JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BUHL

Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 95-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__95_0>

Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral;

PAR A. BUHL.

1. *Identités fondamentales.* — Je crois avoir été l'un des premiers à remarquer que l'analyse einsteinienne pouvait être confondue avec celle des formes différentielles étudiées par d'éminents géomètres français, tels que MM. Goursat et Cartan.

L'étude des intégrales multiples, telle qu'elle est présentée par M. E. Picard, dans le premier Chapitre de ses *Fonctions de deux variables*, pourrait également servir de point de départ.

Les choses peuvent d'ailleurs être exposées d'une manière extrêmement brève et synthétique en partant d'identités qui sont à la base même du Calcul intégral, savoir

$$(1)\qquad \int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY, \qquad \int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ.$$

Il est entendu que A est une aire plane de contour C, et V un volume inclus dans une surface fermée S.

Les identités (1), par des successions de changements de variables et d'additions, donnent d'autres identités qui sont des formules du type stokien (¹).

(¹) *Voir* les démonstrations détaillées dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1911, p. 67 pour (2), et 1920, p. 6 pour (3). Cette formule (3) apparaît pour la première fois dans les *Comptes rendus* du 8 juillet 1912.

Le présent Mémoire développe une Note des *Comptes rendus* du 7 novembre 1921. Un développement plus considérable est publié dans les *Annalse de Toulouse* (1921).

Ainsi, comme *première formule fondamentale*, on a

$$(2)\qquad \int_C A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3 + A_4\,dx_4 = \iint_A \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x_3, x_4)}}.$$

Dans cette formule, A est une cloison à deux dimensions limitée par un contour fermé C; cette cloison est située dans l'espace quadridimensionnel et est définie analytiquement par les équations

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Cette formule (2) peut servir de base à la théorie des fonctions de deux variables complexes.

La seconde identité (1) donne de même la *seconde formule fondamentale*

$$(3)\qquad \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x_3, x_4)}} = \iiint_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}}.$$

Cette fois V est une variété à trois dimensions qui se déforme dans l'espace à quatre en admettant toujours pour frontière la variété fermée S à deux dimensions.

Le premier membre de (3) peut s'écrire

$$(4)\qquad 2\iint_S M_{12}\,dx_1\,dx_2 + M_{13}\,dx_1\,dx_3 + M_{14}\,dx_1\,dx_4 + M_{23}\,dx_2\,dx_3 + M_{24}\,dx_2\,dx_4 + M_{34}\,dx_3\,dx_4.$$

Ainsi l'analogie de (2) et (3) paraît plus évidente.

2. *Champ électromagnétique.* — Ce champ correspond à deux formules (3) aux membres nuls.

D'abord on peut égaler à zéro le déterminant qui figure dans l'intégrale triple de (3), d'où une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour la fonction F.

Le système différentiel caractéristique correspondant s'obtiendra en écrivant que

$$dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 \quad dx_4$$

sont proportionnels aux mineurs correspondants extraits de la matrice

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \tag{5}$$

On a ainsi un premier groupe de quatre équations.

On peut aussi imaginer que le déterminant du second membre de (3) soit nul parce que les mineurs extraits de la matrice (5) sont nuls. Cela arrive si les M_{ij} sont maintenant de la forme

$$M_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}.$$

D'où un second groupe de quatre équations. Les deux groupes constituent les équations de Maxwell-Lorentz, généralisées par M. Th. De Donder.

Au lieu de raisonner sur le second membre de (3), on doit évidemment pouvoir raisonner sur le premier et notamment sur la forme (4) de ce premier membre. C'est alors employer les formes dites tantôt *différentielles* (Goursat, Cartan, etc.), tantôt *intégrales* (Bateman, De Donder, etc.).

5. *Les potentiels gravifiques d'Einstein g_{ik} naissent d'une symétrie du champ électromagnétique.* — Dans les M_{ij} de la formule (3), introduisons un nouvel indice k de manière à obtenir des M_{ijk}. Dans une même formule (3) l'indice k sera toujours le même et il y aura, de ce fait, quatre formules (3) à considérer. Dans l'une quelconque de ces formules, on peut écrire indifféremment

$$\pm 2 M_{ijk} \quad \text{ou} \quad \pm 2 M_{ijk} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}, \tag{6}$$

les g_{ij} constituant dix fonctions arbitraires. On a

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Imposons à l'expression trinome (6) d'être symétrique par rapport à tous les indices i, j, k, pris deux à deux, en disposant arbitrairement du double signe. Nous aurons des expressions

$$2\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j},$$

$$-2\begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j},$$

d'où

$$(7) \qquad \begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

On retrouve ainsi les *crochets de Christoffel de première espèce*. Il est à remarquer que ces crochets, une fois définis comme nous venons de le faire, existent pour $i = j$, alors même que, dans ce cas, la première expression (6) est nulle.

Employons maintenant le jeu des indices du calcul tensoriel avec les notations de H. Weyl (*Raum, Zeit, Materie*; vierte Auflage, S. 113).

On aura d'abord

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} kr \\ i \end{bmatrix} = \Gamma_{i,kr} = g_{ij}\Gamma^j_{kr},$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} kr \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma^i_{kr} = g^{ij}\Gamma_{j,kr},$$

le second groupe de formules définissant les *crochets de Christoffel de seconde espèce*.

Posons aussi

$$d\gamma_{ik} = \Gamma_{i,kr}\,dx_r \qquad \text{et} \qquad d\gamma^i_k = \Gamma^i_{kr}\,dx_r.$$

Soit un vecteur ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4; on aura

$$\xi^i\,d\gamma_{ik} = \xi^i g_{ij}\Gamma^j_{kr}\,dx_r = \xi_j\Gamma^j_{kr}\,dx_r = \xi_j\,d\gamma^j_k = \xi_i\,d\gamma^i_k.$$

Ceci posé, remplaçons (7) par

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}\xi^i\xi^k(d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki}) - \xi^i\xi^k\, dg_{ik} &= 0,\\ 2\xi^i\,\xi^k\, d\gamma_{ik} - \xi^i\xi^k\, dg_{ik} &= 0,\\ 2\xi^k\xi_i\, d\gamma^i_k \;- \xi^i\xi^k\, dg_{ik} &= 0.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que la variation infiniment petite du vecteur ξ soit définie par

$$d\xi^i = - d\gamma^i_k\xi^k. \tag{9}$$

Alors, en reprenant l'équation précédente, il viendra

$$\begin{aligned}2\xi_i\, d\xi^i + \xi^i\xi^k\, dg_{ik} &= 0,\\ 2g_{ik}\xi^k\, d\xi^i + \xi^i\xi^k\, dg_{ik} &= 0,\\ g_{ik}\xi^k\, d\xi^i + g_{ik}\xi^i\, d\xi^k + \xi^i\xi^k\, dg_{ik} &= 0,\end{aligned}$$

$$d(g_{ik}\xi^i\xi^k) = 0. \tag{10}$$

Ainsi nos hypothèses nous ont conduits à un espace à quatre dimensions dans lequel le vecteur ξ varie, conformément à (9), sans que soit altérée l'expression

$$g_{ik}\xi^i\xi^k,$$

qui peut servir de *mesure* à ce vecteur. Un tel espace n'est évidemment pas euclidien en général; son élément linéaire est caractérisé par la formule

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{11}$$

4. *Les déplacements parallèles et les géodésiques.* — L'équation (9) définit un mode de variation du vecteur ξ qui, avec la terminologie de Levi-Civita et Weyl, peut être qualifié de *déplacement parallèle;* dans l'espace ordinaire, les crochets de Christoffel sont nuls, il en est de même de $d\gamma^i_k$ et le vecteur modifié avec les conditions (9), réduites à $d\xi^i = 0$, ne subit bien qu'un déplacement parallèle, au sens élémentaire de ces mots, puisque les composantes ξ^i restent les mêmes.

Si ξ est une vitesse, c'est-à-dire si

$$\xi^i = \frac{dx_i}{ds},$$

l'équation (9) s'écrit

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx_i}{ds}\right) + \left\{ {kr \atop i} \right\} \frac{dx_k}{ds}\frac{dx_r}{ds} = 0. \tag{12}$$

Ces équations différentielles définissent les *géodésiques* de l'espace dont le ds^2 est (11). Dans l'espace ordinaire, toujours de par la nullité des crochets de Christoffel, les géodésiques sont des droites.

5. *Courbure.* — Les questions de courbure, qui jouent un rôle essentiel dans la formation des dix équations fondamentales d'Einstein, peuvent être immédiatement rattachées à l'étude de la formule (2) ou de la première identité (1).

Soit un vecteur A_μ et venons, cette fois, aux notations et raisonnements de M. A.-S. Eddington (*Espace, Temps, Gravitation;* trad. Rossignol; partie théorique, p. 44).

Par dérivation immédiate et considération de (12), on a

$$\frac{d}{ds}\left(A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}\right) = A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

avec

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} A_\alpha. \tag{13}$$

Ceci est la *dérivée covariante* qui donne le *rotationnel*

$$A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{14}$$

Tout ceci peut se traduire par ce fait que, dans le déterminant de (2), on peut remplacer les deux dernières lignes par

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{matrix}.$$

De même

$$\frac{d}{ds}\left(A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right) = A_{\mu\nu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{dx_\sigma}{ds},$$

avec

$$(15)\qquad A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix} A_{\alpha\nu} - \begin{Bmatrix}\nu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix} A_{\mu\alpha}.$$

Si, pour les A à deux indices du second membre de (15), on prend les dérivées covariantes (13), on a facilement (EDDINGTON, *loc. cit.*, p. 53)

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} A_{\varepsilon}$$

avec

$$B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varepsilon\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\nu\\ \varepsilon\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}.$$

Ce sont là les composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Le tenseur « contracté » correspondant à $\varepsilon = \sigma$ permet d'écrire les dix équations fondamentales d'Einstein qui, pour un phénomène physique donné, permettent à leur tour de déterminer les g_{ik} de (11). L'achèvement du problème dépend alors d'une question de lignes géodésiques régie par les équations (12). Bien que cette partie de la question soit évidemment très importante, nous n'y insisterons pas davantage, faute, pour le moment, d'un apport original.

6. *Le champ électromagnétique et la formule* (2). — Revenons au paragraphe **2**. La vitesse de la lumière étant prise pour unité et avec

$$\begin{array}{llll} M_{12} = Z, & M_{14} = -\alpha, & M^{*}_{12} = \alpha, & M^{*}_{14} = X, \\ M_{23} = X, & M_{24} = -\beta, & M^{*}_{23} = \beta, & M^{*}_{24} = Y, \\ M_{31} = Y, & M_{34} = -\gamma, & M^{*}_{31} = \gamma, & M^{*}_{34} = Z, \end{array}$$

les équations de Maxwell-Lorentz sont

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = -\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial t} + u, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = -\dfrac{\partial \beta}{\partial t}, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial t} + v, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = -\dfrac{\partial \gamma}{\partial t}, & \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial t} + w, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial \beta}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = \rho. \end{array}\right.$$

Ceci toujours avec les notations de M. Eddington (*loc. cit.*, p. 117).

De plus, la force électrique (X, Y, Z) et la force magnétique (α, β, γ) sont données par les équations

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{lll} X = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial t}, & Y = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial t}, & Z = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ \alpha = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}, & \beta = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}, & \gamma = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{array}\right.$$

où Φ est un potentiel scalaire et (F, G, H) un potentiel vecteur.

Or, toujours avec M. Eddington, posons

$$(-F, -G, -H, \Phi) = k_\mu.$$

Le vecteur k_μ, ou k_1, k_2 k_3, k_4, a ses rotationnels au bas du déterminant de la formule (2); on peut leur donner la forme (14). Raisonnons maintenant comme lorsque, au paragraphe **3**, nous avons tiré les g_{ik} de la formule (3).

Dans (2), on peut ajouter aux rotationnels (14) des rotationnels analogues dépendant d'un scalaire arbitraire φ; cela ajoute $d\varphi$ sous l'intégrale de ligne et ne modifie rien. Si les composantes k_μ, c'est-à-dire toutes les expressions (17), étaient nulles, il n'y aurait point de champ électromagnétique et la formule (2) s'évanouirait en l'identité $0 = 0$; *le champ électromagnétique correspond au cas où la formule* (2) *existe sous sa forme générale.*

Cette assertion a été illustrée par Weyl et Eddington en faisant intervenir l'*étalonnement.* La longueur l d'un étalon dépendrait de son déplacement dans l'espace-temps; pour un déplacement infiniment petit, le taux de la variation serait

$$\frac{dl}{l} = k_1\,dx_1 + k_2\,dx_2 + k_3\,dx_3 + k_4\,dx_4.$$

Pour un déplacement fini, cette variation serait, par suite, mesurée par

$$\log\frac{l}{l_0},$$

expression où l_0 correspond au scalaire φ introduit tout à l'heure;

c'est à cette modification d'un étalon, transporté dans l'espace-temps, que correspond le champ électromagnétique.

Dans le cas du champ généralisé de M. De Donder, les formules (17) sont à remplacer par celles qui donnent les $M^{\star}_{ij}$ à la fin du paragraphe **2**. Elles sont toujours au nombre de six et toutes les fois qu'on disposera de six fonctions de cette forme on pourra construire une formule (2) au premier membre de laquelle correspondra un problème d'étalonnement.

7. *Conclusions.* — La notion d'étalonnement qui vient d'être rappelée est, à coup sûr, d'un grand intérêt. Mais ce n'est pas la seule; elle correspond à la formule (2) et aux équations (17). Les phénomènes électromagnétiques correspondent aussi bien à la formule (3) et aux équations (16). Il y a deux formules stokiennes dans l'espace-temps; ce sont (2) et (3).

Il serait invraisemblable que l'une joue un rôle essentiel sans qu'il en soit de même de l'autre. L'ingénieuse image d'étalonnement, spécialement attachée à (2), ne va pas sans une image attachée à (3), image qui pourrait être celle-ci :

Les phénomènes électromagnétiques correspondent à l'invariance d'une intégrale triple attachée à une variété V *tridimensionnelle et déformable dans l'espace-temps, alors que cette variété conserve une frontière* S *bidimensionnelle et invariable.*

Ceci est une image d'invariance; l'image d'étalonnement de Weyl ne fait peut-être pas suffisamment ressortir la chose. Les deux images doivent se compléter mutuellement.

Il faut d'ailleurs remarquer que *cette question d'étalonnement variable*, qui paraît à certains esprits si mystérieuse et si subversive, *repose aussi sur une invariance :* celle de l'intégrale double de la première formule stokienne (2) quand on déforme le champ d'intégration bidimensionnel A, dans l'espace-temps, sans toucher à sa frontière C.

Enfin la formule (3) permet de construire les g_{ik} et le ds^2 d'expression (17); on n'a pas à postuler ce ds^2 comme on le fait ordinairement.

Le champ électromagnétique est ainsi la base universelle; il correspond lui-même aux identités (1), c'est-à-dire à des identités de principe du Calcul intégral.

Le style bref de ces affirmations n'est pas pour leur conférer un caractère dogmatique qui, à coup sûr, est loin de ma pensée. Mais, pour l'instant et faisant toutes réserves quant à de nouvelles études et de nouvelles réflexions, je pense que les variabilités d'apparence bizarre des théories relativistes (telles la variabilité des étalons) n'excluent nullement des phénomènes physiques la notion d'invariance, à condition que cette invariance soit représentée, au fond, par des invariants intégraux. Ces derniers dominent les équations différentielles des phénomènes et les invariants différentiels. Tout cela, au surplus, n'a-t-il pas été pressenti par Henri Poincaré ?