JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERVAND KOGBETLIANTZ

Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 107-187.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__107_0>

Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques;

PAR ERVAND KOGBETLIANTZ.

INTRODUCTION.

La méthode de sommation des séries divergentes par les moyennes arithmétiques des sommes partielles $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots,$ — bref, la méthode (C, δ) — consiste dans la formation de la suite $s_0^{(\delta)}, s_1^{(\delta)}, \ldots, s_n^{(\delta)}, \ldots,$ où

$$s_n^{(\delta)} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(n+\delta)(n+\delta-1)\ldots(n-k+\delta+1)} u_k \qquad (\delta > -1);$$

$s_n^{(\delta)}$ est la moyenne $n^{\text{ième}}$ d'ordre δ. Par définition, la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ est dite sommable (C, δ) avec la somme s, s'il existe $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s$.

La convergence n'est qu'un cas particulier pour $\delta = 0$ de la sommabilité (C, δ) et la condition nécessaire $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ de la convergence d'une série Σu_n n'est que le cas particulier (pour $\delta = 0$) de la condition nécessaire

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^{\delta}} = 0 \qquad (\delta > -1)$$

de la sommabilité (C, $\delta > -1$).

Les deux Mémoires de M. L. Féjèr sur la sommation (C, 1) des séries trigonométriques [1] et sur la sommation (C, 2) des séries de

[1] *Mathem. Annalen*, t. 58, 1904, p. 51-69.

Laplace (¹) ont provoqué toute une série de recherches dans la même direction et les résultats de M. L. Féjèr ont été beaucoup approfondis dans les deux cas. M. L. Féjèr a démontré la sommabilité $(C, 1)$ des séries trigonométriques et la sommabilité $(C, 2)$ des séries de Laplace en un point de continuité de la fonction développée et la différence essentielle entre les valeurs de l'index δ de sommabilité (C, δ) dans les deux cas n'a été qu'approuvée par les résultats des recherches postérieures.

A présent on sait (²) que la série trigonométrique d'une fonction partout continue est uniformément sommable (C, δ) pour chaque $\delta > 0$ dans tout intervalle $(0, 2\pi)$. Au contraire, il y a des fonctions continues sur toute la sphère S les séries de Laplace desquelles ne sont pas sommables $\left(C, \delta \leq \frac{1}{2}\right)$ (³). Si l'on se rappelle encore que la série de Laplace d'une fonction continue partout sur S est uniformément sommable (C, δ) pour chaque $\delta > \frac{1}{2}$ sur toute la sphère S (⁴) et que d'un autre côté il existe des fonctions continues dans $(0, 2\pi)$ dont les séries trigonométriques divergent, c'est-à-dire ne sont pas sommables $(C, \delta = 0)$, on voit que pour la série de Laplace d'une fonction continue l'index δ de sa sommabilité (C, δ) dépasse celui de la série trigonométrique d'une fonction continue d'un demi. On retrouve la même différence d'un demi, en comparant les autres propriétés analogues de la série de Laplace et des séries trigonométriques. On démontre, par exemple, que la sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ en un point (θ_0, φ_0) ne dépend que de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ au voisinage de ce point (θ_0, φ_0), si $F(\theta, \varphi)$ ne devient infinie au point $(\pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)$, diamétralement opposé au point (θ_0, φ_0) sur la sphère, que d'ordre inférieur à $\frac{3}{2}$. Au contraire, la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace dépend

(¹) *Mathem. Annalen*, t. 67, 1909, p. 76-109.

(²) M. Riesz, *Comptes rendus* du 22 novembre 1909, t. 149, p. 911, et Chapman, *Proceed. L. Math. Soc.*, 2ᵉ série, t. 9, p. 369.

(³) Gronwall, *Mathem. Annalen*, t. 75, 1914, p. 321-375.

(⁴) Gronwall, *Ibid.*

de l'allure de la fonction développée sur toute la sphère, ainsi que la sommabilité $(C, \delta < 0)$ de la série trigonométrique en un point de l'intervalle $(0, 2\pi)$ dépend de l'allure de la fonction développée dans tout intervalle $(0, 2\pi)$.

Bref, on peut dire qu'en général les moyennes arithmétiques d'ordre $\delta + \frac{1}{2}$ de la série de Laplace jouissent des mêmes propriétés que celles de la série trigonométrique d'ordre δ. Il est intéressant d'expliquer ce fait.

On trouve cette explication, en étudiant la sommabilité (C, δ) des séries ultrasphériques qui comprennent les séries trigonométriques et les séries de Laplace comme cas particuliers.

Le système orthogonal des polynomes ultrasphériques

$$P_0^{(\lambda)}(x), \quad P_1^{(\lambda)}(x), \quad P_2^{(\lambda)}(x), \quad \ldots, \quad P_n^{(\lambda)}(x), \quad \ldots \qquad (\lambda > 0)$$

se réduit pour $\lambda = \frac{1}{2}$ au système des polynomes de Legendre.

On définit les polynomes $P_n^{(\lambda)}(x)$ par leur fonction génératrice :

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(x), \tag{1}$$

et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) P_m^{(\lambda)}(x)\,dx = 0 \qquad (n \neq m), \\ &\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} [P_n^{(\lambda)}(x)]^2\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+1)}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'un autre côté le système trigonométrique $1, \cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos n\theta, \ldots$, orthogonal dans l'intervalle $(0, \pi)$ n'est qu'un cas limite pour $\lambda \to 0$ du système ultrasphérique, puisqu'on a

$$\lim_{\lambda=0} \frac{1}{\lambda} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2}{n} \cos n\theta \qquad (n \geqq 1). \tag{3}$$

On verra dans la suite que la différence d'un demi entre les valeurs $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 0$ du paramètre λ du système ultrasphérique pour ces deux cas particuliers est la seule cause du fait, signalé plus haut, que les moyennes d'ordre $\delta + \frac{1}{2}$ de la série de Laplace jouissent en général des mêmes propriétés que les moyennes d'ordre δ de la série trigonométrique.

Il existe des développements ultrasphériques de trois espèces.

Les formules (2) conduisent au développement (¹)

$$
(\mathrm{I}) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \, \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} \times \mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x) \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(t)\, \mathrm{P}_n^{(\lambda)}(t)\, dt
$$

qui généralise la série de Legendre et se réduit à elle pour $\lambda = \frac{1}{2}$. En posant $x = \cos\theta$ et en faisant tendre λ vers zéro, nous réduisons (I) au développement trigonométrique de la fonction $f(\cos\theta)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ en série des cosinus.

De même que la série de Legendre est le cas particulier de la série de Laplace, le développement (I) n'est qu'un cas particulier du développement ultrasphérique sur la sphère (²) suivant :

$$
(\mathrm{II}) \quad \mathrm{F}(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0} (n+\lambda) \iint_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, \mathrm{F}(\theta', \varphi')\, d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} \qquad (\lambda > 0),
$$

où γ est la distance sphérique des points (θ, φ) et (θ', φ'),

$$
\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').
$$

La série (II) généralise la série de Laplace et se réduit à elle pour $\lambda = \frac{1}{2}$. D'un autre côté, pour

$$
\mathrm{F}(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta) = f(x),
$$

(¹) *Cf.* N. NIELSEN, *Théorie des fonctions métasphériques*, p. 198. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

(²) E. KOGBETLIANTZ, *Comptes rendus* du 23 avril 1917, t. 164, p. 626-628.

la série (II) se transforme en (I) grâce à la relation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi (\sin\omega)^{2\lambda-1}\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\omega = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\theta')\\ &\qquad [\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega],\end{aligned}\right.$$

qui n'est qu'une simple conséquence du théorème d'addition pour les polynomes $\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ (¹).

Il est facile de prouver qu'en supposant l'existence de la dérivée $f'(x)$ et en dérivant terme à terme le développement (I), on retombe sur le développement ultrasphérique de $f'(x)$, pour lequel la valeur du paramètre λ est augmentée d'une unité. Cette remarque permet d'étudier en même temps la sommabilité (C, δ) de la série (I) et de toutes ses séries dérivées telles que

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}\frac{d^k\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x)}{dx^k}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(t)\,dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, \infty)$$

qui n'en diffèrent, sous la supposition de l'existence des dérivées $f^{(k)}(x)$, que par la valeur $\lambda + k$ du paramètre λ. On le démontre de proche en proche en s'appuyant sur l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)x\frac{d\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x)}{dx} + n(n+2\lambda)\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x) = 0$$

et sur la relation

$$\frac{d\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x)}{dx} = 2\lambda\,\mathrm{P}_{n-1}^{(\lambda+1)}(x).$$

La série ultrasphérique de troisième espèce

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned}&f(\theta) \sim \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}[\cos(\theta-\varphi)]\,[\sin^2(\theta-\varphi)]^\lambda\,d\varphi\\ &\qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)\end{aligned}\right.$$

(¹) N. Nielsen, *loc. cit.*, form. (6), p. 183.

provient du développement en série de l'intégrale de M. Angelesco (¹)

$$(6)\qquad I^{(\lambda)}(r,\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{\lambda(1-r^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)[\sin^2(\theta-\varphi)]^{\lambda}\,d\varphi}{[1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2]^{\lambda+1}}$$

qui généralise l'intégrale de Poisson et se réduit à elle pour $\lambda\to 0$. La série (III) se réduit à son tour à la série trigonométrique, si l'on y fait tendre λ vers zéro.

On développe l'intégrale (6) en série (III), en utilisant la relation

$$(7)\qquad \frac{\lambda(1-r^2)}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\lambda+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)r^n P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$$

qu'on déduit facilement de la formule (1).

Dans ce Mémoire nous étudions la série (II) au point de vue de sa sommabilité (C,δ), en supposant $\delta>\lambda$. Cette étude permet aussi d'étudier la série (III) au même point de vue; quant à la série (I) nos résultats ne lui sont applicables que pour $x=\pm 1$, parce que l'étude directe de la sommabilité (C,δ) de la série (I) en points intérieurs $-1<x<+1$ permet d'obtenir des résultats beaucoup plus précis (²).

Le problème de la sommation (C,δ) de la série (I) fut posé en 1911 par M. N. Nielsen dans la Préface à son Livre : *Théorie des fonctions métasphériques*.

La convergence de (I) à l'intérieur de l'intervalle $(-1,+1)$ fut établie sous les conditions que la fonction développée $f(x)$ satisfasse aux conditions de Dirichlet à l'intérieur de $(-1,+1)$ et qu'elle devienne infinie aux points frontières $x=\pm 1$ d'ordres moindres que $\frac{\lambda+1}{2}$, en 1878, par M. G. Darboux (³), qui a aussi démontré que la série (I) diverge partout à l'intérieur de $(-1,+1)$, si aux points frontières $f(x)$ devient infinie d'ordres plus grands que $\frac{\lambda+1}{2}$. C'est le

(¹) *Thèse*, p. 41-44. Paris, Gauthier-Villars, 1916.

(²) E. KOGBETLIANTZ, *Comptes rendus* du 14 mai 1917, t. 164, p. 778-780.

(³) *Sur l'approximation*, etc. (*Journal de Liouville*, 3ᵉ série, t. 4).

seul résultat général qui ait lieu pour chaque $\lambda > 0$; les autres résultats connus ne se rapportent qu'aux cas particuliers $\lambda = 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, correspondant aux séries trigonométriques et aux séries de Laplace.

Dans le cas $\lambda = \frac{1}{2}$, le récent résultat dû à M. Gronwall ([1]), consiste en ce que la série de Laplace d'une fonction absolument intégrable sur la sphère S est sommable (C, 1) en tout point (θ, φ) de S, où existe la valeur moyenne de la fonction développée. M. Gronwall a étudié aussi la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série de Laplace d'une fonction absolument intégrable sur la sphère pour $\delta > \frac{1}{2}$. Il a établi ([2]) que la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série de Laplace en un point (θ, φ) dépend de l'allure de la fonction développée au voisinage du point $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$ diamétralement opposé sur la sphère au point considéré (θ, φ).

Les résultats de M. Gronwall relatifs au cas $\lambda = \frac{1}{2}$ sont basés sur les propriétés suivantes des constantes de Lebesgue $\rho_n^{(\delta)}$ d'ordre δ de la série de Laplace : $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n^{(\delta)} = +\infty$, si $\delta \leqq \frac{1}{2}$, mais pour $\delta > \frac{1}{2}$ toutes ces constantes sont bornées : $\rho_n^{(\delta)} < R^{(\delta)}$, quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Dans la recherche de la sommabilité $(C, \delta > \lambda)$ de la série (II), le même rôle est joué par les constantes de Lebesgue $\rho_n^{(\delta,\lambda)}$ d'ordre δ de la série (II)

$$(8)\quad \left\{ \rho_n^{(\delta,\lambda)} = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)} \iint_S \frac{|s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|\, d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \int_{-1}^{+1} \frac{|s_n^{(\delta,\lambda)}(x)|\, dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \right. \qquad (\delta > -1),$$

où $s_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ dénote la $n^{\text{ième}}$ moyenne arithmétique d'ordre δ de la série ultrasphérique divergente

$$(9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)\, P_n^{(\lambda)}(x).$$

Les constantes $\rho_n^{(\delta)}$, envisagées par M. Gronwall, ne sont qu'un cas

([1]) *Mathem. Annalen*, t. 74, 1913, § 7, p. 251.
([2]) *Mathem. Annalen*, t. 75, 1914, p. 321-375.

particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$ des constantes $\rho_n^{(\delta,\lambda)}$

$$\rho_n^{(\delta)} = \rho_n^{(\delta,)}$$

et les résultats de M. Gronwall, concernant ces constantes $\rho_n^{(\delta)}$, sont les cas particuliers pour $\lambda = \frac{1}{2}$ de nos résultats, qu'on peut formuler (§ **2**) ainsi : $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n^{(\lambda,\lambda)} = +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n^{(\delta,\lambda)} = +\infty$ pour $\delta \leqq \lambda$, mais toutes les constantes $\rho_n^{(\delta,\lambda)}$ sont bornées dans leur ensemble pour $\delta > \lambda$, c'est-à-dire

$$\rho_n^{(\delta,\lambda)} < \mathrm{R}^{(\delta,\lambda)} \qquad (\delta > \lambda)$$

quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et $\lambda > 0$, si $\delta > \lambda$.

On démontre ces propriétés des $\rho_n^{(\delta,\lambda)}$, en s'appuyant sur les inégalités fondamentales pour les moyennes $s_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ de la série (9), qu'on obtient (§ **1**) par la méthode de Stieltjes. Ces inégalités nous permettent aussi de résoudre facilement (§ **2**) le problème de la sommation (C,δ) de la série (9), dont les deux cas particuliers

$$(9a) \qquad \frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos n\theta + \ldots \qquad (\lambda \to 0),$$

$$(9b) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{P}_1(x) + \frac{5}{2}\mathrm{P}_2(x) + \frac{7}{2}\mathrm{P}_3(x) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{P}_n(x) + \ldots \\ \qquad\qquad \left(\lambda = \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

sont bien connus. On obtient le résultat suivant : la série (9), essentiellement divergente ($\lim\limits_{n=\infty} s_n = \infty$) pour $x = +1$, n'est pas sommable $(\mathrm{C}, \delta = \lambda)$ à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ et n'est pas sommable $(\mathrm{C}, \delta = 2\lambda)$ pour $x = -1$, mais elle est sommable $(\mathrm{C}, \delta > \lambda)$ à l'intérieur de $(-1, +1)$ et l'est $(\mathrm{C}, \delta > 2\lambda)$ pour $x = -1$; sa somme est égale à zéro. La sommabilité $(\mathrm{C}, \delta > \lambda)$ de la série (9) est uniforme pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ et la sommabilité $(\mathrm{C}, \delta > 2\lambda)$ l'est dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1 - \varepsilon$.

Ces propriétés de la série (9) se réduisent pour $\lambda \to 0$ aux propriétés bien connues de la série divergente ($9a$), dont la sommabilité $(\mathrm{C}, \delta > 0)$ pour $2\pi > \theta > 0$ fut établie par M. Chapman [1]. Quant à la série ($9b$),

---

[1] *Quarterly Journal*, t. 43, 1912, p. 1-53.

dont la sommabilité (C, 2) fut établie par M. Féjèr ([1]), sa sommabilité $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ aux points intérieurs et $(C, \delta > 1)$ pour $x = -1$ a été démontrée aussi par M. Chapman ([2]).

En nous appuyant sur les propriétés des $\rho_n^{(\delta,\lambda)}$, nous pouvons énoncer et démontrer (§ 4) le théorème fondamental, que voici ([3]) :

THÉORÈME I. — *Soit le produit* $[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$ *absolument intégrable sur la sphère* S; *s'il existe la valeur moyenne généralisée* $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ *de la fonction* $F(\theta', \varphi')$ *au point* (θ', φ') *alors la série* (II) *est sommable* $(C, \delta = 2\lambda)$ *en ce point* (θ, φ) *et a pour somme* $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$; *si la fonction* $F(\theta', \varphi')$ *est continue dans un domaine* T *sur* S, *la sommabilité* $(C, 2\lambda)$ *avec la somme* $F(\theta, \varphi)$ *de la série* (II) *est uniforme dans chaque domaine* Δ, *compris tout entier à l'intérieur du domaine* T *de continuité de* $F(\theta, \varphi)$.

Nous généralisons la valeur moyenne au point (θ, φ), en la définissant ainsi :

$$(10)\quad F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} \times \lim_{t=+0} \frac{(\sin t)^{-2\lambda}}{2\pi} \int_{\gamma = t} \frac{F(\theta', \varphi')\, ds'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}} \qquad (\lambda > 0),$$

où l'intégrale curviligne est étendue au cercle de centre (θ, φ) et de rayon sphérique t, ds' désignant l'élément d'arc de ce cercle. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ se réduit à la valeur moyenne ordinaire. Le cas particulier de ce théorème pour $\lambda = \frac{1}{2}$ nous donne le résultat de M. Gronwall, relatif à la série de Laplace.

Désignons maintenant par s l'ordre d'infinitude de la fonction $F(\theta', \varphi')$ au point $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$ diamétralement opposé sur la

([1]) *Mathem. Annalen*, t. 67, *loc. cit.*, p. 76-109.
([2]) *Mathem. Annalen*, t. 72, 1912, p. 211-227.
([3]) *Comptes rendus* du 23 avril 1917, t. 164, p. 627, th. B.

sphère au point (θ, φ), la fonction $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^s \cdot F(\theta', \varphi')$ étant holomorphe pour $\gamma \geqq \pi - \varepsilon$. La sommabilité $(C, \delta < 2\lambda)$ de la série (II) en un point (θ, φ) dépend de s et nous avons le théorème (§ 5) suivant :

Théorème II. — *Soit le produit*

$$[\sin^2\theta' . \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

absolument intégrable sur la sphère S ; *la série* (II) *n'est pas sommable* (C, δ) *en un point* (θ, φ) *pour* $\delta \leqq s - 1$, *mais elle l'est* (C, δ) *pour chaque* $\delta > \lambda$, *si* $s \leqq \lambda + 1$, *et l'est* $(C, \delta > s - 1)$ *pour* $s > \lambda + 1$; *sa somme est égale à* $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$. *La sommabilité* $(C, \delta > \lambda)$, *si* $s \leqq \lambda + 1$, *ou la sommabilité* $(C, \delta > s - 1)$, *si* $s > \lambda + 1$ *est uniforme dans chaque domaine* Δ, *entièrement compris dans le domaine* T *de continuité de* $F(\theta', \varphi')$, *pour lequel l'ordre d'infinitude de* $F(\theta', \varphi')$ *aux différents points du domaine* Δ_1, *diamétralement opposé sur la sphère* S *au domaine* Δ, *ne dépasse pas* s.

On démontre aussi (§ 5) le théorème plus général suivant :

Théorème III. — *Soit le produit*

$$\left[\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{\delta - 2\lambda} [\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

absolument intégrable sur S, *alors la série* (II) *est sommable* $(C, \delta > \lambda)$ *avec la somme* $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$. *La sommabilité* $(C, \delta > \lambda)$ *est uniforme dans chaque domaine* Δ *entièrement compris dans le domaine* T *de continuité de* $F(\theta', \varphi')$, *si la condition d'intégrabilité absolue du produit*

$$\left[\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{\delta - 2\lambda} [\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

est remplie pour tout point du domaine Δ.

Le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ de ce théorème complète l'étude de la sommabilité $(C, \frac{1}{2} < \delta < 1)$ de la série de Laplace, restée jusqu'ici inachevée. Il importe de préciser le lien qui existe entre les ordres d'infinitude de la fonction $F(\theta', \varphi')$ en des points isolés de la sphère S et l'intégrabilité absolue du produit

$$[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

sur la sphère. Désignons une fois pour toutes par $\Theta(\varphi)$ ce produit

$$[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} |F(\theta', \varphi')| = \Theta(\varphi)$$

et supposons que $F(\theta', \varphi')$ devient infinie au point (θ_0, φ_0) d'ordre s, c'est-à-dire

$$F(\theta', \varphi') = (\sin\omega)^{-s} H(\theta', \varphi') \qquad (0 \leqq \omega \leqq \varepsilon),$$

où ω désigne la distance sphérique de deux poinis (θ', φ') et (θ_0, φ_0), et où

$$\lim_{\omega = 0} H(\theta', \varphi') = H(\theta_0, \varphi_0) = H_0 \neq 0, \infty.$$

Pour la série de Laplace, c'est-à-dire pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $\Theta(\varphi)$ ne dépend pas de φ et par conséquent la condition d'intégrabilité de $\Theta(\varphi)$ pour une valeur donnée de φ est en même temps la condition d'intégrabilité de $\Theta(\varphi)$ pour φ quelconque.

D'un autre côté, si l'on peut développer $F(\theta', \varphi')$ en série de Laplace sur le grand cercle K_φ de la sphère, composé de deux méridiens φ et $\varphi + \pi$, on peut la développer sur toute la sphère.

Pour $\lambda \gtrless \frac{1}{2}$, les circonstances sont plus compliquées. Soit d'abord $\lambda > \frac{1}{2}$. Envisageons le développement (II) sur le grand cercle K_φ. Si $\theta_0 \neq 0, \pi$ et $\varphi_0 \neq \varphi, \varphi + \pi$, c'est-à-dire si le point (θ_0, φ_0) ne se trouve pas sur K_φ, il faut que $s < 2$, autrement, d'un côté $\Theta(\varphi)$ ne sera pas intégrable sur S et d'un autre côté les intégrales en (II) n'auront pas de sens.

Si $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$, c'est-à-dire si le point (θ_0, φ_0) se trouve au pôle, s peut dépasser 2, $s > 2$, mais il faut que $s < 2\lambda + 1$ et de même pour $\varphi_0 = \varphi$ ou $\varphi_0 = \varphi + \pi$. Donc, dans le cas $\lambda > \frac{1}{2}$, le développement ultrasphérique de $F(\theta, \varphi)$ n'est possible sur *toute* la sphère que si l'ordre d'infinitude de $F(\theta, \varphi)$ aux pôles est inférieur à $2\lambda+1$ et aux autres points inférieur à 2, auquel cas le produit $\Theta(\varphi)$ est intégrable sur S pour φ quelconque. S'il y a sur la sphère S (les pôles exclus) au moins deux points, où $F(\theta,\varphi)$ devient infinie d'ordre $s\geqq 2$ et qui se trouvent sur les différents grands cercles K_φ, ou si la fonction $F(\theta,\varphi)$ devient infinie en un point quelconque de S d'ordre $s\geqq 2\lambda+1$, le développement (II) n'existe nulle part sur la sphère et $\Theta(\varphi)$ n'est pas intégrable sur S, quel que soit φ. Enfin si la fonction $F(\theta,\varphi)$ ne devient infinie d'ordre s, où $2\lambda+1>s\geqq 2$, qu'aux points du même grand cercle K_φ, la série (II) existe sur ce grand cercle K_φ et n'existe nulle part hors de lui et d'un autre côté $\Theta(\varphi)$ n'est intégrable sur S que si le point (θ,φ) se trouve sur K_φ.

Examinons maintenant le cas $\frac{1}{2}>\lambda>0$. Le développement (II) n'existe nulle part et $\Theta(\varphi)$ n'est pas intégrable, s'il y a sur S des points où $F(\theta,\varphi)$ devient infinie d'ordre $s\geqq 2$. La série (II) existe sur toute la sphère S et $\Theta(\varphi)$ est intégrable quel que soit φ, si tous les s sont inférieurs à $2\lambda+1$.

Enfin, s'il n'y a sur la sphère S des points singuliers qu'avec $2>s\geqq 2\lambda+1$, on peut former la série (II) partout et $\Theta(\varphi)$ est intégrable partout, à l'exception des grands cercles K_φ, qui portent sur eux les points singuliers avec $s\geqq 2\lambda+1$.

Quant à la sommabilité $(C, 2\lambda)$ et $(C, \delta>\lambda)$ de la série (II), nous voyons qu'elle suppose l'intégrabilité du produit $\Theta(\varphi)$ pour $\varphi_0\leqq\varphi\leqq\varphi_1$ $(0\leqq\varphi_0, \varphi_1\leqq\pi)$, si le domaine Δ de la sommabilité uniforme est compris entre les grands cercles K_{φ_0} et K_{φ_1}.

On voit que *la série* (II) *d'une fonction continue sur toute la sphère* S *est uniformément sommable* (C, δ) *pour chaque* $\delta>\lambda$ *sur toute la sphère vers la fonction développée* $F(\theta,\varphi)$. L'exemple du paragraphe **5** complète cette proposition en montrant que l'inégalité $\delta>\lambda$ ne peut pas y être remplacée par l'égalité $\delta=\lambda$.

L'étude de la sommabilité $(C, \delta\leqq\lambda)$ de la série (II) fera l'objet d'un autre Mémoire; quant aux moyennes d'ordres $\delta>2\lambda$, celles d'ordres $\delta\geqq 1+2\lambda$ sont particulièrement intéressantes : on démontre (§**6**) que ces moyennes restent toujours comprises, quels que soient $n=0,1,2,\ldots,\infty$ et le point (θ,φ), où l'on considère la sommabilité $(C, \delta\geqq 1+2\lambda)$ de la série (II), entre les bornes inférieure et supérieure de la fonction développée sur la sphère. La preuve est basée sur le fait suivant : les moyennes $s_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ du même ordre $\delta \geqq 1+2\lambda$ de la série (9) ne sont jamais négatives[1]. Il faut observer que M. L. Féjèr, en considérant les cas particuliers $\lambda = 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire les séries (9 *a*) et (9 *b*), a établi le même fait pour les moyennes de ces séries d'ordres $\delta = 1+2.0 = 1$ et $\delta = 1+2.\frac{1}{2} = 2$ respectivement.

Le paragraphe 4 contient aussi la preuve d'un résultat de M. Angelesco qui a démontré que l'intégrale (6), où la fonction périodique $f(\theta)$ est bornée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, tend pour $r \to 1$ vers $\frac{1}{2}\{f(\theta-0)+f(\theta+0)\}$ partout où cette expression existe. Il n'est pas nécessaire de supposer $f(\theta)$ bornée dans $(0, 2\pi)$ et il suffit que le produit $\varphi(u)$

$$\varphi(u) = \{f(\theta-u)+f(\theta+u)\}(\sin u)^{2\lambda}$$

soit absolument intégrable dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour qu'on ait

$$\lim_{r=1-0} \mathrm{I}^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{1}{2}\{f(\theta-0)+f(\theta+0)\}.$$

On le démontre en remarquant que

$$\lim_{r=1-0} \sum_0^\infty u_n r^n = s,$$

si la série $\sum_0^\infty u_n$ est sommable (C, δ) pour une valeur quelconque de δ ($\delta > -1$) et a pour somme s.

Dans la suite, nous désignons partout par $\mathrm{A}_n^{(\delta)}$ le coefficient de z^n de la série de Maclaurin de la fonction $(1-z)^{-(\delta+1)}$, donc

$$\mathrm{A}_n^{(\delta)} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(n+1)}.$$

La définition de la moyenne arithmétique $s_n^{(\delta)}$ d'ordre δ de la

---

[1] *Cf.* la fin de notre Note aux *Comptes rendus* du 20 novembre 1916 (t. **163**, p. 603).

série $\sum_0^\infty u_n$ donne, en posant $\sigma_n^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m$:

$$s_n^{(\delta)} = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m = \frac{\sigma_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}}.$$

Si l'on a la fonction génératrice

$$G(z) = \sum_0^\infty u_n z^n,$$

on obtient

$$\sum_0^\infty \sigma_n^{(\delta)} z^n = \frac{G(z)}{(1-z)^{\delta+1}}.$$

1. Dans ce paragraphe, nous allons déduire les formules approximatives pour la moyenne arithmétique $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ d'ordre δ de la série

$$(9) \qquad 0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \qquad (\gamma > 0),$$

qui diverge et représente zéro, en ce sens que la méthode de sommation par les moyennes arithmétiques ne peut lui attribuer que la somme égale à zéro pour $\pi \geqq \gamma > 0$, puisque l'on a pour $\gamma > 0$

$$\lim_{z=1-0} \sum_0^\infty (n+\lambda) z^n P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \lim_{z=1-0} \frac{\lambda(1-z^2)}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}} = 0.$$

Nous employons, pour trouver les formules approximatives, la méthode de Stieltjes [1]. En divisant (7) par $(1-r)^{-(\delta+1)}$, on a

$$(7') \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) r^m = \frac{\lambda(1+r)}{(1-r)^{\delta}(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\lambda+1}},$$

où

$$\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{(\delta)}(k+\lambda) P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma) = A_m^{(\delta)} s_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma).$$

---

(1) *Sur les polynomes de Legendre* (*Annales de Toulouse*, 1re série, t. 4, 1890, p. G.1-G.17).

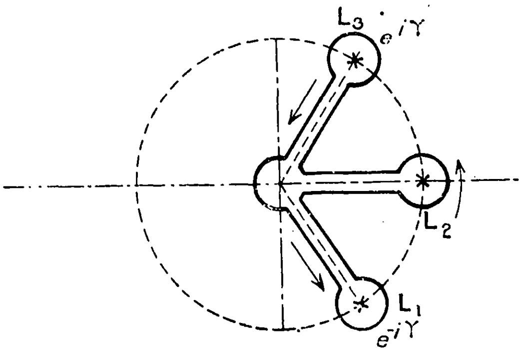
En posant $r = \frac{1}{z}$ et en multipliant par z^{n-1}, nous en déduisons

$$\sum_{m=0} \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\, z^{n-m-1} = \frac{\lambda(1+z)\, z^{n+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta}\,(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}} = \varphi(z).$$

Par conséquent

$$(12)\qquad \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{C} \frac{(1+z)\, z^{n+\delta+2\lambda}\, dz}{(z-1)^{\delta}\,(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \varphi(z)\, dz;$$

où le chemin d'intégration C entoure tous les trois points singuliers $z_1 = e^{-i\gamma}$, $z_2 = 1$, $z_3 = e^{+i\gamma}$ de la fonction intégrée et se réduit à trois lacets consécutifs L_1, L_2 et L_3 ayant leur entrée à l'origine et pour centres de leurs cercles les points critiques.



L'intégration se commence au point $z = -\varepsilon$ sur l'axe réel négatif, et les branches des fonctions multiformes $(z-1)^{\delta}$ et $T^{\lambda} = (1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda}$ sont définies par la condition que la fonction sous le signe d'intégration devient réelle au point $z = 1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, c'est-à-dire après le parcours d'un demi de C. Donc nous devons commencer l'intégration avec la branche $e^{2\lambda\pi i}\varphi(z)$. Nous supposons de plus $\gamma \geqq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ et $\gamma < \pi$. Soit d'abord $\lambda < 1$, δ étant quelconque, mais $\delta \geqq 0$. Pour calculer l'intégrale prise suivant le lacet L_1, nous employons l'identité

$$(13)\qquad \frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{n+\delta+2\lambda+1}}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda}}\right\} + \frac{\lambda(1+z)\, z^{n+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta}T^{\lambda+1}}$$
$$= (n+\lambda)\frac{z^{n+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda}} - (\delta+1)\frac{z^{n+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta+2}T^{\lambda}}.$$

En intégrant cette identité, multipliée provisoirement par $e^{2\lambda\pi i}$, le long du lacet L_1, nous obtenons

$$(14)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\varphi(z)\,dz = (n+\lambda)\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}e^{\lambda\pi i}\int_0^{e^{-i\gamma}}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda}}$$
$$-(\delta+1)\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}e^{\lambda\pi i}\int_0^{e^{-i\gamma}}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}T^{\lambda}}\qquad(\lambda<1).$$

Pour calculer l'intégrale suivant le lacet L_2, nous envisageons l'identité

$$(15)\quad \frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{n+\delta+2\lambda+1}}{\delta(z-1)^{\delta}T^{\lambda+1}}\right\}+\frac{z^{n+\delta+2\lambda+1}}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda+1}}$$
$$\equiv\frac{n+\delta+\lambda}{\delta}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta}T^{\lambda+1}}-\frac{\lambda+1}{\delta}\left\{\frac{z^{n+\delta+2\lambda+1}}{(z-1)^{\delta-1}T^{\lambda+2}}+\frac{z^{n+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta-1}T^{\lambda+2}}\right\}.$$

On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\varphi(z)\,dz = i_{n+1}^{(\delta,\lambda)}(\gamma)+i_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma),$$

où

$$i_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta}T^{\lambda+1}}.$$

Or, en intégrant l'identité (15) le long du lacet L_2, on obtient

$$(16)\quad i_n^{(\delta+1,\lambda)}(\gamma)=\frac{n+\delta+\lambda}{\delta}i_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)-\frac{\lambda}{\delta}\left[i_n^{(\delta-1,\lambda+1)}(\gamma)+i_{n-1}^{(\delta-1,\lambda+1)}(\gamma)\right].$$

Il est facile de prouver qu'on a, pour $-1<\delta\leqq 1$ et $0\leqq\gamma\leqq\pi$,

$$(17)\quad |i_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)|\leqq\frac{\lambda|A_n^{(\delta-1)}|}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2+2\lambda}}\qquad(-1<\delta\leqq 1,\ 0\leqq\gamma\leqq\pi).$$

On voit que pour $0<|\delta|<1$

$$i_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)=\frac{\lambda\sin\delta\pi}{\pi}\int_0^1\frac{u^{n+\delta+2\lambda}\,du}{(1-u)^{\delta}(1-2u\cos\gamma+u^2)^{\lambda+1}}.$$

Or

$$T_\gamma=1-2u\cos\gamma+u^2=\left[(1-u)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^2+\left[(1+u)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^2$$
$$\geqq(1+u)^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\geqq\sin^2\frac{\gamma}{2};$$

donc

$$|i_n^{\delta,\lambda}(\gamma)| \leq \frac{\lambda|\sin\delta\pi|}{\pi}\frac{1}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}}\int_0^1 (1-u)^{-\delta} u^{n+\delta-1}\,du = \frac{\lambda|A_n^{(\delta-1)}|}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}}.$$

D'un autre côté, pour $\delta = 0$ et $\delta = 1$, on a

$$i_n^{0,\lambda}(\gamma) = 0 \qquad \text{et} \qquad i_n^{1,\lambda}(\gamma) = \frac{\lambda \cdot 2^{-2\lambda-2}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}}.$$

Par conséquent, l'inégalité (17) est établie pour $-1 < \delta \leq 1$.

En s'appuyant sur (16), on en déduit pour $1 < \delta \leq 2$ et $\gamma \geq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ l'inégalité

$$(17') \qquad |i_n^{\delta,\lambda}(\gamma)| \leq \frac{c_0 A_n^{(\delta-1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}} \text{ (1)} \qquad \left(\gamma \geq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right).$$

Il est clair que (17') a lieu pour $0 \leq \delta \leq 2$. Supposons qu'elle soit satisfaite pour $0 \leq \delta \leq N$, où $N = E(N) \geq 2$, et soit $\delta' = \delta + 1$, où $N - 1 < \delta \leq N$; donc $N < \delta' \leq N + 1$. En appliquant (16), on voit que (17') est satisfaite aussi pour $N < \delta \leq N + 1$, puisque pour $\gamma \geq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}$

$$(n+1)\sin\frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, (17') a lieu quel que soit $\delta \geq 0$, si $\gamma \geq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet de conclure que l'on a aussi

$$(18) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\varphi(z)\,dz\right| \leq \frac{c_1 A_n^{(\delta-1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}} \qquad \left(\gamma \geq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2},\ \delta \geq 0\right).$$

En intégrant (13) le long du lacet L_3, on obtient

$$(19) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\varphi(z)\,dz = (n+\lambda)\frac{e^{-\lambda\pi i}\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^{e^{i\gamma}}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda}}$$
$$- (\delta+1)\frac{e^{-\lambda\pi i}\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^{e^{i\gamma}}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}T^{\lambda}}.$$

(1) Dans la suite nous désignons toutes les constantes positives, qui ne dépendent pas de n, par $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$.

Donc (12), (14) et (19) nous montrent que l'on a pour $\lambda < 1$

$$
(12') \qquad \begin{aligned} \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma) = \frac{2\sin\lambda\pi}{\pi} \mathrm{R}\Bigg\{ e^{\lambda\pi i} \Bigg[(n+\lambda) \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\mathrm{T}^\lambda} \\ - (\delta+1) \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}\mathrm{T}^\lambda} \Bigg] \Bigg\} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{L}_2} \varphi(z)\,dz. \end{aligned}
$$

Envisageons l'intégrale

$$
j_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma) = \frac{e^{i\lambda\pi}\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\mathrm{T}^\lambda}.
$$

En posant $z = (1-u)\,e^{-i\gamma}$, nous avons

$$
|z-1| = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\left(1-\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}\,\mathrm{C\,tang}^2\frac{\gamma}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \geqq 2\sqrt{1-u}\,\sin\frac{\gamma}{2} \geqq 2(1-u)\sin\frac{\gamma}{2}
$$

et

$$
|\mathrm{T}| = |z - e^{-i\gamma}|\,|z - e^{i\gamma}| = u\,|2i\sin\gamma + u\,e^{-i\gamma}| \geqq u(1-u)\sin\gamma;
$$

donc

$$
|j_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{-\lambda}(1-u)^{n+\lambda-1}\,du}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}(\sin\gamma)^\lambda} = \frac{\mathrm{A}_n^{(\lambda-1)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}(\sin\gamma)^\lambda},
$$

ce qui nous donne pour $\lambda < 1$, $\delta \geqq 0$ et $\gamma \geqq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}$, eu égard à (18) :

$$
(20) \quad \left\{ \begin{aligned} |\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq \frac{2\lambda\,\mathrm{A}_n^{(\lambda)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}(\sin\gamma)^\lambda} + \frac{2(1+\delta)\,\mathrm{A}_n^{(\lambda-1)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+2}(\sin\gamma)^\lambda} + \frac{c_1\,\mathrm{A}_n^{(\delta-1)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}} \\ \left(0 < \lambda \leqq 1,\ \delta \geqq 0,\ \pi \geqq \gamma \geqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right.
$$

L'inégalité (20) a lieu aussi pour $\lambda = 1$ puisque alors (13) nous permet de conclure que l'on a

$$
\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}_1} \varphi(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}_3} \varphi(z)\,dz = -(n+1)\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{\delta+3}{2}\right)\gamma - \frac{\delta\pi}{2}\right]}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\sin\gamma} \\ + (1+\delta)\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{\delta+2}{2}\right)\gamma - \frac{\delta+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+2}\sin\gamma}. \end{aligned}
$$

En nous appuyant sur les inégalités

$$(21) \qquad A_n^{(p)} < c_2(n+1)^p, \qquad (n+1)^p < c_3 A_n^{(p)} \qquad (p > -1)$$

et

$$(n+1)\sin\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{1}{2},$$

dont la dernière est la conséquence de la restriction $\gamma \geqq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}$, nous déduisons de l'inégalité (20) le corollaire

$$(22) \qquad \begin{cases} (\sin\gamma)^\lambda \,|\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq \dfrac{c_4 A_n^{(\lambda)}}{\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} + \dfrac{c_5 A_n^{(\delta-1)}}{\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+2}} \\ \left(1 \geqq \lambda > 0,\ \pi \geqq \gamma \geqq \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\pi}{2},\ \delta \geqq 0\right). \end{cases}$$

Pour $\delta \leqq \lambda + 1$, l'inégalité (22) peut être écrite ainsi :

$$(22_1) \qquad (\sin\gamma)^\lambda \,|\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq \frac{c_6 A_n^{(\lambda)}}{\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad \left(1 \geqq \lambda > 0,\ \delta \geqq 0,\ \pi \geqq \gamma \geqq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right),$$

puisque pour $\delta \leqq \lambda + 1$ on a

$$\left[(n+1)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^{\lambda+1-\delta} \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1-\delta};$$

donc

$$\frac{c_5 A_n^{(\delta-1)}}{\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+2}} = \frac{c_5 (n+1)^{\lambda+1-\delta} A_n^{(\delta-1)}}{\left[(n+1)\sin\dfrac{\gamma}{2}\right]^{\lambda+1-\delta}\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} < \frac{c'_5 A_n^{(\lambda)}}{\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}.$$

Soit maintenant $\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2} \geqq \gamma \geqq 0$. Nous aurons besoin de l'inégalité

$$(23) \qquad |P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{2 A_n^{(\lambda-1)}}{(\sin\gamma)^\lambda} \qquad (\lambda > 0,\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi).$$

Pour la démontrer, supposons d'abord $\lambda < 1$ et appliquons la méthode de Stieltjes à (1). Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{z^{n+2\lambda-1}\,dz}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \\
&= \frac{e^{2\lambda\pi i}-1}{2\pi i}\int_0^{e^{i\gamma}} \frac{z^{n+2\lambda-1}\,dz}{T^{\lambda}} + \frac{1-e^{-2\lambda\pi i}}{2\pi i}\int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+2\lambda-1}\,dz}{T^{\lambda}} \\
&= \frac{2\sin\lambda\pi}{\pi} R\left\{ e^{\lambda\pi i}\int_0^{e^{i\gamma}} \frac{z^{n+2\lambda-1}\,dz}{T^{\lambda}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Or, pour $z=(1-u)e^{i\gamma}$, on a $|T| \geqq u(1-u)\sin\gamma$; donc, pour $\lambda < 1$,

$$
|P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{2\sin\lambda\pi}{\pi(\sin\gamma)^{\lambda}}\int_0^1 u^{-\lambda}(1-u)^{n+\lambda-1}\,du = \frac{2A_n^{(\lambda-1)}}{(\sin\gamma)^{\lambda}} \qquad (\lambda<1).
$$

L'inégalité (23) a lieu aussi pour $\lambda = 1$, puisque

$$
|P_n^{(1)}(\cos\gamma)| = \frac{|\sin(n+1)\gamma|}{\sin\gamma} \leqq \frac{1}{\sin\gamma} < \frac{2}{\sin\gamma}.
$$

Supposons maintenant que (23) a lieu pour

$$
\lambda \leqq N = E(N) \geqq 1,
$$

et soit $\lambda' = \lambda + 1$, où $N - 1 < \lambda \leqq N$, et $N < \lambda' \leqq N + 1$.

On a

$$
P_n^{(\lambda')}(\cos\gamma) = P_n^{(\lambda+1)}(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} P_{n-m}^{(1)}\, P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma).
$$

Par conséquent, pour $N < \lambda' \leqq N+1$, on a

$$
|P_n^{(\lambda')}(\cos\gamma)| \leqq \frac{1}{\sin\gamma}\sum_{m=0}^{n} |P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{2}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}}\sum_{m=0}^{n} A_m^{(\lambda-1)} = \frac{2A_n^{(\lambda'-1)}}{(\sin\gamma)^{\lambda'}},
$$

et l'on voit que (23) est établie pour λ quelconque positif.

A l'aide de (23), on démontre l'inégalité

$$
(24) \qquad |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{C_7(n+1)^{\lambda+1}}{(\sin\gamma)^{\lambda}} \qquad (0<\gamma<\pi,\ \lambda>0,\ \delta>-1).
$$

On a en effet

$$(\sin\gamma)^{\lambda}\,|\,\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,| \leqq \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)}(m+\lambda)(\sin\gamma)^{\lambda}\,|\,P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,|$$

$$\leqq 2\lambda\sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)}\,\frac{m+\lambda}{\lambda}\,A_m^{(\lambda-1)}$$

$$= 2\lambda\sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)}\,A_m^{(\lambda)} = 2\lambda\,A_n^{(\delta+\lambda+1)},$$

d'où découle l'inégalité (24).

Pour $\gamma \leqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}$, on a $(n+1)\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{\pi}{4} < 1$ et l'inégalité précédente nous donne

$$(\sin\gamma)^{\lambda}\,|\,\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,| < \frac{2\lambda\,A_n^{(\delta+\lambda+1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}(n+1)^{\delta+1}} < \frac{c'_6\,A_n^{(\lambda)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}$$

$$\left(\lambda > 0,\ \delta > -1,\ 0 \leqq \gamma \leqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui prouve que l'inégalité (22_1) est valable aussi pour $\gamma \leqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}$. Elle est donc démontrée pour $0 \leqq \gamma \leqq \pi$, $0 \leqq \delta \leqq \lambda+1$, $0 < \lambda \leqq 1$.

Pour lever la restriction $\lambda \leqq 1$, nous observons que l'on a

$$\sum_{0}^{\infty} \sigma_n^{(\delta,\lambda+1)}(\cos\gamma)\,z^n = \frac{1+z}{(1-z)^{\delta}T}\,\frac{\lambda+1}{T^{\lambda}}$$

$$= (\lambda+1)\left[\sum_{0}^{\infty} \sigma_n^{(\delta,1)}(\cos\gamma)\,z^n\right]\left[\sum_{0}^{\infty} z^n\,P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right],$$

d'où

$$\sigma_n^{(\delta,\lambda+1)}(\cos\gamma) = (\lambda+1)\sum_{m=0}^{n} \sigma_{n-m}^{(\delta,1)}(\cos\gamma)\,P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma).$$

Par conséquent on obtient pour $\delta \leqq 2$, en s'appuyant sur (22_1)

et (23),

$$
\begin{aligned}
&(\sin\gamma)^{\lambda+1}\,|\sigma_n^{(\delta,\lambda+1)}(\cos\gamma)| \\
&\quad\leq(\lambda+1)\sum_{m=0}^{n}\sin\gamma\,|\sigma_{n-m}^{(\delta,1)}(\cos\gamma)|\,(\sin\gamma)^{\lambda}\,|P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma)| \\
&\quad\leq(\lambda+1)\sum_{m=0}^{n}\frac{c_6 A_{n-m}^{(1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\,2A_m^{(\lambda-1)}=\frac{2(\lambda+1)c_6 A_n^{(\lambda+1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}=\frac{c_8 A_n^{(\lambda+1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad (\delta\geq 2),
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que (22_1) a lieu pour $\lambda>1$ quelconque, si l'on suppose qu'elle est valable pour $\lambda\leq 1$. Or nous l'avons établie pour $0<\lambda\leq 1$ et $0\leq\delta\leq 1$. Donc (22_1) est vraie pour λ quelconque positif et $0\leq\delta\leq 1$, $0\leq\gamma\leq\pi$. Mais on a aussi

$$
\begin{aligned}
&\sum_0^{\infty} z^n\,\sigma_n^{(\delta+1,\lambda+1)}(\cos\gamma) \\
&\quad=\frac{\lambda+1}{\lambda}\,\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{\delta}T^{\lambda+1}}\,\frac{1}{(1-z)T} \\
&\quad=\frac{\lambda+1}{\lambda}\left[\sum_0^{\infty} z^n\,\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\right]\left[\sum_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma}\,z^n\right],
\end{aligned}
$$

ce qui nous donne

$$
\sigma_n^{(\delta+1,\lambda+1)}(\cos\gamma)=\frac{\lambda+1}{\lambda}\sum_{m=0}^{n}\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,\frac{\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\left(n-m+\frac{3}{2}\right)\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma}
$$

et, par conséquent, on obtient l'inégalité

$$
(\sin\gamma)^{\lambda+1}\,|\sigma_n^{(\delta+1,\lambda+1)}(\cos\gamma)|\leq\frac{\lambda+1}{\lambda\sin\frac{\gamma}{2}}\sum_{m=0}^{n}(\sin\gamma)^{\lambda}\,|\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|.
$$

Supposons maintenant que l'on ait démontré (22_1) pour $0<\lambda\leq N$ et $0\leq\delta\leq\lambda+1\leq N+1$. L'inégalité précédente permet d'établir qu'alors (22_1) est valable pour $N<\lambda\leq N+1$ et $1\leq\delta\leq\lambda+1\leq N+2$. Or (22_1) est établie aussi pour $0\leq\delta\leq 1$ quel que soit $\lambda>0$; donc (22_1)

est valable pour $0 \leqq \delta \leqq \lambda + 1 \leqq N + 2$, si elle l'est pour

$$0 \leqq \delta \leqq \lambda + 1 \leqq N + 1.$$

Mais plus haut l'inégalité (22_1) était établie pour $2 \geqq \lambda + 1 \geqq \delta \geqq 0$; donc elle a lieu pour $\lambda + 1 \geqq \delta \geqq 0$, quel que soit $\lambda > 0$. On en déduit l'inégalité

$$(24_1) \quad (\sin\gamma)^{\lambda} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{c_9 (n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad (\lambda > 0,\ \lambda + 1 \geqq \delta \geqq 0,\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi).$$

Passons maintenant au cas $\delta > \lambda + 1$. La même inégalité

$$(\sin\gamma)^{\lambda+1} |\sigma_n^{(\delta+1,\lambda+1)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{\lambda+1}{\lambda \sin\frac{\gamma}{2}} \sum_{m=0}^{n} (\sin\gamma)^{\lambda} |\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|$$

prouve que l'existence de (22) pour $\lambda \leqq L$ et $\delta > \lambda + 1$ l'entraîne aussi pour $L < \lambda \leqq 1$ et $\delta > \lambda + 1$, ce qui démontre que (22) a lieu pour λ quelconque, pourvu que l'on ait

$$\delta > \lambda + 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma \geqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

On s'affranchit de la restriction $\gamma \geqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}$, en s'appuyant sur l'inégalité (24), et définitivement on obtient pour $\delta > \lambda + 1$ l'inégalité

$$(24_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sin\gamma)^{\lambda} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \dfrac{c'_1 (n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} + \dfrac{c'_2}{(n+1)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+2}} \\ \qquad (\lambda > 0,\ \delta > \lambda + 1,\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi) \end{array} \right.$$

qui, combinée avec (24_1), donne

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sin\gamma)^{\lambda} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \dfrac{c_{10} (n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} + \dfrac{c_{11}}{(n+1)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+2}} \\ \qquad (\lambda > 0,\ \delta \geqq 0,\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi). \end{array} \right.$$

Dans le cas $\delta = \lambda$ nous aurons besoin de l'expression explicite du premier terme dans la formule approximative pour $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$. On le déduit de (12).

Envisageons l'intégrale

$$\lambda_n^{\delta,\mu,\lambda}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{z^{n+\delta+\mu+\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}(z-e^{i\gamma})^{\mu}(z-e^{-i\gamma})^{\lambda}}.$$

Pour $\lambda < 1$ la substitution $z = e^{-i\gamma}(1-u)$ nous fournit

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{\delta,\mu,\lambda}(\gamma) &= \frac{e^{i\lambda\pi}\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+\mu+\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}(z-e^{i\gamma})^{\mu}(z-e^{-i\gamma})^{\lambda}} \\
&= \frac{e^{-i\left[\left(n+\mu+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma-\frac{\mu+\delta+1}{2}\pi\right]}}{(2\sin\gamma)^{\mu}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \\
&\quad\times\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{-\lambda}(1-u)^{n+\delta+\mu+\lambda}\,du}{\left[1-u.\tau\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]^{\delta+1}[1-u.\tau(\gamma)]^{\mu}},
\end{aligned}$$

où

$$\tau(\gamma) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}}{2\sin\gamma} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\gamma.$$

Désignons le dénominateur de la différentielle par $\Psi(u)$:

$$\Psi(u) = \left[1-u.\tau\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]^{\delta+1}[1-u.\tau(\gamma)]^{\mu}.$$

On a

$$|1-u.\tau(\gamma)| = \left[\left(1-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}\cot^2\gamma\right]^{\frac{1}{2}} \geqq 1-\frac{u}{2} \geqq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

donc

$$|\Psi(u)| \geqq 2^{-(\mu+\delta+1)}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\Psi(u)}-\frac{1}{\Psi(0)}\right| &= \left|\int_0^u \frac{\Psi'(u)\,du}{\Psi^2(u)}\right| \\
&\leqq \int_0^u \left|\frac{\mu.\tau(\gamma)}{1-u.\tau(\gamma)}+\frac{(\delta+1).\tau\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1-u.\tau\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right|\frac{du}{|\Psi(u)|} \\
&\leqq 2^{\mu+\delta+1}\left[\frac{\mu}{2\sin\gamma}+\frac{\delta+1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\right]\int_0^u du < \frac{c_{12}u}{2\sin\gamma} \qquad (0\leqq u\leqq 1).
\end{aligned}$$

Or $\Psi(0) = 1$; donc pour $\lambda < 1$

$$\left| \mathfrak{S}_n^{(\delta,\mu,\lambda)}(\gamma) - \frac{e^{-i\left[\left(n+\mu+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma - \frac{\mu+\delta+1}{2}\pi\right]}}{(2\sin\gamma)^{\mu}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \, \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \, \frac{\Gamma(1-\lambda)\,\Gamma(n+\delta+\mu+\lambda+1)}{\Gamma(n+\delta+\mu+2)} \right|$$

$$\leqq \frac{c_{12}}{(2\sin\gamma)^{\mu+1}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \, \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \, \frac{\Gamma(2-\lambda)\,\Gamma(n+\delta+\mu+\lambda+1)}{\Gamma(n+\delta+\mu+3)}.$$

On a

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi} \qquad (0<\lambda<1)$$

et

$$\left| \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)} - A_n^{(\alpha)} \right| < c_{13}(n+1)^{\alpha-1},$$

donc

$$(26) \qquad \left| \mathfrak{S}_n^{(\delta,\mu,\lambda)}(\gamma) - \frac{A_n^{(\lambda-1)}\, e^{-i\left[\left(n+\mu+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma - \frac{\mu+\delta+1}{2}\pi\right]}}{(2\sin\gamma)^{\mu}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \right| < \frac{c_{14}(n+1)^{\lambda-2}}{(\sin\gamma)^{\mu+1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}$$

$$(\delta > -1,\ \mu \geqq 0,\ 0 < \lambda \leqq 1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Pour s'affranchir de la restriction $\lambda \leqq 1$ — pour $\lambda = 1$ l'inégalité (26) a lieu, puisque alors son premier membre s'annule, — nous supposons dans la suite

$$\pi - \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2} \geqq \gamma \geqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2},$$

ce qui entraîne

$$(n+1)\sin\gamma \geqq (n+1)\,\frac{2}{\pi}\,\gamma \geqq 1.$$

En intégrant l'identité

$$(27) \qquad \frac{d}{dz}\left\{ \frac{z^{n+\delta+\mu+\lambda+2}}{(z-1)^{\delta+1}(z-e^{i\gamma})^{\mu}(z-e^{-i\gamma})^{\lambda}} \right\}$$

$$\equiv \frac{z^{n+\delta+\mu+\lambda+1}}{(z-1)^{\delta+1}(z-e^{i\gamma})^{\mu}(z-e^{-i\gamma})^{\lambda}} \times \left[n+1 - \frac{\delta+1}{z-1} - \frac{\mu\, e^{i\gamma}}{z-e^{i\gamma}} - \frac{\lambda\, e^{-i\gamma}}{z-e^{-i\gamma}} \right]$$

le long du lacet L_1, nous obtenons la relation

$$(28)\qquad \mathcal{A}_n^{(\delta,\mu,\lambda+1)}(\gamma) = \frac{e^{i\gamma}}{\lambda}\Big\{(n+1)\,\mathcal{A}_{n+1}^{(\delta,\mu,\lambda)}(\gamma) - (\delta+1)\,\mathcal{A}_n^{(\delta+1,\mu,\lambda)}(\gamma) - \mu\, e^{i\gamma}\,\mathcal{A}_n^{(\delta,\mu+1,\lambda)}(\gamma)\Big\}.$$

Supposons maintenant que (26) soit remplie pour $\lambda \leqq L = E(L)$, alors (28) démontre qu'elle est remplie aussi pour $L < \lambda \leqq L + 1$, si

$$\pi - \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2} \geqq \gamma \geqq \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2};$$

donc (26) est remplie pour chaque $\lambda > 0$.

Pour $\mu = \lambda$, (26) se réduit à

$$(29)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}T^\lambda} - \frac{A_n^{(\lambda-1)}\,e^{-i\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma - \frac{\lambda+\delta+1}{2}\pi\right]}}{(2\sin\gamma)^\lambda\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\right| < \frac{c_{14}(n+1)^{\lambda-2}}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}$$

et l'inégalité (29) est valable pour

$$\lambda > 0,\qquad \delta > -1,\qquad \left|\frac{\pi}{2} - \gamma\right| < \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}.$$

Le même raisonnement, fondé sur l'inégalité (27), où l'on a changé les rôles de μ et λ entre eux, s'applique aussi à l'intégrale prise suivant le lacet L_3 et fournit, toujours sous l'hypothèse

$$\left|\frac{\pi}{2} - \gamma\right| < \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2},$$

l'inégalité

$$(30)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}T^\lambda} - \frac{A_n^{(\lambda-1)}\,e^{i\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma - \frac{\lambda+\delta+1}{2}\pi\right]}}{(2\sin\gamma)^\lambda\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\right| < \frac{c_{14}(n+1)^{\lambda-2}}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}.$$

Mais en intégrant la fonction $\frac{1}{2\pi i}\varphi(z)$ le long des lacets L_1 et L_3 et en employant l'identité (13), nous voyons que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\varphi(z)\,dz\\
&\quad=(n+\lambda)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}T^{\lambda}}\right\}\\
&\quad\quad-(\delta+1)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}T^{\lambda}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}T^{\lambda}}\right\},
\end{aligned}$$

d'où, pour $\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right|\leqq\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}$, nous déduisons à l'aide de (29) et (30) l'inégalité

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\varphi(z)\,dz-\frac{2\lambda A_n^{(\lambda)}\cos\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma-\frac{\lambda+\delta+1}{2}\pi\right]}{(2\sin\gamma)^{\lambda}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\right|$$
$$<\frac{c_{15}(n+1)^{\lambda-1}}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}$$

et enfin, eu égard à (18),

$$\begin{aligned}
(31)\qquad s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)&=\frac{\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)}{A_n^{(\delta)}}=\frac{1}{2\pi i A_n^{(\delta)}}\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}\right)\varphi(z)\,dz\\
&=\frac{2\lambda A_n^{(\lambda)}}{A_n^{(\delta)}}\,\frac{\sin\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)\gamma-\frac{\lambda+\delta}{2}\pi\right]}{(2\sin\gamma)^{\lambda}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\\
&\quad+\frac{\theta_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)(n+1)^{\lambda-\delta-1}}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}+\frac{\eta_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)}{(n+1)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2+2\lambda}},
\end{aligned}$$

où

$$|\theta_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)|<c_{16}\qquad\text{et}\qquad|\eta_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)|<c_{17}$$

pour

$$\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right|\leqq\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2},\qquad\delta>-1,\qquad\lambda>0\qquad\text{et}\qquad n=0,1,2,\ldots,\infty.$$

Le cas particulier $\delta=\lambda$ de (31) est plus simple :

$$(32)\qquad s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)=\frac{2\lambda\sin\left[\left(n+\frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma-\lambda\pi\right]}{(2\sin\gamma)^{\lambda}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}+\frac{\varepsilon_n^{(\lambda)}(\gamma)}{(n+1)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma\right)^{\lambda+1}},$$

où

$$|\varepsilon_n^{(\lambda)}(\gamma)| < c_{18}$$

pour

$$\lambda > 0, \quad \left|\frac{\pi}{2} - \gamma\right| \leq \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty.$$

L'inégalité (24_1) se réduit pour $\delta = \lambda$ à l'inégalité

$$(24_3) \qquad \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+1} |s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)| < \frac{c_{19}}{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda}} \qquad (0 \leq \gamma \leq \pi,\ \lambda > 0).$$

Il est très instructif de comparer cette inégalité (24_3) avec l'inégalité

$$(33) \qquad \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+1} |s_n^{(2\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)| < c_{20} \qquad (0 \leq \gamma \leq \pi,\ \lambda > 0)$$

que nous allons démontrer tout à l'heure. L'influence du point $\gamma = \pi$ sur la moyenne $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$, à laquelle est due la présence du facteur $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-\lambda}$ dans le second membre de (24_3), est complètement éliminée dans (33) grâce à l'accroissement de l'ordre δ de la moyenne $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ de $\delta = \lambda$ jusqu'à $\delta = 2\lambda$.

Il est facile de déduire (33) pour $\gamma \leq \frac{\pi}{n+2\lambda}$ de l'inégalité évidente

$$(34) \qquad |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| < c_{21}(n+1)^{2\lambda+1} \qquad (\lambda > 0,\ \delta > -1,\ 0 \leq \gamma \leq \pi)$$

qui n'est que la conséquence de l'inégalité bien connue [1]

$$|P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)| \leq A_n^{(2\lambda-1)} \qquad (0 \leq \gamma \leq \pi,\ \lambda > 0),$$

$$\begin{aligned}
|s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| &= \left| \sum_{m=0}^{n} \frac{A_{n-m}^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}} (m+\lambda) P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma) \right| \\
&\leq \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} (m+\lambda) A_m^{(2\lambda-1)} \\
&= \frac{2\lambda}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} \frac{m+\lambda}{m+2\lambda} A_{n-m}^{(\delta)} A_m^{(2\lambda)} < \frac{2\lambda A_n^{(\delta+2\lambda+1)}}{A_n^{(\delta)}} < c_{21}(n+1)^{2\lambda+1}.
\end{aligned}$$

---

[1] Cf. N. NIELSEN, *loc. cit.*, p. 194, formule (10), d'où l'on déduit facilement l'inégalité en question.

Si $\gamma \leqq \frac{\pi}{n+2\lambda}$, alors

$$c_{21}\left[(n+1)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^{\delta+1} \leqq \left(\frac{n+1}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right)^{\delta+1} c_{21} < c_{22};$$

donc

$$(34_1) \qquad |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \leqq \frac{c_{22}(n+1)^{2\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad \left(\delta > -1,\ \gamma \leqq \frac{\pi}{n+2\lambda}\right).$$

Soit maintenant $\gamma \geqq \frac{\pi}{n+2\lambda}$. Supposons $\lambda \leqq \frac{1}{4}$ et $-1 < \delta \leqq 2\lambda + 1$. En reprenant $(12')$ et l'intégrale

$$j_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma) = \frac{e^{i\lambda\pi}\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+2\lambda}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\mathrm{T}^{\lambda}},$$

nous avons pour $z = e^{-i\gamma}(1-u)$

$$|z-1| \geqq 2\sin\frac{\gamma}{2}(1-u) \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{T}| = u\sqrt{4(1-u)\sin^2\gamma + u^2} \geqq u^2;$$

donc

$$|j_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq \frac{\sin\lambda\pi}{\pi\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\int_0^1 u^{-2\lambda}(1-u)^{n+2\lambda-1}\,du = \frac{\mathrm{A}_n^{(2\lambda-1)}}{2\cos\lambda\pi\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}.$$

Par conséquent $(12')$ nous donne, eu égard à (17) et à 18 :

$$\begin{aligned}
|\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| &\leqq \frac{(n+2\lambda)\mathrm{A}_n^{(2\lambda-1)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\cos\lambda\pi} + \frac{(\delta+1)\mathrm{A}_{n-1}^{(2\lambda-1)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+2}\cos\lambda\pi} + \frac{c_1'|\mathrm{A}_n^{(\delta-1)}|}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}} \\
&\leqq \frac{2\lambda\mathrm{A}_n^{(2\lambda)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + \frac{\lambda(\delta+1)\mathrm{A}_n^{(2\lambda)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
&\quad + \frac{c_1'|\mathrm{A}_n^{(\delta-1)}|(n+2\lambda)^{2\lambda+1-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\left[(n+2\lambda)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^{2\lambda+1-\delta}},
\end{aligned}$$

puisque, pour $0 < \lambda \leqq \frac{1}{4}$, $\cos\lambda\pi \geqq \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Or, pour $\gamma \geqq \frac{\pi}{n+2\lambda}$ et $2\lambda+1 \geqq \delta$, on a

$$\left[(n+2\lambda)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^{2\lambda+1-\delta} \geqq 1,$$

donc

$$(35)\quad |\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq \frac{c_{23}\,A_n^{(2\lambda)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad \left(0<\lambda \leqq \frac{1}{4},\ \gamma \geqq \frac{\pi}{n+2\lambda},\ -1<\delta \leqq 2\lambda+1\right).$$

Il s'agit maintenant de lever la restriction accidentelle $\lambda \leqq \frac{1}{4}$. Supposons que l'inégalité (35) soit établie pour $\lambda \leqq \frac{N}{4}$, où $N = E(N)$. Nous allons démontrer qu'alors elle est remplie aussi pour $\frac{N}{4} < \lambda \leqq \frac{N+1}{4}$. L'inégalité (35) est démontrée pour $-1<\delta \geqq 1$ et $0<\lambda \leqq \frac{1}{4}$, et l'on vérifie d'abord qu'elle est valable pour λ quelconque positif, si $\delta \leqq 1$, en employant le raisonnement suivant. Soit $\lambda > \frac{1}{4}$ et posons

$$\lambda = \frac{1}{4} + \mu,$$

où $\mu > 0$. On a pour $-1<\delta \leqq 1$:

$$\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma) = \frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^\delta T^{\lambda+1}} = 4\lambda \frac{\frac{1}{4}(1+z)}{(1-z)^\delta T^{\frac{5}{4}}} \frac{1}{T^\mu}$$

$$= 4\lambda \left\{\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta,\frac{1}{4})}(\gamma)\right\}\left\{\sum_0^\infty z^n P_n^{(\mu)}(\cos\gamma)\right\},$$

d'où il vient

$$\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma) = 4\lambda \sum_{m=0}^n \sigma_{n-m}^{(\delta,\frac{1}{4})}(\gamma)\, P_m^{(\mu)}(\cos\gamma) \qquad \left(\lambda = \mu + \frac{1}{4}\right).$$

Mais $|P_m^{(\mu)}(\cos\gamma)| \leqq A_m^{(2\mu-1)}$ et, en appliquant (35), nous voyons que l'on a pour λ quelconque positif, pourvu que $\delta \leqq 1$:

$$|\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| \leqq 4\lambda \frac{c_{23}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \sum_{m=0}^n A_{n-m}^{(\frac{1}{2})} A_m^{(2\mu-1)} = \frac{4\lambda\, c_{23}\, A_n^{(2\lambda)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad (\lambda > 0).$$

Nous avons donc établi l'inégalité (35) pour $-1<\delta \leqq 1$ et $\lambda > 0$.

Soient maintenant

$$\lambda' = \frac{1}{4} + \lambda > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \delta' = \delta + \frac{1}{2};$$

on a

$$(36) \qquad \sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta',\lambda')}(\gamma) = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{\delta}T^{\lambda+1}} \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{4}}}$$
$$= \frac{\lambda'}{\lambda}\left\{\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)\right\}\left\{\sum_0^\infty z^n \tau_n^{(\frac{1}{4})}(\gamma)\right\},$$

en posant

$$\sum_0^\infty z^n \tau_n^{(\frac{1}{4})}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1-z}\sqrt[4]{1-2z\cos\gamma+z^2}} = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{4}}}.$$

En appliquant la méthode de Stieltjes, nous obtenons la formule

$$\tau_n^{(\frac{1}{4})}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-u}\,T^{\frac{1}{4}}} + R\frac{1+i}{\pi}\int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z-1}\,T^{\frac{1}{4}}}.$$

La substitution $z = e^{-i\gamma}(1-u)$ nous fournit

$$\left|T^{\frac{1}{4}}\right| \geq \sqrt{u} \qquad \text{et} \qquad \left|\sqrt{z-1}\right| \geq \sqrt{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

donc on a

$$\left|R\frac{1+i}{\pi}\int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z-1}\,T^{\frac{1}{4}}}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left|\int_0^{e^{-i\gamma}}\right|$$
$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\pi\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 (1-u)^{n-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{\sqrt{2}\,A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-u}\,T^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{\pi\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 u^n(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du \leq \frac{A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et enfin

$$\left|\tau_n^{(\frac{1}{4})}(\gamma)\right| \leq \frac{(\sqrt{2}+1)A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons que $\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)$ remplit l'inégalité (35), alors (36) nous fournit, pour $\delta' = \delta + \frac{1}{2}$ et $\lambda' = \lambda + \frac{1}{4}$,

$$\left|\sigma_n^{(\delta',\lambda')}(\gamma)\right| \leqq \frac{\lambda'}{\lambda}\sum_{m=0}^{n}\left|\tau_{n-m}^{\left(\frac{1}{4}\right)}(\gamma)\right|\left|\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\gamma)\right|$$

$$= \frac{c'_{23}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+\frac{3}{2}}}\sum_{0}^{n} A_{n-m}^{\left(-\frac{1}{2}\right)} A_m^{(2\lambda)} = \frac{c'_{23}\,A_n^{(2\lambda')}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta'+1}},$$

et l'on voit que (35) est satisfaite pour $\delta' = \delta + \frac{1}{2}$, $\lambda' = \lambda + \frac{1}{4}$, si elle l'est pour les valeurs données δ et λ.

Supposons maintenant que (35) a lieu pour

$$0 < \lambda \leqq \frac{N}{4} \qquad \text{et} \qquad -1 < \delta \leqq 2\lambda + 1\,; \qquad N = E(N) \geqq 1.$$

Alors (35) est remplie aussi pour

$$\frac{1}{4} < \lambda \leqq \frac{N+1}{4} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2} < \delta \leqq 2\lambda + 1.$$

Or, plus haut, on a établi que (35) est valable pour λ quelconque positif, si $\delta \leqq 1$, et que d'un autre côté (35) a lieu pour

$$0 < \lambda \leqq \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad -1 < \delta \leqq 2\lambda + 1.$$

Donc cette inégalité a lieu pour

$$-1 < \delta \leqq 2\lambda + 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \lambda \leqq \frac{N+1}{4},$$

si elle est remplie pour

$$-1 < \delta \leqq 2\lambda + 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \lambda \leqq \frac{N}{4}.$$

Puisqu'elle est établie pour

$$-1 < \delta \leqq 2\lambda + 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \lambda \leqq \frac{1}{4},$$

on voit qu'elle a lieu pour λ quelconque positif, pourvu que l'on ait

$$-1 < \delta \leqq 2\lambda + 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\pi}{n + 2\lambda}.$$

En divisant $\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)$ par $A_n^{(\delta)}$ on obtient, eu égard à (21), (34₁) et (35):

$$(37)\quad \begin{cases} \left| s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \right| \leqq \dfrac{c_{24}(n+1)^{2\lambda-\delta}}{\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \\ (0 \leqq \gamma \leqq \pi,\ \lambda > 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ -1 < \delta \leqq 2\lambda + 1). \end{cases}$$

La restriction $\delta \leqq 2\lambda + 1$ est essentielle comme on le voit sur l'exemple suivant : soient $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \pi$; l'inégalité (37) se réduit à l'inégalité

$$\left| s_n^{(\delta,\frac{1}{2})}(-1) \right| \leqq \frac{c_{24}}{(n+1)^{\delta-1}} \qquad (-1 < \delta \leqq 2),$$

et nous allons démontrer qu'elle n'est plus valable, si $\delta = 2 + \rho\,(\rho > 0)$. Il s'agit de prouver que la quantité

$$(n+1)^{1+\rho} \left| s_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})}(-1) \right| \qquad (\rho > 0)$$

augmente indéfiniment pour $n \to \infty$. Or

$$s_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})}(-1) = \frac{1}{A_n^{(2+\rho)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(2+\rho)}\left(m + \frac{1}{2}\right)(-1)^m = \frac{\sigma_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})}(\pi)}{A_n^{(2+\rho)}},$$

et la question revient à démontrer que la quantité $\dfrac{\sigma_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})}(\pi)}{n+1}$, où

$$\sigma_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})} = \sum_0^n (-1)^m \left(m + \frac{1}{2}\right) A_{n-m}^{(2+\rho)} \qquad (\rho > 0),$$

tend vers l'infini pour $n \to \infty$. On a

$$\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})}(\pi) = \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{(1-z)^{2+\rho}(1+2z+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-z)^{2+\rho}(1+z)^2} \quad (\rho > 0),$$

et en appliquant la méthode de Darboux on a le droit de rejeter le point singulier $z = 1$ puisque son ordre 2 est plus petit que l'ordre $2 + \rho\,(\rho > 0)$ de l'autre point singulier $z = -1$. Donc, pour trouver le premier membre de la formule approximative de $\sigma_n^{(2+\rho,\frac{1}{2})}$, il suffit de développer en série de Taylor la fonction auxiliaire

$$D(z) = \frac{1}{8}\,\frac{1}{(1-z)^{2+\rho}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_n^{(1+\rho)}}{8} z^n,$$

ce qui nous donne

$$\sigma_n^{\left(2+\rho,\frac{1}{2}\right)}(\pi) = A_n^{(1+\rho)}\left[\frac{1}{8} + \varepsilon_n\right] \qquad (\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty).$$

On voit que l'on a

$$\frac{\sigma_n^{\left(2+\rho,\frac{1}{2}\right)}}{n+1} = \frac{(n+1)^\rho}{8\,\Gamma(2+\rho)}\left\{1 + o(1)\right\} \qquad (\rho > 0).$$

ce qui prouve notre assertion et montre clairement que la restriction $\delta \leqq 2\lambda + 1$ dans l'inégalité (37) est indispensable.

L'inégalité (37) se réduit pour $\delta = 2\lambda$ à l'inégalité (33).

2. Dans l'étude des constantes ultrasphériques de Lebesgue d'ordre $\delta > -1$,

$$(8) \quad \rho_n^{(\delta,\lambda)} = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} |s_n^{(\delta,\lambda)}(x)|\,dx = \int_0^\pi |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma,$$

il suffit de considérer l'intervalle $\lambda \leqq \delta \leqq 2\lambda + 1$ de variation de δ, puisque, les moyennes $s_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ n'étant jamais négatives pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$ ([1]), on a pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$ tout simplement

$$\rho_n^{(\delta,\lambda)} = \int_{-1}^{+1} \frac{s_n^{(\delta,\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} (m+\lambda) A_{n-m}^{(\delta)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_m^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

$$= \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)}.$$

D'un autre côté, l'inégalité

$$(38) \qquad \rho_n^{(\delta',\lambda)} \leqq \max_{0 \leqq m \leqq n} \rho_m^{(\delta,\lambda)} \qquad (\delta' > \delta),$$

([1]) On le démontre dans le paragraphe **6**.

rapprochée du résultat

(39) $$\lim_{n=\infty} \rho_n^{(\lambda,\lambda)} = +\infty \qquad (\delta = \lambda > 0),$$

démontre immédiatement qu'on a pour chaque valeur de $\delta \leq \lambda$

(40) $$\lim_{n=\infty} \rho_n^{(\delta,\lambda)} = +\infty \qquad (\delta \leq \lambda).$$

Pour prouver (38), il suffit d'observer qu'on a, pour $\delta' > \delta$,

$$\sigma_n^{(\delta',\lambda)}(\gamma) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} \sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\gamma) \qquad (\delta' > \delta);$$

or

$$\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma) = A_n^{(\delta)} s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma);$$

donc

$$A_n^{(\delta')} |s_n^{(\delta',\lambda)}(\cos\gamma)| \leq \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} A_m^{(\delta)} |s_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|,$$

d'où

$$A_n^{(\delta')} \rho_n^{(\delta',\lambda)} \leq \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} A_m^{(\delta)} \rho_m^{(\delta,\lambda)} \leq \max_{0 \leq m \leq n} \rho_m^{(\delta,\lambda)} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} A_m^{(\delta)} = A_n^{(\delta')} \max_{0 \leq m \leq n} \rho_m^{(\delta,\lambda)}.$$

Le résultat (39) n'est que la conséquence de la formule approximative suivante :

$$\rho_n^{(\lambda,\lambda)} = \left[\frac{4\lambda}{2^\lambda \pi} + o(1)\right] \log(n+1),$$

ou bien

(41) $$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n^{(\lambda,\lambda)}}{\log(n+1)} = \frac{4\lambda}{2^\lambda \pi} \qquad (\lambda > 0).$$

On démontre (41) à l'aide de (32), d'où l'on déduit

(42) $$|s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)| = \frac{2\left|\sin\left[\left(n + \frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma - \lambda\pi\right]\right|}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}(2\sin\gamma)^\lambda} + \eta_n^{(\lambda)}(\gamma)$$

avec

$$|\eta_n^{(\lambda)}(\gamma)| < \frac{c_{18}}{(n+1)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma\right)^{\lambda+1}} \qquad \text{pour } \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \pi - \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

Vu que

$$|s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| < c_{21}(n+1)^{2\lambda+1},$$

on a

$$\int_0^{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma = O\left[(n+1)^{2\lambda+1}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \gamma^{2\lambda}\,d\gamma\right] = O(1),$$

ainsi que

$$\int_{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi} |s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma = O(1).$$

A l'aide de (42), on a aussi

$$\int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma$$

$$= \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} \frac{2\lambda\left|\sin\left[\left(n+\frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma-\lambda\pi\right]\right|}{2^\lambda\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+1}}(\sin\gamma)^\lambda\,d\gamma + O(1),$$

puisque

$$\int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\eta_n^{(\lambda)}(\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma$$

$$< \frac{c_{18}}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma\right)^{\lambda+1}} = O\left[\frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{d\gamma}{\gamma^2}\right] = O(1).$$

D'ailleurs, en posant pour abréger $\Omega_n = \left(n\,\frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma - \lambda\pi$,

$$\left|\int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\sin\Omega_n|\frac{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma - \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\sin\Omega_n|\frac{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda}{\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma\right|$$

$$< \pi\int_0^\pi \frac{\gamma-2\sin\frac{\gamma}{2}}{\gamma^2}\,d\gamma < \pi = O(1)$$

et

$$\left| \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\sin \Omega_n| \frac{d\gamma}{\gamma} - \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\sin \Omega_n| \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda} \frac{d\gamma}{\gamma} \right|$$

$$< \int_0^{\pi} \frac{1-\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda}}{\gamma} d\gamma = O(1);$$

donc

$$\rho_n^{(\lambda,\lambda)} = \int_0^{\pi} |s_n^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma = \frac{2\lambda}{2^{\lambda}} \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\sin \Omega_n| \frac{d\gamma}{\gamma} + O(1).$$

On vérifie aisément que l'on a

$$\int_{\frac{2\lambda\pi}{2n+3\lambda+1}}^{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |\sin \Omega_n| \frac{d\gamma}{\gamma} = \log\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda}\frac{3\lambda-1}{n+1}\right) \Big| = O(1)$$

ainsi que

$$\int_{\pi-\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\lambda+1}{2n+3\lambda+1}\pi} |\sin \Omega_n| \frac{d\gamma}{\gamma} = O(1);$$

donc

$$\rho_n^{(\lambda,\lambda)} = \frac{2\lambda}{2^{\lambda}} \int_{\frac{2\lambda\pi}{2n+3\lambda+1}}^{\pi-\frac{\lambda+1}{2n+3\lambda+1}\pi} |\sin \Omega_n| \frac{d\gamma}{\gamma} + O(1).$$

La substitution $\gamma = 2\dfrac{\lambda\pi+\theta}{2n+3\lambda+1}$ transforme l'expression de $\rho_n^{(\lambda,\lambda)}$ en

$$\rho_n^{(\lambda,\lambda)} = \frac{2\lambda}{2^{\lambda}} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin\theta|\, d\theta}{\lambda\pi+\theta} + O(1),$$

et vu que

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin\theta|\, d\theta}{\lambda\pi+\theta} = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin\theta|\, d\theta}{\pi+\theta} + O(1),$$

on trouve définitivement

$$\rho_n^{(\lambda,\lambda)} = \frac{2\lambda}{2^\lambda}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin\theta|\,d\theta}{\pi+\theta} + O(1) = \frac{2\lambda}{2^\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|\,d\theta}{\pi+\theta} + O(1)$$

$$= \frac{2\lambda}{2^\lambda}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin u\,du}{u+k\pi} + O(1) = \frac{2\lambda}{2^\lambda}\sum_{k=}^{n}\left[\frac{2}{k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] + O(1)$$

$$= \frac{2\lambda}{2^\lambda}\,\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + O(1) = \frac{4\lambda}{2^\lambda\pi}\log(n+1) + O(1).$$

Dans le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$, nous avons le résultat qui précise celui de de M. Gronwall (¹)

$$\rho_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\log(n+1) + O(1).$$

En divisant la série (9) par 2λ et en faisant λ tendre vers zéro, nous obtenons la série

$$(9a)\qquad \frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \cos 3y + \ldots + \cos ny + \ldots;$$

donc

$$\rho_n = \lim_{\lambda=0}\frac{\rho_n^{(\lambda,\lambda)}}{2\lambda} = \int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos my\right|dy = \int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right|}{2\sin\frac{y}{2}}dy$$

et (41), divisée par 2λ, donne à la limite pour $\lambda = 0$:

$$\rho_n = \int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right|dy}{2\sin\frac{y}{2}} = \frac{2}{\pi}\log(n+1) + O(1),$$

ce qui est le résultat de M. L. Féjèr, concernant la constante de Lebesgue ρ_n d'ordre $\delta = 0$ de la série trigonométrique de Fourier (²).

(¹) T. Gronwall, *Math. Annalen*, t. 75, 1914, p. 345, form. (59).

(²) L. Féjèr, *Journal für Math.*, t. 138, 1910, p. 22-53; T. Gronwall, *Math. Annalen*, t. 72, 1912, p. 244-261.

Il est facile d'établir, qu'au contraire, toutes les constantes $\rho_n^{(\delta,\lambda)}$ sont bornées dans leur ensemble si $\delta > \lambda$.

L'inégalité (34) donne, quel que soit $\delta > -1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma = O\left[(n+1)^{2\lambda+1}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \gamma^{2\lambda}\, d\gamma\right] = O(1),$$

ainsi que

$$\int_{\pi-\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma = O(1).$$

En appliquant dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{n+1}, \pi - \frac{\pi}{n+1}\right)$ l'inégalité (24_1), valable pour $\delta \leqq \lambda + 1$, on a, en supposant $\lambda + 1 \geqq \delta > \lambda$:

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi-\frac{\pi}{n+1}} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma$$

$$< \frac{c_9}{(n+1)^{\delta-\lambda}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi-\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin^{\lambda}\gamma\, d\gamma}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} = O\left\{\frac{1}{(n+1)^{\delta-\lambda}} \int_{\frac{1}{2}\frac{\pi}{n+1}}^{\infty} \frac{d\gamma}{\gamma^{\delta-\lambda+1}}\right\} = O(1).$$

Par conséquent, il vient pour $\lambda + 1 \geqq \delta > \lambda$

$$\rho_n^{(\delta,\lambda)} = \int_0^{\pi} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma = O(1) < R = R(\delta, \lambda).$$

Il est clair que (38) nous affranchit de la restriction $\delta \leqq \lambda + 1$, et il est démontré que l'on a pour $\delta > \lambda$

$$(43) \qquad \rho_n^{(\delta,\lambda)} < R = R(\delta, \lambda) \qquad (\delta > \lambda > 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

où la constante R ne dépend pas de $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Il est à observer que les inégalités (25) et (37) résolvent le problème de la sommation (C, δ) de la série ultrasphérique

$$(9) \qquad \sum_0^{\infty} (n+\lambda)\, P_n^{(\lambda)}(x) \qquad (x = \cos\gamma).$$

L'inégalité (37) nous montre qu'elle est sommable $(C, \delta > 2\lambda)$

pour $\delta \leqq 2\lambda + 1$ — donc *a fortiori* pour chaque $\delta > 2\lambda$ — et a zéro pour somme partout dans l'intervalle $(-1, +1)$, sauf le point $x = 1$ $(\gamma = 0)$, la sommabilité $(C, \delta > 2\lambda)$ étant uniforme pour $-1 \leqq x \leqq 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Si $x = +1$, la série (9) devient essentiellement divergente et ses sommes partielles s_n tendent vers l'infini comme $n^{2\lambda+1}$ pour $n \to \infty$. Pour $x = -1$ son terme général $(n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(-1)$ est égal à $(-1)^n (n+\lambda) A_n^{(2\lambda-1)}$; donc en ce point $x = -1$ n'est pas remplie la condition nécessaire $u_n = o(n^{2\lambda})$ de la sommabilité $(C, \delta = 2\lambda)$, ce qui prouve que l'ordre $\delta > 2\lambda$ de la sommabilité (C, δ) dans $-1 \leqq x < 1$ ne peut être diminué jusqu'à $\delta = 2\lambda$. Mais, si l'on n'envisage que les points intérieurs $|x| < 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$, cet ordre δ peut être diminué jusqu'à $\delta > \lambda$, puisque l'inégalité (25) nous montre que la série (9) est sommable $(C, \delta > \lambda)$ pour chaque $\delta > \lambda$ et a zéro pour somme dans $(-1, +1)$, sauf les points frontières $x = \pm 1$, la sommabilité $(C, \delta > \lambda)$ étant uniforme pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Enfin la formule approximative (32) démontre que la série (9) n'est nulle part sommable $(C, \delta = \lambda)$.

5. Le développement ultrasphérique (II) d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ continue sur toute la sphère S étant uniformément sommable $(C, \delta > \lambda)$, sur S avec la somme $F(\theta, \varphi)$, il est important de montrer sur un exemple particulier qu'il y a des fonctions continues sur toute la sphère, dont le développement (II) néanmoins n'est pas sommable $(C, \delta = \lambda)$ en un point de S. Nous choisissons l'exemple suivant [1] : pour $F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta)$ la série (II) se réduit à la série (I) qui s'écrit ainsi pour $\theta = 0$:

$$(44) \quad f(1) \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_0^{\pi} f(\cos\gamma)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma,$$

et nous allons démontrer que pour la fonction particulière

$$(45) \qquad F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left[\left(2^{m^4} + \frac{3\lambda+1}{2}\right)\theta - \lambda\pi\right],$$

---

[1] KOGBETLIANTZ, *Comptes rendus*, 1917, t. 164, p. 627.

la série I n'est pas sommable $(C, \delta = \lambda)$ en un point $\theta = 0$, quoique cette fonction soit partout continue. Il s'agit de montrer que la moyenne arithmétique d'ordre $\delta = \lambda$ de la série (44), où $f(\cos\gamma)$ est définie par (45), ne peut tendre pour $n \to \infty$ vers une limite déterminée. En désignant cette moyenne par $S_r^{(\gamma)}$, nous avons, grâce à la convergence absolue de la série (45),

$$S_r^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} S_{\mu,r}^{(\lambda)},$$

où la moyenne $S_{\mu,r}^{(\lambda)}$ est égale à

$$S_{\mu,r}^{(\lambda)} = \int_0^{\pi} \sin\left[\left(\mu + \frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma - \lambda\pi\right] s_r^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma,$$

$S_r^{(\lambda,\lambda)}(\cos\gamma)$ désignant comme toujours la moyenne arithmétique d'ordre $\delta = \lambda$ de la série (9) et $\mu = \mu(m)$ étant égal à 2^{m^3}. Or on établit facilement, à l'aide des inégalités (34) et (32), que l'on a

$$S_{\mu,r}^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{2^\lambda} \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}} \sin\left[\left(\mu + \frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma - \lambda\pi\right] \sin\left[\left(r + \frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma - \lambda\pi\right]$$

$$\times \frac{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda}{\sin\frac{\gamma}{2}} d\gamma + O(1).$$

En décomposant le produit des sinus en une différence des cosinus, on obtient

$$(46) \qquad S_{\mu,r}^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{2^{\lambda+1}} \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}} \cos[(\mu - r)\gamma]\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda \frac{d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} + O(1),$$

puisqu'on a

$$j_{\mu,r}^{(\lambda)} = \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}} \cos[(r + \mu + 3\lambda + 1)\gamma - 2\lambda\pi] \frac{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda}{\sin\frac{\gamma}{2}} d\gamma = O(1).$$

On le prouve, en décomposant l'intervalle d'intégration en $q + 2$

intervalles partielles

$$\left(\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}, \gamma_0\right), \quad (\gamma_0, \gamma_1), \quad \ldots, \quad (\gamma_{q-1}, \gamma_q), \quad \left(\gamma_q, \frac{2r+1}{r+1}\frac{\pi}{2}\right),$$

où $\cos[(r+\mu+3\lambda+1)\gamma-2\lambda\pi]$ est alternativement positif ou négatif. La fonction $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-1}$ est décroissante et par conséquent la somme $\sum_{k=0}^{q-1}$ plus le dernier terme dans le second membre de

$$j_{\mu,r}^{(\lambda)} = \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\gamma_0} + \sum_{k=0}^{q-1}\int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} + \int_{\gamma_q}^{\pi-\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}$$

est inférieure en valeur absolue à son premier terme et il vient

$$|j_{\mu,r}^{(\lambda)}| \leq \left|\int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\gamma_0}\right| + \left|\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\right| \leq \pi\int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\gamma_1}\frac{d\gamma}{\gamma} = \pi\log\left[\frac{2}{\pi}(r+1)\gamma_1\right].$$

Or en posant

$$e = \mathrm{E}\left(1-2\lambda+\frac{1}{2}\frac{\mu+3\lambda}{r+1}\right),$$

on a

$$\gamma_k = \frac{4\lambda+2e+2k+1}{r+\mu+3\lambda+1}\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} 1+2\frac{r+1}{r+\mu+3\lambda+1} &< \frac{2}{\pi}(r+1)\gamma_1 \\ &= \frac{4\lambda+2e+3}{r+\mu+3\lambda+1}(r+1) < \frac{5(r+1)+\mu+3\lambda}{r+\mu+3\lambda+1} < 5; \end{aligned}$$

donc

$$|j_{\mu,r}^{(\lambda)}| < \pi\log 5 = \mathrm{O}(1).$$

En appliquant pour $r \neq \mu$ le même raisonnement à l'intégrale

$$i_{\mu,r}^{(\gamma)} = \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}} \cos[(r-\mu)\gamma]\frac{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^\lambda}{\sin\frac{\gamma}{2}}d\gamma \qquad (r \neq \mu),$$

on établit que l'on a pour

$$\frac{r+1}{|r-\mu|} = O(1),$$

$$i_{\mu,r}^{(\lambda)} = O\left[\log \frac{r+1}{|r-\mu|}\right] = O(1).$$

Soit donc

$$\frac{r+1}{|r-\mu|} = O(1);$$

alors (46) nous fournit pour $r \neq \mu$

$$S_{\mu,r}^{(\lambda)} = O(1) \qquad (r \neq \mu).$$

Soit $\mu = r$; alors, eu égard à

$$\int_{\varepsilon}^{\pi - \frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda} \frac{d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} = O(1)$$

et

$$\int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda} \frac{d\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}} = \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \frac{d\gamma}{\gamma} + O(1),$$

on en déduit

$$S_{r,r}^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{2^{\lambda}} \int_{\frac{1}{r+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \frac{d\gamma}{\gamma} + O(1) = \frac{\lambda}{2^{\lambda}} \log r + O(1) \qquad (r = \mu).$$

Or $\mu = 2^{m^3}$ et en posant $r = 2^{n^3}$ on voit que la condition

$$r + 1 = O(|r-\mu|) \qquad \text{pour } r \neq \mu$$

est remplie; donc

$$\begin{aligned} S_{r}^{(\lambda)} &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{\substack{m=1 \\ (\mu \neq r)}}^{\infty}{}' \frac{S_{\mu,r}^{(\lambda)}}{m^2} + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{S_{r,r}^{(\lambda)}}{n^2} \\ &= O\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) + \frac{\lambda\,\Gamma(\lambda)}{2^{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{\log 2^{n^3} + O(1)}{n^2} \\ &= \frac{\log 2\, \Gamma(\lambda+1)}{2^{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} n + O(1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$S_{2^{n^3}}^{(\lambda)} = \frac{\log 2\,\Gamma(\lambda+1)}{2^{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(n+1)+O(1) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty).$$

Par conséquent, la suite $S_0^{(\lambda)}$, $S_1^{(\lambda)}$, $S_2^{(\lambda)}$, .. , $S_k^{(\lambda)}$, ... diverge.

4. Envisageons la série (II) en un point (θ, φ) de la sphère S et formons la fonction auxiliaire, définie par rapport à ce point (θ, φ) :

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi(\sin\gamma)^{2\lambda}} \int_{C_\gamma} \frac{F(\theta', \varphi')\,ds'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

où l'intégrale de ligne est étendue à la circonférence du cercle C_γ de centre (θ, φ) et de rayon sphérique ègale à γ, ds' étant l'élément d'arc de ce cercle.

La moyenne arithmétique $F_n^{(\delta,\lambda)}(\varphi, \theta)$ de la série

$$\text{(II)} \quad F(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty (n+\lambda)\iint_S \frac{F(\theta', \varphi')\,P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} \qquad (\lambda > 0)$$

s'exprime maintenant ainsi :

$$F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) = F_n^{(\delta,\lambda)} = \int_0^\pi f(\gamma)\,s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma,$$

où $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ désigne, comme toujours, la moyenne de la série (9). En transportant le pôle de S au point (θ, φ), nous désignons les nouvelles coordonnées sphériques par γ et ψ, ψ étant comptée à partir du méridien φ du point (θ, φ). Le triangle sphérique fournit la relation

$$\sin\theta' \sin(\varphi - \varphi') = \sin\gamma \sin\psi,$$

et, vu que $ds' = \sin\gamma\, d\psi$, on obtient

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(\theta', \varphi')}{(\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{F}(\gamma, \psi)\,d\psi}{(\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

où $\mathfrak{F}(\psi, \gamma)$ est la fonction $F(\theta', \varphi')$ exprimée en nouvelles coordonnées γ, ψ. Si $F(\theta', \varphi')$ est continue au point (θ, φ), on a

$$f(+0) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} F(\theta, \varphi).$$

Si la fonction $F(\theta', \varphi')$ éprouve au point (θ, φ) une discontinuité, analogue à un saut fini de la fonction d'une seule variable, nous introduisons la valeur moyenne généralisée $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ de $F(\theta, \varphi)$ au point (θ, φ) :

$$(10) \qquad F_0^{(\lambda)} = F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} f(+0)$$
$$= \lim_{\gamma=0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)} \int_0^{2\pi} \frac{\mathcal{F}(\gamma, \psi)\, d\psi}{(\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

qui se réduit pour $F(\theta, \varphi)$ ne dépendant pas de φ — $F(\theta, \varphi) = \psi(\theta)$ — à la valeur moyenne ordinaire $\frac{1}{2}\{\psi(\theta+0) + \psi(\theta-0)\}$.

Ceci posé nous admettons l'existence au point considéré (θ, φ) de la valeur moyenne $F_0^{(\lambda)}$, c'est-à-dire l'existence de $f(+0)$ et l'intégrabilité absolue sur S du produit

$$F(\theta', \varphi')\left[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')\right]^{\lambda - \frac{1}{2}},$$

ce qui entraîne, en vertu de la définition de $f(\gamma)$, l'intégrabilité dans l'intervalle $(0, \pi)$ du produit $|f(\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma$.

Ayant établi au paragraphe **2** pour $\delta > \lambda$ l'existence de la borne supérieure R de toutes les constantes

$$\rho_n^{(\delta, \lambda)} = \int_0^{\pi} |s_n^{(\delta, \lambda)}(\cos\gamma)| \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma,$$

nous pouvons toujours choisir $\varepsilon = \varepsilon^{(\delta, \lambda)}(\alpha) > 0$ suffisamment petit pour satisfaire à l'inégalité

$$(\overline{47}) \qquad |f(\gamma) - f(+0)| < \frac{\alpha}{3R} \qquad (0 \leqq \gamma \leqq \varepsilon),$$

où α est fixe, mais aussi petit qu'on veut. Alors, en décomposant $F_n^{(\delta,\lambda)}$ pour $\delta > \lambda$ en somme des trois intégrales

$$F_n^{(\delta,\lambda)} = \int_0^\pi f(\gamma)\, s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi = I'_n + I''_n + I'''_n,$$

nous avons, vu que $\delta > \lambda$,

$$\left| I'_n - f(+0)\int_0^\varepsilon s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma \right| < \frac{\alpha}{3R}\rho_n^{(\delta,\lambda)} < \frac{\alpha}{3} \qquad (\delta > \lambda).$$

D'ailleurs

$$(48) \quad \left| f(+0)\int_0^\varepsilon s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma - f(+0)\int_0^\pi s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma \right|$$
$$< |f(+0)|\int_\varepsilon^\pi |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma$$

et, en observant que l'on a, eu égard à (2),

$$f(+0)\int_0^\pi s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma$$
$$= \lambda f(+0)\int_0^\pi \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} f(+0) = F_0^{(\lambda)},$$

on obtient pour chaque $\delta > \lambda$, en appliquant à l'intégrale du second membre de (48), l'inégalité (25) :

$$(49) \quad |I'_n - F_0^{(\lambda)}| < \frac{\alpha}{3} + c_{25}|F_0^{(\lambda)}|\left\{ \frac{(n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta-\lambda+1}} + \frac{(n+1)^{-1}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \right\} \qquad (\delta > \lambda).$$

La même inégalité (25) nous fournit pour chaque $\delta > \lambda$

$$|I''_n| < \frac{c_{26}}{(\sin\varepsilon)^{2\lambda}}\left\{ \frac{(n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta-\lambda+1}} + \frac{(n+1)^{-1}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \right\}\int_0^\pi |f(\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma.$$

Donc, vu que le produit $f(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma$ est supposé absolument intégrable dans $(0,\pi)$, on obtient

$$(50) \qquad |I''_n| < \frac{c_{27}}{(\sin\varepsilon)^{2\lambda}}\left\{ \frac{(n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta-\lambda+1}} + \frac{(n+1)^{-1}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \right\} \qquad (\delta > \lambda).$$

Il ne nous reste que l'intégrale I_n'''. Soit d'abord $\delta = 2\lambda\,(2\lambda > \lambda > 0)$. Alors nous pouvons appliquer à l'intégrale I_n''' l'inégalité (33), et il vient pour ε suffisamment petit

$$(51)\qquad |I_n'''| < \frac{c_{20}}{\left(\sin\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)^{2\lambda+1}}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}|f(\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma < \frac{\alpha}{3} \qquad (\delta = 2\lambda),$$

quelque petit que soit α, grâce à l'intégrabilité du produit $|f(\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma$ dans $(0,\pi)$. Par conséquent, en choisissant ε assez petit pour satisfaire en même temps aux inégalités (47) et (51), et en additionnant (49), (50) et (51), nous obtenons pour $\delta = 2\lambda$

$$(52)\quad |F_n^{(2\lambda,\lambda)} - F_0^{(\lambda)}| < \frac{2\alpha}{3} + \frac{c_{28}|F_0^{(\lambda)}|}{(\sin\varepsilon)^{2\lambda+1}}\left\{\frac{1}{\left[(n+1)\sin\frac{\varepsilon}{2}\right]^{\lambda}} + \frac{1}{(n+1)\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right\}.$$

Soit maintenant $n \geqq N$, où $N = N(\varepsilon, \alpha)$ est suffisamment grand pour assigner au second terme du second membre dans (52) une valeur plus petite que $\frac{\alpha}{3}$. On voit que l'on a pour $n \geqq N$

$$|F_n^{(2\lambda,\lambda)} - F_0^{(\lambda)}| < \alpha \qquad (\delta = 2\lambda,\ n \geqq N).$$

Donc nous avons démontré la convergence de la suite des moyennes arithmétiques d'ordre $\delta = 2\lambda$ de la série (II) vers la valeur moyenne généralisée $F_0^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ de la fonction développée $F(\theta, \varphi)$ en tout point (θ, φ), où existe cette valeur moyenne $F_0^{(\lambda)}$, sous la seule hypothèse de l'intégrabilité absolue sur S de la fonction

$$\Theta_\varphi = \Theta_\varphi(\theta', \varphi') = [\sin^2\theta'\sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}F(\theta', \varphi')$$

pour la valeur donnée de φ. Supposons maintenant que $F(\theta', \varphi')$ soit continue dans un domaine T sur S. Si la condition d'intégrabilité absolue de Θ_φ est remplie pour toutes les valeurs de φ, correspondant aux points (θ, φ) d'un certain domaine D sur la sphère S, qui se trouve entièrement à l'intérieur du domaine T, la sommabilité $(C, \delta = 2\lambda)$ de la série (II) est uniforme dans ce domaine D, c'est-à-dire qu'on a uniformément dans D :

$$\lim_{n=\infty} F_n^{(2\lambda,\lambda)}(\theta, \varphi) = F(\theta, \varphi).$$

Nous pouvons appliquer la même méthode à la recherche de la sommabilité (C, $\delta = 2\lambda$) de la série ultrasphérique (III), qu'on peut mettre sous la forme

$$\text{(III}')\qquad \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\lambda}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u)\, P_n^{(\lambda)}(\cos u) \sin^{2\lambda} u \, du,$$

où

$$2\varphi(u) = f(\theta - u) + f(\theta + u),$$

puisque $f(\theta)$ est une fonction périodique. La moyenne arithmétique d'ordre δ de la série (III') a la forme

$$\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \int_0^{\pi} \varphi(u)\, s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos u) \sin^{2\lambda} u \, du,$$

et toute l'analyse de ce paragraphe lui est applicable sous la seule supposition de l'existence de

$$\varphi(+0) = \frac{1}{2}\{f(\theta - 0) + f(\theta + 0)\}$$

et de l'intégrabilité absolue du produit $\varphi(u)\sin^{2\lambda} u$ dans $(0, \pi)$, ce qui revient à supposer l'intégrabilité de $[\sin^2(\theta - \varphi)]^{\lambda}.|f(\varphi)|$ dans $(0, 2\pi)$. On obtient ainsi le résultat :

La série (III) *est sommable* (C, $\delta = 2\lambda$) *avec la somme*

$$\frac{1}{2}\{f(\theta - 0) + f(\theta + 0)\}$$

en tout point θ, *où existe cette expression, si le produit*

$$|f(\varphi)|\,[\sin^2(\theta - \varphi)]^{\lambda}$$

est intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

La sommabilité (C, δ) d'une série $\sum_{0}^{\infty} u_n$ avec la somme s entraîne l'existence de

$$\lim_{r=1-0} \sum_0^\infty u_n r^n = s$$

et par conséquent nous avons aussi le corollaire suivant :

L'intégrale de M. Angelesco

$$(6)\quad I^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)\,[\sin^2(\theta-\varphi)]^\lambda\, d\varphi}{[1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2]^{\lambda+1}} \quad (r<1)$$

tend pour $r \to 1$ *vers* $\frac{1}{2}\{f(\theta-0)+f(\theta+0)\}$ *en tout point* θ, *où cette expression existe, si le produit* $|f(\varphi)|.[\sin^2(\theta-\varphi)]^\lambda$ *est intégrable dans* $(0, 2\pi)$ (¹).

On voit que le résultat de M. Angelesco subsiste aussi quand $f(\theta)$ devient infinie dans $(0, 2\pi)$ pourvu que le produit

$$|f(\theta')|.[\sin^2(\theta-\theta')]^\lambda$$

reste intégrable dans $(0, 2\pi)$.

Il est à observer que le développement (III) diffère essentiellement du développement (II) de la fonction $f_1(\theta) = f(\cos\theta) = f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, suivant les polynomes ultrasphériques orthogonaux $P_n^{(\lambda)}(x)$. Par exemple, dans le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$, (III′) se réduit au développement

$$(\mathrm{III}'_{\lambda=\frac{1}{2}})\quad f(x) \sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1}\Big\{ f\left[xt-\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right] + f\left[xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right]\Big\} P_n(t)\,dt,$$

qui n'a rien de commun, sauf le cas $|x| = 1$, avec la série de Legendre

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(t)\, P_n(t)\,dt.$$

(¹) E. Kogbetliantz, *Sur l'intégrale de M. Angelesco* (*Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 226).

La série $\left(\mathrm{III}'_{\lambda=\frac{1}{2}}\right)$ est sommable (C, 1) avec la somme

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

partout où cette expression existe, si $|f(x)|$ est intégrable dans $(-1, +1)$. Le même raisonnement appliqué à la série

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)r^n\int\int_S\frac{F(\theta',\varphi')\,P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,ds'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$
$$=\frac{\lambda(1-r^2)}{2\pi}\int\int_S\frac{F(\theta',\varphi')\,d\sigma}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}[1-2r\cos\gamma+r^2)^{\lambda+1}}$$

nous fournit le corollaire suivant de la sommabilité (C, 2λ) de la série (II) :

Si le produit $F(\theta', \varphi')\,[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}$ *est absolument intégrable sur la sphère* S, *on a quel que soit* $\lambda > 0$

$$F_0^{(\lambda)}(\theta,\varphi)=\lim_{r=1-0}\frac{\lambda(1-r^2)}{2\pi}\int\int_S\frac{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}F(\theta',\varphi')\,d\sigma}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\lambda+1}},$$

où $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$, *et* $F_0^{(\lambda)}(\theta\ \varphi)$ *est la valeur moyenne généralisée de* $F(\theta',\varphi')$ *au point* (θ, φ).

5. Dans le paragraphe précédent nous avons vu que des trois intégrales I'_n, I''_n et I'''_n, formant l'expression de la moyenne $F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)$

$$F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)=I'_n+I''_n+I'''_n=\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}$$
$$=\int_0^{\pi}f(\gamma)\,s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma,$$

les deux premières I'_n et I''_n tendent pour chaque $\delta > \lambda$ vers les limites déterminées, comme le montrent (49) et (50)

$$\lim_{n=\infty}I'_n=F_0^{(\lambda)}(\theta,\varphi)\qquad\text{et}\qquad\lim_{n=\infty}I''_n=0\qquad(\delta>\lambda),$$

et c'est la troisième intégrale I'''_n, qui peut empêcher de diminuer l'ordre $\delta = 2\lambda$ dans l'énoncé de théorème démontré au paragraphe précédent.

Nous avons vu que cette intégrale

$$(53)\qquad I_n^{(\delta,\lambda)} = \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} f(\gamma)\, s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma$$

pour $n \to \infty$ tend uniformément en (θ, φ) vers zéro, si $\delta = 2\lambda$.

Dans ce paragraphe, nous allons préciser les conditions sous lesquelles $I_n^{(\delta,\lambda)}$ tend vers zéro pour $\lambda < \delta < 2\lambda$ et $n \to \infty$. Ces conditions sont en même temps les conditions suffisantes de la sommabilité (C, δ) de la série (II) pour $\lambda < \delta < 2\lambda$. L'exemple du paragraphe **3** montre qu'il n'y a pas lieu de discuter la sommabilité $(C, \delta \leqq \lambda)$ puisqu'il existe des fonctions partout continues, pour lesquelles les séries (II) ne sont pas sommables $(C, \delta \leqq \lambda)$ en des points isolés de la sphère S. L'étude de l'intégrale $I_n^{(\delta,\lambda)}$ montre que la sommabilité $(C, \delta < 2\lambda)$ de la série (II) d'une fonction $F(\theta', \varphi')$ en un point $M(\theta, \varphi)$ de S dépend en général de l'allure de $F(\theta', \varphi')$ autour du point $W(\pi - \theta, \pi + \varphi)$, diamétralement opposé au point M sur S. Nous supposons d'abord qu'au point W $F(\theta', \varphi')$ devient infinie d'ordre $s < 2\lambda + 1$, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$(54)\qquad F(\theta', \varphi') = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} F_1(\theta', \varphi') \qquad (\pi - \varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi)$$

dans le voisinage de ce point W $(\gamma \geqq \pi - \varepsilon)$, que de plus $F_1(\theta', \varphi')$ est holomorphe pour $\pi \geqq \gamma \geqq \pi - \varepsilon$ et que

$$F_1(\pi - \theta, \pi + \varphi) = A_0 \neq 0.$$

Il est facile de démontrer que $I_n^{(\delta,\gamma)} \to 0$ avec $n \to \infty$ pour chaque $\delta > \lambda$, si l'ordre s d'infinitude de $F(\theta', \varphi')$ au point W est plus petit que $\lambda + 1$. Soit donc $s = \lambda + 1 - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$; alors la définition de $f(\gamma)$ montre que, pour

$$F(\theta', \varphi) = O[(\sin\gamma)^{\varepsilon-\lambda-1}],$$

on a aussi

$$f(\gamma) = O[(\sin\gamma)^{\varepsilon-\lambda-1}],$$

et par conséquent, en s'appuyant sur l'inégalité (25),

$$I_n^{(\delta,\lambda)} = O\left\{\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|(\sin\gamma)^{\lambda+\varepsilon-1}\, d\gamma\right\} = o(1) \qquad (\delta > \lambda).$$

Par conséquent, pour $s < \lambda + 1$ et $\delta > \lambda$, on a toujours

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(\delta,\lambda)} = 0 \qquad (\delta > \lambda,\ s < \lambda + 1).$$

Soit maintenant $s \geqq \lambda + 1$. Désignons $E(s - \lambda - 1)$ par $e = E(s - \lambda - 1)$, ce qui entraîne $s - e - 1 < \lambda + 1 \leqq s - e$, et substituons dans (54) le développement de la fonction $\mathcal{F}_1(x, y) \equiv F_1(\theta', \varphi')$, où x et y sont les coordonnées de la projection (x, y) du point (θ', φ'), sur le plan de l'équateur, le pôle étant au point (θ, φ); donc

$$x = \sin\gamma \cos\psi \qquad \text{et} \qquad y = \sin\varphi \sin\psi.$$

En arrêtant le développement au $(e + 1)^{\text{ième}}$ terme, nous avons

$$\begin{aligned}
F(\theta', \varphi') &= \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} F_1(\theta', \varphi') \\
&= \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} \Big\{ A_0 + \sin\gamma[a_1 \cos\psi + b_1 \sin\psi] \\
&\quad + \sin^2\gamma[a_2 \cos^2\psi + b_2 \sin\psi\cos\psi + c_2 \sin^2\psi] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \sin^e\gamma[a_e \cos^e\psi + \ldots + k_e \sin^e\psi] \Big\} + F_2(\theta', \varphi'),
\end{aligned}$$

où la fonction $F_2(\theta', \varphi')$ ne devient infinie au point $W(\gamma = \pi)$ que d'ordre s_1 plus petit que $\lambda + 1$; $s_1 < \lambda + 1$. Donc il vient, selon la définition de la fonction $f(\gamma)$,

$$\begin{aligned}
f(\gamma) &= \frac{A_0 \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} + \sum_{k=1}^{e} \frac{A'_k \sin^k\gamma}{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^s} + \varphi(\gamma) \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \sum_{0}^{e} A_k \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s} + \psi(\gamma),
\end{aligned}$$

où $\psi(\gamma)$ ne devient infinie au point $\gamma = \pi$ que d'ordre s_1 plus petit que $\lambda + 1$; $s_1 < \lambda + 1$. Maintenant nous obtenons

$$(55) \qquad \begin{aligned}
I_n^{(\delta,\lambda)} = {} & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \sum_{k=0}^{e} A_k \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s} \\
& \times s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma + \psi_n^{(\delta,\lambda)},
\end{aligned}$$

où l'on a

$$\lim_{n=\infty} \psi^{(\delta,\lambda)} = \lim_{n=\infty} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \psi(\gamma) s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma = 0 \qquad (\delta > \lambda)$$

pour chaque $\delta > \lambda$ puisque $\psi(\gamma) = O[(\sin\gamma)^{r-\lambda-1}]$, r étant positif.

Pour étudier $I_n^{(\delta,\lambda)}$, il suffit de trouver la formule approximative, représentant pour $n \to \infty$ l'intégrale

$$i_n = \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s} s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma.$$

Or, pour $\delta > \lambda$, on a

$$\lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s} s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma = 0 \qquad (\delta > \lambda)$$

puisque, pour $n \to \infty$, $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \to 0$ uniformément dans $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, si $\delta > \lambda$. Quant à l'intégrale de la même différentielle, mais prise de zéro jusqu'à ε, elle n'est que l'intégrale I'_n du paragraphe précédent avec $f(\gamma) = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s}$, donc nous avons pour chaque $\delta > \lambda$

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\varepsilon} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s} s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)},$$

vu que dans ce cas $f(0) = 1$. Par conséquent,

$$i_n = \int_0^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{k-s} s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} + o(1),$$

et la question est ramenée à la recherche de la formule approximative pour l'intégrale

$$j_n^{(\alpha)} = \int_0^{\pi} \frac{\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \sin^{2\lambda}\gamma \, d\gamma}{\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2\alpha}} = 2^{\alpha} \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(-u) \, du}{(1-u)^{\alpha}(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Or, grâce à la convergence uniforme de la série (7'), nous avons, en calculant la fonction génératrice $\Phi(z)$ de la suite $j_0^{(\alpha)}, \ldots, j_n^{(\alpha)}, \ldots,$

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty j_n^{(\alpha)} z^n = 2^\alpha \int_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}}{(1-u)^\alpha} \left\{ \sum_0^\infty z^n \sigma_n^{\delta, \lambda}(-u) \right\} du$$

$$= \frac{2^\alpha \lambda (1+z)}{(1-z)^\delta} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} du}{(1-u)^\alpha (1+2uz+u^2)^{\lambda+1}}.$$

En employant la substitution $1 + u = 2\tau$ et en posant

$$x = x(z) = -\frac{4z}{(1-z)^2},$$

nous calculons explicitement $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{2^{2\lambda} \lambda (1+z)}{(1-z)^{\delta+2\lambda+2}} \int_0^1 \frac{\tau^{\lambda-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{\lambda - \frac{1}{2} - \alpha}}{(1-x\tau)^{\lambda+1}} d\tau$$

$$= \frac{2^{2\lambda} \lambda (1+z)}{(1-z)^{\delta+2\lambda+2}} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(2\lambda + 1 - \alpha)} F\left(\lambda+1, \lambda + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1 - \alpha, x\right),$$

où F est le signe de la fonction hypergéométrique.

La fonction $\Phi(z)$ n'a que deux points singuliers $z_1 = 1$ $(x = \infty)$ et $z_2 = -1$ $(x = +1)$ et les deux se trouvent sur la circonférence du cercle de convergence de la fonction $\Phi(z)$. En nous appuyant sur les propriétés élémentaires de la fonction hypergéométrique, nous obtenons les expressions suivantes de la fonction $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{2^{2\lambda} \lambda \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(2\lambda + 1 - \alpha)} \frac{(1+z)(1-x)^{-\lambda - \frac{1}{2}}}{(1-z)^{2+2\lambda+\delta}}$$

$$\times F\left(\lambda - \alpha, \lambda + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1 - \alpha, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\varphi_1(z)}{(1-z)^{\delta+1}} = \frac{2^{2\lambda} \lambda \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(2\lambda + 1 - \alpha)}$$

$$\times \frac{(1+z)^{-2\lambda} F\left[\lambda - \alpha, \lambda + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1 - \alpha, \frac{4z}{(1+z)^2}\right]}{(1-z)^{\delta+1}},$$

où

$$\varphi_1(1) = \frac{\lambda\,\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(2\lambda + 1 - \alpha)} F\left(\lambda - \alpha, \lambda + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1 - \alpha, 1\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(\lambda)},$$

puisque les paramètres $a = \lambda - \alpha$, $b = \lambda + \frac{1}{2}$ et $c = 2\lambda + 1 - \alpha$ satisfont à la condition $a + b - c < 0$. De même, on a

$$\Phi(z) = \frac{2^{2\lambda}\lambda\,\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(2\lambda + 1 - \alpha)} \frac{(1 + z)(1 - x)^{-\frac{1}{2} - \alpha}}{(1 - z)^{2\lambda + 2 + \delta}}$$

$$\times F\left(\lambda - \alpha, \lambda - \alpha + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1 - \alpha, x\right)$$

$$= \frac{\varphi_2(z)}{(1 + z)^{2\alpha}} = \frac{2^{2\lambda}\lambda\,\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(2\lambda + 1 - \alpha)}$$

$$\times \frac{(1 - z)^{2\alpha - 2\lambda - \delta - 1} F\left[\lambda - \alpha, \lambda - \alpha + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1 - \alpha, -\frac{4z}{(1 - z)^2}\right]}{(1 + z)^{2\alpha}},$$

où

$$\varphi_2(-1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} - \alpha\right)}{2^{\delta + 1 - 2\alpha}\,\Gamma(\lambda)}.$$

Ces expressions facilitent l'application de la méthode de Darboux et, en suivant cette méthode, nous n'avons que développé en série de Maclaurin la fonction auxiliaire

$$D(z) = \frac{\varphi_1(1)}{(1 - z)^{\delta + 1}} + \frac{\varphi_2(-1)}{(1 + z)^{2\alpha}}$$

pour obtenir la formule approximative cherchée.

Or

$$D(z) = \sum_0^\infty \left[A_n^{(\delta)}\varphi_1(1) + (-1)^n A_n^{(2\alpha - 1)}\varphi_2(-1)\right] z^n,$$

et il vient par conséquent

$$i_n^{(\alpha)} = A_n^{(\delta)} \left\{ \varphi_1(1) + (-1)^n \frac{A_n^{(2\alpha-1)}}{A_n^{(\delta)}} \varphi_2(-1)[1 + o(1)] + o(1) \right\},$$

d'où la formule cherchée pour l'intégrale i_n

$$i_n = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} j_n^{\left(\frac{s-k}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} + o(1)$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\delta+1)\Gamma\left(\lambda + \frac{1+k-s}{2}\right)}{2^\delta \Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right)} (n+1)^{s-k-1-\delta}\{1 + o(1)\} + o(1).$$

Enfin (55) nous fournit pour $I_n^{(\delta,\lambda)}$ le résultat suivant :

$$I_n^{(\delta,\lambda)} = (-1)^n \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma\left(\lambda + \frac{1-s}{2}\right)}{2^\delta \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} A_0(n+1)^{s-1-\delta}[1 + o(1)] + o(1).$$

Cette formule approximative nous fournit la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité (C, δ) de la série (II) pour $\lambda < \delta < 2\lambda$ dans le cas considéré. On a le résultat

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(\delta,\lambda)} = 0 \quad \text{si } \delta > s-1,$$

mais $I_n^{(\delta,\lambda)}$ oscille sans tendre vers une limite déterminée, si $\delta \leq s-1$, les bornes d'oscillation étant finies pour $\delta = s-1$ et infinies pour $\delta < s-1$. Donc le théorème II, concernant la sommabilité (C, δ) de la série (II) pour $1 < \delta < 2\lambda$ et énoncé dans l'introduction, se trouve établi.

Pour étudier le cas général nous supposons que non seulement le produit

$$[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi + \varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}} |F(\theta', \varphi')|,$$

mais aussi le produit

$$\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-2\lambda} [\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}} |F(\theta', \varphi')|,$$

où γ désigne comme toujours la distance sphérique des points (θ, φ) et (θ', φ') et où δ a une valeur déterminée comprise entre λ et $2\lambda (\lambda < \delta < 2\lambda)$, est intégrable sur S, ce qui assure l'intégrabilité du premier produit. Sous l'hypothèse faite, il est facile de démontrer la sommabilité $(C, \delta > \lambda)$ de la série (II) au point (θ, φ) considéré. Il suffit d'étudier l'intégrale $I_n^{(\delta,\lambda)}$, définie par (53) et dans laquelle cette fois-ci la fonction $f(\gamma)$ est telle que le produit

$$f(\gamma)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}$$

est absolument intégrable dans $(0, \pi)$.

En effet on a

$$\begin{aligned}
&2^{2\lambda}\int_0^{\pi}|f(\gamma)|\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}d\gamma \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma=0}^{\pi}\int_{\psi=0}^{2\pi}\frac{|\mathcal{F}(\gamma, \psi)|\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}(\sin^2\gamma)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(\sin^2\gamma\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}-\lambda}}d\psi\, d\gamma \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_S\frac{|F(\theta', \varphi')|\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-2\lambda}d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} = g.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$I_n^{(\delta,\lambda)} = \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} = \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}} + \int_{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}}^{\pi} = i'_n + i''_n.$$

En appliquant à l'intégrale i'_n l'inégalité (25), nous obtenons

$$\begin{aligned}
i'_n &= O\left[\frac{(n+1)^{\lambda-\delta}}{\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta+1}}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}}|f(\gamma)|\sin^{\lambda}\gamma\, d\gamma\right] + O\left[\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2+\lambda}}\right] \\
&= O\left\{\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}}|f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda}\left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{\lambda-\delta}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}d\gamma\right\} + O\left(\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Or pour

$$\pi-\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi - \frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \lambda < \delta < 2\lambda,$$

on a

$$\left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{\lambda-\delta} \leqq \left[(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right)\right]^{\lambda-\delta}$$
$$= \left[(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right)\right]^{\lambda-\delta}$$
$$\leqq \left[(n+1)\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right]^{\lambda-\delta} = 2^{\delta-\lambda} < 2^{\lambda};$$

donc on obtient

$$i'_n = \mathrm{O}\left\{\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n-1}} |f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta} d\gamma\right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

D'un autre côté en nous appuyant sur l'inégalité (37), nous avons

$$|i''_n| \leqq \frac{c_{24}(n+1)^{2\lambda-\delta}}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right)\right]^{\delta+1}}\int_{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}}^{\pi} |f(\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\, d\gamma$$
$$= \mathrm{O}\left\{\int_{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}}^{\pi} |f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}\left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{2\lambda-\delta} d\gamma\right\}.$$

Or pour

$$\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1} \leqq \gamma \leqq \pi \qquad \text{et} \qquad 2\lambda > \delta > \lambda,$$

on a

$$\left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{2\lambda-\delta} \leqq \left[(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right)\right]^{2\lambda-\delta}$$
$$= \left[(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right)\right]^{2\lambda-\delta}$$
$$\leqq \left[(n+1)\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\right]^{2\lambda-\delta}$$
$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\lambda-\delta} < 1;$$

donc on obtient

$$i''_n = \mathrm{O}\left\{\int_{\pi-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}}^{\pi} |f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta} d\gamma\right\}.$$

Il vient, en additionnant les résultats acquis,

$$\mathrm{I}_n^{(\delta,\lambda)} = \mathrm{O}\left\{\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta} d\gamma\right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

et la supposition de l'intégrabilité absolue du produit

$$f(\gamma)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}$$

dans l'intervalle $(0, \pi)$ assure que le premier terme du second membre de cette inégalité puisse être rendu aussi petit qu'on veut par le choix convenable d'un assez petit ε. Donc il est démontré que l'on a pour la valeur déterminée de δ, laquelle assure l'intégrabilité du produit

$$|f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}$$

dans l'intervalle $(0, \pi)$:

$$|F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) - F_0^{(\lambda)}| < \frac{5\alpha}{6} + O\left[\frac{1}{(n+1)^{\lambda}}\right] + O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

où ε est assez petit pour satisfaire aux inégalités (47), (51) et à l'inégalité

$$I_n^{(\delta,\lambda)} = O\left[\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}|f(\gamma)|\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}d\gamma\right]$$
$$+ O\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{\alpha}{6} + O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

quelque petit que soit α. Maintenant, après avoir fixé ε, nous pouvons choisir un assez grand $N = N(\varepsilon, \alpha)$ tel que l'on a pour $n \geqq N$

$$|F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) - F_0^{(\lambda)}| < \alpha.$$

Nous avons démontré le second théorème, concernant la sommabilité $(C, \lambda < \delta < 2\lambda)$ de la série (II) et énoncé dans l'introduction, à savoir le théorème :

La série (II) *d'une fonction* $F(\theta', \varphi')$ *est sommable* $(C, \lambda < \delta < 2\lambda)$ *en un point* M *de* S, *où existe la valeur moyenne* $F_0^{(\lambda)}$, *si pour la valeur considérée de* δ *le produit*

$$\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-2\lambda}[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}F(\theta', \varphi')$$

est absolument intégrable sur S, γ *désignant la distance sphérique des points* (θ', φ') *et* $M(\theta, \varphi)$.

A l'aide de ce théorème général, il est facile d'établir qu'il n'est pas nécessaire de supposer dans le cas particulier traité au commencement de ce paragraphe la fonction

$$F_1(\theta', \varphi') = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^s F(\theta', \varphi')$$

holomorphe dans le voisinage $\gamma \geqq \pi - \varepsilon$ du point W $(\gamma = \pi)$ sur S pour assurer la sommabilité $\left(C, \delta \begin{smallmatrix} > \lambda \\ > s-1 \end{smallmatrix}\right)$ de la série (II).

Soient en effet le produit

$$[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

absolument intégrable sur S, et la fonction

$$F_1(\theta', \varphi') = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^s F(\theta', \varphi')$$

bornée pour $\gamma \geqq \pi - \varepsilon$, ainsi que

$$F_1(\pi - 0, \pi + \varphi) = A_0 \neq 0.$$

On a pour $\delta > s - 1$

$$\iint_S \frac{|F(\theta', \varphi')| \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta - 2\lambda} d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}} = \iint_{\gamma \geqq \pi - \varepsilon} + \iint_{\gamma \leqq \pi - \varepsilon}$$

$$= O\left\{ \iint_{\gamma \leqq \pi - \varepsilon} \frac{|F(\theta', \varphi')| \, d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}} \right\} + \iint_{\gamma \geqq \pi - \varepsilon} \frac{|F_1(\theta', \varphi')| \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta - 2\lambda - s} d\sigma'}{(\sin^2\gamma \sin^2\psi)^{\frac{1}{2} - \lambda}}$$

$$= O(1) + O\left[\int_{\pi - \varepsilon}^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta - 2\lambda - s} (\sin\gamma)^{2\lambda} d\gamma\right]$$

$$= O(1) + O\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\omega)^{\delta - s} \sin\omega \, d\omega\right]$$

$$= O(1) + O\left[\int_0^1 t^{\delta - s} dt\right] = O(1) + O\left[\frac{1}{\delta - (s-1)}\right] = O(1) \qquad (\delta > s - 1),$$

ce qui permet d'appliquer à la série (II) le théorème général, où

$$\delta > s - 1 \qquad (\delta > \lambda).$$

Néanmoins l'étude de l'intégrale $I_n^{(\delta,\lambda)}$, faite au commencement de ce paragraphe, n'est pas inutile : nous avons établi que la condition $\delta > s - 1$ est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour la sommabilité $(C, \delta > \lambda)$ de la série (II) dans le cas particulier

$$F(\theta', \varphi') = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} F_1(\theta', \varphi'),$$

où la fonction $F_1(\theta', \varphi')$ est holomorphe pour $\gamma \geqq \pi - \varepsilon$, et l'on voit, par conséquent, que l'on ne peut pas diminuer davantage la valeur $\delta > s - 1$ dans l'énoncé du théorème II.

On remarque que la sommabilité (C, δ), établie dans le théorème général, est uniforme dans tout domaine Δ, qui est entièrement compris dans le domaine T de continuité de $F(\theta', \varphi')$, si la condition de l'intégrabilité absolue sur S du produit

$$\left(\cos\frac{\lambda}{2}\right)^{\delta-2\lambda} [\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

est remplie pour tous les points de ce domaine Δ.

Le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ complète la théorie de la sommabilité $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace. Envisageons le point $M(\theta, \varphi)$ sur la sphère, où existe la valeur moyenne de la fonction $F(\theta', \varphi')$

$$F^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \lim_{t=0} \frac{1}{2\pi \sin t} \int_{\gamma=t} F(\theta', \varphi')\, ds' = \lim_{\gamma=0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\gamma, \psi)\, d\psi.$$

On a le corollaire :

La série de Laplace d'une fonction $F(\theta', \varphi')$ *absolument intégrable sur* S *est sommable* $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ *au point* M *si l'ordre* s $(s < 2)$ *d'infinitude de la fonction développée au point* W, *diamétralement opposée sur* S *au point* M, *ne dépasse pas* $\frac{3}{2}$; *pour* $s > \frac{3}{2}$ *la série de Laplace n'est sommable* $(C, \delta < 1)$ *que pour* $\delta > s - 1$. *Si l'on suppose l'intégrabilité absolue sur* S *du produit* $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-1} . F(\theta', \varphi')$, *alors la série de Laplace est sommable au point* M $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$. *La* *somme de la série est égale toujours à la valeur moyenne de* $F(\theta', \varphi')$ *au point* M *considéré.*

Nous voyons que la série (II) d'une fonction continue sur toute la sphère y est uniformément sommable (C, δ) pour chaque $\delta > \lambda$ et a pour somme $F(\theta, \varphi)$.

Dans le cas particulier

$$F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta) = f(x),$$

la série (II) se réduit à la série (I), l'intégrabilité absolue du produit

$$[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\theta', \varphi')$$

sur S n'est que l'intégrabilité dans $(-1, +1)$ de $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} |f(x)|$ et en plaçant le point (θ, φ) au pôle de la sphère S, nous avons le corrollaire suivant de nos théorèmes généraux :

Le développement ultrasphérique

$$\text{(I)} \quad f(x) \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} \sum_0^\infty (n+1) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(x) \int_{-1}^{+1} \frac{f(y) P_n^{(\lambda)}(y)\, dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

d'une fonction $f(x)$ *est sommable* $(C, \delta = 2\lambda)$ *en un point frontière* $x = +1$ $[x = -1]$ *de l'intervalle* $(-1, +1)$ *avec la somme* $f(1-0)$ $[f(-1+0)]$, *si le produit* $(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} f(x)$ *est absolument intégrable dans* $(-1, +1)$. *Si la fonction* $f(x)$ *en un point frontière opposé* $x = -1$ $[x = +1]$ *devient infinie d'ordre* $s \leq \frac{\lambda+1}{2}$ $\left[s < \lambda + \frac{1}{2}\right.$ *en vertu de l'intégrabilité supposée du produit* $\left.(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} . |f(x)|\right]$, *la série* (I) *pour* $x = +1$ $[= -1]$ *est sommable* $(C, \delta < 2\lambda)$ *pour chaque* $\delta > \lambda$, *mais pour* $s > \frac{\lambda+1}{2}$ *elle ne l'est que pour* $\delta > 2s - 1$, *ses moyennes d'ordre* $\delta \leq 2s - 1$ *oscillant sans tendre vers une limite déterminée pour* $n \to \infty$. *En général, l'intégrabilité du produit*

$$(1-x)^{\lambda - \frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{\delta - 1}{2}} |f(x)|$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$ *est la condition suffisante de la sommabilité* $(C, \delta \underset{>}{\overset{<}{=}} {}^{2\lambda}_{\lambda})$ *de la série* (I) *pour* $x = +1$ *et de même l'intégrabilité du produit*

$$|f(x)|(1+x)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{\delta-1}{2}} \quad \textit{pour} \quad x = -1.$$

Le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ donne pour la série de Legendre le corrolaire :

La série de Legendre d'une fonction $f(x)$ *est sommable* $(C, 1)$ *en un point frontière* $x = 1$ $[x = -1]$ *avec la somme* $[f(1-0)]$ $[f(0-1)]$, *si* $f(x)$ *est absolument intégrable dans* $(-1, +1)$. *Si le produit*

$$(1+x)^{\frac{\delta-1}{2}}|f(x)| \quad \left\{ \textit{resp.}\, (1-x)^{\frac{\delta-1}{2}}|f(x)| \right\}$$

est intégrable dans $(-1, +1)$, *alors la série de Legendre est sommable* $\left(C, \delta \underset{>\frac{1}{2}}{\overset{<1}{}}\right)$ *en un point* $x = +1$ $[x = -1]$.

Quant à la sommabilité (C, δ) de la série (I) en points intérieurs $(|x| < 1)$, l'étude directe de la série montre [1] qu'elle est sommable $(C, \delta = \lambda)$ en tout point intérieur x, où existe la valeur moyenne

$$\frac{1}{2}\left\{f(x-0) + f(x+0)\right\},$$

vers cette valeur moyenne sous la seule hypothèse d'intégrabilité absolue de $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x)$ dans $(-1, +1)$.

6. Les moyennes $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ de la série (9) ne sont jamais négatives, si $\delta \geqq 2\lambda + 1$. M. L. Féjèr l'a déjà établi dans les cas particuliers $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda \to 0$, c'est-à-dire pour les séries (9*a*) et (9*b*). Dans le cas $\lambda = 0$ il a déduit ce résultat

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{n-m+1}{n+1} \cos m\varphi \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

---

[1] E. KOGBETLIANTZ, *Comptes rendus* du 14 mai 1917, théorème C.

de l'inégalité évidente

$$\sum_{m=0}^{n} \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi \geqq 0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi).$$

Il est intéressant d'observer que ce résultat de M. Féjèr, qui constitue la base de tout son Mémoire célèbre sur la sommabilité (C, 1) des séries trigonométriques de Fourier, est très facile à déduire des raisonnements de d'Alembert, qui déjà au milieu du XVIII[e] siècle, a rigoureusement démontré (¹) que la série

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi + \ldots,$$

c'est-à-dire la série (9 a) sans son premier terme, est sommable (C, 1) et a pour somme $s = -\frac{1}{2}$. Cependant d'Alembert n'a pas tiré toutes les conséquences de ce fait.

Quant à la série (9 b), M. L. Féjèr démontre d'abord que l'on a

$$(56\,a) \qquad \tau_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\gamma) = \sum_{m=0}^{n} P_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi) \geqq 0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi)$$

et puis en déduit l'inégalité

$$(56\,b) \quad \sigma_n^{\left(2,\frac{1}{2}\right)}(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}\left(m+\frac{1}{2}\right) P_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\gamma) \geqq 0.$$

En formant

$$\sigma_0^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) = \lambda\, A_0^{(2\lambda+1)} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \sigma_1^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) = 4\lambda(\lambda+1)\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

on voit immédiatement qu'elles ne sont jamais négatives. Soit donc $n \geqq 2$. Nous allons d'abord démontrer l'inégalité

$$(56) \qquad \sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) \geqq 0 \qquad \left(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi,\ \frac{1}{2} \geqq \lambda > 0\right)$$

pour $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ et, dans ce but, nous subdivisons l'intervalle $(0, \pi)$

(¹) *Opuscules mathém.*, t. 4, p. 156.

en trois intervalles partiels

$$i_1 = \left(0, \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\frac{\pi}{2}\right), \qquad i_2 = \left(\frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\frac{\pi}{2}, \pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$i_3 = \left(\pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Soit d'abord γ compris dans l'intervalle i_2

$$\frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty \sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma)\,z^n = \frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{2\lambda+1}\mathrm{T}^{\lambda+1}},$$

où

$$\mathrm{T} = 1 - 2z\cos\gamma + z^2 = (1 - z\,e^{i\gamma})(1 - z\,e^{-i\gamma}).$$

La fonction $\Phi(z)$ n'a sur son cercle de convergence $|z| = 1$ que les trois points singuliers $z_1 = e^{-i\gamma}$, $z_2 = 1$ et $z_3 = e^{i\gamma}$ et en appliquant la méthode de Darboux, nous devons développer en série de Maclaurin la fonction

$$\mathrm{D}(z) = [\varphi(1) - \varphi'(1)(1-z)]\frac{1}{(1-z)^{2\lambda+1}} + 2\mathrm{R}\left\{\frac{\psi(e^{-i\gamma})}{(1-z\,e^{i\gamma})^{\lambda+1}}\right\},$$

où

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(1+z)}{\mathrm{T}^{\lambda+1}} \qquad \text{et} \qquad \psi(z) \equiv \frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{2\lambda+1}(1-z\,e^{i\gamma})^{\lambda+1}}.$$

La faute commise dans l'application de la formule approximative, déduite par la méthode de Darboux, est inférieure au premier terme rejeté et l'on obtient, en négligeant les premiers termes, correspondant aux points singuliers $e^{i\gamma}$ et $e^{-i\gamma}$, et le second terme correspondant au point $z_2 = 1$:

$$\sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) = \mathrm{A}_n^{(2\lambda)}\varphi(1) + \theta_n \mathrm{A}_n^{(2\lambda-1)}|\varphi'(1)| + 2\theta'_n \mathrm{A}_n^{(\lambda)}|\mathrm{R}[\psi(e^{-i\gamma})e^{in\gamma}]|;$$

les fonctions $\theta_n = \theta_n(\gamma)$ et $\theta'_n = \theta'_n(\gamma)$ sont en valeur absolue inférieures à l'unité.

Or

$$\varphi(1) = \frac{2\lambda}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}}, \qquad \varphi'(1) = -\frac{\lambda(2\lambda+1)}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}}$$

et

$$|R[\psi(e^{-i\gamma})\,e^{in\gamma}]| \leqq |\psi(e^{-i\gamma})\,e^{in\gamma}| = |\psi(e^{-i\gamma})| = \frac{\lambda}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}(2\sin\gamma)^{\lambda}}.$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) &\geqq \frac{2\lambda A_n^{(2\lambda)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}} - \frac{\lambda(2\lambda+1)A_n^{(2\lambda-1)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}} - \frac{2\lambda A_n^{(\lambda)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}(2\sin\gamma)^{\lambda}}\\ &= \frac{2\lambda A_n^{(2\lambda)}}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\lambda+2}}\left\{1 - \frac{\lambda(2\lambda+1)}{n+2\lambda} - \frac{A_n^{(\lambda)}}{(2\sin\gamma)^{\lambda}A_n^{(2\lambda)}}\right\}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) \geqq 0 \qquad \text{pour } \pi-\gamma_0 \geqq \gamma \geqq \gamma_0,$$

où

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{4}\sqrt[\lambda]{\frac{\varphi_n(\lambda)}{(n+2\lambda)^{\lambda}}},$$

en posant

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{(n+2\lambda)^{\lambda+1}A_n^{(\lambda)}}{A_n^{(2\lambda)}(n+\lambda-2\lambda^2)},$$

puisque alors

$$(2\sin\gamma)^{\lambda} \geqq \left(\frac{4\gamma}{\pi}\right)^{\lambda} \geqq \left(\frac{4\gamma_0}{\pi}\right)^{\lambda} = \frac{A_n^{(\lambda)}(n+2\lambda)}{A_n^{(2\lambda)}(n+\lambda-2\lambda^2)},$$

ce qui entraîne

$$1 - \frac{\lambda(2\lambda+1)}{n+2\lambda} - \frac{A_n^{(\lambda)}}{(2\sin\gamma)^{\lambda}A_n^{(2\lambda)}} \geqq 0.$$

Or on démontre aisément l'inégalité

$$(57) \qquad \sqrt[\lambda]{\varphi_n(\lambda)} \leqq 2(1+\lambda) \qquad \left(n \geqq 2,\ \lambda < \frac{1}{2}\right).$$

Posons

$$\begin{aligned}f_n(\lambda) = \log\left\{\frac{\varphi_{n+1}(\lambda)}{\varphi_n(\lambda)}\right\} &= (\lambda+1)\log\left(1+\frac{1}{n+2\lambda}\right)\\ &\quad + \log\left(1-\frac{\lambda}{n+2\lambda+1}\right) + \log\left(1-\frac{1}{n+1+\lambda-2\lambda^2}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$f'_n(\lambda) = \log\left(1 + \frac{1}{n+2\lambda}\right) - \frac{2\lambda+2}{(n+2\lambda)(n+2\lambda+1)}$$
$$- \frac{n+1}{(n+\lambda+1)(n+2\lambda+1)} + \frac{1-4\lambda}{(n+\lambda-2\lambda^2)(n+1+\lambda-2\lambda^2)}.$$

Or

$$\log\left(1 + \frac{1}{n+2\lambda}\right) < \frac{1}{n+2\lambda},$$

donc

$$f'_n(\lambda) < 0 \qquad \left(n \geqq 2,\ 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}\right),$$

puisque le second membre de l'inégalité précédente est négatif, comme on le vérifie facilement. On a donc, pour $n \geqq 2$ et $\lambda < \frac{1}{2}$,

$$f_n(\lambda) < f_n(0) = \log\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\varphi_n(0)} = \log\frac{A_n^{(0)}}{A_n^{(0)}} = \log 1 = 0 \qquad \left(n \geqq 2,\ \lambda < \frac{1}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{\varphi_{n+1}(\lambda)}{\varphi_n(\lambda)} = e^{f_n(\lambda)} < e^0 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{n+1}(\lambda) < \varphi_n(\lambda) < \varphi_{n-1}(\lambda) < \ldots < \varphi_3(\lambda) < \varphi_2(\lambda).$$

Or, pour $\lambda \leqq \frac{1}{2}$,

$$\varphi_2(\lambda) = \frac{(2+2\lambda)^{\lambda+1} A_2^{(\lambda)}}{A_2^{(2\lambda)}(2+\lambda-2\lambda^2)}$$
$$= [2(1+\lambda)]^\lambda \frac{(1+\lambda)(2+\lambda)}{(1+2\lambda)[2+\lambda(1-2\lambda)]} < [2(1+\lambda)]^\lambda,$$

d'où découle l'inégalité (57) et l'on voit que l'inégalité (56) est démontrée dans l'intervalle i_2, c'est-à-dire pour

$$\frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2} \leqq \gamma \leqq \pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2}.$$

Passons maintenant à l'intervalle i_1, lequel est défini par

$$0 \leqq \gamma \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2}.$$

L'identité

$$\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{2\lambda+1}T^{\lambda+1}} = \lambda \frac{1+z}{(1-z)(1-2z\cos\gamma+z^2)} \frac{1}{(1-z)^{2\lambda}T^{\lambda}},$$

qu'on peut transcrire

$$\sum_0^\infty \sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) z^n = \lambda \left[\sum_0^\infty \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos(n+1)\gamma}{1-\cos\gamma} z^n\right]\left[\sum_0^\infty \tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) z^n\right],$$

où l'on a posé

$$\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(2\lambda-1)} P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma),$$

nous fournit la relation

$$\sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma) = \lambda \sum_{m=0}^{n} \rho_{n-m}(\cos\gamma)\, \tau_m^{(\lambda)}(\cos\gamma),$$

où

$$\rho_n(\cos\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)^2 \geqq 0 \qquad (0 \leqq \gamma \leqq \pi;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

On voit qu'il suffit de démontrer l'inégalité

$$(58) \qquad \tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \geqq 0$$

$$\left(0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}, \qquad 0 \leqq \gamma \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2} \leqq \gamma \leqq \pi\right)$$

pour vérifier que l'inégalité (56) est aussi valable dans les intervalles i_1 et i_3. En appliquant la méthode de Stieltjes, nous avons l'expression suivante de la fonction $\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$:

$$\frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \cos\lambda\pi \int_0^1 \frac{u^{n-1+2\lambda}(1-u)^{-2\lambda}\,du}{(1-2u\cos\gamma+u^2)^\lambda}$$
$$+ R\left\{e^{-i[(n+2\lambda)\gamma-3\lambda\pi]}\int_0^1 \frac{(1-u)^{-\lambda}u^{n-1+2\lambda}\,du}{(ue^{-i\gamma}-e^{i\gamma})^\lambda\left(e^{i\frac{\gamma}{2}}-ue^{-i\frac{\gamma}{2}}\right)^{2\lambda}}\right\}.$$

Mais

$$\left(e^{-i\frac{\gamma}{2}} - ue^{-i\frac{\gamma}{2}}\right)^{2\lambda} = (1-2u\cos\gamma+u^2)^\lambda e^{2i\lambda \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right]}$$

et

$$(ue^{-i\gamma} - e^{i\gamma})^\lambda = (1-2u\cos 2\gamma+u^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{i\lambda\left\{\pi+\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\gamma\right]\right\}}.$$

Donc on obtient pour le second terme du second membre de l'expression précédente de la fonction $\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ la forme suivante :

$$\int_0^1 \frac{u^{n-1+4\lambda}\cos[\Omega(u,\gamma)]\,du}{(1-u)^\lambda(1-2u\cos\gamma+u^2)^\lambda(1-2u\cos 2\gamma+u^2)^{\frac{\lambda}{2}}},$$

où

$$\cos[\Omega(u,\gamma)] = \cos\Omega = \cos\left\{(n+2\lambda)\gamma - 2\lambda\pi + 2\lambda \operatorname{arctang}\left[\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right]\right.$$
$$\left. + \lambda \operatorname{arctang}\left[\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\gamma\right]\right\},$$

donc le second terme — et avec lui la fonction $\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ — est positif, si $\cos\Omega \geqq 0$. Pour $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leqq u \leqq 1$, on a

$$0 \leqq \operatorname{arctang}\left[\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\gamma\right] \leqq \frac{\pi}{2},$$

ainsi que

$$0 \leqq \operatorname{arctang}\left[\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right] \leqq \frac{\pi}{2};$$

donc, en supposant $\lambda \leqq \frac{1}{4}$, on obtient

$$-\frac{\pi}{2} \leqq -2\lambda\pi \leqq \Omega(u,\gamma) \leqq (n+2\lambda)\gamma - \lambda\frac{\pi}{2}$$

et l'on voit que, pour $0 \leqq \gamma \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2}$ et $\lambda \leqq \frac{1}{4}$, on a $\cos\Omega \geqq 0$, puisque alors $|\Omega| \leqq \frac{\pi}{2}$, quels que soient $0 \leqq u \leqq 1$ et $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Soit maintenant $\gamma = \pi - \varphi$. Si γ est dans l'intervalle i_3, on a

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\cdot\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{4} \qquad \text{pour} \quad n \geqq 2.$$

Pour $\gamma = \pi - \varphi$, on trouve

$$\Omega(u,\gamma) = \Omega(u,\pi-\varphi)$$
$$= n\pi - \left[(n+2\lambda)\varphi + \lambda\operatorname{arctang}\left(\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\varphi\right) - 2\lambda\operatorname{arctang}\left(\frac{1+u}{1-u}\cot\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Il vient donc pour $\gamma = \pi - \varphi$, en posant

$$\Omega_1 = (n+2\lambda)\varphi + \lambda \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\varphi\right) - 2\lambda \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+u}{1-u}\cot\frac{\varphi}{2}\right) = (n+2\lambda)\varphi + \lambda\,\omega(\varphi):$$

$$\cos\Omega = (-1)^n \cos\Omega_1.$$

Or il est facile d'établir que, pour $0 \leqq \varphi \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{4}$, Ω_1 est compris dans l'intervalle $\left(-\lambda\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. On a

$$\omega(\varphi) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\varphi\right) - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+u}{1-u}\cot\frac{\varphi}{2}\right);$$

donc

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1-u^2}{1-2u\cos 2\varphi + u^2} + \frac{1-u^2}{1+2u\cos\varphi + u^2} \geqq 0 \qquad (0 \leqq u \leqq 1)$$

et, par conséquent,

$$-\pi = \omega(0) \leqq \omega(\varphi) \leqq \omega\left(\frac{\pi}{4}\right) = \psi(u) \leqq -\frac{\pi}{2},$$

où

$$\psi(u) = \omega\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+u}{1-u}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{8}\right).$$

Or, on a

$$\psi(0) = \psi(1) = -\frac{\pi}{2},$$

$\psi'(0) < 0$, $\psi'(1) > 0$ et $\psi''(u) > 0$, d'où l'on déduit

$$\psi(u) \leqq -\frac{\pi}{2}.$$

Définitivement il vient, pour $0 \leqq \varphi \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2}$,

$$-\lambda\pi \leqq \Omega_1 = (n+2\lambda)\varphi + \lambda\omega(\varphi) \leqq (1+\lambda)\frac{\pi}{2} - \lambda\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

et l'on voit que $\cos\Omega_1 \geqq 0$, si $0 \leqq \varphi \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2}$. Or, pour n pair ($n = 2, 4, 6, \ldots$), $\cos\Omega = \cos\Omega_1$; donc il est démontré que l'on a $\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \geqq 0$ dans l'intervalle i_3 pour $n = 2n_1$ et $\lambda \leqq \frac{1}{4}$. Pour compléter le cas $0 < \lambda \leqq \frac{1}{4}$ il nous reste à étudier le signe de la fonction $\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ dans l'intervalle i_3 pour n impaire; $n = 2n_1 + 1$. Ce dernier cas se laisse traiter par une méthode directe. La formule

$$P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{2^{1-\lambda} A_m^{(2\lambda-1)} \Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)(\sin\gamma)^{2\lambda-1}} \int_\gamma^\pi \frac{\cos[(m+\lambda)\Im - \lambda\pi]\, d\Im}{(\cos\gamma - \cos\Im)^{1-\lambda}}$$

permet de ramener la question à l'étude du signe de la somme trigonométrique

$$\rho_n^{(\lambda)}(\Im) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(2\lambda-1)} A_m^{(2\lambda-1)} \cos[(m+\lambda)\Im - \lambda\pi] \qquad (\gamma \leqq \Im \leqq \pi).$$

Pour $\pi \geqq \gamma \geqq \pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\Im$ varie aussi de $\pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}$ jusqu'à π et, en posant $\Im = \pi - \psi$, on a $0 \leqq \psi \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda} \frac{\pi}{2}$ quand γ se trouve dans l'intervalle i_3. Vu que

$$\cos[(m+\lambda)(\pi-\psi) - \lambda\pi] = (-1)^m \cos[(m+\lambda)\psi],$$

on a

$$\rho_n^{(\lambda)}(\Im) = \xi_n^{(\lambda)}(\psi) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m A_{n-m}^{(2\lambda-1)} A_m^{(2\lambda-1)} \cos[(m+\lambda)\psi].$$

Soit maintenant $n = 2r+1$ $(r = 1, 2, \ldots, \infty)$; on a

$$\begin{aligned}\xi_n^{(\lambda)}(\psi) &= \sum_{m=0}^{2r+1} = \sum_{m=0}^{r} + \sum_{r+1}^{2r+1}\\ &= 2\sin\left[\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right)\psi\right] \sum_{m=0}^{r} (-1)^m A_m^{(2\lambda-1)} A_{2r-m+1}^{(2\lambda-1)} \sin\left[\left(r+\frac{1}{2}-m\right)\psi\right]\end{aligned}$$

et il suffit d'étudier le signe de la somme

$$\sum_{m=0}^{r} (-1)^m A_m^{(2\lambda-1)} A_{2r-m+1}^{(2\lambda-1)} \sin\left[\left(r-m+\frac{1}{2}\right)\psi\right]$$

pour $0 \leqq \psi \leqq \frac{1+\lambda}{n+2\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}$, où $n = 2r+1$. Or pour $(r+\frac{1}{2})\psi \leqq \frac{\pi}{2}$ d'un côté on a, quel que soit $m \leqq r$,

$$\sin\left[\left(r-m+\frac{1}{2}\right)\psi\right] \geqq \sin\left[\left(r-m-\frac{1}{2}\right)\psi\right] \qquad \left(\psi \leqq \frac{\pi}{n}\right)$$

et de l'autre côté

$$A_m^{(2\lambda-1)} A_{2r-m+1}^{(2\lambda-1)} \geqq A_{m+1}^{(2\lambda-1)} A_{2r-m}^{(2\lambda-1)} \qquad \left(0 \leqq m \leqq r,\ 0 < \lambda \leqq \frac{1}{2}\right).$$

Par conséquent, le signe de la somme en question est celui de son premier terme et l'on a pour $\psi \leqq \frac{\pi}{2r+1} \cdot \frac{\pi}{n}$

$$\xi_n^{(\lambda)}(\psi) \geqq 0 \qquad \left(n = 2r+1,\ 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{n}\right),$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \gtrless 0 \qquad \left(n = 2r+1,\ 0 < \lambda \leqq \frac{1}{4},\ \pi - \frac{1+\lambda}{n+2\lambda}\,\frac{\pi}{2} \leqq \gamma \leqq \pi\right)$$

et ainsi complète l'étude du signe de cette fonction dans les intervalles i_1 et i_3 pour $0 < \lambda \leqq \frac{1}{4}$.

L'identité

$$\frac{1}{(1-z)^{2\lambda}T^{\lambda}} = \left\{\frac{1}{(1-z)^{\lambda}T^{\frac{\lambda}{2}}}\right\}^2,$$

c'est-à-dire l'identité

$$\sum_0^{\infty} z^n \tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \left[\sum_0^{\infty} z^n \tau_n^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}(\cos\gamma)\right]^2,$$

nous fournit la relation

$$\tau_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \tau_{n-m}^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}(\cos\gamma)\,\tau_m^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}(\cos\gamma),$$

et l'on voit que la restriction $\lambda \leqq \frac{1}{4}$ se trouve remplacée par la condition $\lambda \leqq \frac{1}{2}$. L'inégalité (58) est donc démontrée. Eu égard à (56b), on voit que l'inégalité (56) est établie en toute rigueur. Pour l'affranchir de la restriction accidentelle $\lambda \leqq \frac{1}{2}$ nous envisageons l'identité

$$\frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(1+z)}{(1-z)^{2\lambda+2}\mathrm{T}^{\lambda+\frac{3}{2}}} \equiv \frac{2\lambda+1}{2\lambda}\,\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{2\lambda+1}\mathrm{T}^{\lambda+1}}\,\frac{1}{(1-z)\sqrt{\mathrm{T}}}$$

qu'on peut transcrire ainsi, en posant $\mu = \lambda + \frac{1}{2}$:

$$\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(2\mu+1,\mu)}(\cos\gamma) = \frac{\mu}{\lambda}\left\{\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma)\right|\left\{\sum_0^\infty z^n \tau_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\gamma)\right\}.$$

Elle nous fournit la relation

$$\lambda.\sigma_n^{(2\mu+1,\mu)}(\cos\gamma) = \mu\sum_{m=0}^{n}\sigma_m^{(2\lambda+1,\lambda)}(\cos\gamma)\tau_{n-m}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\gamma) \qquad \left(\mu = \lambda + \frac{1}{2}\right).$$

En s'appuyant sur cette relation et sur les inégalités (56 a) et (56), on démontre par l'induction complète que l'inégalité (56) est valable quel que soit $\lambda > 0$. On a donc démontré pour $\delta = 2\lambda + 1$ le résultat

$$(59) \qquad s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \geqq 0 \qquad (\delta \geqq 2\lambda+1,\ \lambda > 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ 0 \geqq \gamma \leqq \pi).$$

Ce résultat est *a fortiori* valable pour $\delta > 2\lambda + 1$, puisqu'on a pour $\delta' > \delta$

$$\sigma_n^{(\delta',\lambda)}(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{A}_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)}\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma) \qquad (\delta' > \delta).$$

Observons, pour compléter ce résultat, que la méthode de Darboux nous fournit pour $\delta < 2\lambda + 1$ l'expression suivante de la moyenne

$$s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\pi) = s_n^{(\delta,\lambda)}(-1),$$

c'est-à-dire, pour $\gamma = \pi$,

$$\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(-1) = \frac{\lambda}{(1-z)^\delta(1+z)^{2\lambda+1}} \qquad (\delta < 2\lambda+1),$$

$$\mathrm{D}(z) = 2^{-\delta}\lambda\sum_0^\infty(-1)^n\mathrm{A}_n^{(2\lambda)}z^n;$$

d'où

$$s_n^{(\delta,\lambda)}(-1)=\frac{\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(-1)}{A_n^{(\delta)}}=2^{-\delta}\lambda(-1)^n\frac{A_n^{(2\lambda)}}{A_n^{(\delta)}}[1+o(1)],$$

ce qui nous montre que l'inégalité (59) n'est pas satisfaite pour $\gamma=\pi$ et $n=2r+1$, si $\delta<2\lambda+1$. Par conséquent on ne peut pas diminuer l'ordre $\delta=2\lambda+1$ de la moyenne $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ dans l'énoncé du théorème exprimé par l'inégalité (59), si on laisse γ varier dans tout intervalle $(0,\pi)$. Au contraire, si l'on suppose que γ reste compris dans l'intervalle $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, où ε est aussi petit qu'on veut mais fixe $(\varepsilon>0)$, on démontre, en employant la méthode de Darboux, que l'inégalité $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\geqq 0$ a lieu déjà pour $\delta>\lambda+1$, si l'on a soin de choisir n suffisamment grand, $n>N(\varepsilon)$.

En nous appuyant sur le théorème établi, nous allons démontrer que les moyennes arithmétiques d'ordre $\delta\geqq 2\lambda+1$ de la série (II)

$$\text{(II)}\qquad F(\theta,\varphi)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty(n+\lambda)\iint_S\frac{F(\theta',\varphi')P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}\qquad(\lambda>0)$$

restent toujours comprises, quels que soient $n=0, 1, 2, \ldots, \infty$ et le point (θ,φ) sur la sphère S, où l'on considère ces moyennes, entre les bornes supérieure et inférieure de la fonction développée sur la sphère. Soit donc $\delta\geqq 2\lambda+1$ et désignons par M et m les bornes supérieure et inférieure de la fonction $F(\theta,\varphi)$ que nous supposons bornée sur la sphère

$$m\leqq F(\theta,\varphi)\leqq M\qquad(0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi).$$

La moyenne arithmétique $F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$ d'ordre δ de la série (II) s'exprime par l'intégrale

$$F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\frac{F(\theta',\varphi')s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

d'où, pour $\delta\geqq 2\lambda+1$, l'on conclut en s'appuyant sur (59) :

$$m\frac{1}{2\pi}\iint_S\frac{s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}\leqq F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$$
$$\leqq M\frac{1}{2\pi}\iint_S\frac{s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Or, en prenant $F(\theta, \varphi) \equiv 1$, ce qui entraîne aussi $F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \equiv 1$, on a

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int\int_S \frac{s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\, d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}};$$

donc

$$m \leqq F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \leqq M \qquad (\delta \geqq 2\lambda + 1).$$

C'est cette importante propriété qui distingue les moyennes d'ordre $\delta \geqq 2\lambda + 1$ de la série (II) des moyennes d'ordre $\delta < 2\lambda + 1$.

Une autre application du théorème (59) de ce paragraphe est la preuve du fait que le système orthogonal ultrasphérique est complet. Il s'agit de prouver que l'on a toujours

$$(60) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(\lambda)}]^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{[f(x)]^2\, dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \qquad (\lambda > 0),$$

où $f_n^{(\lambda)}$ est le coefficient de Fourier dans le système ultrasphérique normé, c'est-à-dire

$$f_n^{(\lambda)} = \left[\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} (n+\lambda) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)\, P_n^{(\lambda)}(t)\, dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il est bien connu ([1]) qu'il suffit de prouver (60) pour les fonctions $f(x)$ continues. Soit donc $f(x)$ continue dans $(-1, +1)$.

La série, qui figure dans le premier membre de (60), ne peut être que convergente ou essentiellement divergente. Donc, elle n'est sommable (C, δ) que si elle converge et ayant prouvé sa sommabilité (C, δ) pour une valeur quelconque de $\delta > -1$, nous établirons par là même sa convergence et trouverons la valeur de sa somme. Appliquons à la série (60) la méthode de sommation (C, δ) avec $\delta \geqq 2\lambda + 1$; on a

$$[f_n^{(\lambda)}]^2 = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} (n+\lambda) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}$$

$$\times \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{f(u) f(v)\, P_n^{(\lambda)}(u)\, P_n^{(\lambda)}(v)\, du\, dv}{[(1-u^2)(1-v^2)]^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

([1]) STEKLOFF, *Sur la théorie de fermeture*, etc. (*Comm. de l'Acad. des Sciences à Petrograd*, 8e série, t. 30, 1911, théorèmes V-VII).

et la moyenne $s_n^{(\delta)}$ de la série (60) se trouve exprimée par l'intégrale double

$$s_n^{(\delta)} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)f(v)\,S_n^{(\delta,\lambda)}(u,v)\,du\,dv}{[(1-u^2)(1-v^2)]^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

où $S_n^{(\delta,\lambda)}(u,v)$ dénote la moyenne arithmétique d'ordre δ de la série ultrasphérique

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}P_n^{(\lambda)}(u)\,P_n^{(\lambda)}(v).$$

En s'appuyant sur la relation (4)

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}P_n^{(\lambda)}(u)\,P_n^{(\lambda)}(v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\varphi)^{2\lambda-1}P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\varphi,$$

où

$$\cos\gamma = uv + \cos\varphi\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)},$$

on trouve

$$S_n^{(\delta,\lambda)}(u,v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\varphi)^{2\lambda-1}s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,d\varphi,$$

où $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ désigne comme toujours la moyenne de la série (9).

Nous avons la conclusion

$$S_n^{(\delta,\lambda)}(u,v) \geqq 0 \qquad (-1 \leqq u,\ v \leqq +1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ \delta \geqq 2\lambda+1)$$

pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$, quels que soient $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et u, v dans l'intervalle $(-1, +1)$, et puis, pour $\delta > 2\lambda$ et $u \neq v$,

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta,\lambda)}(u,v) = 0 \qquad (u \neq v,\ \delta > 2\lambda), \tag{61}$$

et (61) a lieu uniformément en u et v pour $|u - v| \geqq \varepsilon > 0$.

Eu égard à (61), on obtient pour $\delta > 2\lambda$

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = \lim_{n=\infty}\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{f(v)\,dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\frac{f(u)\,S_n^{(\delta,\lambda)}(u,v)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right\}.$$

Or, pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$ et ε suffisamment petit, on a, quelque petit que soit η ($\eta > 0$),

$$\left| \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{f(u) S_n^{(\delta,\lambda)}(u, v)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} - f(v) \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{S_n^{(\delta,\lambda)}(u, v)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \right| < \eta \int_{-1}^{+1} \frac{S_n^{(\delta,\lambda)}(u, v)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \eta,$$

puisqu'on a, eu égard à (2),

$$\int_{-1}^{+1} \frac{S_n^{(\delta,\lambda)}(u, v)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{\lambda \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = 1.$$

Donc on trouve, pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} &= \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{[f(v)]^2\, dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{S_n^{(\delta,\lambda)}(u, v)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \\ &= \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{[f(v)]^2\, dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \int_{-1}^{+1} \frac{S_n^{(\delta,\lambda)}(u, v)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \int_{-1}^{+1} \frac{[f(v)]^2\, dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion cherchée

$$\sum_0^\infty [f_n^{(\lambda)}]^2 = \lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = \int_{-1}^{+1} \frac{[f(v)]^2\, dv}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour conclure, appliquons les théorèmes des paragraphes **4** et **5** à l'exemple particulier suivant : soit $f(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)^\omega$; en la développant en série (I), on obtient

$$\left(\frac{2}{1-x}\right)^\omega \sim \sum_0^\infty c_n^{(\lambda,\omega)} P_n^{(\lambda)}(x) \qquad \left(\omega < \lambda + \frac{1}{2}\right),$$

où

$$c_n^{(\lambda,\omega)} = \frac{2^\omega \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n^{(\lambda)}(u)\, du}{(1-u)^\omega (1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

La relation (¹)

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n^{(\lambda)}(u)\, \Phi(u)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)}{2^n \Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n \Phi}{du^n} (1-u^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} du,$$

(¹) N. Nielsen, *loc. cit.*, p. 102, formule (6).

nous fournit, eu égard à

$$\frac{d^n[(1-u)^{-\omega}]}{du^n} = \frac{\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(\omega)}(1-u)^{-n-\omega},$$

et, en employant la substitution $2\tau = 1+u$,

$$c_n^{(\lambda,\omega)} = \frac{2\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(\omega)} \frac{n+\lambda}{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \tau^{n+\lambda-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{\lambda-\frac{1}{2}-\omega}\, d\tau;$$

donc, grâce à la restriction $\omega < \lambda + \frac{1}{2}$, on trouve

$$(62) \qquad \frac{2^\omega}{(1-x)^\omega} \sim \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\omega)} \sum_0^\infty (n+\lambda)\frac{\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(n+2\lambda+1-\omega)} P_n^{(\lambda)}(x).$$

La série (62) généralise le développement de la fonction $2^\omega(1-x)^{-\omega}$ en série de Legendre, dont parle Stieltjes dans sa lettre (¹) à Hermite et qu'on rencontre chez F. Neumann (²). Ce cas particulier de la série (62) pour $\lambda = \frac{1}{2}$ a été envisagé aussi par M. L. Féjèr (³). En posant dans (62) $x = \cos\gamma$ et en passant à la limite pour $\lambda = 0$, on obtient un autre cas particulier

$$\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-2\omega} \sim \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\omega)} \left\{\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(n+1-\omega)}\cos n\gamma\right\} \qquad \left(\omega < \frac{1}{2}, \lambda = 0\right).$$

En posant dans (62) $x = -1$, on a la série

$$(63) \qquad 1 \sim \frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)\left(\lambda+\frac{1}{2}-\omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\omega)\Gamma(2\lambda)} \times \sum_0^\infty (-1)^n (n+\lambda)\frac{\Gamma(n+\omega)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1+2\lambda-\omega)\Gamma(n+1)} \qquad \left(\omega < \lambda + \frac{1}{2}\right),$$

(¹) *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. 2, 1905, p. 46, lettre nº 249.

(²) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*, 1878, p. 133.

(³) *Mathem. Annalen*, t. 67, 1909, p. 100-103, § 6.

dont nous allons étudier la sommabilité (C, δ) par une méthode directe. Cette série peut être transcrite ainsi :

$$1 \sim \frac{2^{\omega}\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda) \int_{-1}^{+1} \frac{P_n^{(\lambda)}(-u)\,du}{(1-u)^{\omega}(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

ce qui donne, pour sa moyenne d'ordre δ — $s_n^{(\delta)}$, l'expression

$$s_n^{(\delta)} = \frac{2^{\omega}\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(-u)\,du}{(1-u)^{\omega}(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Or nous avons établi au paragraphe **5** la formule approximative pour l'intégrale $j_n^{(\alpha)}$ du même type et, en l'appliquant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} s_n^{(\delta)} = {} & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{j_n^{(\omega)}}{A_n^{(\delta)}} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \\ & \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} + (-1)^n \frac{A_n^{(2\omega-1)}}{A_n^{(\delta)}} \right. \\ & \left. \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\omega\right)}{2^{\delta+1-2\omega}\Gamma(\lambda)} [1+o(1)] + o(1) \right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$s_n^{(\delta)} = 1 + (-1)^n \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\omega\right)\Gamma(\delta+1)}{2^{\delta}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma(\omega)} (n+1)^{2\omega-\delta-1}[1+o(1)] + o(1). \tag{64}$$

La formule obtenue nous montre clairement que *la série* (63) *n'est pas sommable* (C, $\delta \leqq 2\omega - 1$) *et l'est* (C, $\delta > 2\omega - 1$) *avec la somme égale à l'unité, quel que soit* $0 < \omega < \lambda + \frac{1}{2}$. Donc, pour chaque $\omega < \lambda + \frac{1}{2}$, elle est sommable (C, 2λ), puisque $2\omega - 1 < 2\lambda$, et, pour $\omega \geqq \lambda + \frac{1}{2}$, la série (63) n'existe pas, puisque les intégrales qui entrent dans $c_n^{(\lambda,\omega)}$ n'ont plus de sens. Ce résultat illustre très bien nos théorèmes : Sur la sphère S,

$$f(\cos\theta) = f(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)^{\omega} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\omega}}$$

devient infinie au pôle nord $\theta = 0$ de S d'ordre $s = 2\omega < 2\lambda + 1$; donc, selon nos théorèmes, son développement (II) au point $\theta = \pi$ doit être sommable $(C, 2\lambda)$ avec la somme $f(-1) = 1$ quel que soit $\omega < \lambda + \frac{1}{2}$, sommable $(C, \delta > s - 1 = 2\omega - 1)$ si $s = 2\omega > \frac{\lambda+1}{2}$ et sommable $(C, \delta > \lambda)$ si $s = 2\omega \leqq \frac{\lambda+1}{2}$. D'un autre côté, soit δ fixe et compris entre λ et 2λ : $\lambda < \delta < 2\lambda$. On a

$$\frac{\delta+1}{2} < \lambda + \frac{1}{2};$$

donc nous pouvons toujours former la série (63) avec $\omega \geqq \frac{\delta+1}{2}$, et la fonction $\left(\frac{2}{1-x}\right)^{\omega} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2\omega}$ nous fournit l'exemple d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ continue partout sur S, sauf le pôle nord de la sphère, pour laquelle le produit

$$[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} |F(\theta', \varphi')|$$

est intégrable sur S et dont le développement ultrasphérique (II) n'est pas néanmoins sommable (C, δ) pour la valeur indiquée de $\delta < 2\lambda$ en un point $\theta = \pi$ de continuité de la fonction développée. Il est à observer que notre théorème ne permet de rien conclure sur la sommabilité $(C, \delta \leqq \lambda)$ de la série (63), si $\omega < \frac{\lambda+1}{2}$, tandis que l'étude directe, qui nous a fourni la formule (64), donne la conclusion précise : si $\omega < \frac{\lambda+1}{2}$, il suffit de prendre δ plus grand que $2\omega - 1$ pour pouvoir sommer (C, δ) la série (63) et il n'est nullement nécessaire de le supposer plus grand que λ, comme on est forcé de faire, en appliquant le théorème démontré, qui ne concerne que la sommabilité $(C, \delta > \lambda)$ et laisse inétudiées les conditions de la sommabilité $(C, \delta \leqq \lambda)$ des séries ultrasphériques. Notre étude directe de la sommabilité (C, δ) de la série (63) donne pour $\lambda = \frac{1}{2}$ le corollaire suivant :

La série de Stieltjes-Neumann

$$\frac{2^{\omega}}{(1-x)^{\omega}} \sim \frac{2\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)} \sum_{0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(n+2-\omega)} P_n(x) \qquad (\omega < 1)$$

au point $x = -1$ *n'est pas sommable* $(C, \delta \leqq 2\omega - 1)$ *et l'est* (C, δ) *pour* $\delta > 2\omega - 1$, *quel que soit* $\omega < 1$; *donc pour* $x = -1$ *elle diverge si* $\omega \geqq \frac{1}{2}$, *et converge si* $\omega < \frac{1}{2}$.