JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. SOULA

Sur la « séparation » des points singuliers d'une fonction analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 85-93.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__85_0>

Sur la « séparation » des points singuliers d'une fonction analytique;

PAR J. SOULA.

Soit une fonction analytique $F(x)$ pour laquelle les points d'un ensemble E sont singuliers; l'ensemble E est supposé à distance finie, il est entouré par une courbe simple C sur laquelle $F(x)$ est régulière. Admettons encore que $F(x)$ possède d'autres points singuliers; peut-on alors, trouver une fonction $\varphi(x)$ n'admettant pas d'autre point singulier que ceux de E et telle que $F(x) - \varphi(x)$ soit régulière en tous les points de E?

Dans le cas où $F(x)$ reste uniforme pour un déplacement sur la courbe C, on doit, comme il est bien connu, répondre par l'affirmative. La fonction $\varphi(x)$ n'est autre que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Je dirai dans ce cas (et dans les cas analogues) que l'ensemble des points singuliers E est « séparable » et qu'il a été séparé par la construction de la fonction $\varphi(x)$.

Dans le cas où la fonction $F(x)$ n'est pas uniforme, le problème ne saurait admettre une solution aussi simple : si par exemple $F(x)$ n'a que deux points singuliers à distance finie ou à l'infini, il est impossible de les séparer. Une fonction qui n'a qu'un point singulier à toute distance est en effet uniforme, $F(x)$ ne peut être égale à la somme de deux telles fonctions.

On peut se demander, toutefois, s'il n'est pas possible d'obtenir des résultats en portant son attention sur une détermination de la fonction étudiée. C'est ce qu'a fait M. Faber dans un intéressant Mémoire ([1]) consacré aux fonctions multiformes; mon but est d'appliquer ses résultats à la recherche de points singuliers de fonctions définies par des séries de Taylor.

Dans un Mémoire où ce dernier problème est étudié dans certains cas particuliers ([2]), je n'ai pas fait état du travail de M. Faber : certaines démonstrations ne paraissaient pas convaincantes et certains énoncés étaient trop généraux. J'ai reconnu, depuis lors, l'exactitude des résultats de M. Faber, mais je crois qu'il faut modifier légèrement ses démonstrations et préciser ses énoncés. Les cas qu'il étudie ne sont pas d'ailleurs exactement ceux dont j'ai besoin. Pour toutes ces raisons, étant donnée aussi l'importance de la question, je crois devoir reprendre l'exposé de M. Faber. J'en donne ensuite l'application annoncée.

1. Soit une fonction $f(x)$ holomorphe à l'intérieur d'un domaine simplement connexe Δ. Une ligne L, sans point double et pourvue d'une tangente qui varie d'une manière continue, partage Δ en deux régions. Toutefois, les extrémités a et b de L sont sur la frontière de Δ, a et b sont donc peut-être, points singuliers de $f(x)$. Il existe alors une fonction $G(x)$ holomorphe dans tout le plan (y compris l'infini) sauf en a et b et possédant les propriétés suivantes : la ligne L n'est pas pour elle une coupure essentielle, $G(x)$ est prolongeable au delà de L dans les deux sens, $G(x)$ reste uniforme si l'on fait le tour de L, mais elle n'est pas uniforme si l'on fait le tour de a seul (ou de b), la différence des deux valeurs des deux côtés de L est $f(x)$. C'est là le lemme fondamental que nous allons établir.

Supposons d'abord que $\int_{L} f(x)\,dx$ ait un sens, bien que les points a et b puissent être singuliers et que, de plus, cette intégrale soit abso-

([1]) Faber, *Math. Annalen*, t. LX, 1905, p. 386 et suiv.

([2]) *Journ. de Math. pures et appliquées*, 1921, p. 97.

lument convergente. Il n'y a qu'à prendre

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$G(x)$ existe partout ailleurs que sur L. Les propriétés énoncées ont été souvent démontrées, je renverrai par exemple au Cours de M. Goursat [1].

2. Si $\int_L f(z)\,dz$ n'est pas absolument convergente, $G(x)$ sera définie d'une manière plus compliquée. Nous choisirons deux suites de points $a_1 a_2 \ldots a_\nu \ldots$ qui tendent vers a, et $b_1 b_2 \ldots b_\nu \ldots$ qui tendent vers b, les a_ν se rapprochant constamment de a, les b_ν de b. Désignons par J_ν l'arc $a_\nu a_{\nu+1}$, par J'_ν l'arc $b_\nu b_{\nu+1}$. Soit M_ν une borne supérieure du module de $f(z)$ lorsque z est sur J_ν ou J'_ν. A chacun des arcs J_ν (ou J'_ν) nous attacherons un entier n_ν (ou n'_ν) défini par la règle suivante : soit ρ un nombre fixe, positif, inférieur à 1. Si, lorsque z est sur J_ν, on a pour une valeur de z au moins

$$|z-a| \geqq \rho,$$

je prendrai $n_\nu = 0$.

Si, quel que soit z sur J_ν, on a

$$|z-a| < \rho,$$

je prendrai n_ν tel que

$$\rho^{n_\nu} M_\nu < 1, \tag{1}$$

d'où je déduis

$$|z-a|^{n_\nu} M_\nu < 1.$$

Je poserai ensuite

$$r(z, x) = \frac{(z-a)^{n_\nu}}{(x-a)^{n_\nu}(z-x)},$$

z étant sur J_ν et x n'importe où dans le plan. On définirait de même le nombre n'_ν attaché à J'_ν en remplaçant a par b dans ce qui précède.

---

[1] Tome II, fin du Chapitre XVI. M. Faber donne un calcul direct. On peut aussi écrire $G(x)$ sous forme de somme de potentiels et tirer de là la démonstration.

On posera encore

$$r(z, x) = \frac{(z-b)^{n'_\nu}}{(x-b)^{n'_\nu}(z-x)},$$

pour z sur J'_ν et x dans le plan.

La fonction $r(z, x)$ est ainsi définie pour toute valeur de z sur L et pour toute valeur de x. Elle est holomorphe par rapport à x partout ailleurs que sur L.

Nous prendrons

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{L} r(z, x) f(z)\, dz = S(x) + S'(x)$$

avec

$$S(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{J_\nu} f(z) r(z, x)\, dz; \qquad S'(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{J'_\nu} f(z) r(z, x)\, dz.$$

Les propriétés de $G(x)$ seront étudiées dans un domaine D répondant aux conditions suivantes : D est limité par une courbe simple et est coupé par L qui le partage en deux régions. Les points a et b sont extérieurs à D. Soient d une borne inférieure de la distance de a et de b aux points de D, α un nombre positif inférieur à d. Les intervalles J_ν seront classés en deux catégories :

1° J_ν sera de la première catégorie si l'on a les inégalités suivantes quel que soit z sur l'arc qui va de a à J_ν et sur J_ν lui-même et quel que soit x dans D

$$|z-a| < \rho, \qquad |z-a| < d.\rho, \qquad |z-x| > \alpha;$$

2° Les autres arcs J_ν forment la deuxième catégorie.

Comme les a_ν tendent vers a, les intervalles de la première catégorie sont en nombre illimité, ils forment un arc continu L_1 dont a est une extrémité et qui est extérieur à D. Les intervalles de la deuxième catégorie sont en nombre limité et forment un arc continu L_2. Nous désignerons par $S_1(x)$ la somme des termes de la série $S(x)$ pour lesquels J_ν est de la première catégorie, par $S_2(x)$ la somme des autres termes

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

Si J_ν est de la première catégorie

$$|r(z, x)| = \left|\frac{z-a}{x-a}\right|^{n_\nu} \frac{1}{|z-x|} < \frac{\rho^{n_\nu}}{\alpha},$$

car

$$\left|\frac{z-a}{x-a}\right| < \frac{|z-a|}{d} < \rho.$$

On en déduit

$$\left|\int_{J_\nu} r(z, x) f(z)\, dz\right| < \frac{\rho^{n_\nu}}{\alpha} M_\nu \int_{J_\nu} |dz| < \frac{1}{\alpha}\int_{J_\nu} |dz|,$$

d'après l'inégalité (1). Donc la série $S_1(x)$ admet comme majorante

$$\frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{J_\nu}|dz|$$

et celle-ci converge bien, $S_1(x)$ est donc fonction holomorphe de x dans D.

La somme $S_2(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes. Soit un terme

$$T_\nu(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{J_\nu}\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^{n_\nu}\frac{f(z)}{z-x}\, dz;$$

or

$$\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^{n_\nu}\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x} - \frac{z-a}{(x-a)^2} - \ldots - \frac{(z-a)^{n_\nu-1}}{(x-a)^{n_\nu}}.$$

$T_\nu(x)$ est donc la somme d'une intégrale

$$\int_{J_\nu}\frac{f(z)}{z-x}\, dz$$

et d'un nombre fini de fonctions méromorphes de pôle unique a.

On a donc

$$S_2(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{I_\nu}\frac{f(z)\, dz}{z-x} + F\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

où $F(t)$ est un polynome en t.

L'intégrale $S'(x)$ se laisse transformer d'une façon analogue et l'on a finalement

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{L_2+L'_2} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + F\left(\frac{1}{x-a}\right) + F'\left(\frac{1}{x-a}\right) + S_1(x) + S'_1(x);$$

L'_2 est un arc analogue à L_2, c'est-à-dire que L est partagée en quatre arcs qui sont en allant de a vers b : L_1, L_2, L'_2, L'_1. Le point commun à L_1 et L_2 et le point commun à L'_2 et L'_1 sont extérieurs à D. $F'(t)$ est un polynome, $S'_1(x)$ une fonction holomorphe dans D.

La formule obtenue permet d'établir les propriétés indiquées pour $G(x)$ au n° 1, en supposant x dans D : $G(x)$ est la somme de cinq fonctions toutes holomorphes dans D. Toutefois l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{L_2+L'_2} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

n'est pas définie aux points de L qui font partie de D, mais ici encore il n'y a qu'à appliquer des résultats connus pour voir que $L_1 + L_2$ n'est pas coupure essentielle et que la différence des deux valeurs de l'intégrale des deux côtés de L est $f(x)$. Il en est de même des deux valeurs de $G(x)$.

Comme le domaine D peut contenir tout point du plan autre que a ou b, comme $G(x)$ ne dépend pas du domaine D, le théorème est établi [1].

On peut supposer que l'un des points a ou b, b par exemple, est à l'infini sur une ligne L. On choisit les points b_ν s'éloignant indéfiniment sur L.

Si $\left|\frac{1}{z}\right| \geqq \rho$ sur J_ν, on prend $n'_\nu = 0$; si $\left|\frac{1}{z}\right| > \rho$, on prend n'_ν tel que

$$\left|\frac{1}{z}\right|^{n'_\nu - 2} M_\nu < 1 \quad \text{ou} \quad \left|\frac{1}{z}\right|^{n'_\nu} M_\nu < \frac{1}{|z|^2},$$

et l'on pose

$$r(z, x) = \frac{x^{n_\nu}}{z^{n_\nu}(z-x)}$$

pour x sur J'_ν. La démonstration se poursuit comme précédemment.

---

(1) M. Faber avait pris les n_ν et n'_ν dépendant de x ou du domaine de variation de x, $G(x)$ en dépendait aussi.

3. La fonction $G(x)$ que l'on vient de déterminer, ne paraît pas posséder de point singulier autre que a et b. Mais si l'on effectue le prolongement analytique en traversant la ligne L, on rencontrera d'autres singularités. Supposons par exemple que nous soyons dans le cas du n° 1

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

On peut remplacer L par un chemin voisin L′ situé dans le domaine Δ où $f(z)$ est régulière sans changer la valeur de $G(x)$ en un point x non situé sur L ou L′. C'est de là que résulte l'holomorphie de $G(x)$ sur L et dans Δ. Mais nous ne savons pas si $G(x)$ est holomorphe hors de ce domaine.

4. Soit une fonction analytique $F(z)$ dont une branche admet les points singuliers isolés a et b. Si l'on trouve toujours la même détermination de $F(z)$ quand on décrit un contour simple qui contient ces deux points singuliers (et pas d'autres) à son intérieur, on peut, comme on l'a vu, séparer ces deux points des autres points singuliers.

Je suppose qu'il n'en soit plus ainsi, je suppose qu'il existe une ligne L joignant a et b et pouvant être contenue dans un domaine où la branche de fonction considérée n'a pas d'autre singularité que a et b. Je suppose que, parti d'un point de L avec la détermination $F_1(x)$, on retrouve une autre détermination $F_2(x)$ après avoir fait le tour de a. Je pose $f(x) = F_1(x) - F_2(x)$, cette fonction est holomorphe sur L (sauf en a et b). Je construis la fonction $G(x)$ des n^{os} 1 ou 2.

Alors $F(x) - G(x)$ sera uniforme en a, ou du moins restera uniforme si l'on fait le tour du seul point singulier a. On pourra donc trouver $\varphi(x)$ telle que

$$F(x) - G(x) - \varphi(x)$$

soit régulière en a. $G(x) + \varphi(x)$ n'a pas d'autre point singulier que a et b (avec les restrictions indiquées au n° 3). On pourra exprimer ces remarques en disant que l'on a « séparé » le point singulier a de $F(x)$ pour une détermination seulement de cette fonction.

On pourrait remplacer a par certains ensembles de points singuliers, mais je ne développerai pas ici cette généralisation.

3. Soit une fonction $\varphi(x)$ définie par une série de Taylor

$$\varphi(x) = \Sigma b_n x^n,$$

je me suis proposé [1] de trouver les points singuliers de la fonction

$$F(x) = \Sigma g(b_n) x^n,$$

où $g(t)$ est fonction analytique de t, $\varphi(x)$ et $g(t)$ étant de plus soumises à certaines conditions. Pour préciser, j'indique les hypothèses de l'un des cas étudiés [2] : $g(t)$ est holomorphe pour $t = 0$; $\varphi(x)$ n'a sur son cercle de convergence pas d'autre point singulier que le point 1 isolé et possède d'autres points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots$; enfin $(x-1)^m \varphi(x)$ a son module borné pour une valeur m inférieure à 1. A ces conditions j'ai cru devoir ajouter la suivante : le point singulier 1 est séparable, il existe des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi(x)$ telles que

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ ayant un cercle de convergence de rayon supérieur à 1 et $\varphi_1(x)$ n'ayant pas d'autre point singulier que 1 et l'infini pour sa première détermination. Plus exactement, soit L la demi-droite dont le prolongement passe à l'origine et qui va du point d'affixe 1 à l'infini, $\varphi_1(x)$ est supposée régulière partout ailleurs que sur L et prolongeable au delà de L dans les deux sens, en tout point de L autre que 1. Cette condition imposée à $\varphi(x)$ paraît assez restrictive, mais en réalité elle est superflue: A l'aide du théorème de M. Faber, on peut montrer que $\varphi_1(x)$ existe toujours.

Supposons d'abord que $\varphi(x)$ soit holomorphe sur L (sauf au point 1). Soit, alors, $G(x)$ la fonction déterminée aux n^{os} **1** ou **2** et relative à la ligne L d'extrémité 1 et l'infini, $f(x)$ étant la différence des deux valeurs de $F(x)$ le long de L. $F(x) - G(x)$ est uniforme autour de 1 et, en retranchant encore un développement de Laurent, on aura effectué la « séparation » du point singulier 1.

Si la ligne L rencontre des points singuliers de $\varphi(x)$, nous désignerons par b le premier point rencontré. On peut construire la fonc-

---

(1) *Journ. de Math. pures et appliquées*, 1921, p. 97-153.

(2) *Ibid.*, p. 146.

tion $h(x)$ telle que $\varphi(x)-h(x)$ soit régulière au point 1, $h(x)$ n'ayant pas d'autre point singulier que 1 et b. On construira ensuite $K(x)$ telle que $h(x)-K(x)$ soit régulière en b, $K(x)$ n'ayant pas d'autre point singulier que b et l'infini. Alors la fonction

$$\varphi_1(x) = h(x) - K(x)$$

répond à la question, $\varphi_1(x)$ existe toujours.

Ainsi, soit

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)} = \Sigma b_n x^n,$$

la fonction $\Sigma g(b_n) x^n$ n'a pas d'autre point singulier que $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$, si $g(t)$ est holomorphe pour $t=0$.

6. Plusieurs autres parties de mon Mémoire pourraient être complétées d'une manière analogue. Je ne donnerai qu'une autre application. Soient deux fonctions définies par

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty a_n x^n, \qquad \psi(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{a_n} \quad (a_n \neq 0).$$

Je suppose que $\varphi(x)$ n'ait qu'un point singulier β. Il peut arriver alors que $\psi(x)$ n'en ait qu'un $\left(\text{qui est } \frac{1}{\beta}\right)$ et il peut arriver aussi, comme je l'ai montré, que $\psi(x)$ en ait plusieurs. J'ai démontré encore (¹) que dans ce dernier cas les points singuliers de $\psi(x)$ ne peuvent être séparés en deux groupes, que l'on n'a pas

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x),$$

ψ_1 et ψ_2 n'ayant pas d'autres points singuliers que ceux de ψ et n'ayant pas de point singulier commun. (Il reste entendu qu'il s'agit toujours de la première détermination des fonctions.)

Il résulte donc, du théorème de M. Faber, que $\psi(x)$ ne possède pas de point singulier isolé, si elle admet d'autre point singulier que $\frac{1}{\beta}$.

(¹) *Loc. cit.*, p. 141.