JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CARTAN

Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 167-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__167_0>

Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl;

PAR E. CARTAN.

1. M. H. Weyl, dans la dernière édition de son beau livre : *Raum, Zeit, Materie* (1), a développé une théorie de l'espace dans laquelle il prétend donner la raison profonde pour laquelle les propriétés métriques de l'Univers sont fournies par une forme différentielle quadratique. Cette *nécessité* d'une métrique fondée sur une forme quadratique résulte pour lui d'un théorème emprunté à la théorie des groupes : le but de cet article est de démontrer ce théorème (2). Il importe, avant de donner cette démonstration, d'indiquer le point de vue de M. H. Weyl, afin de bien montrer la portée du théorème en question.

Transport par parallélisme.

2. Étant donnée une variété numérique, ou espace, à n dimensions, M. H. Weyl définit d'abord un *transport par parallélisme* dans cet espace. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées, choisies du reste d'une manière absolument arbitraire, d'un point quelconque P de l'espace. Tout système de différentielles $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ définit un *vecteur* issu

(1) Traduit en français sous le titre : *Temps, espace, matière*, par G. Juvet et R. Leroy; Paris, Blanchard, 1922.

(2) J'ai donné une esquisse de cette démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 10 juillet 1922). M. H. Weyl en avait indiqué une (*Math. Zeitschr.*, t. XII, 1922, p. 114-146), fondée sur des considérations tout à fait différentes et qui, dit l'auteur, lui donne l'impression de danser constamment sur la corde.

de P, dont les n différentielles données peuvent être dites les *composantes*.

Prenons maintenant un point P′ *infiniment voisin* de P, de coordonnées $(x_i + dx_i)$. On peut convenir de dire que transporter parallèlement à lui-même de P en P′ le vecteur de composantes $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, c'est considérer le vecteur d'origine P′ qui a les *mêmes* composantes $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$. Mais une telle opération *ne reste pas invariante* si l'on fait un changement de variables arbitraire. Si en effet on pose

$$x_i = f_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}),$$

les deux vecteurs d'origine P et P′ qui ont, *avec le nouveau système de coordonnées*, les mêmes composantes $\delta\overline{x_i}$, ont, *avec l'ancien système*, des composantes différentes

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_k}} \delta\overline{x_k}, \tag{1}$$

$$\delta' x_i = \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_k}} + \sum \frac{\partial^2 f_i}{\partial \overline{x_h}\, \partial \overline{x_k}} d\overline{x_h} \right) \delta\overline{x_k}. \tag{2}$$

Nous sommes donc conduits à admettre une infinité de transports par parallélisme possibles [un quelconque d'entre eux est défini par l'opération qui fait passer du vecteur d'origine P ayant les composantes (1), au vecteur d'origine P′ ayant les composantes (2)]. On voit immédiatement que cette opération se traduit analytiquement par des formules de la forme

$$\delta' x_i = \delta x_i + \sum_{hk} \Gamma_{ihk}\, dx_h\, \delta x_k, \tag{3}$$

les coefficients Γ_{ihk} étant *symétriques* par rapport aux deux derniers indices h et k. Réciproquement, étant donnés un point P et un système symétrique quelconque de constantes Γ_{ihk}, les formules (3), qui font correspondre à tout vecteur de composantes δx_i d'origine P, un vecteur de composantes $\delta' x_i$ d'origine infiniment voisine P′, définissent un transport par parallélisme : il suffit, pour s'en convaincre, de faire un changement de variables tel qu'on ait, *au point* P,

$$x_i = \overline{x_i}, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_i}} = 1, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_j}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_i}{\partial \overline{x_h}\, \partial \overline{x_k}} = \Gamma_{ihk}.$$

Si l'on se donne un système *symétrique* de coefficients Γ_{ihk} fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$, les formules (3) définissent une *connexion affixe* pour l'espace. Cela ne veut pas dire que, par un changement convenable de coordonnées, les équations (3) puissent être ramenées identiquement à

$$\delta' \overline{x}_i = \overline{\delta x}_i,$$

mais cela veut dire qu'elles peuvent l'être au voisinage de tout point P, au moyen d'un changement de coordonnées *valable pour ce point.*

3. On peut exprimer d'une autre manière la condition pour que les formules (3) définissent un transport par parallélisme. Ces formules peuvent en effet s'écrire symboliquement

$$d(\delta x_i) = \sum_{hk} \Gamma_{ihk}\, dx_h\, \delta x_k,$$

et définissent ainsi ce qu'il faut entendre par l'opération d appliquée aux symboles δx_i. La condition de symétrie des coefficients Γ_{ihk} exprime alors tout simplement que l'on a

$$d(\delta x_i) = \delta(dx_i),$$

autrement dit, que *les opérations d et δ sont interchangeables entre elles.*

Cette remarque va nous permettre de présenter sous une forme analytique beaucoup plus générale la notion de transport par parallélisme. Nous pouvons, en effet, définir un vecteur d'origine P, non pas par ses n composantes $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, mais par n combinaisons linéaires arbitraires

$$\begin{aligned}
\omega_1(\delta) &= a_{11}\,\delta x_1 + a_{12}\,\delta x_2 + \ldots + a_{1n}\,\delta x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\omega_n(\delta) &= a_{n1}\,\delta x_1 + a_{n2}\,\delta x_2 + \ldots + a_{nn}\,\delta x_n,
\end{aligned}$$

de $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$. On peut faire cela pour tous les points de l'espace, en prenant pour les coefficients a_{ij} des fonctions déterminées de $x_1, \ldots, x_n$. Cela posé, tout transport par parallélisme pourra se définir par des formules telles que

$$(4)\qquad d\omega_i(\delta) = \sum_{h,k} \Gamma_{ihk}\,\omega_h(d)\,\omega_k(\delta).$$

Pour savoir à quelles conditions doivent satisfaire les nouveaux coefficients Γ_{ihk}, nous n'avons qu'à former $\delta\omega_i(d)$ et soustraire, ce qui donne

$$d\omega_i(\delta) - \delta\omega_i(d) = \sum_{h,k} \Gamma_{ihk}[\omega_h(d)\,\omega_k(\delta) - \omega_h(\delta)\,\omega_k(d)];$$

mais les opérations d et δ étant *échangeables entre elles*, le premier membre est le *covariant bilinéaire* de la forme ω_i. On a donc, symboliquement, l'identité

$$(5)\qquad \omega'_i = \sum \Gamma_{ihk}[\omega_h\omega_k];$$

les coefficients Γ_{ihk} doivent être choisis de manière à satisfaire à cette identité.

On retrouve la condition primitive si l'on prend $\omega_i = dx_i$, car alors le premier membre ω'_i est nul, et la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre soit nul est

$$\Gamma_{ihk} - \Gamma_{ikh} = 0.$$

4. Posons

$$\omega_{ik} = \sum_h \Gamma_{ihk}\,\omega_h;$$

les équations (4) qui définissent le transport par parallélisme prennent la forme

$$(6)\qquad d\omega_i(\delta) = \sum_k \omega_{ik}(d)\,\omega_k(\delta);$$

les n^2 formes de Pfaff ω_{ik} sont alors assujetties à satisfaire aux n identités (¹)

$$(7)\qquad \omega'_i = \sum_k [\omega_{ik}\,\omega_k].$$

(¹) Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, je développe une théorie des variétés à connexion affine,

Le groupe des rotations et la connexion métrique.

5. M. H. Weyl admet qu'en chaque point P de l'espace on puisse définir la *congruence* de deux vecteurs ou de deux systèmes de vecteurs d'origine P. Pour que cette notion satisfasse à l'axiome que deux systèmes de vecteurs congruents à un troisième sont congruents entre eux, il est nécessaire qu'elle soit définie au moyen d'un *groupe* G de substitutions linéaires par rapport aux composantes des vecteurs. Ce groupe définit la *métrique* au point P. M. H. Weyl ajoute la condition que ce groupe conserve les volumes : il lui donne le nom de *groupe des rotations* au point P.

De la métrique en un point, il passe à la *connexion métrique* : étant donnés deux points infiniment voisins quelconques P et P′, il suppose l'existence, entre les vecteurs issus de P et les vecteurs issus de P′, d'une correspondance telle que les derniers puissent être dits *congruents* aux premiers. Cela exige que le groupe des rotations en P′ soit *semblable* au groupe des rotations en P (c'est-à-dire n'en diffère que par un changement linéaire effectué sur les variables); la correspondance par congruence entre les deux points P et P′ est alors possible d'une infinité de manières : elle dépend d'autant de paramètres qu'il y en a dans le groupe G; elle définit la *connexion métrique* de l'espace.

6. Voici maintenant quels sont les deux axiomes que M. H. Weyl met à la base de sa théorie des espaces à connexion métrique et qui lui permettent *a priori* de déterminer la nature du groupe G des rotations.

Le premier axiome est le suivant :

I. *La nature de l'espace est compatible avec toute connexion métrique possible*. Voici ce que l'auteur entend par là.

Tous les groupes des rotations attachés aux différents points de

---

en admettant, pour définir le transport par parallélisme, des expressions ω_{ik} *absolument arbitraires*. La condition (7) caractérise ce que j'appelle les variétés *sans torsion*.

l'espace étant semblables entre eux, on peut en chaque point P définir les vecteurs partant de ce point au moyen de coordonnées

$$\omega_i(\delta) = a_{i1}\,\delta x_1 + a_{i2}\,\delta x_2 + \ldots + a_{in}\,\delta x_n,$$

telles que les substitutions linéaires sur les $\omega_i(\delta)$ qui définissent analytiquement le groupe G aient des coefficients *indépendants* du point P. Nous supposerons le groupe G engendré au moyen de r transformations infinitésimales indépendantes

$$(8) \qquad X_s f = \sum a_{iks}\, u_k \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

où nous avons désigné les variables par u_i au lieu de $\omega_i(\delta)$. Les coefficients a_{iks} sont donc des *constantes* absolues données une fois pour toutes. La condition que le groupe G conserve les volumes se traduit par les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{iis} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r).$$

Cela posé, la signification du premier axiome de M. H. Weyl est la suivante. Choisissons arbitrairement en chaque point P de l'espace l'*orientation* du groupe G des rotations, c'est-à-dire les coefficients a_{ij} des formes $\omega_i(\delta)$ qui donnent les variables pour lesquelles le groupe des rotations en P a la forme analytique (8). Un tel choix étant fait, la connexion métrique de l'espace est déterminée : l'une des correspondances par congruence entre vecteurs issus de P et vecteurs issus de P' est celle pour laquelle les deux vecteurs correspondants ont *mêmes* composantes $\omega_i(\delta)$. La correspondance *infiniment voisine* la plus générale fera correspondre au vecteur de composantes $\omega_i(\delta)$ issu de P le vecteur de composantes

$$\omega_i(\delta) + \sum_{k,s} \varepsilon_s a_{iks} \omega_k(\delta)$$

issu de P', en désignant par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ des constantes très petites.

L'énoncé de M. H. Weyl signifie que *parmi les correspondances par congruence précédentes il y en a au moins une qui définit un transport par parallélisme*, et cela quel que soit le choix des formes $\omega_i(\delta)$.

Cela revient à dire que l'on peut prendre pour les ε_s des formes différentielles linéaires $\varpi_s(d)$ telles que les formules

$$d\omega_i(\delta) = \sum_{k,s} a_{iks}\,\varpi_s(d)\,\omega_k(\delta)$$

définissent un transport par parallélisme. Les composantes ω_{ik} de ce transport sont ici

$$\omega_{ik}(d) = \sum_s a_{iks}\,\varpi_s(d).$$

Par suite, l'axiome I de M. H. Weyl peut s'énoncer de la manière suivante :

De quelque manière que l'on choisisse les n formes de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n$, *il est possible, au moins d'une manière, de trouver r formes de Pfaff* $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_r$ *de manière à satisfaire aux identités*

$$\omega'_i = \sum_{k,s} a_{iks}[\varpi_s \omega_k].$$

Le second axiome de M. H. Weyl.

7. Le second axiome de M. H. Weyl affirme que la connexion métrique étant choisie d'une manière arbitraire, *il n'y a qu'une correspondance par congruence entre les vecteurs issus de deux points infiniment voisins qui soit un transport par parallélisme.*

Le théorème de H. Weyl.

8. Le théorème qui, en partant des axiomes précédents, prouve la nécessité de la métrique pythagoricienne est alors le suivant :

Il n'y a que le groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée qui satisfasse aux axiomes I et II.

Autrement dit, *si un groupe linéaire* G *conservant les volumes, défini par les r transformations infinitésimales* (8), *est tel qu'il soit possible, d'une manière et d'une seule, de trouver r formes* *linéaires* $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ *de* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *rendant les n formes alternées*

$$\sum_{k,s} a_{iks}[\varpi_s \omega_k] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

égales à n formes arbitrairement données, ce groupe est le groupe qui conserve une forme quadratique non dégénérée.

Nous allons démontrer un théorème plus général, où nous ne prendrons en considération que l'axiome I, et dont voici l'énoncé :

Si un groupe linéaire G conservant les volumes, défini par les r transformations infinitésimales (8), *est tel qu'il soit possible d'au moins une manière de trouver r formes linéaires* $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ *de* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *rendant les n formes alternées*

$$\sum_{k,s} [a_{iks} \varpi_s \omega_k] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

égales à n formes arbitrairement données, ce groupe est :

Soit le groupe linéaire général à $n^2 - 1$ *paramètres ;*

Soit le groupe le plus général, à $n(n-1)$ *paramètres, laissant invariant un point* (1);

Soit (n pair) le groupe le plus général, à $\frac{n(n+1)}{2}$ *paramètres, laissant invariant un complexe linéaire non dégénéré ;*

Soit le groupe le plus général, à $\frac{n(n-1)}{2}$ *paramètres, laissant invariante une quadrique non dégénérée* (2).

Nous conviendrons, dans ce qui suit, d'appeler groupe W tout groupe conservant les volumes et satisfaisant aux conditions de l'axiome I. Le théorème précédent donne donc les quatre classes de groupes W possibles.

---

(1) J'emploie ici un langage géométrique, en convenant de regarder les variables $u_1, \ldots, u_n$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à $n-1$ dimensions.

(2) Ce théorème n'est naturellement pas énoncé par M. H. Weyl, qui base plutôt ses considérations sur les limitations introduites par l'axiome II.

Limitation de l'ordre des groupes W à n variables.

9. On a immédiatement une limite inférieure du nombre r des paramètres d'un groupe W à n variables. En effet, les coefficients des r formes ϖ_s sont en nombre rn; d'autre part, une forme quadratique extérieure à n variables contient $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients. Les rn coefficients des formes ϖ_s doivent donc satisfaire à

$$n\frac{n(n-1)}{2}$$

équations linéaires; pour que cela soit toujours possible, il faut

$$rn \geqq n\frac{n(n-1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$r \geqq \frac{n(n-1)}{2}.$$

On a ainsi une limite inférieure de l'ordre du groupe W ([1]).

Les groupes W qui laissent invariante une multiplicité plane.

10. Procédons d'abord à la recherche des groupes W qui laissent invariante une multiplicité plane : nous allons montrer que cette multiplicité plane se réduit nécessairement à un point.

Supposons en effet, ce qui ne restreint pas la généralité, que le groupe G laisse invariante la multiplicité plane

$$u_{q+1} = u_{q+2} = \ldots = u_n = 0 \qquad (q \geqq 2).$$

Cela veut dire qu'on a les relations

$$a_{q+1,k,s} = a_{q+2,k,s} = \ldots = a_{nks} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q; s = 1, 2, \ldots, r).$$

([1]) Cette inégalité est due à M. H. Weyl.

Considérons alors, par exemple, la forme

$$\sum_{k,s} a_{q+1,k,s}[\varpi_s \omega_k] = \sum_{k=q+1}^{k=n} \sum_{s=1}^{s=r} a_{q+1,k,s}[\varpi_s \omega_k];$$

de quelque manière que l'on choisisse les expressions ϖ_s, on n'aura jamais dans cette forme de terme en $[\omega_1 \omega_2]$; par suite, elle ne pourra pas toujours être identifiée à une forme arbitrairement donnée.

Supposons maintenant que le groupe G laisse invariant le point

$$u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0,$$

et considérons les $n-1$ formes

$$\sum_{k=2}^{k=n} \sum_{s=1}^{s=r} a_{2ks}[\varpi_s \omega_k], \quad \ldots, \quad \sum_{k=2}^{k=n} \sum_{s=1}^{s=r} a_{nks}[\varpi_s \omega_k].$$

On doit pouvoir choisir $\varpi_1, \ldots, \varpi_s$ de manière que, dans ces $n-1$ formes, les coefficients de

$$[\omega_1 \omega_2], [\omega_1 \omega_3], \ldots, [\omega_1 \omega_n]$$

aient des valeurs arbitrairement données. Il en résulte que les $(n-1)^2$ expressions

$$a_{ij1}\varpi_1 + a_{ij2}\varpi_2 + \ldots + a_{ijr}\varpi_r \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n)$$

sont linéairement indépendantes. On a donc déjà

$$r \geqq (n-1)^2.$$

On peut dire en outre qu'il existe, dans le groupe G, $(n-1)^2$ transformations infinitésimales de la forme

$$X_{ij}f = u_j \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k(ij)} u_k \frac{\partial f}{\partial u_1} \qquad (i, j = 2, \ldots, n).$$

Comme du reste le groupe G conserve les volumes, on doit avoir

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{kks} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

On peut donc poser, en distinguant le cas où $i=j$ et celui où $i \neq j$,

$$\mathrm{X}_{ii}f = u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} - u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \sum_{k=2}^{k=n} b_{k(ii)} u_k \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$\mathrm{X}_{ij}f = u_j \frac{\partial f}{\partial u_i} \qquad\qquad + \sum_{k=2}^{k=n} b_{k(ij)} u_k \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

11. Cela posé, si r est supérieur à $(n-1)^2$, il existe au moins une autre transformation infinitésimale, nécessairement de la forme

$$(c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n) \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

et qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer ramenée à

$$u_2 \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

En la combinant avec les transformations précédentes on en déduit l'existence des transformations

$$u_3 \frac{\partial f}{\partial u_1}, \; \ldots, \; u_n \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

On obtient alors *le groupe le plus général qui laisse invariant le point* $u_2 = \ldots = u_n = 0$; *il est à* $n(n-1)$ *paramètres.*

12. Reste le cas où $r=(n-1)^2$. Nous allons voir que ce cas ne peut se présenter. En effet, la transformation infinitésimale

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}_{22}f + \mathrm{X}_{33}f + \ldots + \mathrm{X}_{nn}f \\
&= -(n-1) u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} + \sum_{k=2}^{k=n} \beta_k u_k \frac{\partial f}{\partial u_1} \\
&= \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) - \left(n u_1 + \sum \beta_k u_k \right) \frac{\partial f}{\partial u_1}
\end{aligned}$$

peut toujours, par un changement permis de variables, être ramenée à avoir tous ses coefficients β_k nuls : il suffit, sans changer les variables

$u_2, \ldots, u_n$, de prendre

$$u_1 + \frac{1}{n}\sum \beta_k u_k$$

pour nouvelle variable u_1 (¹).

En combinant alors cette transformation infinitésimale

$$X_{22}f + \ldots + X_{nn}f = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) - nu_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}$$

avec $X_{ii}f$ et $X_{ij}f$ et exprimant que les crochets obtenus représentent encore des transformations du groupe, on constate que *tous les coefficients $b_{k(ii)}$, $b_{k(ij)}$ sont nuls*. Mais alors le groupe G laisse manifestement invariante la multiplicité plane $u_1 = 0$, ce qui est impossible.

13. Il y a cependant un cas d'exception, c'est celui où $n = 2$, car alors la multiplicité plane $u_1 = 0$ est un point; on a dans ce cas un groupe G à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale

$$Xf = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2};$$

les deux formes

$$[\varpi\omega_1], \quad -[\varpi\omega_2]$$

peuvent effectivement être identifiées à deux formes arbitrairement données

$$\alpha[\omega_1\omega_2], \quad \beta[\omega_1\omega_2]$$

en prenant

$$\varpi = -\alpha\omega_2 - \beta\omega_1.$$

Le groupe G ainsi obtenu est celui qui laisse invariante la forme quadratique binaire $u_1 u_2$.

14. En résumé, *tout groupe W qui laisse invariante une multiplicité plane est :*

Soit (n quelconque) le groupe le plus général d'ordre $n(n-1)$ qui laisse invariant un point;

(¹) La transformation infinitésimale $\sum u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}$ est en effet invariante par n'importe quel changement linéaire de variables.

Soit ($n=2$) *le groupe d'ordre* 1 *d'une forme quadratique binaire.*

Rappel des propriétés des groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

15. J'ai démontré ([1]) que tout groupe linéaire conservant les volumes et ne laissant invariante aucune multiplicité plane est simple ou semi-simple. Tous ces groupes peuvent être déterminés par des procédés réguliers ([2]) en partant de groupes particuliers dits *fondamentaux* et en les *multipliant* entre eux d'une certaine manière. Dans ce qui suit, nous n'aurons pas à nous servir directement de la propriété des groupes W exprimée par l'axiome I; nous allons simplement déterminer ces groupes par la condition qu'ils ne laissent invariante aucune multiplicité plane et que leur ordre r est au moins égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, en désignant par n le nombre des variables.

Les groupes W semi-simples.

16. Examinons d'abord le cas où le groupe W est semi-simple, c'est-à-dire se décompose en un certain nombre h de sous-groupes invariants simples $g_1, g_2, \ldots, g_h$, n'ayant entre eux aucune transformation infinitésimale commune. Pour obtenir un groupe linéaire de cette structure ne laissant invariante aucune multiplicité plane, on part de h groupes linéaires simples dont chacun ne laisse invariante aucune multiplicité plane; soient

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1};$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_{n_2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les variables respectives transformées par ces groupes. Le groupe W est celui qui indique comment les $n_1 n_2 \ldots n_k$ produits

$$x_i y_j \ldots$$

([1]) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 99.

([2]) E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XLI, 1913, p. 53-96).

sont transformés entre eux quand on effectue sur les x_i la transformation la plus générale du premier groupe, sur les y_j la transformation la plus générale du second groupe, et ainsi de suite.

Il résulte de là que si l'on désigne respectivement par

$$n_1, n_2, \ldots, n_h;$$
$$r_1, r_2, \ldots, r_h,$$

les nombres de variables et de paramètres des h groupes $g_1, \ldots, g_h$, on a, pour le groupe W,

$$n = n_1 n_2 \ldots n_h; \qquad r = r_1 + r_2 + \ldots + r_h.$$

Rappelons d'autre part que l'on a évidemment

$$r_1 \leqq n_1^2 - 1, \; r_2 \leqq n_2^2 - 1, \; \ldots, \; r_h \leqq n_h^2 - 1 \qquad (n_1, n_2, \ldots, n_h \geqq 2).$$

17. Cela posé, nous allons montrer que l'inégalité

$$r \geqq \frac{n(n-1)}{2}$$

n'est possible que d'une seule manière, à savoir pour

$$h = 2, \qquad n_1 = n_2 = 2, \qquad r_1 = r_2 = 3,$$

auquel cas l'inégalité se change du reste en égalité.

Il nous suffit pour cela de démontrer l'inégalité arithmétique

$$(9) \quad \frac{n_1 n_2 \ldots n_h (n_1 n_2 \ldots n_h - 1)}{2} - (n_1^2 - 1) - (n_2^2 - 1) - \ldots - (n_h^2 - 1) \geqq 0,$$

valable pour tout système d'entiers $n_1, \ldots, n_h$ au moins égaux à 2.

Soit d'abord $h = 2$, et supposons $n_1 \leqq n_2$; le premier membre de l'inégalité est un trinome du second degré en n_2; le coefficient de n_2^2 est $\frac{n_1^2}{2} - 1 > 0$; le trinome est négatif pour $n_2 = 0$; d'autre part, pour $n_2 = n_1$, il est égal à

$$\frac{n_1^2(n_1^2-1)}{2} - 2(n_1^2 - 1) = \frac{(n_1^2 - 4)(n_1^2 - 1)}{2} \geqq 0;$$

il est donc sûrement positif pour $n_2 > n_1$. L'inégalité ne pourrait se réduire à une égalité que si l'on avait $n_1 = n_2 = 2$, et alors il faudrait prendre $r_1 = r_2 = 3$. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce cas-là.

Supposons maintenant démontrée l'inégalité (9) jusqu'à une certaine valeur de h; nous allons montrer que son premier membre est sûrement positif (et non nul) pour une valeur de h supérieure d'une unité. Considérons en effet le trinome du second degré en x

$$\frac{n_1 n_2 \ldots n_h x (n_1 \ldots n_h x - 1)}{2} - (x^2 - 1) - (n_1^2 - 1) - \ldots - (n_h^2 - 1),$$

où $n_1, \ldots, n_h$ sont des entiers donnés au moins égaux à 2. Ce trinome a son coefficient de x^2 positif; il est négatif pour $x = 0$ et positif ou nul pour $x = 1$; donc il est sûrement positif pour $x > 1$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Le seul groupe W semi-simple résulte donc de la multiplication de deux groupes d'ordre 3 à 2 variables; c'est le groupe qui indique comment sont transformées les quatre quantités

$$u_1 = x_1 y_1, \qquad u_2 = x_1 y_2, \qquad u_3 = x_2 y_1, \qquad u_4 = x_2 y_2,$$

quand on effectue sur les variables x_1 et x_2 une substitution linéaire arbitraire à déterminant 1, et sur les variables y_1 et y_2 une autre substitution linéaire arbitraire à déterminant 1. On obtient ainsi un groupe à six paramètres qui laisse manifestement invariante la forme quadratique

$$u_1 u_4 - u_2 u_3.$$

Par suite, *le seul groupe* W *semi-simple est le groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à quatre variables* (¹).

Les groupes W simples du type A).

18. Il y a une infinité de structures simples du type A); leur *rang* l peut prendre toutes les valeurs de 1 à $+\infty$. Il existe, pour chaque valeur de l, exactement l groupes linéaires fondamentaux qui sont :

(¹) Ce groupe est celui de la relativité généralisée.

1° Le groupe linéaire le plus général (conservant les volumes) à $l+1$ variables x_i;

2° Le groupe qui indique comment le précédent transforme entre elles les $\frac{(l+1)l}{2}$ coordonnées plückeriennes $x_i y_j - y_i x_j$ d'une droite;

3° Le groupe qui indique comment le premier groupe transforme entre elles les $\frac{(l+1)l(l-1)}{6}$ coordonnées plückeriennes

$$\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}$$

d'une multiplicité plane à deux dimensions, et ainsi de suite.

Tous ces groupes sont à $r = l(l+2)$ paramètres.

Le groupe linéaire le plus général ne laissant invariante aucune multiplicité plane est facile à obtenir. Prenons par exemple $l = 3$ et considérons la forme génératrice

$$\left(\sum a_i x_i\right)^\alpha \left[\sum (a_i b_j - b_i a_j) x_{ij}\right]^\beta \left[\sum \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} x_{ijk}\right]^\gamma,$$

où α, β, γ désignent trois exposants entiers positifs ou nuls donnés, les a_i, les b_i et les c_i étant trois systèmes de quatre *paramètres arbitraires*. Lorsqu'on développe la forme considérée suivant les puissances des paramètres a_i, b_i, c_i et qu'on réduit les termes semblables, on obtient, comme coefficients, des polynomes u par rapport aux variables, regardées comme indépendantes,

$$x_i, \quad x_{ij}, \quad x_{ijk};$$

soit n le nombre de ceux de ces polynomes qui sont linéairement indépendants. Lorsqu'on effectue la transformation projective la plus générale, les coordonnées homogènes x_i d'un point, x_{ij} d'une droite, x_{ijk} d'un plan subissent certaines substitutions linéaires : par ces substitutions linéaires, les polynomes u_i sont échangés à leur tour par une substitution linéaire, et *c'est cette dernière substitution linéaire qui engendre le groupe cherché.*

19. On pourrait partir de ce mode de génération du groupe linéaire le plus général ne laissant invariante aucune multiplicité plane pour déterminer ceux de ces groupes pour lesquels le nombre n des variables satisfait à l'inégalité

$$l(l+2) \geqq \frac{n(n-1)}{2}. \tag{10}$$

Mais il est plus commode d'utiliser la notion de *poids* [1]. On peut choisir les n variables du groupe de manière qu'à chacune d'elles soit attaché un poids déterminé, représenté symboliquement par une expression [2]

$$\varpi = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_{l+1}\omega_{l+1},$$

où les coefficients $m_1, \ldots, m_{l+1}$ sont des nombres rationnels dont la somme est nulle, les différences $m_i - m_j$ étant toutes des entiers. Si l'entier $m_i - m_j$ n'est pas nul et s'il y a une variable de poids ϖ, il y a certainement des variables pour chacun des poids formés par les termes de la progression arithmétique de raison $\omega_i - \omega_j$ dont le premier terme est ϖ et le dernier est

$$\varpi - (m_i - m_j)(\omega_i - \omega_j);$$

il résulte facilement de là que *si l'on permute dans l'expression de ϖ, de toutes les manières possibles, les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_{l+1}$, il existe des variables de chacun des poids ainsi obtenus.*

Cela posé, considérons dans un groupe W une certaine variable dans le poids ϖ duquel les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_{l+1}$ soient rangés par ordre de grandeur décroissante. Supposons qu'il y en ait h distincts, répétés le premier p_1 fois, le second p_2 fois, ..., le dernier p_h fois. Le nombre des variables qui se déduisent de la première par permutation des coefficients m_i est au moins égal à

$$\frac{(l+1)!}{p_1!\,p_2!\,\ldots\,p_h!} \qquad (p_1 + p_2 + \ldots + p_h = l+1).$$

Les deux plus petites valeurs que puisse prendre ce nombre sont $l+1$

(1) Voir *Bull. Soc. math. de France*, t. XLI, 1913, p. 67 (nos 13 et 14).

(2) Il n'y a pas à confondre les symboles ω_i introduits ici avec les formes de Pfaff ω_i précédemment considérées.

et $\frac{(l+1)l}{2}$, correspondant respectivement à

$$h=2;\quad p_1=1,\ p_2=l \ \text{ ou } \ p_1=l,\ p_2=1;$$
$$h=2;\quad p_1=2,\ p_2=l-1 \ \text{ ou } \ p_1=l-1,\ p_2=2.$$

Prenons d'abord le second cas. Il n'est possible que si l'on a

$$l(l+2) \geqq \frac{\frac{(l+1)l}{2}\left[\frac{(l+1)l}{2}-1\right]}{2} = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{8},$$

ou, en simplifiant, $l \leqq 3$. Il faudrait donc $l=3$, avec

$$\varpi = m_1(\omega_1+\omega_2)+m_3\omega_3 \quad \text{ou} \quad \varpi = m_1\omega_1+m_3(\omega_2+\omega_3).$$

Si $m_1 - m_3 = 1$, on obtient le second groupe fondamental, c'est-à-dire le groupe qui indique comment le groupe projectif de l'espace à trois dimensions transforme entre elles les coordonnées plückeriennes x_{ij} de la droite. Pour ce groupe, on a effectivement,

$$r=15,\qquad n=6,\qquad r=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Il laisse invariante une forme quadratique non dégénérée, à savoir la forme

$$x_{23}x_{14}+x_{31}x_{24}+x_{12}x_{34}$$

qui, égalée à zéro, indique que les x_{ij} sont les coordonnées d'une droite.

Si $m_1 - m_3 \geqq 2$, le groupe ne peut pas être un groupe W, car en même temps par exemple que la variable de poids

$$\varpi = m_1(\omega_1+\omega_2)+m_3\omega_3,$$

il existe une variable de poids

$$\varpi-(\omega_2-\omega_3) = m_1\omega_1+(m_1-1)\omega_2+(m_3+1)\omega_3$$

différente de celles qu'on obtient en permutant les coefficients m_1, m_3 de ϖ.

Passons au premier cas où l'on a

$$\varpi = m_1\omega_1+m_{l+1}(\omega_2+\ldots+\omega_{l+1}) \quad \text{ou} \quad \varpi = m_1(\omega_1+\ldots+\omega_l)+m_{l+1}\omega_{l+1}.$$

Si $m_1 - m_{l+1} = 1$, on obtient le groupe linéaire général à n variables, qui est effectivement un groupe W. Si $m_1 - m_{l+1} \geqq 2$, il existe, en même temps que la variable de poids

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_{l+1}(\omega_2 + \ldots + \omega_{l+1}),$$

au moins une variable de poids

$$\varpi - (\omega_1 - \omega_2) = (m_1 - 1)\omega_1 + (m_{l+1} + 1)\omega_2 + m_{l+1}(\omega_3 + \ldots + \omega_{l+1}).$$

Pour qu'on retrouve, en partant de cette variable, l'un des deux cas possibles, il faut que $m_1 - 1 = m_{l+1} + 1$; mais le nombre des nouvelles variables atteignant déjà la valeur maxima compatible avec l'inégalité (10), on arrive à une impossibilité.

20. Nous avons supposé implicitement $l > 2$.

Si $l = 2$, on a $r = 8$ et n ne peut dépasser la valeur 4. Si, pour une certaine variable, les trois coefficients m_1, m_2, m_3 du poids ϖ sont distincts, il existe au moins six variables, ce qui est impossible. Il faut donc que, pour l'une au moins des variables, on ait

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_3(\omega_2 + \omega_3) \quad \text{ou} \quad \varpi = m_1(\omega_1 + \omega_2) + m_3 \omega_3.$$

Plaçons-nous par exemple dans le premier cas. Il est nécessaire que $m_1 - m_3$ ne dépasse pas 2; sinon, en effet, il y aurait une variable de poids

$$\varpi' = \varpi - (\omega_1 - \omega_2) = (m_1 - 1)\omega_1 + (m_3 + 1)\omega_2 + m_3 \omega_3,$$

avec trois coefficients distincts, ce que nous avons vu être impossible. Si $m_1 - m_3 = 2$, le nouveau poids ϖ' n'étant pas homologue de ϖ, il existerait au moins six variables. Il faut donc $m_1 - m_3 = 1$ et l'on obtient le groupe linéaire le plus général à trois variables.

Si enfin $l = 1$, $r = 3$, le groupe le plus général indique comment les coefficients d'une forme binaire

$$u_1 x^m + \frac{m}{1} u_2 x^{m-1} y + \ldots + u_{m+1} y^m$$

sont transformés quand on effectue sur x et y une substitution linéaire à déterminant 1. En dehors du groupe général à deux variables, on obtient donc comme seul groupe W possible celui dont les trois variables sont les coefficients u_1, u_2, u_3 de la forme quadratique

$$u_1 x^2 + 2 u_2 xy + u_3 y^2;$$

c'est le groupe le plus général laissant invariante la forme quadratique ternaire

$$u_2^2 - u_1 u_3.$$

21. En résumé, les seuls groupes W simples du type A) sont :

1° *Le groupe linéaire général, d'ordre* $n^2 - 1$, *à* n *variables;*

2° *Le groupe linéaire le plus général, d'ordre* 3, *qui laisse invariante une forme quadratique non dégénérée à trois variables;*

3° *Le groupe linéaire le plus général, d'ordre* 15, *qui laisse invariante une forme quadratique non dégénérée à six variables.*

Les groupes W simples du type C).

22. Les groupes du type C), de rang $l \geqq 2$, sont d'ordre

$$r = l(2l+1);$$

ils sont isomorphes au groupe projectif d'un complexe linéaire non dégénéré de l'espace à $2l - 1$ dimensions.

Pour tout groupe W du type C), on doit avoir

$$l(2l+1) \geqq \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{ou} \quad n \leqq 2l+1.$$

Étant donné un groupe linéaire du type C) ne laissant invariante aucune multiplicité plane, on peut choisir les variables de manière à attribuer à chacune un poids (¹)

$$\varpi = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_l\omega_l$$

avec des coefficients m_1, m_2, ..., m_l entiers. En même temps que le poids ϖ existent tous ceux qui font partie de la progression arithmétique de raison $2\omega_i$ et dont les termes extrêmes sont

$$\varpi \quad \text{et} \quad \varpi - 2m_i\omega_i;$$

(¹) Voir *Bull. Soc. math., loc. cit.*, p. 69-70.

existent de même tous ceux qui font partie de la progression arithmétique de raison $\omega_i \pm \omega_j$ et dont les termes extrêmes sont

$$\varpi \quad \text{et} \quad \varpi - (m_i \pm m_j)(\omega_i \pm \omega_j).$$

De là résulte en particulier l'existence, en même temps que du poids ϖ, de tous ceux qu'on en déduit en permutant les coefficients m_i de toutes les manières possibles et en changeant les signes d'un nombre quelconque d'entre eux. Si donc il existe h coefficients m_i différents de zéro et distincts en valeur absolue; si de plus ces coefficients sont répétés respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_h$ fois, il existe au moins

$$2^{p_1+p_2+\ldots+p_h} \frac{l!}{p_1!\, p_1! \ldots p_h!\, (l - p_1 - \ldots - p_h)!}$$

variables. Pour une valeur donnée q de $p_1 + p_2 + \ldots + p_h$, ce nombre est au moins égal à $2^q \frac{l!}{q!\,(l-q)!}$; ce dernier nombre ne peut être inférieur ou égal à $2l + 1$ que si $q = 1$ (sauf pour $l = 2$, cas sur lequel nous reviendrons tout à l'heure), auquel cas il est égal à $2l$. Le poids ϖ est alors de la forme $m_1 \omega_1$ et l'entier m_1 ne peut être qu'égal à ± 1, sinon il existerait le poids $(m_1 - 2)\omega_1$, ce qui ferait au moins $4l$ variables. Le groupe W unique ainsi obtenu est précisément le groupe d'un complexe linéaire non dégénéré à $2l$ variables.

25. Reste le cas $l = 2$, pour lequel le nombre

$$2^q \frac{l!}{q!\,(l-q)!}$$

prend, pour $q = 2$, la valeur 4. Dans ce cas, le poids ϖ est de la forme $m_1(\omega_1 + \omega_2)$. Le coefficient m_1 ne peut être plus grand que 1, sinon il existerait au moins une variable de poids

$$(m_1 - 1)(\omega_1 + \omega_2),$$

ce qui prouverait l'existence d'au moins huit variables. Il faut donc $m_1 = 1$. Tous les poids possibles sont alors

$$\pm \omega_1 \pm \omega_2 \quad \text{et} \quad 0.$$

On obtient le second groupe fondamental [1], susceptible de l'interprétation géométrique suivante. Si, dans l'espace à trois dimensions, on considère un complexe linéaire non dégénéré qu'on peut toujours supposer défini par l'équation

$$x_{12} - x_{34} = 0,$$

le groupe en question indique comment le groupe projectif qui laisse ce complexe invariant échange entre elles les cinq quantités

$$x_{12} + x_{34}, \quad x_{23}, \quad x_{31}, \quad x_{14}, \quad x_{24}$$

formées avec les coordonnées plückeriennes d'une droite. Comme la forme quadratique

$$x_{23}x_{14} + x_{31}x_{24} + x_{12}x_{34}$$

qui s'annule pour les coordonnées d'une droite peut s'écrire

$$x_{23}x_{14} + x_{31}x_{24} + \frac{1}{4}(x_{12} + x_{34})^2 - \frac{1}{4}(x_{12} - x_{34})^2,$$

on voit que le groupe considéré laisse invariante la forme quadratique non dégénérée à cinq variables

$$x_{23}x_{14} + x_{31}x_{24} + \frac{1}{4}(x_{12} + x_{34})^2;$$

étant donné son ordre $10 = \frac{5(5-1)}{2}$, c'est le groupe le plus général laissant cette forme invariante.

24. En résumé, les seuls groupes W simples du type C) sont :

1° *Le groupe linéaire, d'ordre* $\frac{n(n+1)}{2}$, *à un nombre pair n de variables, laissant invariant un complexe linéaire non dégénéré;*

2° *Le groupe linéaire, d'ordre* 10, *laissant invariante une forme quadratique non dégénérée à cinq variables.*

---

(1) Voir *Bull. Soc. math., loc. cit.*, p. 89.

Les groupes W simples des types B) et D).

25. Les groupes du type B) et de rang $l \geqq 3$ (1) sont isomorphes au groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à $2l+1$ variables, et les groupes du type D) de rang $l \geqq 4$ (2) sont isomorphes au groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à $2l$ variables. Pour chacun de ces groupes, on a

$$r = \frac{n(n-1)}{2}.$$

J'ai démontré dans ma Thèse (3) que tout autre groupe linéaire de même structure avait un nombre de variables supérieur.

Par suite, il n'y a qu'une classe de groupes W simples du type B) ou D), c'est *le groupe linéaire le plus général, d'ordre* $\frac{n(n-1)}{2}$, *laissant invariante une forme quadratique non dégénérée à* $n \geqq 7$ *variables.*

Les groupes W simples des types E), F) et G).

26. Il n'y a que cinq structures simples possibles en dehors des types A), B), C), D). J'ai déterminé dans ma Thèse, pour chacune d'elles, le nombre r de paramètres et le nombre minimum n de variables compatibles avec le caractère linéaire du groupe, à savoir :

Type E), $l=6$	$r = 78$,	$n = 27$;
Type E), $l=7$	$r = 133$,	$n = 56$;
Type E), $l=8$	$r = 248$,	$n = 248$;
Type F), $l=4$	$r = 52$,	$n = 26$;
Type G), $l=2$	$r = 14$,	$n = 7$.

---

(1) Les groupes de rang $l=1$ peuvent être regardés comme du type A), et ceux de rang $l=2$ comme du type C).

(2) Les groupes de rang $l=1$ ou 2 sont semi-simples, et ceux de rang $l=3$ peuvent être regardés comme du type A).

(3) E. CARTAN, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, p. 140-141; Paris, Nony, 1894.

Dans chacun de ces cas, on a

$$r \leqq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il n'y a donc aucun groupe W *des types considérés.*

Le cas des groupes W réels.

27. Dans ce qui précède, nous avons implicitement supposé les variables et les paramètres *complexes*. Il est facile de voir que les résultats ne sont pas changés si les variables et les paramètres sont réels.

En effet, soit G un groupe W à variables et paramètres réels; si nous convenons d'attribuer aux variables et aux paramètres des valeurs complexes, nous obtenons l'un des groupes précédemment trouvés : désignons-le par $\mathcal{G}$.

Les groupes de la première classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ étant formé de toutes les transformations linéaires (conservant les volumes) à n variables, *le groupe* G sera, comme $\mathcal{G}$, à n^2-1 paramètres et par suite *sera le groupe de toutes les transformations linéaires réelles à n variables réelles.*

Les groupes de la deuxième classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe le plus général qui laisse invariant un certain point. Ce point est certainement *réel*, sinon le groupe réel G laisserait invariant le point imaginaire conjugué et la droite qui joint ces deux points, ce qui n'est pas. *Le groupe* G *est donc le groupe réel le plus général laissant invariant un point réel.*

Les groupes de la troisième classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe le plus général laissant invariant un certain complexe linéaire non dégénéré

$$\sum_{(\alpha\beta)}^{1,\ldots,n} (a_{\alpha\beta}+ib_{\alpha\beta})(x_\alpha\, dx_\beta - x_\beta\, dx_\alpha)=0 \qquad (n \text{ pair}).$$

Si ce complexe n'est pas réel, le groupe G laisse invariant le complexe imaginaire conjugué

$$\sum (a_{\alpha\beta} - i b_{\alpha\beta}) (x_\alpha \, dx_\beta - x_\beta \, dx_\alpha) = 0,$$

et par suite, aussi, tous les complexes du faisceau linéaire

$$\sum (a_{\alpha\beta} + \lambda b_{\alpha\beta}) (x_\alpha \, dx_\beta - x_\beta \, dx_\alpha) = 0.$$

Ces complexes ne sont pas tous dégénérés, car la condition de dégénérescence s'exprime analytiquement par un certain nombre d'équations algébriques entières en λ et ces équations ne sont pas identiquement vérifiées puisque, par hypothèse, elles ne le sont pas pour $\lambda = i$; on pourra donc trouver une infinité de valeurs réelles de λ pour lesquelles le complexe n'est pas dégénéré.

Le groupe G, laissant invariant dans tous les cas un complexe linéaire réel non dégénéré et étant d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$, est nécessairement le groupe le plus général qui laisse ce complexe invariant.

Les groupes de la quatrième classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe le plus général laissant invariante une certaine forme quadratique non dégénérée

$$F = F_1 + i F_2.$$

Si cette forme n'est pas réelle, le groupe G laisse invariante chacune des formes $F_1 + i F_2$ et $F_1 - i F_2$ et, par suite, chaque forme du faisceau $F_1 + \lambda F_2$. Les formes de ce faisceau ne sont pas toutes dégénérées, car le déterminant de $F_1 + \lambda F_2$, ne s'annulant pas pour $\lambda = i$, n'est pas identiquement nul. Par suite, dans tous les cas, le groupe G laisse invariante une forme quadratique non dégénérée à coefficients réels et, comme son ordre est $\frac{n(n-1)}{2}$, c'est le groupe réel le plus général laissant cette forme invariante.

Conclusion générale.

28. Nous avons donc démontré, tant dans le domaine réel que dans le domaine complexe, l'existence de quatre classes de groupes W conservant les volumes, à savoir :

1° Le groupe linéaire le plus général à n variables ($r = n^2 - 1$);

2° Le groupe linéaire le plus général laissant un point invariant ($r = n^2 - n$);

3° Le groupe linéaire le plus général laissant invariant un complexe linéaire non dégénéré $\left(r = \frac{n(n+1)}{2}, n \text{ pair}\right)$;

4° Le groupe linéaire le plus général laissant invariante une quadrique non dégénérée $\left(r = \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

29. Ces conclusions ne font appel qu'à l'axiome I de M. H. Weyl. Si maintenant on tient compte de l'axiome II, c'est-à-dire si l'on veut que les $n\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires à rn inconnues (n° 9), auxquelles doivent satisfaire les coefficients des formes ϖ_s, n'admettent qu'une solution, il faut qu'on ait

$$r = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il n'y a donc que le groupe linéaire d'une forme quadratique réelle non dégénérée qui satisfasse aux conditions posées par les axiomes I *et* II *de M. H. Weyl.* Et c'est ainsi qu'est démontrée, en partant de ces axiomes, la nécessité de la forme pythagorienne de la métrique d'Univers.