquad k + i(nl + \beta k),$$

c'est-à-dire à δ.

Il y a donc δ fonctions intermédiaires normales linéairement distinctes d'indices l et k.

Je vais étudier la parité de ces fonctions.

I. *Caractéristique nulle.* — On ne change pas Φ_{pq} en remplaçant p par $p + \varepsilon\lambda + \varepsilon' k$ et q par $q + \varepsilon k\gamma + \varepsilon'(nl + \beta k)$, ε et ε' étant des entiers; d'autre part, on a

$$\Phi_{pq}(-u, -v) = \Phi_{-p,-q}(u, v).$$

Donc pour que Φ_{pq} soit paire, il faut et il suffit que

$$p \equiv -p + \varepsilon l + \varepsilon' k, \qquad q \equiv -q + \varepsilon k\gamma + \varepsilon'(nl + \beta k) \qquad (\text{mod } 2),$$

équations dans lesquelles on peut supposer que ε et ε' ont les valeurs o ou 1; elles s'écrivent

$$\varepsilon\delta \equiv 2p(nl + \beta k) - 2qk, \qquad \varepsilon'\delta \equiv -2pk\gamma + 2ql \qquad (\text{mod } 2)$$

et admettent toujours la solution $p = q = \varepsilon = \varepsilon' = 0$. Pour les autres solutions, il faut distinguer plusieurs cas :

1° δ impair; ε et ε' doivent être pris pairs, c'est-à-dire nuls. La fonction Φ_{00} est donc paire; d'autre part $\Phi_{pq}(u, v) + \Phi_{-p,-q}(u, v)$ est paire, tandis que $\Phi_{pq}(u, v) - \Phi_{-p,-q}(u, v)$ est impaire; il y a donc $\frac{\delta + 1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta - 1}{2}$ fonctions impaires.

2° δ pair; ce cas se subdivise en trois autres :

a — k pair, l pair; p et q ont des valeurs entières pour les quatre systèmes (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) de valeurs de ε et ε'. Il y a donc quatre fonctions Φ_{pq} paires, les $\delta - 4$ autres combinées deux à deux donnent autant de fonctions paires que de fonctions impaires; en tout il y a $\frac{\delta + 4}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta - 4}{2}$ impaires.

b — k pair, l impair et par suite n pair; il faut prendre $\varepsilon = 0$ et il y a deux fonctions Φ_{pq} qui sont paires; en tout il y a $\frac{\delta + 2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta - 2}{2}$ fonctions impaires.

c — k impair; γ et $l(nl + \beta k)$ ont la même parité; les équations peuvent s'écrire

$$0 \equiv \varepsilon l + \varepsilon', \qquad 0 \equiv \varepsilon\gamma + \varepsilon'(nl + \beta k) \equiv (\varepsilon l + \varepsilon')(nl + \beta k) \qquad (\text{mod } 2).$$

Quelle que soit la parité de $nl + \beta k$, elles se réduisent à la première; par conséquent, il y a $\frac{\delta + 2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta - 2}{2}$ fonctions impaires.

II. *Caractéristique quelconque.* — Quand on change p en $p+\varepsilon l+\varepsilon' k$ et q en $q+\varepsilon k\gamma+\varepsilon'(nl+\beta k)$, ε et ε' étant des entiers, Φ_{pq} se reproduit multipliée par $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta')}$; d'autre part on a

$$\Phi_{pq}(-u,-v)=\Phi_{-p-\omega,-q-\omega'}(u,v).$$

Donc pour que Φ_{pq} soit paire, il faut et il suffit qu'on puisse trouver ε et ε' égaux à o ou 1 et tels que

$$p\equiv -p-\omega+\varepsilon l+\varepsilon' k,\qquad q\equiv -q-\omega'+\varepsilon k\gamma+\varepsilon'(nl+\beta k)\qquad (\text{mod. }2).$$

La fonction sera paire ou impaire en même temps que $\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta'$.

Ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} 2p+\omega\equiv\varepsilon l+\varepsilon' k & (\text{mod }2).\\ 2q+\omega'\equiv\varepsilon k\gamma+\varepsilon'(nl+\beta k);\end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\delta\equiv(2p+\omega)(nl+\beta k)-(2q+\omega')k & (\text{mod }2).\\ \varepsilon'\delta\equiv-(2p+\omega)k\gamma+(2q+\omega')l.\end{cases}$$

1° δ impair; il n'y a qu'un système de solutions, par conséquent il y a $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-1}{2}$ impaires ou inversement suivant que

$$\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta'$$

ou

$$\theta[\omega(nl+\beta k)-\omega' k]+\theta'[-\omega k\gamma+\omega' l]$$

est pair ou impair.

2° δ pair; ce cas se subdivise en trois autres :

a — k pair, l pair; si ω et ω' ne sont pas nuls à la fois, les équations n'ont pas de solutions; il y a donc $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires.

Si $\omega=\omega'=0$, on peut prendre les quatre systèmes de valeurs pour ε et ε'; les fonctions correspondantes sont de la parité des nombres 0, θ, θ', $\theta+\theta'$, par conséquent θ et θ' n'étant pas nuls à la fois, deux d'entre eux sont pairs et deux impairs; il y a donc $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires.

b — k pair, l impair et par suite n pair. Les équations peuvent s'écrire

$$\omega\equiv\varepsilon,\qquad \omega'\equiv 0\qquad (\text{mod }2).$$

Si $\omega' = 1$, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires.

Si $\omega' = 0$, ε est déterminé et ε' arbitraire, ce qui donne deux fonctions ayant la parité de $\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta' = \omega\theta + \varepsilon'\theta'$; si $\theta' = 0$, ces deux fonctions sont paires ou impaires et il y a au total $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires ou inversement suivant que $\omega\theta$ est pair ou impair; si $\theta' = 1$, ces deux fonctions sont l'une paire et l'autre impaire et il y a au total $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires.

$c - k$ impair; γ et $l(nl + \beta k)$ ont alors la même parité; les équations s'écrivent

$$\omega \equiv \varepsilon l + \varepsilon', \qquad \omega' \equiv \varepsilon\gamma + \varepsilon'(nl + \beta k) \equiv (nl + \beta k)(\varepsilon l + \varepsilon') \qquad (\text{mod } 2)$$

et l'on en déduit

$$\omega' + \omega(nl + \beta k) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires. Si la condition est vérifiée, les deux équations se réduisent à la première qui donne deux systèmes de solutions

$$\varepsilon = 0, \qquad \varepsilon' = \omega \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = 1, \qquad \varepsilon' = l + \omega;$$

ces deux fonctions sont paires ou impaires en même temps que

$$\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta' = \varepsilon\theta + \theta'(\omega - \varepsilon l) \equiv \varepsilon(\theta - l\theta') + \omega\theta',$$

si $\theta - l\theta'$ est impair la parité de ce nombre change avec ε. Il y a au total $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires; si $\theta - l\theta'$ est pair, la parité de ce nombre est celle de $\omega\theta'$; il y a donc au total $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires ou inversement suivant que $\omega\theta'$ est pair ou impair.

Le tableau suivant résume les résultats qui viennent d'être obtenus

Caractéristique nulle.

				Paires.	Impaires.	
δ impair				$\dfrac{\delta+1}{2}$	$\dfrac{\delta-1}{2}$	(I)
δ pair	k pair	l pair		$\dfrac{\delta+4}{2}$	$\dfrac{\delta-4}{2}$	(II)
		l impair (n pair)		$\dfrac{\delta+2}{2}$	$\dfrac{\delta-2}{2}$	(III)
	k impair			$\dfrac{\delta+2}{2}$	$\dfrac{\delta-2}{2}$	(IV)

Caractéristique non nulle.

δ impair	$\theta[\omega(nl+\beta k)-\omega' k] + \theta'[-\omega\gamma k+\omega' l]$			pair	$\dfrac{\delta+1}{2}$	$\dfrac{\delta-1}{2}$	(V)
				impair	$\dfrac{\delta-1}{2}$	$\dfrac{\delta+1}{2}$	
δ pair	k pair	l pair			$\dfrac{\delta}{2}$	$\dfrac{\delta}{2}$	(VI)
		l impair (n pair)	caractérist. $\begin{vmatrix} \omega & 0 \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$	$\omega\theta$ pair	$\dfrac{\delta+2}{2}$	$\dfrac{\delta-2}{2}$	(VII)
				$\omega\theta$ impair	$\dfrac{\delta-2}{2}$	$\dfrac{\delta+2}{2}$	
			autres caractéristiques		$\dfrac{\delta}{2}$	$\dfrac{\delta}{2}$	(VIII)
	k impair	caractéristiques $\omega'+\omega(nl+\beta k)\equiv 0$, $\theta+l\theta'\equiv 0$		$\omega\theta'$ pair	$\dfrac{\delta+2}{2}$	$\dfrac{\delta-2}{2}$	(IX)
				$\omega\theta'$ impair	$\dfrac{\delta-2}{2}$	$\dfrac{\delta+2}{2}$	
		autres caractéristiques			$\dfrac{\delta}{2}$	$\dfrac{\delta}{2}$	(X)

Soit $F(u, v)$ une fonction normale paire ou impaire de caractéristique nulle et d'indices l et k. Je pose, ε, ε', λ, λ' étant des entiers :

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h, \qquad \frac{P'}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon' + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g'.$$

La fonction

$$\psi(u, v) = e^{\pi i[n(l\lambda+k\lambda')u+(\gamma k\lambda+\overline{nl+\beta}k\lambda')v]}\, F\left(u+\frac{P}{2},\ v+\frac{P'}{2}\right)$$

est normale, d'indices l et k, paire ou impaire, et de caractéristique

$$\begin{aligned} \omega &= l\lambda + k\lambda', & \omega' &= k\gamma\lambda + (nl + \beta k)\lambda', \\ \theta &= -l\varepsilon - k\gamma\varepsilon', & \theta' &= -k\varepsilon - (nl + \beta k)\varepsilon'. \end{aligned}$$

Inversement, si δ est impair, on déduit de ces équations des valeurs entières pour ε, ε', λ, λ'. Par conséquent, pour une caractéristique quelconque, les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires (ou impaires) correspondent aux $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle par addition d'une demi-période et de même l'autre groupe de $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires (ou paires) correspond aux $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires de caractéristique nulle.

Je suppose maintenant δ pair, k pair, l impair; la caractéristique de $\psi(u, v)$ est

$$\omega \equiv \lambda, \qquad \omega' \equiv 0, \qquad \theta \equiv -\varepsilon, \qquad \theta' \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2);$$

si l'on augmente u, v d'une demi-période, les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle se transforment en $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires (ou impaires) de caractéristique $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix}$ et de même pour l'autre groupe de $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions.

Enfin, je suppose δ pair, k impair; la caractéristique de $\psi(u, v)$ est

$$\begin{aligned} \omega &\equiv l\lambda + \lambda', & \omega' &\equiv \gamma\lambda + (nl + \beta)\lambda' \\ \theta &\equiv -l\varepsilon - \gamma\varepsilon', & \theta' &\equiv -\varepsilon - (nl + \beta)\varepsilon \end{aligned} \qquad (\text{mod } 2).$$

Par conséquent elle satisfait aux conditions

$$\theta + l\theta' \equiv 0, \qquad \omega' + (nl + \beta)\omega \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

et c'est une des quatre caractéristiques spéciales

$$\begin{array}{rcccc} \omega \equiv & 0, & 0, & 1, & 1 \\ \omega' \equiv & 0, & 0, & nl + \beta, & nl + \beta \\ \theta \equiv & 0, & l, & 0, & l \\ \theta' \equiv & 0, & 1, & 0, & 1 \end{array} \qquad (\text{mod } 2).$$

De même que précédemment les groupes de $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires (ou impaires) et de $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires (ou paires) se déduisent des groupes analogues pour la caractéristique nulle par addition de certaines demi-périodes au nombre de quatre pour chaque caractéristique (¹).

En vue des applications géométriques, je vais maintenant déterminer les demi-périodes qui annulent les fonctions intermédiaires normales.

Soient la demi-période

$$\frac{P}{2} = \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\lambda}{2}g + \frac{\lambda'}{2}h, \qquad \frac{P'}{2} = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\lambda}{2}h + \frac{\lambda'}{2}g'$$

et la fonction $F(u, v)$ d'indices l et k; on a

$$\begin{aligned} F(u+P, v+P') = F(u, v)\, & e^{\pi i(\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\lambda\theta+\lambda'\theta')-2\pi i[\lambda(nlu+\gamma kv)+\lambda'(nku+\overline{nl+\beta k}v)]} \\ & \times e^{-\pi i[\lambda(nlg+\gamma kh)+\lambda(nkh+\overline{nl+\beta k}g')]}, \end{aligned}$$

d'où en faisant

$$u = -\frac{P}{2}, \qquad v = -\frac{P'}{2},$$

$$F\left(\frac{P}{2}, \frac{P'}{2}\right) = F\left(-\frac{P}{2}, -\frac{P'}{2}\right) e^{\pi i(\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\lambda\theta+\lambda'\theta')}\, e^{\pi i[\lambda(l\varepsilon+\gamma k\varepsilon')+\lambda'(k\varepsilon+\overline{nl+\beta k}\varepsilon')]}.$$

Par conséquent si le nombre entier

$$N = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + n\varepsilon'\lambda') + k(\gamma\varepsilon'\lambda + \varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')$$

est pair, les fonctions $F(u,v)$ impaires sont nulles pour $u = \frac{P}{2}$, $v = \frac{P'}{2}$; si N est impair, ce sont les fonctions paires qui s'annulent pour ces valeurs.

D'autre part, pour une demi-période donnée, la parité de N ne dépend que de la caractéristique et des indices l et k de la fonction; il en résulte que :

Toutes les fonctions intermédiaires normales de même caractéris-

(¹) On remarquera, au sujet de l'addition d'une demi-période, que le tableau donné par G. Humbert au numéro **55** du premier Mémoire doit être corrigé par l'échange des valeurs de ε et ε'.

tique, de mêmes indices et de même parité s'annulent pour les mêmes demi-périodes.

La question posée se ramène donc à étudier la parité de N.

1° k *pair*. — La répartition des zéros reste la même pour toute valeur paire de k et en particulier pour la valeur nulle, c'est-à-dire pour les fonctions thêta d'ordre nl; j'en ai fait l'étude dans ma Thèse et elle donne les résultats suivants :

Cas I. — Les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle s'annulent pour six demi-périodes, les $\frac{\delta-1}{2}$, fonctions impaires s'annulent pour les dix autres.

Cas II. — Les $\frac{\delta+4}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle ne s'annulent pour aucune demi-période, les $\frac{\delta-4}{2}$ fonctions impaires s'annulent pour les seize demi-périodes.

Cas III. — Les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle s'annulent pour quatre demi-périodes, les $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires s'annulent pour les douze autres.

Cas V. — Les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires (ou impaires) d'une caractéristique non nulle s'annulent pour six demi-périodes, les $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires (ou paires) de même caractéristique s'annulent pour les dix autres.

Cas VI. — Les $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires d'une caractéristique non nulle s'annulent pour huit demi-périodes, les $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires de même caractéristique s'annulent pour les huit autres.

Cas VII. — Les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires (ou impaires) d'une caractéristique de la forme $\begin{vmatrix} \omega & 0 \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$ s'annulent pour quatre demi-périodes, les $\frac{\delta-2}{2}$

fonctions impaires (ou paires) de la même caractéristique s'annulent pour les douze autres.

Cas VIII. — Les $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires d'une caractéristique s'annulent pour huit demi-périodes, les $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires de la même caractéristique s'annulent pour les huit autres.

2° *k impair*. — On a, les congruences étant écrites suivant le module 2,

$$N \equiv \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + n\varepsilon'\lambda') + (\gamma\varepsilon'\lambda + \varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')$$
$$(\delta \equiv nl^2 + \beta l - \gamma),$$
$$N \equiv \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + n\varepsilon'\lambda') + (\overline{nl^2 + \beta l - \delta}\,\varepsilon'\lambda + \varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda').$$

A. *δ impair* (cas I et V). — Il suffit d'étudier ce qui se passe pour la caractéristique nulle, puisque les fonctions de caractéristique nulle se transforment dans celles de caractéristique non nulle par addition de demi-périodes.

Pour la caractéristique nulle, on a

$$\begin{aligned} N &\equiv l(\varepsilon\lambda + n\varepsilon'\lambda') + (nl^2 + \beta l)\varepsilon'\lambda + \beta\varepsilon'\lambda' + \varepsilon\lambda' + \varepsilon'\lambda \\ &\equiv (\overline{nl + \beta}\,\varepsilon' + \varepsilon)(l\lambda + \lambda') + \varepsilon'\lambda. \end{aligned}$$

La congruence $N \equiv 1$ a six solutions qui sont :

$$\begin{array}{lcccccc} \varepsilon \equiv & nl+\beta, & nl+\beta, & nl+\beta+1, & nl+\beta+1, & 1, & 1 \\ \varepsilon' \equiv & 1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ \lambda \equiv & 1, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ \lambda' \equiv & l, & l+1, & l, & 1, & 1, & 1 \end{array}$$

et la congruence $N \equiv 0$ en a dix. Par conséquent, les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires (ou impaires) d'une caractéristique s'annulent pour six demi-périodes, les $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires (ou paires) de la même caractéristique s'annulent pour les dix autres.

B. *δ pair :*

a. Caractéristiques spéciales (cas IV et IX). — Il suffit d'étudier la caractéristique nulle pour laquelle on a

$$\begin{aligned} N &\equiv l(\varepsilon\lambda + n\varepsilon'\lambda') + l(nl+\beta)\varepsilon'\lambda + \varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda' \\ &\equiv (\overline{nl+\beta}\,\varepsilon' + \varepsilon)(l\lambda + \lambda'). \end{aligned}$$

La congruence $N \equiv 1$ a quatre solutions qui sont :

$$\begin{array}{lcccc} \varepsilon \equiv & nl+\beta+1, & nl+\beta+1, & 1, & 1 \\ \varepsilon' \equiv & 1, & 1, & 0, & 0 \\ \lambda \equiv & 1, & 0, & 1, & 0 \\ \lambda' \equiv & l+1, & 1, & l+1, & 1 \end{array}$$

Par conséquent, pour une caractéristique spéciale, les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires (ou impaires) s'annulent pour quatre demi-périodes, les $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires (ou paires) s'annulent pour les douze autres.

b. Caractéristiques non spéciales (cas X). — La caractéristique ne peut être nulle et l'on a

$$N \equiv (\overline{nl+\beta}\,\varepsilon' + \varepsilon + \theta')(l\lambda + \lambda' + \omega) + \lambda(\theta + l\theta') + \varepsilon'(\omega' + \overline{nl+\beta}\,\omega) + \omega\theta'.$$

On a donc pour annuler les fonctions paires une congruence de la forme

$$xy + (\theta + l\theta')z + (\omega' + \overline{nl+\beta}\,\omega)\,t \equiv \omega\theta' + 1.$$

Par hypothèse, les coefficients de z et t ne sont pas nuls à la fois; si par exemple on a $\theta + l\theta' \equiv 1$, on peut se donner les valeurs de x, y, t et l'on obtient z; il y a ainsi huit systèmes de solutions.

Par conséquent, les $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires d'une caractéristique non spéciale s'annulent pour huit demi-périodes, les $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires de la même caractéristique s'annulent pour les huit autres.

Le tableau suivant résume les résultats de cette étude :

				Nombre de fonctions.	Nombre de demi-périodes qui les annulent.
δ impair : $\theta(\overline{nl+\beta k}\,\omega - k\omega') + \theta'(-\gamma k\omega + l\omega')$	pair			$\frac{\delta+1}{2}$ paires.......	6
				$\frac{\delta-1}{2}$ impaires.....	10
	impair			$\frac{\delta-1}{2}$ paires.......	10
				$\frac{\delta+1}{2}$ impaires.....	6
δ pair	k pair	l pair	caractéristique nulle	$\frac{\delta+4}{2}$ paires.......	0
				$\frac{\delta-4}{2}$ impaires.....	16
			caractéristique non nulle	$\frac{\delta}{2}$ paires...........	8
				$\frac{\delta}{2}$ impaires.........	8
		l impair	caractéristiques $\begin{vmatrix}\omega & 0\\ \theta & 0\end{vmatrix}$ — $\omega\theta$ pair	$\frac{\delta+2}{2}$ paires.......	4
				$\frac{\delta-2}{2}$ impaires.....	12
			$\omega\theta$ impair	$\frac{\delta-2}{2}$ paires.......	12
				$\frac{\delta+2}{2}$ impaires.....	4
			autres caractéristiques	$\frac{\delta}{2}$ paires...........	8
				$\frac{\delta}{2}$ impaires.........	8
	k impair	caractéristiques spéciales $\omega' + (nl+\beta k)\,\omega \equiv 0$, $\theta + l\theta' \equiv 0$	$\omega\theta'$ pair	$\frac{\delta+2}{2}$ paires.......	4
				$\frac{\delta-2}{2}$ impaires.....	12
			$\omega\theta'$ impair	$\frac{\delta-2}{2}$ paires.......	12
				$\frac{\delta+2}{2}$ impaires.....	4
		autres caractéristiques		$\frac{\delta}{2}$ paires...........	8
				$\frac{\delta}{2}$ impaires.........	8

Je vais maintenant dresser le tableau complet des demi-périodes qui annulent les différentes fonctions intermédiaires; les fonctions thêta seront comprises dans ce tableau, puisqu'elles correspondent à la valeur nulle de k. La nomenclature des fonctions intermédiaires étant maintenant complète, il importe, en vue des applications, de réunir les résultats épars pour éviter des recherches nouvelles.

Cas I et V :

1° *k pair.* — Le groupe de $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions de caractéristique $\alpha\alpha'$ s'annule pour les demi-périodes

$$(\alpha\beta')\quad(\alpha\gamma')\quad(\alpha\delta')\quad(\beta\alpha')\quad(\gamma\alpha')\quad(\delta\alpha')\ (^1).$$

2° *k impair.* — Le groupe de $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions s'annule pour les demi-périodes suivantes :

a. $nl+\beta$ pair, l pair, donc γ impair,

$44'$	$(23')$	$(24')$	$(32')$	$(34')$	$(42')$	$(43')$
$34'$	$(23')$	$(24')$	$(31')$	$(33')$	$(41')$	$(44')$
$24'$	$(21')$	$(22')$	$(32')$	$(34')$	$(41')$	$(44')$
$14'$	$(21')$	$(22')$	$(31')$	$(33')$	$(42')$	$(43')$
$43'$	$(13')$	$(14')$	$(32')$	$(33')$	$(42')$	$(44')$
$33'$	$(13')$	$(14')$	$(31')$	$(34')$	$(41')$	$(43')$
$23'$	$(11')$	$(12')$	$(31')$	$(34')$	$(42')$	$(44')$
$13'$	$(11')$	$(12')$	$(32')$	$(33')$	$(41')$	$(43')$
$42'$	$(12')$	$(14')$	$(22')$	$(23')$	$(43')$	$(44')$
$32'$	$(11')$	$(13')$	$(21')$	$(24')$	$(43')$	$(44')$
$22'$	$(12')$	$(14')$	$(21')$	$(24')$	$(41')$	$(42')$
$12'$	$(11')$	$(13')$	$(22')$	$(23')$	$(41')$	$(42')$
$41'$	$(12')$	$(13')$	$(22')$	$(24')$	$(33')$	$(34')$
$31'$	$(11')$	$(14')$	$(21')$	$(23')$	$(33')$	$(34')$
$21'$	$(11')$	$(14')$	$(22')$	$(24')$	$(31')$	$(32')$
$11'$	$(12')$	$(13')$	$(21')$	$(23')$	$(31')$	$(32')$

---

(1) Pour les définitions de ces symboles, *voir* G. Humbert, *Théorie des surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 55); *Premier mémoire sur les fonctions abéliennes singulières* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V, p. 288). Les voici résumées succinctement : étant donné le tableau $\begin{smallmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\end{smallmatrix}$ dont les colonnes sont numérotées de 1 à 4 à partir de la

b. $nl+\beta$ pair, l impair, donc γ impair,

44′	(23′)	(24′)	(32′)	(34′)	(41′)	(44′)
34′	(23′)	(24′)	(31′)	(33′)	(42′)	(43′)
24′	(21′)	(22′)	(32′)	(34′)	(42′)	(43′)
14′	(21′)	(22′)	(31′)	(33′)	(41′)	(44′)
43′	(13′)	(14′)	(32′)	(33′)	(41′)	(43′)
33′	(13′)	(14′)	(31′)	(34′)	(42′)	(44′)
23′	(11′)	(12′)	(31′)	(34′)	(41′)	(43′)
13′	(11′)	(12′)	(32′)	(33′)	(42′)	(44′)
42′	(12′)	(14′)	(22′)	(23′)	(41′)	(42′)
32′	(11′)	(13′)	(21′)	(24′)	(41′)	(42′)
22′	(12′)	(14′)	(21′)	(24′)	(43′)	(44′)
12′	(11′)	(13′)	(22′)	(23′)	(43′)	(44′)
41′	(11′)	(14′)	(21′)	(23′)	(31′)	(32′)
31′	(12′)	(13′)	(22′)	(24′)	(31′)	(32′)
21′	(12′)	(13′)	(21′)	(23′)	(33′)	(34′)
11′	(11′)	(14′)	(22′)	(24′)	(33′)	(34′)

c. $n\lambda+\beta$ impair, l pair, donc γ impair,

44′	(14′)	(23′)	(32′)	(42′)	(43′)	(44′)
34′	(14′)	(23′)	(31′)	(33′)	(34′)	(41′)
24′	(14′)	(21′)	(22′)	(24′)	(32′)	(41′)
14′	(11′)	(12′)	(13′)	(23′)	(32′)	(41′)
43′	(13′)	(24′)	(32′)	(33′)	(34′)	(42′)
33′	(13′)	(24′)	(31′)	(41′)	(43′)	(44′)
23′	(11′)	(12′)	(14′)	(24′)	(31′)	(42′)
13′	(13′)	(21′)	(22′)	(23′)	(31′)	(42′)
42′	(12′)	(22′)	(23′)	(24′)	(34′)	(43′)
32′	(11′)	(13′)	(14′)	(21′)	(34′)	(43′)
22′	(12′)	(21′)	(34′)	(41′)	(42′)	(44′)
12′	(12′)	(21′)	(31′)	(32′)	(33′)	(43′)
41′	(12′)	(13′)	(14′)	(22′)	(33′)	(44′)
31′	(11′)	(21′)	(23′)	(24′)	(33′)	(44′)
21′	(11′)	(22′)	(31′)	(32′)	(34′)	(44′)
11′	(11′)	(22′)	(33′)	(41′)	(42′)	(43′)

---

gauche, la fonction de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ est désignée par le symbole obtenu en écrivant le numéro de la colonne $\frac{\omega}{\theta}$ et le numéro accentué de la colonne $\frac{\omega'}{\theta'}$; la demi-période $\frac{P}{2}\ \frac{P'}{2}$ est désignée par le symbole obtenu avec le tableau

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\lambda' \\ 1+\varepsilon & 1+\varepsilon' \end{vmatrix}$$

et mis entre parenthèses.

d. $nl+\beta$ impair, l impair, donc γ pair,

$44'$	$(14')$	$(23')$	$(34')$	$(41')$	$(42')$	$(44')$
$34'$	$(14')$	$(23')$	$(31')$	$(32')$	$(33')$	$(43')$
$24'$	$(14')$	$(21')$	$(22')$	$(24')$	$(34')$	$(43')$
$14'$	$(11')$	$(12')$	$(13')$	$(23')$	$(34')$	$(43')$
$43'$	$(13')$	$(24')$	$(33')$	$(41')$	$(42')$	$(43')$
$33'$	$(13')$	$(24')$	$(31')$	$(32')$	$(34')$	$(44')$
$23'$	$(13')$	$(21')$	$(22')$	$(23')$	$(33')$	$(44')$
$13'$	$(11')$	$(12')$	$(14')$	$(24')$	$(33')$	$(44')$
$42'$	$(12')$	$(22')$	$(23')$	$(24')$	$(32')$	$(41')$
$32'$	$(11')$	$(13')$	$(14')$	$(21')$	$(32')$	$(41')$
$22'$	$(12')$	$(21')$	$(32')$	$(42')$	$(43')$	$(44')$
$12'$	$(12')$	$(21')$	$(31')$	$(33')$	$(34')$	$(41')$
$41'$	$(11')$	$(21')$	$(23')$	$(24')$	$(31')$	$(42')$
$31'$	$(12')$	$(13')$	$(14')$	$(22')$	$(31')$	$(42')$
$21'$	$(11')$	$(22')$	$(31')$	$(41')$	$(43')$	$(44')$
$11'$	$(11')$	$(22')$	$(32')$	$(33')$	$(34')$	$(42')$

L'examen de ces tableaux conduit aux remarques suivantes :

Sous-cas a. — Les points de chaque groupe sont les six sommets non communs à deux tétraèdres de Göpel qui ont un sommet commun.

Sous-cas b. — Les points de chaque groupe sont les six sommets non communs à un tétraèdre de Göpel et à un tétraèdre de Rosenhain qui ont un sommet commun.

Sous-cas c. — Ce tableau se déduit du précédent en échangeant le premier et le deuxième caractère dans les symboles de la fonction et des périodes.

Sous-cas d. — Les points de chaque groupe sont les six sommets non communs à deux tétraèdres de Göpel qui ont un sommet commun. Ce type n'est pas identique au deuxième type de G. Humbert, car celui-ci comporte γ impair.

Cas II et VI. — δ pair, k pair, l pair :

Le cas II est celui des fonctions de caractéristique nulle qui ne sont nulles pour aucune demi-période, lorsqu'elles sont paires, et nulles pour toutes lorsqu'elles sont impaires.

Pour le cas VI les fonctions paires de chaque caractéristique non nulle s'annulent pour les demi-périodes suivantes :

34′	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)	(41′)	(42′)	(43′)	(44′)
24′	(21′)	(22′)	(23′)	(24′)	(41′)	(42′)	(43′)	(44′)
14′	(21′)	(22′)	(23′)	(24′)	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)
43′	(13′)	(14′)	(23′)	(24′)	(33′)	(34′)	(43′)	(44′)
33′	(13′)	(14′)	(23′)	(24′)	(31′)	(32′)	(41′)	(42′)
23′	(13′)	(14′)	(21′)	(22′)	(33′)	(34′)	(41′)	(42′)
13′	(13′)	(14′)	(21′)	(22′)	(31′)	(32′)	(43′)	(44′)
42′	(12′)	(14′)	(22′)	(24′)	(32′)	(34′)	(42′)	(44′)
32′	(12′)	(14′)	(22′)	(24′)	(31′)	(33′)	(41′)	(43′)
22′	(12′)	(14′)	(21′)	(23′)	(32′)	(34′)	(41′)	(43′)
12′	(12′)	(14′)	(21′)	(23′)	(31′)	(33′)	(42′)	(44′)
41′	(12′)	(13′)	(22′)	(23′)	(32′)	(33′)	(42′)	(43′)
31′	(12′)	(13′)	(22′)	(23′)	(31′)	(34′)	(41′)	(44′)
21′	(12′)	(13′)	(21′)	(24′)	(32′)	(33′)	(41′)	(44′)
11′	(12′)	(13′)	(21′)	(24′)	(31′)	(34′)	(42′)	(43′)

Ces groupes sont des octaèdres de Göpel.

Cas III et VII. — δ pair, k pair, l impair, par suite n pair; caractéristiques spéciales ($\omega' = \theta' = 0$).

Le groupe de $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions s'annule pour les demi-périodes suivantes :

44′	(41′)	(42′)	(43′)	(44′)
34′	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)
24′	(21′)	(22′)	(23′)	(24′)
14′	(11′)	(12′)	(13′)	(14′)

Cas VIII. — δ pair, k pair, l impair, par suite n pair; caractéristiques non spéciales. Les $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires de chaque caractéristique s'annulent pour les demi-périodes suivantes :

43′	(13′)	(14′)	(23′)	(24′)	(33′)	(34′)	(41′)	(42′)
33′	(13′)	(14′)	(23′)	(24′)	(31′)	(32′)	(43′)	(44′)
23′	(13′)	(14′)	(21′)	(22′)	(33′)	(34′)	(43′)	(44′)
13′	(13′)	(14′)	(21′)	(22′)	(31′)	(32′)	(41′)	(42′)
42′	(12′)	(14′)	(22′)	(24′)	(32′)	(34′)	(41′)	(43′)
32′	(12′)	(14′)	(22′)	(24′)	(31′)	(33′)	(42′)	(44′)
22′	(12′)	(14′)	(21′)	(23′)	(32′)	(34′)	(42′)	(44′)
12′	(12′)	(14′)	(21′)	(23′)	(31′)	(33′)	(41′)	(43′)
41′	(12′)	(13′)	(22′)	(23′)	(32′)	(33′)	(41′)	(44′)
31′	(12′)	(13′)	(22′)	(23′)	(31′)	(34′)	(42′)	(43′)
21′	(12′)	(13′)	(21′)	(24′)	(32′)	(33′)	(42′)	(43′)
11′	(12′)	(13′)	(21′)	(24′)	(31′)	(34′)	(41′)	(44′)

Cas IV et IX. — δ pair, k impair; caractéristiques spéciales. Il y a quatre sous-cas à distinguer pour chacun desquels les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions s'annulent pour les demi-périodes suivantes :

a. $nl+\beta$ pair, l pair,

$44'$	$(23')$	$(24')$	$(43')$	$(44')$
$43'$	$(13')$	$(14')$	$(33')$	$(34')$
$24'$	$(21')$	$(22')$	$(41')$	$(42')$
$23'$	$(11')$	$(12')$	$(31')$	$(32')$

b. $nl+\beta$ impair, l pair,

$44'$	$(14')$	$(23')$	$(34')$	$(43')$
$43'$	$(13')$	$(24')$	$(33')$	$(44')$
$22'$	$(12')$	$(21')$	$(32')$	$(41')$
$21'$	$(11')$	$(22')$	$(31')$	$(42')$

c. $nl+\beta$ pair, l impair,

$44'$	$(23')$	$(24')$	$(41')$	$(42')$
$33'$	$(13')$	$(14')$	$(31')$	$(32')$
$24'$	$(21')$	$(22')$	$(43')$	$(44')$
$13'$	$(11')$	$(12')$	$(33')$	$(34')$

d. $nl+\beta$ impair, l impair,

$44'$	$(14')$	$(23')$	$(32')$	$(41')$
$33'$	$(13')$	$(24')$	$(31')$	$(42')$
$22'$	$(12')$	$(21')$	$(34')$	$(43')$
$11'$	$(11')$	$(22')$	$(33')$	$(44')$

Les groupes des sous-cas b et c sont des groupes de Rosenhain; les groupes des sous-cas a et d sont des groupes de Göpel.

Cas X. — δ pair, k impair; caractéristiques non spéciales. Les $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires s'annulent pour les demi-périodes suivantes :

a. $nl + \beta$ pair, l pair,

34′	(23′)	(24′)	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)	(41′)	(42′)
14′	(21′)	(22′)	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)	(43′)	(44′)
33′	(13′)	(14′)	(31′)	(32′)	(41′)	(42′)	(43′)	(44′)
13′	(13′)	(14′)	(21′)	(22′)	(23′)	(24′)	(31′)	(32′)
42′	(12′)	(14′)	(22′)	(23′)	(32′)	(34′)	(42′)	(43′)
32′	(12′)	(14′)	(22′)	(23′)	(31′)	(33′)	(41′)	(44′)
22′	(12′)	(14′)	(21′)	(24′)	(32′)	(34′)	(41′)	(44′)
12′	(12′)	(14′)	(21′)	(24′)	(31′)	(33′)	(42′)	(43′)
41′	(12′)	(13′)	(22′)	(24′)	(32′)	(33′)	(42′)	(44′)
31′	(12′)	(13′)	(22′)	(23′)	(31′)	(34′)	(42′)	(43′)
21′	(12′)	(13′)	(21′)	(23′)	(32′)	(34′)	(41′)	(43′)
11′	(12′)	(13′)	(21′)	(23′)	(31′)	(34′)	(42′)	(44′)

b. $nl + \beta$ impair, l pair,

34′	(14′)	(23′)	(31′)	(32′)	(33′)	(41′)	(42′)	(44′)
24′	(14′)	(21′)	(22′)	(24′)	(34′)	(41′)	(42′)	(44′)
14′	(14′)	(21′)	(22′)	(24′)	(31′)	(32′)	(33′)	(43′)
33′	(13′)	(24′)	(31′)	(32′)	(34′)	(41′)	(42′)	(43′)
23′	(13′)	(21′)	(22′)	(23′)	(33′)	(41′)	(42′)	(43′)
13′	(13′)	(21′)	(22′)	(23′)	(31′)	(32′)	(34′)	(44′)
42′	(12′)	(22′)	(23′)	(24′)	(32′)	(42′)	(43′)	(44′)
32′	(12′)	(22′)	(23′)	(24′)	(31′)	(33′)	(34′)	(41′)
12′	(12′)	(21′)	(31′)	(33′)	(34′)	(42′)	(43′)	(44′)
41′	(12′)	(13′)	(14′)	(22′)	(32′)	(33′)	(34′)	(42′)
31′	(12′)	(13′)	(14′)	(22′)	(31′)	(41′)	(43′)	(44′)
11′	(12′)	(13′)	(14′)	(21′)	(23′)	(24′)	(31′)	(42′)

c. $nl + \beta$ pair, l impair,

34′	(23′)	(24′)	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)	(43′)	(44′)
14′	(21′)	(22′)	(31′)	(32′)	(33′)	(34′)	(41′)	(42′)
43′	(13′)	(14′)	(33′)	(34′)	(41′)	(42′)	(43′)	(44′)
23′	(13′)	(14′)	(21′)	(22′)	(23′)	(24′)	(33′)	(34′)
42′	(12′)	(14′)	(22′)	(23′)	(32′)	(34′)	(41′)	(44′)
32′	(12′)	(14′)	(22′)	(23′)	(31′)	(33′)	(42′)	(43′)
22′	(12′)	(14′)	(21′)	(24′)	(32′)	(34′)	(42′)	(43′)
12′	(12′)	(14′)	(21′)	(24′)	(31′)	(33′)	(41′)	(44′)
41′	(12′)	(13′)	(22′)	(24′)	(32′)	(33′)	(41′)	(43′)
31′	(12′)	(13′)	(22′)	(24′)	(31′)	(34′)	(42′)	(44′)
21′	(12′)	(13′)	(21′)	(23′)	(32′)	(33′)	(42′)	(44′)
11′	(12′)	(13′)	(21′)	(23′)	(31′)	(34′)	(41′)	(43′)

d. $nl+\beta$ impair, l impair,

$34'$	$(14')$	$(23')$	$(31')$	$(33')$	$(34')$	$(42')$	$(43')$	$(44')$
$24'$	$(14')$	$(21')$	$(22')$	$(24')$	$(32')$	$(42')$	$(43')$	$(44')$
$14'$	$(14')$	$(21')$	$(22')$	$(24')$	$(31')$	$(33')$	$(34')$	$(41')$
$43'$	$(13')$	$(24')$	$(32')$	$(33')$	$(34')$	$(41')$	$(43')$	$(44')$
$23'$	$(13')$	$(21')$	$(22')$	$(23')$	$(32')$	$(33')$	$(34')$	$(42')$
$13'$	$(13')$	$(21')$	$(22')$	$(23')$	$(31')$	$(41')$	$(43')$	$(44')$
$42'$	$(12')$	$(22')$	$(23')$	$(24')$	$(34')$	$(41')$	$(42')$	$(44')$
$32'$	$(12')$	$(22')$	$(23')$	$(24')$	$(31')$	$(32')$	$(33')$	$(43')$
$12'$	$(12')$	$(21')$	$(31')$	$(32')$	$(33')$	$(41')$	$(42')$	$(44')$
$41'$	$(12')$	$(13')$	$(14')$	$(22')$	$(33')$	$(41')$	$(42')$	$(43')$
$31'$	$(12')$	$(13')$	$(14')$	$(22')$	$(31')$	$(32')$	$(34')$	$(44')$
$21'$	$(12')$	$(13')$	$(14')$	$(21')$	$(23')$	$(24')$	$(33')$	$(44')$

Dans le sous-cas *a*, il y a pour chaque groupe six plans singuliers de la surface de Kummer qui contiennent chacun quatre points de ce groupe. Pour chacun de ces plans, les quatre points du groupe qu'il ne contient pas et les deux points qu'il contient n'appartenant pas au groupe forment un groupe de six points du sous-cas *d* du 2° des cas I et V.

Le sous-cas *d* présente la même disposition, et conduit à un groupe de six points du sous-cas *a* du 2° des cas I et V.

Dans le sous-cas *b*, il y a deux plans singuliers de la surface de Kummer qui contiennent chacun cinq points d'un groupe; le sixième point de ce plan et les trois points du groupe non situés dans ce plan forment un groupe de quatre points du sous-cas *c* des cas IV et IX.

Le sous-cas *c* présente la même disposition, et conduit à un groupe de quatre points du sous-cas *b* des cas IV et IX.