JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. SOULA

Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 4 (1921), p. 97-153.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1921_8_4__97_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor;

PAR J. SOULA.

INTRODUCTION.

1. Les problèmes abordés dans le présent travail peuvent être classés en deux catégories :

A. Je me donne deux séries de Taylor dont les rayons de convergence ne sont ni nuls, ni infinis :

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Elles définissent deux fonctions analytiques. Je désignerai, dans tout ce qui suit, la série $\Sigma a_n b_n x^n$ par $H[\varphi(x), k(x)]$ ou par $H[\varphi, k]$, et ce symbole représentera aussi la fonction analytique correspondante. D'après un théorème de M. Hadamard, tout point singulier α de $H[\varphi, k]$ est égal au produit $\beta\gamma$ d'un point singulier β de $\varphi(x)$ par un point singulier γ de $k(x)$. M. Borel (¹), puis M. Faber (²) se sont demandé dans quels cas on peut affirmer qu'un produit $\beta\gamma$ est bien singulier pour $H[\varphi, k]$. En fait, $\beta\gamma$ peut être un point régulier de

(¹) BOREL, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 238).

(²) FABER, *Jahresberichte der deutsche mathematiker Vereinigung*, 1907, Bd XVI.

$H[\varphi, k]$ et la disparition de cette singularité se produit souvent quand il existe un autre point singulier β' de $\varphi(x)$ et un autre point singulier γ' de $k(x)$ tels que $\beta\gamma = \beta'\gamma'$, ce que nous exprimerons en disant *que $\beta\gamma$ peut être obtenu plusieurs fois*. Il peut arriver que $\beta\gamma$ soit point régulier de $H[\varphi, k]$ sans que $\beta\gamma$ soit obtenu plusieurs fois. On verra de nombreux exemples de ce fait dans ce qui suit; je signale dès maintenant le suivant :

Je pose

$$\varphi(x) = \sum \cos\frac{\pi\sqrt{n}}{2} x^n.$$

On sait que $\cos\frac{\pi\sqrt{u}}{2}$ est une fonction entière de u, de genre inférieur à 1. Il en résulte, d'après un théorème de M. Leau, que $\varphi(x)$ n'a pas d'autre point singulier que le point 1, qui est d'ailleurs point essentiel. Je prends ensuite

$$k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} x^{(2p+1)^2},$$

série présentant un grand nombre de lacunes et qui, d'après un théorème de M. Fabry, admet son cercle de convergence comme coupure. β étant égal à 1, γ étant un point quelconque de module 1, la singularité $\beta\gamma$ disparaît, bien que $\beta\gamma$ ne puisse être obtenu qu'une fois, $\varphi(x)$ n'ayant qu'un point singulier : on a en effet $H[\varphi, k] = 0$.

Pour étudier de telles disparitions de singularités, nous aurons à faire usage de l'une des remarques essentielles de M. Borel. Supposons que $\varphi(x)$ admette un point singulier isolé et *séparable*. J'entendrai par là, dans tout ce qui suit, que l'on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \Phi(x),$$

$\varphi_1(x)$ n'ayant pas d'autre singularité que β à distance finie, $\Phi(x)$ étant régulière en β. Soit γ_1 un point singulier de la fonction $k(x)$, si $\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une fois, l'allure de la fonction $H[\varphi, k]$ en $\beta\gamma$ ne dépend que de la partie irrégulière $\varphi_1(x)$, elle est la même que celle de $H[\varphi_1, k]$. M. Borel signale ensuite des catégories de points singuliers β, les pôles entre autres, pour lesquels $H[\varphi, k]$ est toujours irrégulière en $\beta\gamma$, si $\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une fois, et cela, quelle que soit la fonction $k(x)$, irrégulière en γ. J'ai été ainsi conduit à me poser les questions suivantes :

1° A quelles conditions un point singulier β de $\varphi(x)$ est-il tel que $H[\varphi, k]$ admette le point singulier $\beta\gamma$ toutes les fois que $k(x)$ est singulière en γ et que $\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une seule fois? Si β possède cette propriété, je dirai que c'est un *point singulier principal* de $\varphi(x)$. Un pôle est un point singulier principal, le fait, pour un point singulier séparable, d'être ou de n'être pas principal, ne dépend que de la partie irrégulière. Je serai ainsi conduit à traiter d'abord le cas où $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier.

2° Je considère la fonction $\varphi(x)$, admettant, entre autres points singuliers, un point singulier β. Est-il possible que $H[\varphi, k]$ admette toujours le point singulier $\beta\gamma$, quand $k(x)$ est singulière en γ et cela même si $\beta\gamma$ peut être obtenu plusieurs fois? Si β possède cette propriété, je dirai que c'est un *point singulier principal absolu*.

B. Je me donne la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ et une fonction $g(u)$, définie pour $u = a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, qui sera, en général, holomorphe pour ces valeurs de la variable. Je cherche les points singuliers de $F(x) = \Sigma g(a_n) x^n$ en supposant connus ceux de $\varphi(x)$.

Ce problème a été traité dans des cas particuliers importants et les résultats obtenus sont bien connus : je ne puis que renvoyer à l'Ouvrage de M. Hadamard : *La série de Taylor et son prolongement analytique* (¹). Je citerai les théorèmes de M. Leau (²) : si $a_n = \frac{1}{n}$ et si l'on prend $g(u)$ holomorphe pour $u = 0$, $F(x)$ n'a que le point singulier 1 ; si $a_n = n$ et si $g(u)$ est fonction entière d'ordre inférieur à 1 ou égal à 1 par excès, $F(x)$ n'a que le point singulier 1, qui est essentiel. Ces théorèmes ont été démontrés à nouveau, notamment par MM. Le Roy et Faber (³). M. Leau traite encore le cas où $g(u)$

(¹) *Collection Scientia*. Gauthier-Villars.

(²) LEAU, *Recherches sur les singularités d'une fonction définie par une série de Taylor* (*Journal de Liouville*, t. V, 1899).

(³) LE ROY, *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. II, 1900, p 341 et 349). — FABER, *Mathematische Annalen*, 1903, Bd LVII.

est une fonction entière et où $\varphi(x)$ vérifie certaines conditions. Les résultats les plus simples sont ceux où $\varphi(x)$ n'a que le point singulier 1 et où il existe un nombre positif q tel que $|1-x|^q|\varphi(x)|$ soit borné au voisinage du point 1, ce que j'exprimerai en disant que ce *point singulier est d'ordre fini et que son ordre est* q. $F(x)$ n'a encore que le point singulier 1 si $q<1$; ou bien, si $q>1$ et si l'ordre de la fonction entière $g(u)$ est inférieur à $\frac{1}{1-q}$.

M. Fabry [1] a traité le problème quand $a_n=n$ et quand $g(u)$ est holomorphe dans un angle qui admet la partie positive de l'axe réel pour bissectrice et telle, de plus, que $\frac{1}{|u|}L|g(u)|$ devienne inférieur à tout nombre positif donné dès que $|u|$ dépasse un nombre convenable. Nous exprimerons ce fait, dans la suite, en disant que $\frac{1}{|u|}L|g(u)|$ a uniformément zéro pour plus grande des limites dans cet angle. M. Fabry a montré que $F(x)$, n'a, dans ce cas, pas d'autre point singulier que 1 sur son cercle de convergence. M. Le Roy [2] a traité le même problème dans un cas particulier. MM. Mellin et Lindelöf [3] ont étudié la même question que M. Le Roy et des questions analogues.

2. Les méthodes que j'emploierai présentent quelques analogies avec celles que M. Volterra a créées pour étudier ce qu'il appelle la composition de première et deuxième espèces [4]. Je considère $H[\varphi, k]$ comme transformée de $k(x)$ par une opération distributive par rapport à l'addition. Il y a lieu d'étudier l'effet de plusieurs opérations successives et l'on voit que, transformer p fois $k(x)$ revient à effectuer l'opération $H[\varphi_p(x), k(x)]$ en posant $\varphi_p(x)=\Sigma a_n^p x^n$.

---

(1) Fabry, *Sur les points singuliers d'une série de Taylor* (*Journal de Liouville*, t. IV, 5e série, 1898).

(2) Le Roy, Mémoire cité.

(3) Lindelöf, *Leçons sur le calcul des résidus* (*Collection Borel*, p. 108 et suiv.).

(4) *Voir*, par exemple, Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (*Collection Borel*).

Il faut étudier aussi l'opération inverse de la précédente, c'est-à-dire celle qui s'obtient en remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$.

On a pu construire des théories générales des opérations distributives [1]. Toute théorie de la transformation T qui remplace F par T(F) demande l'étude préalable de la transformation qui remplace F par

$$\lambda T(F) + \lambda^2 T^2(F) + \ldots + \lambda^p T^p(F) + \ldots,$$

T^p étant le résultat de p transformations T. Cette étude préalable a fait, par exemple, l'objet des théorèmes de M. Fredholm dans le cas de la permutabilité de deuxième espèce. On passe ensuite de la transformation précédente à la transformation qui remplace F par [2]

$$\mathfrak{T}(F) = C_1 \lambda T(F) + C_2 \lambda^2 T(F) + C_3 \lambda^3 T(F) + \ldots$$

et qui fait correspondre $\mathfrak{T}(F)$ à la fonction analytique

$$g(\lambda) = C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + C^3 \lambda_2 + \ldots.$$

Nous verrons, de même, qu'il est possible de déduire l'étude de la fonction

$$R(x, \lambda) = C_1 \lambda \varphi(x) + C_2 \lambda_2 \varphi^2(x) + \ldots + C_p \lambda^p \varphi_p(x) + \ldots$$

de celle de

$$Q(x, \lambda) = \lambda \varphi(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \ldots + \lambda^p \varphi_p(x) + \ldots.$$

Or, la deuxième est formellement égale à $-\lambda \sum \frac{x^n}{\lambda - \frac{1}{a_n}}$ et la première à $\sum g(\lambda a_n) x^n$, ce qui permet de prévoir que le problème B, dans le cas où $g(u)$ est fonction analytique de u, se ramène au problème B particulier où $g(u) = \frac{-\lambda}{\lambda - \frac{1}{u}}$. Il faudra donc faire l'étude de $Q(x, \lambda)$ et nous n'y parviendrons que pour des fonctions $\varphi(x)$ particulières.

---

(1) *Voir* PINCHERLE, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 3 novembre 1912.

(2) *Voir* VOLTERRA, Ouvrage cité, et LEBESGUE, *Sur un théorème de M. Volterra* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 40, 1912).

Je n'emploierai pas d'ailleurs, explicitement, la méthode de MM. Volterra et Lebesgue, mais une méthode équivalente indiquée par M. Borel ([1]), dans un cas particulier. Pour justifier le calcul formel qui précède, plusieurs méthodes peuvent être employées : je m'appuierai toujours sur la méthode due à M. Montel ([2]). Quelle que soit la méthode employée, il importe toujours de commencer par la recherche d'une borne de $Q(x, \lambda)$ quand x et λ varient dans certaines conditions.

3. Les problèmes A et B sont liés l'un à l'autre au point qu'il est préférable de ne pas les étudier séparément. On verra que la condition nécessaire et suffisante pour que le point singulier, supposé unique, de la fonction $\varphi(x)$ soit principal, est que la fonction $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ n'admette qu'un point singulier, ce qui ramène le problème A à un problème B. Mais, d'autre part, la nature de la fonction $Q(x, \lambda)$, considérée comme fonction de x, dépend de la question de savoir si les points singuliers de $\varphi(x)$ sont ou ne sont pas principaux. J'ai été ainsi conduit à m'occuper alternativement des deux problèmes.

Dans la première Partie, je reprends l'étude des théorèmes de MM. Leau et Fabry. Je généralise un des théorèmes de M. Leau en traitant le cas où $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier d'ordre q inférieur à 1 et où $g(u)$ est non plus entière, mais holomorphe à l'origine. Je reprends ensuite la démonstration du théorème de M. Fabry relatif aux fonctions de la forme $\sum g(n)x^n$; la même méthode permet de traiter des cas particuliers, celui de M. Le Roy, entre autres.

La deuxième Partie est consacrée au problème A. J'y donne des conditions pour qu'un point singulier soit ou ne soit pas principal et des exemples de points principaux et de points qui ne le sont pas.

La troisième Partie utilise les résultats de la deuxième pour l'étude du problème B en ne supposant plus que la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un seul point singulier, mais en adoptant des hypothèses plus générales.

([1]) Borel, *Sur la recherche des points singuliers des séries de Taylor* (*C. R. Acad. Sc.*, 12 décembre 1898).

([2]) Montel, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 27-28.

J'ai reçu de nombreux encouragements de MM. Borel, Fabry, Hadamard et Vessiot; je dois surtout beaucoup à M. Montel qui m'a aidé de ses conseils avec une inlassable bienveillance. Je tiens à leur exprimer à tous ma vive reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE.

4. *Généralisation d'un théorème de M. Leau.* — J'aurai besoin de traiter le problème suivant : *Deux points x et z parcourent d'une manière indépendante un contour fermé; étudier le domaine formé par les points $t = \frac{x}{z}$.*

Je suppose d'abord que le contour est une courbe simple C, entourant l'origine, convexe, et même (il n'y a pas d'inconvénient à particulariser ainsi le problème) que cette courbe est une ellipse C ayant son foyer à l'origine O. Je désigne son excentricité par e, et le domaine cherché, par D. Je pose $t = re^{i\varphi}$; on voit que le module r est donné par

$$r = \frac{1 + e\cos\omega}{1 + e\cos(\omega + \varphi)},$$

où l'argument φ et le paramètre ω peuvent prendre toutes les valeurs. φ étant donné, r vérifie, si t fait partie de D,

$$r^2(1 - e^2) - 2r(1 - e^2\cos\varphi) + 1 - e^2 \leqq 0,$$

de sorte que le domaine D comprend deux courbes Γ_1 et Γ_2, entourant l'origine et la région située entre ces deux courbes. Γ_1 et Γ_2 appartiennent à une même courbe algébrique d'équation

$$r^2(1 - e^2) - 2r(1 - e^2\cos\varphi) + 1 - e^2 = 0;$$

elles se coupent au point 1 qui est point double de la courbe algébrique. Les tangentes au point 1, symétriques par rapport à l'axe réel, font avec lui des angles dont la tangente est $\sqrt{\frac{1 - e^2}{e^2}}$. Un tel angle peut être rendu arbitrairement petit, il suffit de prendre e assez voisin de 1.

N'importe quel point du plan peut appartenir à D, s'il ne se trouve pas sur l'axe réel, il suffit que l'excentricité soit assez grande. En exprimant que le point $re^{i\varphi}$ appartient à D, j'ai, en effet,

$$e^2 \geqq \frac{(r-1)^2}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}.$$

Or,

$$\frac{(r-1)^2}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} < 1.$$

Tous les points du cercle $r = 1$ appartiennent à D; la courbe Γ_1 est intérieure, la courbe Γ_2 extérieure à ce cercle, car le produit des valeurs de r correspondant à une valeur de φ est égal à 1.

La demi-droite L qui est située sur l'axe réel, du côté positif, qui part du point 1, n'a en commun avec D que le point 1.

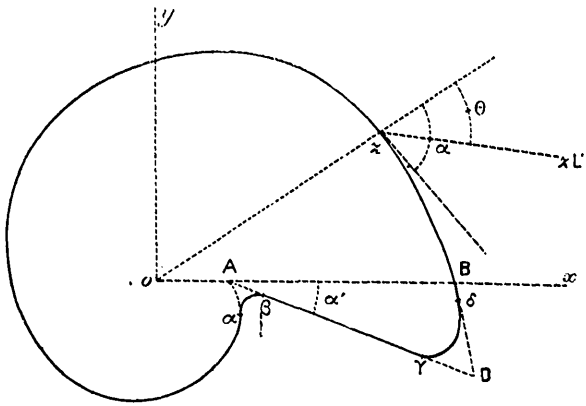
Je vais traiter maintenant la même question en remplaçant le contour C par un autre contour C′ défini de la façon suivante. Je trace un arc de spirale logarithmique d'équation $\rho = ae^{-m\omega}$ (a et m positifs), et je marque les points $A(\omega = 0, \rho = a)$ et $B(\omega = -2\pi, \rho = ae^{2m\pi})$. Les tangentes à cette courbe font, avec les rayons vecteurs aux points de contact, un angle V tel que $\operatorname{tang} V = -\frac{1}{m}\cdot$ Je désigne par α l'angle aigu et positif tel que $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{m}$; j'ai $V = -\alpha$. Je trace ensuite une droite AD, au-dessous de l'axe réel Ox, faisant avec lui un angle aigu dont la valeur absolue est α', tel que $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\pi}{2}\cdot$ AD coupe l'arc de spirale en D voisin de B.

Je raccorde la droite AD et l'arc de spirale en traçant deux petits arcs de cercle $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ tangents à ces deux lignes; α est pris très voisin de A, et δ très voisin de D, sur l'arc de spirale AD. Le contour C′ sera formé de l'arc de spirale $\delta\alpha$, du segment de droite $\beta\gamma$, et des deux raccords $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$. Cherchons le domaine D′ occupé par le point $t = \frac{x}{z}$ quand x et z parcourent C′.

On voit d'abord que D′ est borné, ne contient pas l'origine, et se transforme en lui-même si l'on remplace un de ses points t par $\frac{1}{t}\cdot$

Il est facile de voir que D' a des points sur tous les rayons vecteurs issus de l'origine O. Pour trouver les points sur le rayon d'argument φ, il suffit de faire pivoter un angle égal à φ autour de O. Un de

Fig. 1.

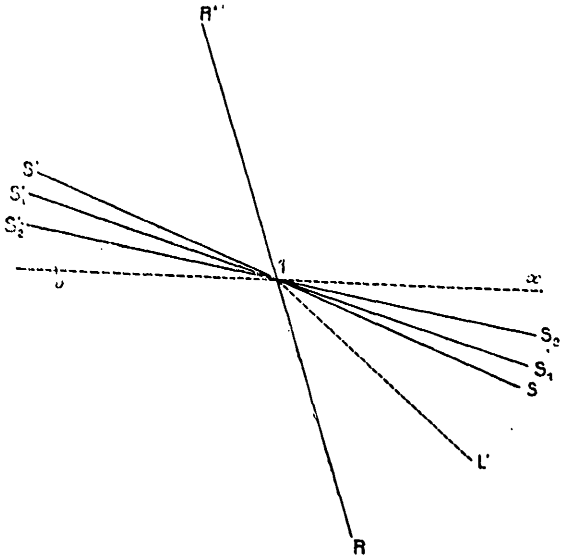


ses côtés coupe C' en x, l'autre en z, et l'argument de $\frac{x}{z}$ est φ. $\left|\frac{x}{z}\right|$ ne garde pas la même valeur quand l'angle tourne, de sorte qu'il y a plusieurs points sur chaque rayon issu de O ; le domaine D' est une sorte de couronne entourant l'origine.

Pour l'étudier d'une façon plus précise, nous considérerons D' comme engendré par une courbe C'_z, qui est elle-même le lieu du point $\frac{x}{z} = t$ quand z reste fixe et quand x parcourt C'. Cette courbe est semblable à C' et passe par le point $t = 1$. Elle fait en $t = 1$, avec l'axe réel, un angle égal à l'angle de C' avec le rayon vecteur Oz du point z. Cherchons, d'après cela, la forme de D' au voisinage du point 1. Il suffit de chercher l'angle que fait, avec l'axe réel, la tangente T_z à la courbe C'_z au point 1 et de suivre ses variations quand z parcourt C' (voir *fig.* 2). Je trace, au point 1, les droites RR' et SS', dont les directions au-dessous de Ox font avec lui les angles aigus α et α'. Si z parcourt l'arc $\delta\alpha$ de la spirale, la tangente T_z reste sur RR'. Si z parcourt l'arc $\alpha\beta$, on voit que T_z balaye un angle RS'_1 (et son opposé $R'S_1$), $S_1S'_1$ est la position de T_z pour z en β ; elle est aussi voisine de $S'S$ qu'on le veut, si l'on considère le raccord β comme infiniment petit.

Quand z parcourt le segment de droite $\beta\gamma$, l'angle aigu de T_z avec Ox diminue et T_z balaye les angles opposés S_1S_2 et $S'_1S'_2$, $S_2S'_2$ étant la position de T_z qui correspond à γ. Si, enfin, z est sur le raccord $\gamma\delta$, T_z balaye les angles S_2R' et S'_2R. Finalement, T_z n'est

Fig. 2.



jamais dans l'angle RS (ou R'S') et elle peut être aussi voisine qu'on le veut des deux côtés de cet angle, si le raccord $\alpha\beta$ est assez petit. T_z occupe toute autre position à l'intérieur des angles RS'_1, $R'S_1$. Au voisinage de 1, D' a des points infiniment voisins de 1 sur tout rayon dans l'angle RS'_1 et n'en a aucun sur un rayon de l'angle RS. D' présente donc une sorte de pointe. Ajoutons que D' est évidemment une aire bornée par une frontière qui est une courbe formée d'arcs analytiques.

Je dis maintenant que l'angle RS (au-dessous de Ox), est entièrement extérieur à D'. Je trace une droite L' située dans cet angle. Elle fait avec Ox un angle aigu dont la valeur absolue θ vérifie $0 < \alpha' < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Si cette demi-droite rencontrait D' en un point t autre que 1, on aurait $x = tz$, x et z étant deux points distincts de C'. La demi-droite zL' déduite de L', en multipliant l'affixe de chaque point par z, rencontrerait C' en un point x autre que z. On peut tracer zL' pour chaque point z de C', elle part de z et fait avec le rayon vecteur un angle égal à $-\theta$. Si z est sur l'arc de spirale, zL' est extérieur à C', puisque la tangente fait, avec le rayon vecteur, un angle négatif $-\alpha$ et que l'on a $\alpha > 0$. Si z décrit C' en entraînant zL' avec lui, zL' ne se confondra jamais avec une tangente, qui ne fait jamais l'angle θ avec le rayon vecteur. zL' est donc toujours dirigé vers l'extérieur de C'. Il reste à savoir si cette droite ne va pas ensuite couper le contour C' en des points éloignés de z. L'étude de la figure montrera aisément qu'il n'en est rien. *La demi-droite* L' *est donc extérieure à* D' *pour* $\alpha' < 0 < \alpha$ et *et n'a avec* D' *aucun point commun autre que* 1.

Par contre, D' *contient un segment* mn *de l'axe réel* et 1 est situé sur ce segment entre m et n. Il n'y a qu'à remarquer qu'on peut prendre sur C' deux points x et z de même argument. On peut choisir z voisin de A et x voisin de B. Alors $\frac{x}{z}$ est voisin de $e^{2\pi m}$ et, en prenant le raccord assez petit, cette quantité est aussi voisine de $e^{2\pi m}$ qu'on le veut. *Le segment* mn *peut donc englober tout point de l'axe réel*, il n'y a qu'à prendre m assez grand (et, par suite, α et α' assez petits).

Est-il possible de tracer un chemin entièrement intérieur à D', joignant un point de module inférieur à 1, à un point de la ligne L? On peut répondre affirmativement, puisqu'il y a des contours C'_z qui coupent L et qui ont des points intérieurs au cercle de rayon 1, il suffit de prendre z sur $\beta\gamma$ pour s'en rendre compte. C'_z possède alors deux points réels d'argument zéro et dont les modules sont l'un supérieur, l'autre inférieur à 1. Mais il est à remarquer que ces chemins ne coupent pas les lignes L' et sont, par suite, situés au-dessus de Ox, au voisinage de L. Ils ne permettent d'aborder L que du côté supérieur.

On peut considérer le contour C'' symétrique de C' par rapport à Ox. Il donne lieu à un domaine D'' possédant des propriétés analogues à celles de D'. Je signalerai que l'on peut tracer des chemins situés dans D'' allant de points intérieurs au cercle $|z| = 1$ jusqu'à des points de L et abordant L du côté inférieur.

Je remarquerai enfin que l'on peut *associer un contour* C *et un contour* C' *de façon que le domaine formé par la réunion de* D *et* D' *recouvre entièrement un cercle assez petit de centre* 1. Il suffit que l'angle RS_1 soit intérieur à l'angle des tangentes aux courbes Γ_1

et Γ_2 et pour cela que l'ellipse C soit assez excentrique. On peut donc se donner C′, C existe tel que la condition précédente soit vérifiée.

5. Je considère deux séries

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n \qquad \text{et} \qquad f(x) = \Sigma b_n x^n$$

qui définissent deux fonctions analytiques $\varphi(x)$ et $f(x)$. Je suppose qu'elles sont holomorphes dans tout domaine fini comprenant l'origine et n'ayant aucun point commun avec la demi-droite L et aussi dans tout domaine fini n'ayant aucun point commun avec une demi-droite L′ située, par exemple, au-dessous de l'axe réel, qui fait avec lui un angle θ aigu quelconque et qui part du point 1. C'est ce qu'on peut exprimer en disant que ces fonctions n'ont à distance finie pas d'autre point singulier que 1, quand on n'effectue que des prolongements analytiques qui ne font le tour d'aucun point singulier.

J'admets de plus que l'on a au voisinage de $x = 1$, et pour toute valeur de x située dans un des domaines qui viennent d'être précisés,

$$|\varphi(x)| < \frac{A}{|x-1|^q}, \qquad |f(x)| < \frac{B}{|x-1|^{q'}},$$

A et B étant des constantes positives; q et q' des nombres positifs inférieurs à 1. On pourra dire que $\varphi(x)$ admet 1 comme point singulier d'ordre q. Je vais étudier l'intégrale

$$J(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \varphi\left(\frac{x}{z}\right) f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{z},$$

prise sur le contour C dont il vient d'être question, x et y étant deux points de C. Comme $\frac{x}{z}$ et $\frac{z}{y}$ appartiennent au domaine D, qui n'a pas de point autre que 1 commun avec la ligne L, comme les fonctions $\varphi(t)$ et $f(t)$ sont uniformes dans D, l'élément différentiel est bien défini sans ambiguïté et c'est une fonction holomorphe de z sauf pour $z = x$, $z = y$.

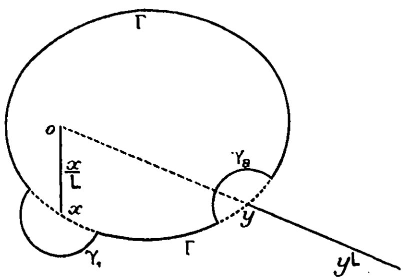
Je suppose x différent de y, l'élément différentiel devient infini comme $\frac{1}{|z-x|^q}$ et $\frac{1}{|z-y|^{q'}}$. On peut montrer que, comme pour des variables réelles, l'intégrale peut être définie sans difficulté. Dans ce but, je trace deux petits cercles de centres respectifs x et y, de rayons

ρ et ρ' assez petits pour qu'ils ne se coupent pas entre eux, pour qu'ils coupent C en deux points seulement, pour qu'ils laissent l'origine à l'extérieur. Je désigne par Γ la partie de C qui est extérieure à ces cercles, par γ_1 la partie du cercle de centre x qui est extérieure à l'ellipse, par γ_2 la partie du cercle de centre y intérieure à C. L'intégrale

$$J'(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma+\gamma_1+\gamma_2} \varphi\left(\frac{x}{z}\right) f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{z}$$

représente le prolongement en x de la série $\sum \frac{a_n b_n}{y^n} x^n$, cela résulte de la démonstration du théorème de M. Hadamard. Le point singulier y de $f\left(\frac{z}{y}\right)$ est bien extérieur au contour, le point singulier x est bien intérieur, la ligne yL est extérieure, la ligne $\frac{x}{L}$ obtenue en prenant l'inverse de chaque point de L et en multipliant par x est bien intérieure au contour comme le demande cette démonstration (*fig.* 3).

Fig. 3.



On voit que $t = \frac{x}{z}$ ne coupe pas la ligne L quand z parcourt le contour $\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2$, $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est donc bien défini et l'on a

$$\left|\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\right| < \frac{A}{\left|1-\frac{x}{z}\right|^{q}}$$

et, de même,

$$\left|f\left(\frac{z}{y}\right)\right| < \frac{B}{\left|1-\frac{z}{y}\right|^{q'}}.$$

Évaluons la partie de l'intégrale relative à l'arc γ_1 ; je désigne par M une borne du module de $f\left(\frac{z}{y}\right)$ quand z est extérieur au cercle de centre y et intérieur à un cercle de grand rayon contenant toute la figure à son intérieur. Je pose $z = x + \rho e^{i\omega}$, ω varie de ω_1 à ω_2 sur l'arc γ_1 :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{z}\right| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{MA}\rho^{1-q}}{[\,|x|-\rho\,]^{1-q}}(\omega_2-\omega_1).$$

Cette quantité tend vers zéro avec ρ. On verrait, par un calcul analogue, que l'intégrale le long de γ_2 tend vers zéro avec ρ'.

L'intégrale le long de ρ a donc une limite lorsque ρ et ρ' tendent vers zéro et c'est cette limite qui sera l'intégrale $\mathrm{J}(x, y)$. D'ailleurs $\mathrm{J}'(x, y)$ est indépendant de ρ et de ρ', de sorte que $\mathrm{J}(x, y) = \mathrm{J}'(x, y)$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} f\left(\frac{z}{y}\right)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} = \mathrm{H}\left[f\left(\frac{x}{y}\right),\ \varphi(x)\right]$$

et l'on a ainsi une sorte de généralisation de l'intégrale de Parseval.

Ce qui précède s'applique si l'on remplace le contour C par C′, D par D′, L par une des demi-droites L′.

6. Je pars d'une fonction $\varphi(t)$ vérifiant les conditions que j'indique au début du n° 5 et je forme

$$\varphi_2(x) = \mathrm{H}[\varphi(x),\ \varphi(x)]; \qquad \varphi_3(x) = \mathrm{H}[\varphi_2(x),\ \varphi(x)], \qquad \ldots.$$

Ces fonctions n'ont que le point singulier 1. Je considère $\varphi_2(t)$ pour t appartenant au domaine D. Cette fonction sera donnée par

$$\frac{1}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{z}{y}\right)dz$$

d'après ce qui précède, x et y étant sur C. Ceci montre que $\frac{2i\pi}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ est le premier noyau itéré du noyau $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ fonction des deux variables x et y qui parcourent C. L'ordre de grandeur de $\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ pour x voisin de y doit pouvoir se déterminer comme on le fait pour les noyaux qui deviennent infinis pour $x = y$ dans le domaine réel. Mais ici encore, il n'est pas tout à fait évident que les méthodes ordinaires s'appliquent. Je reprends donc le calcul.

Je choisis une origine des arcs sur C. A chaque point x, y ou z, correspond une abscisse curviligne s_x, s_y ou s_z. $\left|\frac{dz}{ds_z}\right|$ a pour borne supérieure 1. Comme C est une courbe analytique, $z-x$ se laisse développer en série suivant les puissances de s_z et de s_x et est de la forme $(s_z-s_x)\mu(s_z, s_x)$. La fonction $\mu(s_z, s_x)$ est analytique pour s_x et s_z réels et compris entre 0 et l, longueur de la courbe. $\mu(s_z, s_x)$ ne peut être nulle, d'après sa définition, que si $z=x$, elle serait donc nulle pour des valeurs de s_z et s_x égales et égales à un nombre déterminé a. Mais alors $(s_z-a)\mu(s_z, a)$ admettrait la racine double a. $\frac{dz}{ds_z}$ admettrait la racine a, ce qui ne peut avoir lieu que si a est un rebroussement. La fonction continue $|\mu(s_z, s_x)|$, qui n'est jamais nulle dans le champ $0 \leqq s_x < l$, $0 \leqq s_z < l$, a donc une borne inférieure m. On a

$$\frac{1}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^l \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\cdot\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{ds_z}\,ds_z,$$

et, μ désignant le rayon vecteur minimum de l'ellipse C,

$$\left|\frac{1}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)\right| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{A^2}{m^{2q}\mu^{2(1-q)}}\int_0^l \frac{1}{|s_z-s_x|^q\,|s_z-s_y|^q}\,ds_z.$$

On peut, maintenant, appliquer un calcul classique ([1]). On voit que $\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ est de l'ordre de $\frac{1}{|s_x-s_y|^{2q-1}}$, et, par suite, de $\frac{1}{|x-y|^{2q-1}}$ pour x et y sur C. Donc, $|1-t|^{2q-1}|\varphi_2(t)|$ est borné, si t appartient au domaine D.

Les considérations précédentes sont valables si l'on remplace C par C' et D par D'. C' est, en effet, formé d'arcs analytiques, ne présente pas de points anguleux, les coordonnées cartésiennes d'un de ses points ainsi que leurs dérivées sont fonctions continues de l'arc de la courbe.

La fonction $|1-t|^{2q-1}|\varphi_2(t)|$ est donc bornée dans D et D'. Or, D et D' peuvent être choisis de façon à recouvrir le voisinage du point 1. Je rappelle que $\varphi(x)$ est holomorphe dans tout domaine

([1]) *Voir*, par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 357.

n'ayant aucun point commun avec une ligne L', ligne qu'il faut considérer ici comme donnée. Je choisis C' de façon que L' soit une des demi-droites extérieures à D'. Je puis ensuite choisir, comme on l'a vu, le contour C de façon que D et D' recouvrent le voisinage du point 1.

Il est donc démontré que $|(1-t)^{2q-1}\varphi_2(t)|$ est borné au voisinage de 1 quand t est contenu dans un domaine où nous avons admis que $\varphi(t)$ est holomorphe.

Ce résultat obtenu, on démontrera, par l'étude de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}\varphi_2\left(\frac{x}{z}\right)\cdot\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{z}{y}\right)dz,$$

que $\frac{(2i\pi)^2}{y}\varphi_3\left(\frac{x}{y}\right)$ est le deuxième noyau itéré de $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ et l'on calculera de même son ordre de grandeur pour x voisin de y. On peut, évidemment, continuer ainsi, et $\frac{(2i\pi)^{p-1}}{y}\varphi_p\left(\frac{x}{y}\right)$ est le $(p-1)^{\text{ième}}$ noyau itéré de $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Il est comparable à $\frac{1}{|x-y|^{pq-(p-1)}}$. Donc, comme dans le cas des noyaux réels, $\frac{(2i\pi)^{p-1}}{y}\varphi_p\left(\frac{x}{y}\right)$ finit par rester borné pour p assez grand.

Il est à remarquer que ces résultats ne sont obtenus que par la considération simultanée des contours C et C'. Ils ne sont pas démontrés pour une fonction qui aurait la ligne L comme coupure essentielle et qui vérifierait les autres conditions. Il faut que $\varphi(x)$ soit prolongeable au delà de L vers le bas, jusqu'à une ligne L' (ou vers le haut, jusqu'à une ligne L''), pour que notre démonstration s'applique.

7. Ce qui précède permet de considérer l'intégrale de Parseval généralisée comme une intégrale de Fredholm et d'appliquer les théorèmes de M. Fredholm. Je dois étudier le noyau résolvant du noyau $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Ce noyau résolvant $\Gamma(x, y, \lambda)$ vérifie

$$(1) \qquad \lambda\int_C \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\Gamma(z, y, \lambda)\,dz = \Gamma(x, y, \lambda) - \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Il est le prolongement analytique en λ de la série

$$(2)\quad \Gamma(x, y, \lambda) = \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2i\pi\lambda}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots + \frac{(2i\pi\lambda)^{p-1}}{y}\varphi_p\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots.$$

Enfin, il y a lieu d'en écrire l'expression que donne la théorie de M. Fredholm.

Je désigne par $\frac{(2i\pi)^{n-1}}{y}\varphi_n\left(\frac{x}{y}\right)$ le premier noyau itéré qui reste borné pour x voisin de y et j'utilise des notations analogues à celles de M. Goursat [1].

Je désigne par $D_n(\lambda)$ le « déterminant d'ordre infini » du noyau $\frac{(2i\pi)^{n-1}}{y}\varphi_n\left(\frac{x}{y}\right)$, par $\Gamma_n(x, y, \lambda)$ son noyau résolvant. Le premier théorème de M. Fredholm permet d'écrire :

$$\Gamma_n(x, y, \lambda) = \frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)}{D_n(\lambda)},$$

$D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ étant une fonction entière de λ. Je pose ensuite

$$H(x, y, \lambda) = \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2i\pi\lambda}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots + \frac{(2i\pi\lambda)^{n-2}}{y}\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right),$$

j'ai

$$(3)\quad \begin{aligned} \Gamma(x, y, \lambda) = H(x, y, \lambda) + \lambda^{n-1}\frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda^n\right)}{D_n(\lambda^n)} \\ + \frac{\lambda^n}{D_n(\lambda^n)}\int_C H(x, z, \lambda)\, D_n\left(\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}\middle| \lambda^n\right) dz, \end{aligned}$$

et j'étudie les termes du deuxième membre, en commençant par $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda^n\right)$. Il est connu que c'est une fonction entière de λ dont les coefficients sont certaines combinaisons linéaires des noyaux itérés de $\frac{1}{y}\varphi_n\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda^n\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \lambda^{(\alpha-1)n}\frac{1}{y}A_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)$$

---

[1] GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 382 et suiv.

avec

$$A_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{p=1}^{p_\alpha} C_p \varphi_{pn}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

On sait de plus que cette série admet une majorante. On a

$$\left|A_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)\right| < B_\alpha,$$

pour x et y sur C, B_α étant tel que $\Sigma B_\alpha \lambda^\alpha$ soit une fonction entière.

Ceci montre d'abord que, sur C, $D_n\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda^n\right)$ est de la forme $\frac{1}{y}\psi\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)$. Posons $t = \frac{x}{y}$, $\psi(t, \lambda)$ est définie et holomorphe lorsque t est dans D. $\psi(t, \lambda)$ est en effet somme d'une série de fonctions holomorphes, série admettant une majorante, dans tout domaine formé de points appartenant à D et laissant le point 1 à l'extérieur.

$H(x, y, \lambda)$ est, de même, de la forme $\frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right)$ et cette fonction devient infinie comme $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{y}\right)^q}$ pour x et y sur C. L'intégrale qui figure dans l'équation (3) est donc de celles que nous avons étudiées au n° 5. Il résulte de là que $\Gamma(x, y, \lambda)$ est de la forme $\frac{1}{y} Q\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)$ et aussi que $Q\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)$ est fonction de $t = \frac{x}{y}$ définie et holomorphe quand t est dans un domaine qui fait partie de D et qui laisse 1 à l'extérieur, pourvu que λ ne soit pas racine de $D_n(\lambda^n) = 0$.

On peut aller plus loin et donner une borne de $\Gamma(x, y, \lambda)$ lorsque λ est dans un domaine borné, la distance d'un point de ce domaine à une racine de $D_n(\lambda^n) = 0$ admettant une borne inférieure et lorsque $t = \frac{x}{y}$ est dans un domaine D_1 qui fait partie de D mais laisse le point 1 à l'extérieur.

Il est clair que, dans ces conditions,

$$\psi(t, \lambda^n) = y\, D_n\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda^n\right)$$

admet une borne. $H(x, y, \lambda)$ en admet une aussi. Il reste à étudier l'intégrale qui figure dans l'équation (3). Je suppose x et y sur C et je reprends les notations du n° 6,

$$\left|D_n\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda''\right)\right| = \left|\frac{\psi(t, \lambda'')}{y}\right| < \frac{B}{\mu} \qquad |H(x, y, \lambda)| < \frac{B'}{\mu^{1-q}|x-y|^q},$$

B et B′ étant des constantes qui ne dépendent que de l'ellipse C,

$$\left|\int_C H(x, z, \lambda) D_n\left(\frac{z}{y}\middle|\lambda''\right) dz\right| < \int_0^l \left|H(x, z, \lambda) D_n\left(\frac{z}{y}\middle|\lambda''\right)\frac{dz}{ds_z}\right| ds_z$$
$$< \frac{BB'}{\mu^{2-q} m^q}\int_0^l \frac{ds_z}{|s_x - s_z|^q}$$

et cette quantité est bornée.

En résumé, $\Gamma(x, y, \lambda)$ est borné dans les conditions indiquées. $Q(t, \lambda)$ l'est aussi.

8. Je remarque que l'on a (si $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{z^n}{y^n}\,dz = \frac{x^n}{y^n}a_n,$$

d'après la formule du n° 5. La quantité $\frac{2i\pi}{a_n}$ est donc constante caractéristique du noyau $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Ceci montre que a_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. C'est un premier résultat relatif aux fonctions définies au début du n° 5.

Posons

$$\Phi(t, u) = \frac{1}{u^2} Q\left(t, \frac{1}{2i\pi u}\right) + \frac{1}{u}\frac{1}{1-t}.$$

Je suppose que u parcoure un contour simple σ entourant l'origine, contenant à son intérieur tous les points a_n. S'il existe des valeurs caractéristiques λ_p autres que $\frac{2i\pi}{a_n}$ je supposerai que σ ne passe par aucun point d'affixe $\frac{2i\pi}{\lambda_p}$.

Soit $g(u)$ une fonction holomorphe sur σ et à l'intérieur de σ. Je considère

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \Phi(t, u) g(u)\,du.$$

Si u est sur σ et t dans D_1, $Q\left(t, \frac{1}{2i\pi u}\right)$ admet une borne indépendante de t et de u, d'après les résultats du n° **7**. Il en est de même de $\Phi(t, u) g(u)$. La méthode de M. Montel [1] montre que $F(t)$ est alors fonction holomorphe de t dans D_1.

Pour tirer parti de ce résultat, je cherche le développement de $\Phi(t, u)$ au voisinage de $t = 0$. Je suppose

$$|t| < \theta < 1; \quad \left|\frac{u}{a_n}\right| > \alpha > 1 \qquad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Alors, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{u - a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^n a_n^p}{u^{p+1}}$$

admet une majorante

$$\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{\alpha^p},$$

r étant la plus courte distance de l'origine au contour σ. On peut grouper les termes d'une autre manière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{u - a_n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{u^{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p t^n = \frac{1}{u} \frac{1}{1-t} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{u^{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p t^n$$

$$= \frac{1}{u} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{u^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{u^{p-1}} \varphi_p(t) = \Phi(t, u).$$

Si donc tous les points du contour σ sont tels que $|u| > \alpha a_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on peut, pour les valeurs de t qui appartiennent à D_1 et qui sont inférieures à θ, remplacer $\Phi(t, u)$ par $\sum \frac{t^n}{u - a_n}$ dans l'expression de $F(t)$. On peut aussi intégrer terme à terme et il vient :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(a_n) t^n.$$

---

[1] MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 27-28.

Cette série a donc pour prolongement une fonction holomorphe dans D_1.

Si le contour σ, à l'intérieur et sur lequel $g(u)$ est holomorphe, ne vérifie pas une inégalité de la forme $\left|\frac{u}{a_n}\right| > a > 1$, on n'a qu'à remplacer $\varphi(x)$ par une fonction dont les coefficients vérifient cette relation en diminuant le module de certains d'entre eux. Comme les a_n n'ont pas d'autre point limite que l'origine, il n'y a qu'un nombre fini de termes à modifier et le résultat subsiste.

Le domaine D_1 peut comprendre tout point du plan à l'exclusion de ceux qui sont sur l'axe réel. Donc $F(t)$ n'a pas de point singulier hors de l'axe réel.

On peut remplacer le contour C par un contour C′ (ou C″) : ce qui précède subsiste entièrement, $F(t)$ est holomorphe à l'intérieur des domaines D′ (ou D″), $F(t)$ est donc holomorphe dans les régions où nous avons admis que $\varphi(t)$ l'était. Nous énoncerons d'une manière moins précise :

Si $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ n'a d'autre point singulier à distance finie que le point singulier 1, en supposant que les prolongements analytiques ne fassent le tour d'aucun point singulier; si, de plus, le point singulier 1 est d'ordre q [1]*, la fonction $\Sigma g(a_n) x^n$ n'a pas d'autre point singulier que 1, toutes les fois que $g(u)$ est holomorphe à l'origine.* (*Les a_n n'ont pas d'autre limite que l'origine, et $g(a_n)$ est, par suite, définie dès que n est assez grand.*)

Il résulte de nos démonstrations que l'ordre de $\Phi(t, u)$ est 1, ce sera aussi l'ordre de $F(t)$ en général.

9. *Cas particulier. Théorème de M. Fabry.* — Le cas où $a_n = \frac{1}{n}$, $\varphi(x) = L\frac{1}{(1-x)}$ a été particulièrement étudié. On peut obtenir des résultats plus complets que dans le cas général et ne pas supposer que $g(u)$ soit holomorphe à l'origine. Je pose $u = re^{i\alpha}$ et je suppose que $g(u)$ soit holomorphe pour $|\alpha| < \alpha_0$, $0 < r < r_0$. Je suppose en

(1) Je rappelle que ces façons de parler ont été précisées au n° **5**.

outre que $g(u)$ vérifie certaines conditions de grandeur dans ce domaine où elle est holomorphe.

M. Fabry a démontré que si $r\mathrm{L}|g(u)|$ a uniformément pour plus grande des limites zéro ([1]) lorsque r tend vers zéro, $\mathrm{F}(x) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right)x^n$ n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence.

M. Le Roy a démontré de plus que si α_0 est égal à $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{F}(x)$ n'a de point singulier que sur l'axe réel du côté positif. Il supposait, il est vrai, que $g(u)$ vérifie une autre condition, mais MM. Mellin et Lindelöf ont établi que le résultat est exact sous la seule condition $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. M. Lindelöf ([2]) donne, de plus, une étude détaillée de $\mathrm{F}(x)$ dans le cas où α_0 est égal à $\frac{\pi}{2}$ et il signale d'autres cas plus particuliers intéressants. Je ne reprends pas ces questions, je n'étudierai qu'un cas particulier nouveau et je montrerai ensuite que le théorème de M. Le Roy et aussi le théorème de M. Fabry, dont la démonstration est assez compliquée, peuvent se déduire très simplement des propriétés de la fonction $\Phi(x, u)$ pour u voisin de zéro. Je pose

$$\mathrm{R}(x, u) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n - \frac{1}{u}} = \mathrm{Q}\left(x, \frac{1}{2i\pi u}\right),$$

et j'ai

$$\Phi(x, u) = \frac{1}{u}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{u^2}\mathrm{R}(x, u).$$

Je considère un contour σ du plan de la variable $u = re^{i\alpha}$ comprenant deux segments de droite OA_1 et OA_2 dont les arguments sont α_1 et α_2 et un arc de courbe $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ raccordant ces deux droites, les points $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$, étant intérieurs à σ. Soit $g(u)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de σ et sur le contour (sauf à l'origine) et admettant une borne quand u est dans ce domaine. Je suppose que $\mathrm{R}(x, u)$ soit bornée quand u est sur le contour σ (mais pas nécessairement à l'intérieur) et quand x est dans un domaine Δ, contenant l'origine et laissant le point 1 à l'extérieur. *Dans ces conditions*, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right)x^n$ *est*

([1]) Cette expression a été définie au n° **1**.

([2]) *Leçons sur le calcul des résidus*, Chap. V.

holomorphe dans Δ. Je vois, en effet, que $u^2\Phi(x, u)$ est borné si x est dans Δ et u sur σ. Le raisonnement de M. Montel montre encore que

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma u^2\Phi(x, u)g(u)\,du$$

est fonction holomorphe de x dans Δ. Si $|x|$ est inférieur à un nombre fixe, inférieur à 1, on peut remplacer $\Phi(x, u)$ par $\sum \frac{x^n}{u-\frac{1}{n}}$ et intégrer terme à terme

$$F_1(x) = \sum_1^\infty x^n \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \frac{u^2 g(u)}{u-\frac{1}{n}}\,du.$$

La fonction $u^2 g(u)$ n'est pas holomorphe sur σ, mais elle est bornée et son seul point singulier, sur le contour σ et à l'intérieur, est le point O. On peut, par un raisonnement semblable à celui du n° 5, établir que la formule habituelle du calcul des résidus est applicable. On a donc

$$F_1(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$$

et cette fonction est holomorphe en même temps que

$$F(x) = \sum g\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

$R(x, u)$ est borné quel que soit x dans Δ, comme on l'a montré plus haut, tant que u reste à une distance bornée inférieurement des points $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Il nous suffit donc d'étudier $R(x, u)$ sur la partie du contour σ voisine de l'origine et pour cela sur une droite OA d'argument α.

10. Supposons d'abord $\cos\alpha$ négatif. Je prendrai comme point de départ l'égalité

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{u}} t^n\,dt = \frac{1}{n-\frac{1}{u}+1},$$

où n est un nombre entier quelconque. L'intégrale est prise sur l'axe réel, la détermination de $t^{-\frac{1}{u}}$ est $e^{-\frac{1}{u}L(t)}$ ($L(t)$ réel).

On sait que M. Hadamard a déduit de là que [1] $\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{u}}}{1-tx}\,dt$ représente le prolongement analytique de la série $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n-\frac{1}{u}+1}$. Donc

$$R(x,u) = x\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{u}}\,dt}{1-tx}.$$

Soit Δ un domaine borné, contenant l'origine, laissant à l'extérieur la demi-droite L formée des points dont l'affixe est réel et supérieur à 1. Si x est dans Δ, si t est sur le segment 0.1, la fonction $\left|\frac{x}{1-tx}\right|$ admet une borne. D'autre part, si $u = re^{i\alpha}$, $\left|t^{-\frac{1}{u}}\right| = t^{-\frac{1}{r}\cos\alpha}$, quantité qui est au plus égale à 1 si t est positif et inférieur à 1. On voit donc que $R(x, u)$ est borné dans Δ.

Nous pouvons aussi étudier des domaines Δ coupant la ligne L. L'intégrale

$$x\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{u}}\,dt}{1-tx}$$

représente toujours $R(x, u)$ si elle est prise sur un arc de courbe rectifiable l, joignant 0 et 1, ne se coupant pas lui-même, pourvu que la fonction à intégrer soit bornée lorsque t tend vers zéro sur cet arc et que le domaine Δ laisse à l'extérieur la courbe l' décrite par $\frac{1}{t}$ quand t décrit l. Si je pose $t = \rho e^{i\omega}$,

$$\left|t^{-\frac{1}{u}}\right| = e^{-(\cos\alpha\,L\rho+\omega\sin\alpha)\frac{1}{r}},$$

et si t tend vers zéro suivant une direction bien déterminée,

$$\cos\alpha\,L\rho + \omega\sin\alpha$$

---

[1] HADAMARD, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 159 et suiv.

croît indéfiniment par valeurs positives et $\left|t^{-\frac{1}{u}}\right|$ est inférieur à 1. La fonction $R(x, u)$ est donc bornée dans tout domaine Δ du plan des x pourvu de la coupure l'. Cette courbe l' est d'ailleurs une courbe arbitraire partant du point 1, allant à l'infini, ne se coupant pas elle-même et pourvue d'une asymptote. On peut donc dire que $R(x, u)$ est borné dans tout domaine qui laisse le point 1 à l'extérieur et qui ne fait pas le tour du point 1.

En nous reportant au n° 9 nous pouvons conclure :

Si la fonction $g(u)$ est holomorphe et bornée à l'intérieur du domaine parcouru par la variable u quand on a $r < r_0$ $|\alpha| \leqq \alpha_0$ avec $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$, $\sum g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a que le point singulier $x = 1$, si les prolongements analytiques ne font le tour d'aucun point singulier.

11. Je suppose que le point u soit sur la demi-droite d'argument α tel que $\cos\alpha$ soit positif. Les intégrales qu'on vient d'étudier n'existent plus. On peut cependant obtenir des résultats en partant de l'égalité

$$\int_{\xi}^{1} t^{-\frac{1}{u}} t^n \, dt = \frac{1}{n - \frac{1}{u} + 1} - \frac{\xi^{n - \frac{1}{u} + 1}}{n - \frac{1}{u} + 1},$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne C ne passant pas à l'origine. La détermination de $t^{-\frac{1}{u}}$ s'obtient en posant $t = \rho e^{i\omega}$, $t^{-\frac{1}{u}} = e^{-\frac{1}{u}(\mathrm{L}\rho + i\omega)}$ et en faisant varier ω d'une manière continue à partir de $\omega = 0$ qui correspond à $t = 1$.

Je considère encore l'intégrale

$$J(x, u) = \int_{C} \frac{t^{-\frac{1}{u}} \, dt}{1 - tx}.$$

Je suppose x dans un domaine Δ, borné, contenant l'origine, laissant à l'extérieur les points de la ligne C′ qui se déduisent des points de C par le changement de l'affixe t en $\frac{1}{t}$. Alors, $J(x, u)$ est, de même que les intégrales déjà vues, pour une valeur de u bien déterminée, fonction holomorphe de x dans Δ. Je cherche le développement en série de

$J(x, u)$ au voisinage de l'origine, je désigne par τ la plus grande valeur de $|t|$ sur C, je prends $|x| < \frac{\theta}{\tau}$, θ étant un nombre inférieur à 1.

Je puis développer $\frac{t^{-\frac{1}{u}}}{1 - tx}$ suivant les puissances de x et intégrer terme à terme :

$$J(x, u) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n - \frac{1}{u} + 1} - \xi^{-\frac{1}{u}} \sum_0^\infty \frac{\xi(\xi x)^n}{n - \frac{1}{u} + 1},$$

d'où

$$(4) \qquad x J(x, u) = R(x, u) - \xi^{-\frac{1}{u}} R(\xi x, u)$$

et cette équation est valable lorsque x est dans Δ.

Je prendrai pour C un arc de la spirale logarithmique d'équation $\rho = e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha}$ de sorte que si $t = \rho e^{i\omega}$ est un point de cette courbe, on a $\left| t^{-\frac{1}{u}} \right| = 1$. L'arc C et son extrémité le point ξ sont pris intérieurs au cercle de rayon 1.

La courbe C' est alors la partie de la spirale extérieure au cercle de rayon 1 et qui va du point 1 au point $\frac{1}{\xi}$. Je supposerai le domaine Δ intérieur au cercle de rayon $\frac{\theta}{|\xi|}$, θ étant un nombre positif inférieur à 1. Je dis que dans ces conditions $R(x, u)$ admet une borne indépendante de $r = |u|$ et de x.

$|R(\xi x, u)|$ admet d'abord une borne, puisque $|\xi x| < \theta < 1$

$$|R(\xi x, u| < \sum_{n=1}^\infty \frac{\theta^n}{\left| n - \frac{1}{u} \right|} < \sum_{n=1}^\infty \frac{\theta^n}{n \sin \alpha};$$

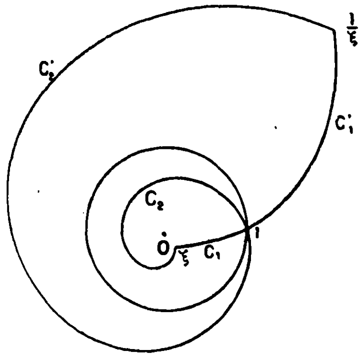
$\left| \xi^{-\frac{1}{u}} \right|$ est égal à 1, enfin l'intégrale $J(x, u)$ est bornée, car $\left| t^{-\frac{1}{u}} \right| = 1$ sur C et $\frac{1}{1 - tx}$ admet une borne si x est dans Δ, puisque $\frac{1}{t}$ parcourt l'arc C' extérieur à Δ. L'équation (4) montre que $|R(x, u)|$ est borné.

On peut déduire de là le théorème de M. Fabry :

Supposons qu'une fonction $g(u)$ soit holomorphe et bornée dans le domaine de la variable $u = r e^{i\alpha}$ défini par $-\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, $r < r_0$ (avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $r_0 > 0$), sauf à l'origine qui est point singulier.

Je trace (*fig.* 4) deux arcs de spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha_1}$, $\rho = e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha_2}$ que je désigne par C_1 et C_2. Ils sont intérieurs au cercle de rayon 1 et disposés comme l'indique la figure. Je désigne par C'_1 et C'_2 les arcs des

Fig. 4.



mêmes spirales déduits de C_1 et de C_2 par le changement de l'affixe t d'un de leurs points en $\frac{1}{t}$. Enfin, je limite C_1 et C_2 au point 1 et à leur premier point de rencontre ξ, C'_1 et C'_2 sont limités au point $\frac{1}{\xi}$. Je considère ensuite un domaine Δ intérieur au contour formé de C'_1 et C'_2; il résulte de ce qui précède que si x est dans Δ, $R(x, u)$ est borné, que u soit sur la demi-droite OA_1 d'argument $-\alpha_1$ ou sur la demi-droite OA_2 d'argument α_2. $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x_n$ est donc holomorphe dans Δ.

Je suppose maintenant, non plus que $|g(u)|$ soit bornée dans le domaine indiqué pour u, mais que $|u| L |g(u)|$ ait uniformément pour plus grande limite zéro lorsque $|u|$ tend vers zéro. C'est dire que, quel que soit ε positif, $|g(u)| e^{-\varepsilon \frac{1}{|u|}}$ est borné. La fonction $g(u) e^{-\frac{\lambda}{u}}$ est de module borné quel que soit le nombre positif λ, car

$$\left| g(u) . e^{-\frac{\lambda}{u}} \right| = |g(u)| e^{-\frac{\lambda}{r} \cos \alpha} \qquad \text{si } u = re^{i\alpha}$$

et cette expression est inférieure à $|g(u)| e^{-\frac{\lambda}{r} \cos \alpha'}$, α' désignant le plus grand des deux arcs α_1 et α_2. La fonction $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{x}{e^\lambda}\right)^n$ est holomorphe dans le domaine Δ. La fonction $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ est holomorphe dans le domaine Δ_λ qui se déduit de Δ en divisant l'affixe de chacun de ses points par e^λ. Comme e^λ est aussi voisin de 1 qu'on le veut, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ est holomorphe à l'intérieur de Δ, qui est lui-même aussi voisin qu'on le veut du domaine limité par les arcs C'_1 et C'_2.

Si $g(u)$ est holomorphe pour $-\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $r < r_0$ et sur la frontière de ce domaine sauf au point $u = 0$, si $r\mathrm{L}|g(u)|$ a uniformément dans ce domaine pour plus grande des limites zéro lorsque r tend vers zéro, la fonction $\mathrm{F}(x) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a, sur le cercle de convergence, que le point singulier 1 et elle est holomorphe entre les arcs C'_1 et C'_2.

Je suppose maintenant que l'on puisse prendre α_2 aussi voisin de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le voudra, α_1 restant fixe. On peut supposer que $\frac{1}{\xi}$ se déplace sur C'_1. La valeur de ω au point $\frac{1}{\xi}$ de C'_1 est

$$2\pi \frac{\operatorname{tang}\alpha_1}{\operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2}.$$

Si α_1 tend vers $\frac{\pi}{2}$, cette expression tend vers 2π. Alors $\mathrm{F}(x)$ est holomorphe dans le domaine compris entre l'arc de spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang}\alpha_2}$ pour ω variant entre 0 et 2π, et l'axe réel. Si α_2 peut lui aussi être pris aussi voisin de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le voudra, le domaine que nous venons d'obtenir peut contenir tout point du plan autre qu'un point d'affixe réel, supérieur à 1 et l'on a le théorème de M. Le Roy.

Si $g(u)$ est holomorphe dans le domaine défini par

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad r < r_0,$$

si dans ce domaine et sur sa frontière $r\mathrm{L}|g(u)|$ est inférieur à tout nombre donné ε dès que ε est assez petit, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a de point singulier que sur la partie positive de l'axe réel.

On peut donner un énoncé un peu plus général : il suffit que

$r\mathrm{L}\,|g(u)|$ devienne inférieur à ε pour : $|\arg u| < \alpha$; $r < r_0$; r_0 dépendant de ε et de α et ne restant pas borné inférieurement si α tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Je signalerai, pour terminer, un cas intermédiaire entre celui du n° **10** et celui du n° **11**. $g(u)$ sera supposée bornée et holomorphe dans le domaine $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < 0$, $\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$. Alors $\mathrm{F}(x)$ n'a de point singulier que sur la spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha_1}$ (pour $\omega > 0$). On peut d'ailleurs remplacer cette spirale par la spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha}$ si $\alpha < \alpha_1$ $(\alpha > 0)$, ce qui montre que les points de la spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha_1}$ ne sont pas singuliers si l'on effectue le prolongement analytique en abordant la spirale du côté de sa convexité. Mais, peut-être, le sont-ils cependant, si l'on aborde la spirale du côté de la concavité et si $g(u)$ ne répond plus aux conditions que nous lui avons imposées quand on remplace α_1 par un angle aigu plus grand.

12. Les coupures obtenues sont-elles essentielles? Il paraît difficile de donner à cette question une réponse générale. Je me contenterai d'affirmer d'abord que les contours C_1 et C_2 que j'ai choisis sont ceux qui, par la méthode employée, donnent pour $\mathrm{F}(x)$ le champ d'holomorphie le plus étendu. Je n'ai pas mis ce point en évidence dans le raisonnement précédent, mais il est facile de s'en rendre compte.

J'étudierai ensuite un exemple que j'emprunte à M. Fabry (¹) :

$$\mathrm{F}(x) = \sum e^{n[-1+\cos(\mathrm{L}\,n)^{\lambda}]} x^n \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Il résulte du calcul de M. Fabry que α_1 et α_2 peuvent être pris aussi voisins de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le veut. $\mathrm{F}(x)$ n'a donc de point singulier que sur l'axe réel.

Je considère de même

$$\varphi(x) = \sum e^{n[-1-\cos(\mathrm{L}\,n)^{\lambda}]} x^n;$$

un calcul analogue donne le même résultat. Il en résulte que la fonction

$$\Psi(x) = \varphi(e^2 x) = \sum e^{n[1-\cos(\mathrm{L}\,n)^{\lambda}]} x^n$$

(¹) *Journal de Liouville*, 5ᵉ série, t. IV, 1898, p. 348.

n'a de point singulier que sur la droite qui joint le point e^{-2} au point à l'infini sur l'axe réel positif. L'une au moins des deux fonctions $F(x)$ et $\Psi(x)$ a un point singulier autre que celui de son cercle de convergence : S'il en était autrement, $H[F, \Psi]$ n'aurait que le point singulier e^{-2}; or, cette fonction est $\frac{1}{1-x}$. On peut donc prévoir qu'il n'est pas possible d'aller, dans le cas général, plus loin que ne l'indiquent les résultats précédents. Il est certain d'autre part que, dans des cas particuliers, les coupures obtenues ne sont pas essentielles : prenons $g(u) = e^{-\frac{1}{u}}$. Si l'argument α de u est tel que $\cos\alpha$ soit positif, le module de $g(u)$ est borné. On est dans le cas de M. Le Roy et cependant $F(x)$ n'a que le point singulier e sur l'axe réel.

Je signale d'autres exemples qui offrent de l'intérêt, à d'autres points de vue.

Je prends $g(u) = e^{-ai\,\mathrm{L}u}$ (a réel). Alors $|g(u)| = e^{a\alpha}$ reste borné au voisinage de l'origine. Donc $\Sigma e^{ai\,\mathrm{L}n} x^n = \Sigma n^{ai} x^n$ n'a, dans tout le plan, d'autre point singulier que 1. Il en est de même des fonctions $\Sigma \sin(a\mathrm{L}n) x^n$ et $\Sigma \cos(a\mathrm{L}n) x^n$, qui se déduisent facilement des précédentes et qui sont bien connues.

Je prends ensuite $g(u) = e^{aiu^\sigma}$, a étant réel et σ réel et positif. Alors $|g(u)| = e^{-ar^\sigma \sin(\alpha\sigma)}$ est borné, de sorte que $\Sigma e^{ai\frac{1}{n^\sigma}} x^n$ n'a que le point singulier 1.

13. Je vais montrer, par l'étude de deux exemples, que les derniers théorèmes peuvent être utilisés, non seulement pour la recherche des singularités de certaines séries, mais aussi pour l'étude d'une fonction $g(u)$ au voisinage d'un point singulier.

Soit $g(u)$ une fonction singulière pour $u = 0$, mais holomorphe et bornée dans le secteur défini par $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1$, $r < r_0$ avec $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$. Alors, comme $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ ne peut avoir que le point singulier 1, d'après le n° **10**, la plus grande des limites de $\sqrt[n]{\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|}$ ne peut être que 1 ou 0; elle ne peut être un nombre compris entre 0 et 1.

Soit, en second lieu, une fonction $g(u)$, singulière pour $u=0$, mais holomorphe pour tout autre point du secteur défini par $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1$, α_1 étant quelconque. De plus, $|u|\,\mathrm{L}\,|g(u)|$ a uniformément pour plus grande limite zéro, lorsque $|u|$ tend vers zéro dans ce domaine. Je vais montrer que, dans ces conditions, les points de l'axe réel pour lesquels la partie réelle $\mathrm{R}[g(u)]$ de $g(u)$ change de signe ne sont pas distribués d'une manière quelconque au voisinage de l'origine. Par exemple, il est impossible que les racines de $\mathrm{R}[g(u)]$ soient les nombres $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots, \frac{a}{n}, \ldots$, qu'elles soient simples, et qu'il n'y en ait pas d'autres (a est un nombre positif quelconque).

S'il en était ainsi, $\mathrm{R}[g(au-u^3)]$ changerait de signe quand u passerait de la valeur $\frac{1}{n}$ à la valeur $\frac{1}{n+1}$, pourvu que n soit assez grand.

On a

$$|u|\,\mathrm{L}\,|g(au-u^3)| = |au-u^3|\,\mathrm{L}\,|g(au-u^3)|\,\frac{1}{|a-u^2|}.$$

Or, si $|u|$ est assez petit, $|au-u^3)|\,\mathrm{L}\,|g(au-u^3)|$ peut devenir inférieur à toute quantité donnée, cela tient à notre hypothèse et au fait que $au-u^3$ tend vers zéro avec u. Comme $\frac{1}{a-u^2}$ tend vers $\frac{1}{a}$, on voit que $|u|\,\mathrm{L}\,|g(au-u^3)|$ devient inférieur à toute quantité positive donnée si $|u|$ est assez petit. Il résulte d'un théorème de M. Fabry que la série $\Sigma g\left(\frac{a}{n}-\frac{1}{n^3}\right)x^n$ n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence. La série $\Sigma(-1)^n g\left(\frac{a}{n}-\frac{1}{n^3}\right)x^n$ n'y a que le point singulier -1. Or, ceci est impossible, puisque la partie réelle des coefficients est toujours positive.

Si $g\left(\frac{1}{u}\right)$ était entière et d'ordre inférieur à 1, ce résultat serait une conséquence des théorèmes de M. Hadamard sur les fonctions entières. On voit qu'il subsiste lorsque $\left|g\left(\frac{1}{u}\right)\right| < e^{\varepsilon|u|}$, si petit que soit ε, dès que $|u|$ est assez grand, et aussi lorsque la fonction n'est pas entière, mais vérifie des conditions plus générales.

DEUXIÈME PARTIE.

14. Les méthodes que nous employons dans ce travail ne permettent pas, en général, d'étudier toutes les déterminations des fonctions analytiques dont nous nous occupons. D'un autre côté, les nombreuses applications du théorème de la multiplication des singularités que nous aurons à faire seront facilitées si l'on considère les points intérieurs à des espaces lacunaires comme singuliers ([1]). Nous adopterons donc, du point singulier, la définition particulière que voici :

Un point A du plan sera régulier pour la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ si le prolongement analytique de la série peut être poursuivi, au delà de OA, le long du rayon OA issu de l'origine O. Si un point A ne peut être ainsi atteint, il y en a d'autres dans le même cas que lui : ceux qui sont plus éloignés que lui de l'origine. Dès lors, parmi les points du rayon OA, qui ne sont pas reconnus comme réguliers, il y en a un qui est plus près de l'origine que tous les autres. Celui-là, que nous désignerons par A, sera singulier. Soit maintenant B, sur le prolongement de OA. Il sera régulier si on peut l'atteindre par un chemin OB n'ayant que O et B en commun avec la demi-droite OB. Dans le cas contraire, il sera singulier.

Avec cette définition, le théorème de la multiplication des singularités ne souffre pas d'exception. Si $H[\varphi, k]$ est singulière en un point α, c'est que l'on a $\alpha = \beta\gamma$, β étant un point singulier de $\varphi(x)$ et γ un point singulier de $k(x)$.

Quand je dirai qu'une fonction n'a qu'un point singulier, il faudra l'entendre au sens précédent. De plus, elle pourra être irrégulière au point à l'infini dont nous ne nous occuperons pas. Le mot point singulier ayant le sens qui précède, le point singulier β de $\varphi(x)$ sera dit principal si, quel que soit le point singulier γ de $k(x)$, $\beta\gamma$ est toujours point singulier pour $H[\varphi k]$ si on ne peut l'obtenir qu'une seule fois.

([1]) *Voir* MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, note p. 36.

15. *Points singuliers principaux isolés et séparables.* — Je considère simultanément les deux fonctions

$$\varphi(x) = \sum a_n x^n, \qquad \varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n},$$

et je suppose qu'aucun a_n ne soit nul. Je désigne par R′ et $\frac{1}{R}$ la plus petite et la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$. Le rayon de convergence de $\varphi(x)$ est R et celui de $\varphi_{-1}(x)$ est R′. On a d'ailleurs $RR' \leqq 1$.

Si la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier β, pour que ce point soit principal, il faut et suffit que R′ soit différent de zéro et que $\varphi_{-1}(x)$ n'ait qu'un point singulier qui sera alors $\frac{1}{\beta}$ et qui sera principal.

Je suppose que β soit singulier principal pour $\varphi(x)$, qui n'a pas d'autre point singulier. Si R′ était nul, on pourrait extraire de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$, une suite illimitée

$$\sqrt[n_1]{|a_{n_1}|}, \quad \sqrt[n_2]{|a_{n_2}|}, \quad \ldots,$$

ayant zéro pour limite unique. La série

$$k(x) = x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots$$

aurait au moins un point singulier sur son cercle de rayon 1, et cependant $H[\varphi, k]$ serait une fonction entière, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que β est principal.

Il résulte de là que nous pouvons supposer qu'aucun des coefficients a_n n'est nul, sans diminuer la généralité des énoncés, quand β est le seul point singulier de $\varphi(x)$ et qu'il est principal. Cela étant, $\varphi_{-1}(x)$ existe. Soit γ un de ses points singuliers :

$$H[\varphi, \varphi_{-1}] = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

$\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une fois; il est donc nécessairement égal à 1, et $\varphi_{-1}(x)$ n'a pas d'autre point singulier que $\frac{1}{\beta}$.

Réciproquement, je suppose que $\varphi_{-1}(x)$ n'admette pas d'autre singularité que $\frac{1}{\beta}$. Soient $k(x)$ une fonction définie par une série entière en x, et δ un de ses points singuliers. On a

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{H}[\varphi_{-1}, \mathrm{H}[\varphi, k]] = k(x).$$

Le théorème de M. Hadamard montre que $\mathrm{H}[\varphi, k]$ possède un point singulier λ qui, associé à $\frac{1}{\beta}$, donne δ. Donc $\lambda = \beta\delta$ (¹).

Si la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier principal β, $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite. S'il en était autrement, R' serait inférieur à $\frac{1}{\mathrm{R}}$ et, sur le cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$, existerait au moins un point singulier γ dont le module serait inférieur à $\frac{1}{\beta}$, ce qui serait en contradiction avec l'énoncé précédent.

16. J'indique une autre propriété des fonctions que nous venons de considérer et, pour cela, je sépare le module et l'argument des coefficients en posant $a_n = \rho_n e^{i\omega_n}$. Je désigne d'une manière générale par $\overline{\mathrm{A}}$ l'imaginaire conjuguée de l'imaginaire A. On a

$$\overline{\varphi}(\overline{x}) = \Sigma \rho_n e^{-i\omega_n} \overline{x}^n; \qquad \overline{\varphi}(\overline{x}) = \Sigma \rho_n e^{-i\omega_n} x^n.$$

Je pose $\overline{\varphi}(\overline{x}) = \psi(x)$. Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont en relation simple : à tout prolongement analytique de l'une correspond un prolongement de l'autre, les chemins étant symétriques par rapport à l'axe réel. Les points singuliers de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ sont deux à deux imaginaires conjugués.

Voici une autre remarque que je vais utiliser : Si deux fonctions $\varphi(x)$ et $k(x)$ n'ont, l'une et l'autre, pour toute singularité, qu'un point singulier principal, il en est de même de $\mathrm{H}[\varphi, k]$, comme on le voit, par exemple, à l'aide de l'énoncé du n° **15**.

Considérons maintenant une fonction $\varphi(x)$ qui n'a qu'un point

(¹) Cette propriété a déjà été utilisée dans des cas particuliers (Montel, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 87. — Fabry, Mémoire cité, p. 350).

singulier, $\psi(x)$ possède la même propriété et, par suite,

$$H[\varphi, \psi] = \Sigma \rho_n^2 x^n$$

n'a qu'un point singulier. Cette dernière fonction n'est d'ailleurs certainement pas entière, même si le point singulier de $\varphi(x)$ n'est pas principal.

Si $\varphi(x)$ n'admet qu'un seul point singulier, pour qu'il soit principal il faut et suffit que les deux fonctions

$$\Sigma \rho_n^2 x^n \quad \text{et} \quad \Sigma e^{2i\omega_n} x^n$$

n'admettent chacune qu'un point singulier et que ce point soit principal.

Admettons que $\varphi(x)$ ne possède qu'un point singulier qui soit principal. Il en est de même de

$$\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{1}{\rho_n} e^{-i\omega_n} x^n \qquad \text{et de} \qquad \psi(x) = \sum \rho_n e^{-i\omega_n} x^n$$

et, par suite, aussi de

$$H[\varphi_{-1}, \psi] = \Sigma e^{-2i\omega_n} x^n$$

et enfin de

$$\Sigma e^{2i\omega_n} x^n.$$

Reste à montrer que le point singulier de $\Sigma \rho_n^2 x^n$ est principal. On y parvient en associant la série $\Sigma e^{-2i\omega_n} x^n$ à la série $\Sigma \rho^{2n} e^{2i\omega_n} x^n$ pour lesquelles la proposition est démontrée.

Réciproquement, admettons que $\varphi(x) = \Sigma \rho_n e^{i\omega_n} x^n$ n'ait qu'un point singulier et que les séries $\Sigma \rho_n^2 x^n$ et $\Sigma e^{2i\omega_n} x^n$ n'en aient chacune qu'un qui soit principal. Il en est de même, alors, de $\varphi_2(x) = \Sigma \rho_n^2 e^{2i\omega_n} x^n$ qui s'obtient en associant les deux précédentes. Il en résulte que $\rho_{-2}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n^2}$ n'a qu'un point singulier (n° **15**). En l'associant à $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ on obtient $\varphi_{-1}(x)$ qui n'a qu'un point singulier, ce qui démontre que le point singulier de $\varphi(x)$ est principal.

Comme exemple, on voit que, si les a_n sont réels, si $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier, pour que ce point soit principal il faut et suffit que celui de $\varphi_2(x)$ le soit.

Je ferai encore une remarque. Je suppose que $\varphi(x)$ n'ait qu'un point singulier qui soit principal. Il en est de même de $\varphi_2(x)$, mais $\varphi_2(x)$ possède alors une propriété qui n'est pas démontrée pour $\varphi(x)$: la série obtenue en remplaçant chaque coefficient par son module n'a qu'un point singulier qui est principal et il en est de même de la série $\Sigma e^{2i\omega_n} x^n$ obtenue en divisant chaque coefficient par son module.

17. *Cas particuliers, exemples de points singuliers principaux.* — Les pôles sont des points singuliers principaux [1].

Les séries $\varphi(x) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ où $g(u)$ est holomorphe pour $u = 0$ n'ont que le point singulier 1. Ce point est principal, car la série $\varphi_{-1}(x)$ est de même forme pourvu que $g(0)$ ne soit pas nul. Si $g(0)$ est nul, on peut écrire

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{n}\right)} = n^q \frac{1}{c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots} = n^q \psi\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{avec } c_0 \neq 0.$$

Comme les séries $\Sigma n^q x^n$ et $\Sigma \psi\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'ont que le point singulier 1, il en est de même de $\varphi_{-1}(x)$. Donc, même si $g(0) = 0$, le point singulier de $\varphi(x)$ est principal.

On peut aussi former des points singuliers principaux à l'aide des théorèmes du n° **8**. Si $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ n'a que le point singulier 1, d'ordre inférieur à 1, la fonction $\Sigma g(a_n) x^n$, où $g(u)$ est holomorphe et non nul pour $u = 0$, n'a que le point singulier 1 qui est principal. Par exemple, $\frac{a}{1-x} + \varphi(x)$ admet le point 1 comme point singulier principal tant que a n'est pas nul.

Il apparaît donc que le fait, pour le point singulier supposé unique de la fonction $\varphi(x)$, d'être ou de n'être pas principal, est en relation avec la façon dont $\varphi(x)$ croît quand x se rapproche du point singulier et la régularité de cette croissance joue peut-être le rôle le plus important.

Il existe, cependant, des fonctions $\varphi(x)$ admettant un seul point

---

(1) Borel, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXVI).

singulier qui est principal et qui n'est pas d'ordre fini. On le démontrera en remarquant que les deux fonctions $\mathrm{ch}(\mathrm{L}a\sqrt{u})$ et $\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{L}a\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$ sont entières et d'ordre inférieur à 1. D'après un théorème de M. Leau, $\Sigma x^n \mathrm{ch}(\sqrt{n}\,\mathrm{L}a)$ et $\Sigma x^n \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{L}a\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ n'ont, pour toute singularité, que le point essentiel 1.

Il est facile d'en déduire que $\Sigma a^{\sqrt{n}} x^n$ n'a que le point singulier 1 qui est principal, puisque je puis changer a en $\frac{1}{a}$. Ce point n'est pas d'ordre fini pour $\Sigma a^{\sqrt{n}} x^n$ et $\Sigma a^{-\sqrt{n}} x^n$ simultanément, car il serait d'ordre fini pour $\Sigma x^n \mathrm{ch}(\sqrt{n}\,\mathrm{L}a)$ et l'on sait qu'un point essentiel n'est pas d'ordre fini.

Je signalerai encore les fonctions $\Sigma n^q x^n$, qui n'ont que le point singulier 1 quel que soit q positif ou négatif [1]. Ce point est principal pour toutes ces fonctions.

Enfin, si la fonction $\Sigma e^{i\omega_n} x^n$ (où ω_n est réel) n'a qu'un point singulier, ce point est principal, car $\Sigma e^{-i\omega_n} x^n$ n'en a qu'un aussi (n° **16**). C'est le cas de $\omega_n = \frac{a}{n^\sigma} (\sigma > 0)$ et aussi de $\omega_n = ai\mathrm{L}n$ (n° **12**). Ce dernier exemple donne lieu à une remarque importante : *Si deux fonctions n'ont, l'une et l'autre, pour toute singularité, que le point principal β, leur somme n'admet nécessairement pas β comme point principal.* Prenons

$$\varphi(x) = \Sigma e^{\frac{2\pi}{\mathrm{L}2} i \mathrm{L}n} x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma e^{-\frac{2\pi}{\mathrm{L}2} i \mathrm{L}n} x^n.$$

Alors

$$\varphi(x) - \psi(x) = 2i\Sigma \sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{L}2}\mathrm{L}n\right) x^n$$

et cette série a une infinité de termes nuls, de sorte que son point singulier ne peut être principal.

On peut trouver d'autres fonctions ayant un point singulier unique et principal en combinant celles qui viennent d'être obtenues par l'opération de M. Hadamard.

---

(1) LE ROY, Mémoire cité, p. 339-340. On peut aussi utiliser les résultats du n° **10**.

18. Je vais étudier le cas d'une fonction de la forme

$$\psi(x) = \mathrm{A}(1-x)^{-m} + \mathrm{A}'(1-x)^{-m'} + \mathrm{A}''(1-x)^{-m''} + \ldots,$$

où $m > m' > m'' > \ldots$, où le nombre des termes est fini, les A, A', A'', ... sont des constantes, et les différences $m - m'$, $m - m''$, ..., ne sont pas entières.

Une différentiation remplace $\psi(x)$ par une expression de même forme où les exposants $-m$, $-m'$, ... sont tous diminués d'une unité.

D'autre part, le point singulier est simultanément principal ou non principal pour $\psi(x)$ et pour ses dérivées, comme le montre la règle du nº **15**.

On peut donc, sans rien changer au résultat, supposer m positif. Je pose alors

$$h(x) = (1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} x^n,$$

$$h_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} x^n;$$

$h_{-1}(x)$ n'est autre chose que la série hypergéométrique $\mathrm{F}(1, 1, m, x)$ qui admet le seul point singulier 1, évidemment principal. Les deux fonctions $\psi(x)$ et $\mathrm{H}[\psi, h_{-1}]$ admettent le point 1 simultanément comme point singulier principal ou non principal.

Or, la fonction $\mathrm{H}[\psi, h_{-1}]$ peut s'écrire

$$\mathrm{H}[\psi, h_{-1}] = \frac{\mathrm{A}}{1-x} + \varphi(x),$$

si l'on a posé

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & \mathrm{A}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\,n!}{n!\,m(m+1)\ldots(m+n-1)} x^n \\ & + \mathrm{A}'' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m''(m''+1)\ldots(m''+n-1)\,n!}{n!\,m(m+1)\ldots(m+n-1)} x^n \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \mathrm{A}'\,\mathrm{F}(m', 1, m, x) + \mathrm{A}''\,\mathrm{F}(m'', 1, m, x) + \ldots.$$

Le point singulier 1 de $\mathrm{F}(m', 1, m, x)$ est d'ordre égal à $1 + m' - m$, donc inférieur à 1. On obtient le même résultat pour les autres termes de $\varphi(x)$. D'après le théorème du n° 8, appliqué à la fonction $\varphi(x)$ et au cas où $g(u) = \frac{1}{A+u}$, le point singulier 1 est principal pour $H[\psi, h_{-1}]$ et, par suite, aussi pour la fonction proposée $\psi(x)$.

19. Nous avons rencontré plusieurs exemples de fonctions

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$$

n'ayant qu'un point singulier qui n'est pas principal. Mais pour toutes ces fonctions, une infinité de coefficients a_n s'évanouissent. On peut se demander s'il est possible de construire une fonction $\varphi(x)$ n'ayant qu'un point singulier non principal et telle que la plus petite limite des $\sqrt[n]{|a_n|}$ ne soit pas nulle. Pour y parvenir, je vais montrer qu'il existe des fonctions $\varphi(x)$ n'ayant qu'un point singulier et telles que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ soit différente de zéro et différente aussi de la plus grande des limites; de telles fonctions n'ont pas été signalées, à ma connaissance. Je m'adresserai à des fonctions de la forme $\Sigma \sin(a\,\mathrm{L}n - \alpha)x^n$ qui ont déjà servi à montrer qu'une fonction peut n'avoir qu'un seul point singulier sans que le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ait une limite [1].

Je pars de la fonction $\varphi(x) = \Sigma \sin\left[\frac{\pi}{\mathrm{L}.2}\mathrm{L}\left(\frac{n}{\gamma}\right)\right]x^n$ qui est de la forme précédente. Je remarque que je ne change pas le module du coefficient général en remplaçant n par $\frac{n}{2^k}$ quel que soit l'entier k. J'ai donc à étudier

$$\sqrt[n]{|\sin\omega_n|} \qquad \text{avec} \qquad \omega_n = \frac{\pi}{\mathrm{L}.2}\mathrm{L}\left(\frac{n}{\gamma.2^k}\right).$$

J'écris n dans le système de base 2 :

$$n = 2^p + \lambda_n = 2^p + \varepsilon_1.2^{p-1} + \varepsilon_2.2^{p-2} + \ldots + \varepsilon_p,$$

les ε_i étant égaux à 0 ou à 1, et je prends $k = p$.

Je suppose d'abord p fixe et j'étudie ω_n quand n varie de 2^p à $2^{p+1} - 1$. Alors λ_n varie de 0 à $2^p - 1$. Je prendrai γ compris entre $\sqrt[4]{2}$

(1) HADAMARD, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 163.

et $\sqrt[3]{2}$. Dans ces conditions, p restant fixe, $\frac{n}{\gamma 2^p}$ est compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$. L'arc ω_n est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Je cherche la plus petite valeur de n (comprise entre 2^p et $2^{p+1}-1$) pour laquelle $|\sin\omega_n|$ prend la plus petite valeur. J'écrirai :

$$\frac{n}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}[\lambda_n - (\gamma - 1)2^p];$$

$\gamma - 1$ est ici positif, je le développe en série de puissances de $\frac{1}{2}$,

$$\gamma - 1 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{2^p} + \ldots,$$

les α étant égaux à 0 ou à 1,

$$\frac{n}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\Big[\varepsilon_1 . 2^{p-1} + \varepsilon_2 . 2^{p-2} + \ldots$$
$$+ \varepsilon_p - \alpha_1 . 2^{p-1} - \alpha_2 . 2^{p-2} - \ldots - \alpha_p - \frac{\alpha_{p+1}}{2} - \frac{\alpha_{p+2}}{2^2} + \ldots\Big],$$

la quantité entre crochets est la différence d'un entier positif ou négatif et d'une fraction positive. Elle n'est donc inférieure à 1 que si l'entier

$$E_n = \varepsilon_1 . 2^{p-1} + \varepsilon_2 . 2^{p-2} + \ldots + \varepsilon_p - \alpha_1 . 2^{p-1} - \ldots - \alpha_p = \lambda_n - \alpha_1 . 2^{p-1} - \ldots - a_p$$

est égal à 1 ou à 0. Or, comme λ_n prend toutes les valeurs entières de 0 à $2^p - 1$, comme $\alpha_1 2^{p-1} + \alpha_2 2^{p-2} + \ldots + \alpha_p$ est un nombre compris entre ces limites, le nombre entier E_n prendra une fois la valeur 0 et une fois la valeur 1.

Donc, pour deux valeurs N et N′ de n convenablement choisies, on a

$$\frac{N}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\lambda; \qquad \frac{N'}{\gamma . 2^p} = 1 - \frac{1}{\gamma . 2^p}\mu$$

avec

$$0 < \lambda < 1, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Pour toute autre valeur de n telle que $2^p \leqq n < 2^{p+1}$, si $\frac{n}{\gamma . 2^p} > 1$, on a

$$L\frac{n}{\gamma . 2^p} > L\frac{N}{\gamma . 2^p};$$

si $\frac{n}{\gamma . 2^p} < 1$, on a

$$\left| L \frac{n}{\gamma . 2^p} \right| > \left| L \frac{N'}{\gamma . 2^p} \right| .$$

Les deux valeurs de ω_n correspondant à N et à N' sont évidemment inférieures à $\frac{\pi}{4}$ en module, dès que p est assez grand. Comme ω_n varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{4}$ la plus petite valeur de $|\sin \omega_n|$ est donc : ou bien

$$\sin\left[\frac{\pi}{L . 2} L\left(1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\lambda\right)\right],$$

inférieure à $\sin \omega_n$, si $\frac{n}{\gamma 2^p} > 1$; ou bien

$$\left|\sin\left[\frac{\pi}{L\, 2} L\left(1 - \frac{1}{\gamma . 2^p}\mu\right)\right]\right|,$$

inférieure à $|\sin \omega_n|$, si $\frac{n}{\gamma 2^p} < 1$.

Cela posé, je choisirai γ de façon que tous les α_r soient nuls, sauf

$$\alpha_{r_1}, \quad \alpha_{r_2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{r_q}, \quad \ldots$$

qui sont égaux à 1. Les premiers $r_1, r_2, \ldots, r_q, \ldots$ sont supposés tels que γ soit compris entre $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt{2}$ comme on l'a admis; mais, à partir d'un certain rang, on aura $r_{q+1} = 2^{r_q}$. Je prends maintenant

$$r_q = p < r_{q+1}$$

et, par suite,

$$r_{q+1} = 2^p < r_{q+2}$$

et j'ai alors

$$\frac{N}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\lambda = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\left[1 - \frac{1}{2^{r_{q+1}-p}} - \frac{1}{2^{r_{q+2}-p}} - \ldots\right],$$

$$\frac{N'}{\gamma . 2^p} = 1 - \frac{1}{\gamma . 2^p}\mu = 1 - \frac{1}{\gamma . 2^p}\left[\quad \frac{1}{2^{r_{q+1}-p}} + \frac{1}{2^{r_{q+2}-p}} + \ldots\right].$$

Je vais d'abord démontrer que $\sqrt[n]{|\sin \omega_n|}$ a sa plus petite limite au moins égale à $\frac{1}{2}$. Je suppose d'abord n tel que $\frac{n}{\gamma 2^p} > 1$; $\sin \omega_n$ est positif et supérieur à $\sin\left(\frac{\pi}{L\, 2} L \frac{N}{\gamma 2^p}\right)$. Or

$$\frac{N}{\gamma . 2^p} > 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{r_{q+2}-r_{q+1}+1}} - \ldots\right];$$

j'ai en effet remplacé dans le crochet p par $r_{q+1} - 1$, ce qui ne peut que diminuer l'expression. La quantité

$$\frac{1}{2^{r_{q+2}-r_{q+1}+1}} + \frac{1}{2^{r_{q+3}-r_{q+1}+1}} + \dots$$

est inférieure à son premier terme multiplié par 2. Elle tend vers zéro si q augmente indéfiniment. Dès que q est assez grand, on a donc

$$\frac{N}{\gamma . 2^p} > 1 + \frac{k}{\gamma . 2^p},$$

k étant une constante positive.

Si x vérifie $0 < x < \theta < 1$, θ étant un nombre fixe, on a

$$\sin\left[\frac{\pi}{L.2} L(1+x)\right] > Ax,$$

A étant une constante positive qui ne dépend que de θ.

Donc, dès que n est assez grand, si $\frac{n}{\gamma 2^p} > 1$, $\sin\omega_n$ est supérieur à $\frac{Ak}{\gamma 2^p}$, $\sqrt[n]{\sin\omega_n}$ est supérieur à $\sqrt[n]{\frac{Ak}{\gamma n}}$ dont la limite est 1 si n croît indéfiniment.

Je prends maintenant la deuxième hypothèse $\frac{n}{\gamma 2^p} < 1$. La formule qui donne N′ montre que

$$\frac{1}{\gamma . 2^p}\mu = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{2^{r_{q+1}}} + \frac{1}{2^{r_{q+2}}} + \dots\right] > \frac{1}{\gamma . 2^{r_{q+1}}}.$$

Donc

$$|\sin\omega_n| > \left|\sin\left[\frac{\pi}{L.2} L\left(1 - \frac{1}{\gamma . 2^{r_{q+1}}}\right)\right]\right|.$$

Or, si $0 < x < \theta < 1$, on a

$$\left|\sin\left[\frac{\pi}{L.2} L(1-x)\right]\right| > Bx,$$

B étant une constante positive qui ne dépend que du nombre θ choisi arbitrairement. Donc, dès que n est assez grand,

$$|\sin\omega_n| > \frac{B}{\gamma}\frac{1}{2^{r_{q+1}}} \geqq \frac{B}{\gamma}\frac{1}{2^n}$$

(car $n \geqq 2^p \geqq r_{q+1}$).

On voit que $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ est dans le cas actuel supérieur à une quantité qui tend vers $\frac{1}{2}$. Il est donc établi que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ est égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$, dans tous les cas. Je vais maintenant montrer qu'elle est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Je prends $p = r_q$. Il existe pour cette valeur de p un entier N que je désignerai maintenant par N_q tel que l'entier correspondant E_{N_q} soit nul. On a d'ailleurs

$$2^{r_q} \leqq N_q < 2.2^{r_q}.$$

La valeur correspondante de ω_n est

$$\frac{\pi}{L.2} L\left(1 - \frac{N_q}{\gamma.2^{r_q}}\right).$$

J'ai

$$\frac{N_q}{\gamma.2^{r_q}} = 1 - \frac{1}{\gamma.2^{r_q}}\mu = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2^{r_{q+1}}} + \frac{1}{2^{r_{q+2}}} + \dots\right).$$

La quantité entre parenthèses est inférieure au double de son premier terme

$$\frac{1}{\gamma.2^{r_q}}\mu < \frac{2}{\gamma.2^{r_{q+1}}}.$$

Si $0 < x < \theta < 1$ $\left|\sin\frac{\pi}{L2}L(1-x)\right| < Cx$, C étant une constante. Donc, dès que q est assez grand,

$$|\sin\omega_{N_q}| < \frac{2C}{\gamma}\,\frac{1}{2^{r_{q+1}}},$$

$$\sqrt[N_q]{|\sin\omega_{N_q}|} < \sqrt[2.2^{r_q}]{\frac{2C}{\gamma}\,\frac{1}{2^{r_{q+1}}}}.$$

Or $r_{q+1} = 2^{r_q}$ et l'on voit que la quantité à laquelle nous parvenons a une limite unique égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a donc une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ a une plus petite limite au plus égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et cela démontre le résultat annoncé.

Le point singulier unique de $\Sigma\sin\omega_n.x^n$ n'est pas principal puisque la plus grande et la plus petite limite de $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ sont distinctes, et la plus petite des limites n'est pas nulle.

20. *Points principaux absolus.* — Je rappelle la définition donnée au n° **1**. On dit que $\varphi(x)$ admet le point principal absolu β, si, quel que soit le point singulier γ de la fonction $k(x)$, $H[\varphi, k]$ admet le point singulier $\beta\gamma$, même si $\beta\gamma$ peut être obtenu plusieurs fois. Remarquons que cette propriété dépend non seulement de la nature de la singularité β au voisinage du point β, mais de la fonction $\varphi(x)$ prise dans son ensemble. Il suffit, pour le voir, de supposer $\varphi(x)$ régulier pour $x = -\beta$. Alors $\varphi(x) + \varphi(-x)$ se comporte comme $\varphi(x)$ au voisinage de $x = \beta$ et cependant $H\left[\frac{x}{1-x^2}, \varphi(x) + \varphi(-x)\right] = 0$, de sorte que si β est principal absolu pour $\varphi(x)$, il ne l'est plus pour $\varphi(x) + \varphi(-x)$.

Si $\varphi(x)$ ne possède qu'un point singulier et si ce point est principal, il est aussi principal absolu. D'une manière plus générale, *pour que le point singulier β de $\varphi(x)$ soit principal absolu, il faut et suffit que $\varphi_{-1}(x)$ ne possède que le point singulier $\frac{1}{\beta}$* (¹).

On verra d'abord que $\varphi_{-1}(x)$ existe comme au n° **15**. Si $\varphi_{-1}(x)$ possédait des singularités autres que $\frac{1}{\beta}$, et si β était principal absolu, $H[\varphi, \varphi_{-1}]$ aurait des points singuliers autres que 1, ce qui est impossible.

Réciproquement, si $\varphi(x)$ n'a que le point singulier $\frac{1}{\beta}$, si $k(x)$ admet le point singulier γ, l'égalité

$$H[\varphi_{-1}, H[\varphi, k]] = k(x) \tag{2}$$

montre que $H[\varphi, k]$ admet toujours le point singulier $\beta\gamma$.

Il résulte de notre énoncé qu'une fonction ne peut posséder plus d'un point principal absolu.

Existe-t-il des fonctions admettant plusieurs points singuliers dont l'un est principal absolu? L'exemple du n° **19** montre que l'on peut répondre affirmativement. La fonction $\Sigma \sin\omega_n x^n$ que nous avons construite n'a que le point singulier 1, et la fonction $\sum \frac{x^n}{\sin\omega_n}$ dont le rayon de convergence n'est pas nul en a, à coup sûr, plusieurs, à savoir, des points sur son cercle de convergence, puis le point 1, et

(¹) Je suis redevable de cet énoncé à M. Montel.

d'autres peut-être encore. Le point 1 est pour elle singulier principal absolu.

Si la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ admet le point principal absolu β, on a une borne inférieure de la plus petite des limites R' de $\sqrt[n]{|a_n|}$, cette quantité est en effet égale à $\frac{1}{\beta}$.

Je signale plusieurs problèmes qui se posent à propos des points singuliers principaux absolus. Si la fonction $\varphi(x)$ admet le point singulier principal absolu β et d'autres points singuliers, peut-il se faire que β soit sur le cercle de convergence? Peut-il se faire que le cercle de convergence soit coupure essentielle pour la fonction $\varphi(x)$? Peut-il se faire que le cercle de convergence ne soit pas coupure? Il ne paraît pas facile de répondre à ces questions. Par contre, on peut donner une propriété intéressante de la fonction $\varphi(x)$.

21. *Points singuliers principaux non isolés et non séparables.* — Si la fonction $\varphi(x)$ admet le point singulier principal absolu β et d'autres points singuliers, le point β n'est pas séparable. On peut même montrer que les points singuliers de $\varphi(x)$ ne peuvent être *séparés en deux groupes*, je veux dire que l'on ne peut avoir

$$\varphi(x) = \psi(x) + f(x),$$

$\psi(x)$ et $f(x)$ n'étant pas entières et n'ayant pas de point singulier commun. Je suppose qu'il en soit autrement, je suppose que c'est $\psi(x)$ qui admet le point singulier β. Par combinaison avec $\varphi_{-1}(x)$, on a

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{H}[\varphi_{-1}, \psi] = \mathrm{H}[\varphi_{-1}, f].$$

Le premier membre ne peut avoir comme singularités que les points singuliers de $\psi(x)$ multipliés par $\frac{1}{\beta}$, le deuxième que les points singuliers de $f(x)$ multipliés par $\frac{1}{\beta}$. Comme ces points-là sont différents, il faut que les deux membres soient égaux à une fonction entière $\mathrm{G}(x)$.

Alors

$$f(x) = \mathrm{H}[\mathrm{G}, \varphi] = \text{fonction entière},$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Ce qui précède paraît montrer qu'il existe des relations entre le problème de la recherche des points principaux et le problème qui consisterait à chercher les fonctions dont les singularités ne peuvent être séparées en deux groupes. On peut même aller un peu plus loin et faire la remarque suivante. Soit une fonction $\varphi(x)$ qui possède un point singulier principal absolu β, soit une autre fonction $k(x)$ dont les points singuliers ne peuvent être séparés en deux groupes, la fonction $\mathrm{H}[\varphi, k]$ possède la même propriété. S'il en était autrement, on aurait

$$\mathrm{H}[\varphi, k] = \psi(x) + f(x),$$

$\psi(x)$ et $f(x)$ n'ayant pas de point singulier commun. On en déduirait

$$k(x) = \mathrm{H}[\varphi_{-1}, \psi] + \mathrm{H}[\varphi_{-1}, f],$$

et comme $\varphi_{-1}(x)$ n'a qu'un point singulier, les deux termes du deuxième membre n'ont pas de point singulier commun, ce qui contredit notre supposition relative à $k(x)$.

22. *Remarque au sujet des fonctions qui ont tous leurs points singuliers sur l'axe réel, du côté positif.* — On peut essayer d'étudier certains ensembles de points singuliers, comme nous l'avons fait dans le cas d'un point singulier unique.

Supposons que les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_{-1}(x)$ soient l'une et l'autre régulières partout ailleurs que sur l'axe réel positif. Dans ces conditions, si $k(x)$ admet le point singulier $\rho e^{i\omega}$, la fonction $\mathrm{H}[\varphi, k]$ admet au moins un point singulier sur la demi-droite dont les points ont pour argument ω. S'il en était autrement, l'équation

$$\mathrm{H}[\varphi_{-1}, \mathrm{H}[\varphi, k]] = k(x) \tag{2}$$

montre que $k(x)$ serait régulière sur la demi-droite d'argument ω.

On verra aussi facilement que, si $\varphi(x)$ est régulière tant que x n'est pas réel et positif, et si $\mathrm{H}[\varphi, k]$ admet toujours au moins un point singulier de même argument que le point singulier quelconque de $k(x)$; alors, $\varphi_{-1}(x)$ a tous ses points singuliers sur l'axe réel.

Ceci se produit pour la fonction

$$\varphi(x) = \sum x^n e^{n[-1+\cos(\mathrm{L}n)^{2}]} \qquad (\text{n}^{\circ}\ \mathbf{12}).$$

On remarquera que, si l'on forme $H[\varphi, \varphi_{-1}]$, la singularité $1 \times e^{-2}$ qui provient des deux points singuliers situés sur les cercles de convergence disparaît. Ces points singuliers de l'axe réel ne sont pas séparément principaux, mais leur ensemble possède des propriétés analogues à celles d'un point principal.

TROISIÈME PARTIE.

23. *Étude d'un cas particulier du problème* B. — Les résultats obtenus dans la deuxième Partie permettent de prévoir que, pour aborder dans certains cas le problème que j'ai appelé au n° **1** le problème B, il importera de savoir si les points singuliers de la fonction $\varphi(x)$ sont ou ne sont pas principaux. On verra aussi que le problème est particulièrement simple si $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier sur le cercle de convergence. Nous commencerons par supposer $g(u) = \frac{1}{u}$.

Nous supposerons donc d'abord que $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ n'a, sur son cercle de convergence de rayon R, qu'un point singulier β, que ce point est principal. Je dis que, dans ces conditions, $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ n'a qu'un point singulier sur son cercle de convergence et que $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite.

On démontrera, comme au n° **15**, que la plus petite des limites R' de $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas nulle, ce qui permet de supposer sans diminuer la généralité des résultats que $\varphi_{-1}(x)$ existe et qu'aucun des a_n n'est nul. Soit γ un point singulier du cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$; $\beta\gamma$ est singulier pour $H[\varphi, \varphi_{-1}]$, car il ne peut être obtenu plusieurs fois. Il faut donc que $\beta\gamma = 1$. D'ailleurs, si R' est la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$, on a

$$RR' = |\beta\gamma| = 1, \qquad R' = \frac{1}{R}.$$

24. Je suppose encore que $\varphi(x)$ n'a que le point singulier β sur le cercle de convergence, que β est principal et qu'il est isolé : il n'y a pas d'autre point singulier dans un cercle de rayon $R + a$ $(a > 0)$.

Soient β_1, β_2, ... les autres points singuliers de $\varphi(x)$ qui peuvent d'ailleurs ne pas former un ensemble dénombrable. Soit γ un point singulier quelconque de $\varphi_{-1}(x)$, autre que $\frac{1}{\beta}$ dont on a déjà reconnu l'existence. Nous nous servons toujours de la relation

$$H[\varphi, \varphi_{-1}] = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

$\beta\gamma$ doit être obtenu plusieurs fois. Il existe donc un point singulier β_1 de $\varphi(x)$ et un point singulier γ_1 de $\varphi_{-1}(x)$ tels que

$$\beta\gamma = \beta_1\gamma_1; \qquad \beta_1 \neq \beta; \qquad \gamma_1 \neq \gamma.$$

Mais

$$|\beta_1| > |\beta| = R.$$

Donc

$$|\gamma_1| < |\gamma|.$$

Si γ_1 n'est pas $\frac{1}{\beta}$, on démontrera de même qu'il existe un autre point singulier γ_2 de $\varphi_{-1}(x)$ tel que

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{\beta}{\beta_2} = \frac{\gamma\beta^2}{\beta_1\beta_2}.$$

Tant qu'on n'obtient pas $\frac{1}{\beta}$ de cette façon, on pourra continuer et mettre en évidence l'existence de points singuliers

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_p, \quad \ldots, \qquad \gamma_p = \gamma \frac{\beta^p}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}.$$

Cette suite est-elle illimitée? D'après notre hypothèse, les rapports $\frac{\beta}{\beta_1}$, $\frac{\beta}{\beta_2}$, ... sont inférieurs à $\frac{R}{R+a}$. On a

$$|\gamma_1| < |\gamma| \left(\frac{R}{R+a}\right)^p,$$

et comme $|\gamma_p|$ ne peut devenir inférieur à $\frac{1}{R}$, la suite des γ_p est limitée. L'un d'eux finit par être égal à $\frac{1}{\beta}$, de sorte que tout point singulier γ

de $\varphi_{-1}(x)$ peut s'écrire

$$\gamma = \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}{\beta^{p+1}}, \tag{3}$$

les $\beta_1, \ldots, \beta_p$ étant des points singuliers de $\varphi(x)$ distincts ou non distincts.

Les valeurs de γ données par la formule (3) correspondent-elles toujours à des points singuliers de $\varphi_{-1}(x)$? Je traiterai d'abord le cas où $\varphi(x)$ ne possède que deux points singuliers tous deux principaux β et β_1. Dans la recherche des points singuliers de $H[\varphi, \varphi_{-1}]$, associons β_1 et $\frac{1}{\beta}$. Comme $\frac{\beta_1}{\beta}$ diffère de 1, il doit disparaître. Il existe donc un point singulier β' de $\varphi(x)$ et un point singulier γ_1 de $\varphi_{-1}(x)$ tels que

$$\frac{\beta_1}{\beta} = \gamma_1\beta', \qquad \beta' \neq \beta_1.$$

Donc

$$\beta' = \beta; \qquad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^2}.$$

En associant β_1 et γ_1, on obtient un deuxième point $\gamma_2 = \frac{\beta_1^2}{\beta^3}$ et l'on peut ainsi prouver que $\varphi_{-1}(x)$ admet les points singuliers

$$\frac{1}{\beta}, \quad \frac{\beta_1}{\beta^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_1^p}{\beta^{p+1}}, \quad \ldots, \tag{4}$$

qui sont tous les points donnés par la formule (3).

Mais, si $\varphi(x)$ admet plus de deux points singuliers, des réductions sont possibles. Pour nous en rendre compte, échangeons le rôle des fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_{-1}(x)$ dont il vient d'être question et admettons que le point $\frac{1}{\beta}$ de $\varphi_{-1}(x)$ soit principal, ce qui sera démontré, dans des cas particuliers, un peu plus loin (n° **25**). On voit, dès lors, qu'une fonction qui a une infinité de points singuliers peut donner naissance à une fonction qui n'en a que deux.

Ce cas se présente d'ailleurs comme exceptionnel par suite de l'existence de relations entre les points singuliers de la suite (4) et il est facile de donner des cas où les valeurs de γ fournies par (3) correspondent à des points singuliers. On peut montrer, par exemple, que, si β_1, l'un des points $\beta_1, \beta_2, \ldots$, est principal et non supérieur à l'un quelconque des autres, le point $\frac{\beta_1}{\beta^2}$ est bien singulier pour $\varphi_{-1}(x)$.

25. Lorsque, aux hypothèses précédentes, on ajoute la condition que β est séparable, on peut obtenir quelques précisions de plus sur la nature de la singularité de $\varphi_{-1}(x)$ au point $\frac{1}{\beta}$. Je pose

$$\varphi(x) = f(x) + \psi(x),$$

$f(x)$ n'ayant que le point singulier β dans tout le plan et $\psi(x)$ étant régulière en β, de sorte que le rayon de convergence de $\psi(x)$ est supérieur à $R = |\beta|$. J'ai

$$\frac{1}{1-x} = H[f, \varphi_{-1}] + H[\psi, \varphi_{-1}],$$

et, en combinant avec $f_{-1}(x)$ qui n'a que le point singulier $\frac{1}{\beta}$, on a

$$f_{-1}(x) = \varphi_{-1}(x) + H[f_{-1}, H[\varphi_{-1}, \psi]].$$

Le rayon de convergence du deuxième terme du second membre est supérieur à $\frac{1}{R}$. On voit donc que $\varphi_{-1}(x) - f_{-1}(x)$ est régulière pour $\frac{1}{\beta}$, ce qui revient à dire que $\varphi_{-1}(x)$ admet le point singulier $\frac{1}{\beta}$ comme point singulier séparable et par suite aussi, principal, puisque la partie irrégulière est $f_{-1}(x)$.

On voit immédiatement que si β est pôle simple, $\frac{1}{\beta}$ est pôle simple pour $\varphi_{-1}(x)$. Si β est pôle d'ordre p de $\varphi(x)$, on voit que $\frac{1}{\beta}$ ne saurait être un pôle pour $\varphi_{-1}(x)$. Si ce point était un pôle d'ordre q, $H[f, f_{-1}]$ admettrait le point 1 comme pôle d'ordre (1) $p+q-1$ et l'on ne peut avoir $p+q-1=1$ si $p>1$. Si par exemple

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

on a

$$\varphi_{-1}(x) = x\,L(1-x).$$

---

(1) Borel, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bul. Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 338).

26. *Étude d'un problème plus général.* — Des considérations analogues aux précédentes permettent de généraliser les résultats du n° **8**. *Je suppose que la fonction* $\varphi(x) = \Sigma' b_n x^n$ *n'admette sur son cercle de convergence de rayon* 1 *que le point singulier* 1, *d'ordre inférieur à* 1, *séparable et isolé*. C'est dire que l'on a

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \psi(x) \qquad \left(\text{et je pose } \varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right),$$

$\varphi_1(x)$ n'ayant que le point singulier 1 tel que $(1-x)^q \varphi_1(x)$ ait un module borné pour x voisin de 1, q étant inférieur à 1. Le rayon de convergence de $\psi(x)$ est supposé supérieur à 1. Je le désignerai par r. Je cherche à traiter le problème B pour la fonction $\varphi(x)$ et je commence par l'étude de la fonction

$$Q(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{u - b_n},$$

en supposant u différent de zéro, des b_n et aussi des a_n. Les résultats du n° **26** nous renseignent sur les points singuliers de $Q(x, u)$ considérée comme fonction de x, puisque $\Sigma(u - b_n)x^n$ n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence, que la partie irrégulière pour $x = 1$ est $\Sigma(u - a_n)x^n$ et que, d'après les résultats du n° **8**, le point 1 est principal pour cette fonction tant que u n'est ni nul, ni égal à l'un des a_n. Il importe d'aller plus loin et de chercher une borne de $Q(x, u)$ comme on l'a fait à plusieurs reprises. Je pose

$$\Phi(x, u) = \sum \frac{x^n}{u - a_n},$$

et je remarque que cette fonction est bien celle qui a été étudiée sous le même nom au n° **8**. J'ai

$$\mathrm{H}\left[Q(x, u), \frac{u}{1-x} - \varphi_1(x) - \psi(x)\right] = \frac{1}{1-x},$$

$$\mathrm{H}\left[Q(x, u), \frac{u}{1-x} - \varphi_1(x)\right] = \frac{1}{1-x} + \mathrm{H}[Q, \psi],$$

et, en combinant avec $\Phi(x, u)$,

$$(5) \qquad Q(x, u) = \Phi(x, u) + \mathrm{H}\big[Q, \mathrm{H}[\Phi, \psi]\big].$$

Je pose

$$\Phi_2 = \mathrm{H}[\Phi, \Phi]; \qquad \Phi_3 = \mathrm{H}(\Phi_2, \Phi]; \qquad \ldots;$$
$$\psi_2 = \mathrm{H}[\psi, \psi]; \qquad \psi_3 = \mathrm{H}(\psi_2, \psi]; \qquad \ldots.$$

Je remplace, dans le deuxième membre de (5), $\mathrm{Q}(x, u)$ par l'expression que nous en fournit l'équation (5) elle-même et je répète $(p-1)$ fois cette transformation. J'obtiens :

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Q} = \Phi + \mathrm{H}[\Phi_2, \psi] + \mathrm{H}[\Phi_3, \psi_2] + \ldots \\ + \mathrm{H}[\Phi_p, \psi_{p-1}] + \mathrm{H}[\mathrm{Q}, \mathrm{H}[\Phi_p, \psi_p]]. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence de $\mathrm{H}[\mathrm{Q}, \mathrm{H}[\Phi_p, \psi_p]]$ est au moins égal à r^p, d'autre part, $\Phi, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ n'ont que le point singulier 1. L'équation (6) montre donc que les points singuliers de $\mathrm{Q}(x, u)$ autres que 1 et de module inférieur à r^p sont les mêmes que ceux de $\psi, \psi_2, \ldots, \psi_{p-1}$ et ceci coïncide bien avec le résultat obtenu autrement (n° **24**).

Soit maintenant D_p un domaine contenu à l'intérieur du cercle de rayon r^p et de centre origine; D_p ayant pour frontière une courbe Γ simplement connexe, laissant à l'extérieur les points singuliers de $\mathrm{Q}(x, u)$, contenant l'origine à l'intérieur. Soit, d'autre part, une courbe simple σ du plan des u, contenant à son intérieur tous les a_n, tous les b_n, ainsi que leur unique point limite, l'origine O. Si x est dans D_p (ou sur Γ) et u sur σ, $\Phi(x, u)$ admet une borne indépendante de x et u (n° **8**). Il est possible d'en déduire une borne pour

$$\Phi_2(x, u) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \Phi(z, u)\,\Phi\left(\frac{x}{z}, u\right)\frac{dz}{z},$$

pourvu que x soit intérieur à un domaine Δ_1 quelconque intérieur à D_p, sans point commun avec Γ. L'intégrale de Parseval précédente donne bien en effet $\Phi_2(x, u)$ dans ces conditions puisque Γ contient le point x à son intérieur et laisse le point 1 à l'extérieur. $\Phi(z, u)$ admet une borne indépendante de x et de u dans les conditions indiquées. $\frac{u}{z}$ décrit un domaine qui laisse le point 1 à son intérieur quand x est dans Δ_1 et z sur Γ, $\Phi\left(\frac{x}{z}, u\right)$ est donc borné quand $\frac{x}{z}$ est dans ce domaine et u sur σ; l'existence d'une borne pour $\Phi_2(x, u)$ est donc démontrée.

On trouverait de même une borne indépendante de x et de u pour

$\Phi_2(x, u)$ quand u est sur σ et x dans un domaine Δ_2 intérieur à Δ_1, sans point commun avec la frontière de Δ_1 (Δ_2 est encore supposé simplement connexe et il contient l'origine). On peut continuer ainsi jusqu'à $\Phi_p(x, u)$. Finalement, étant donné un domaine Δ_{p-1} intérieur à D_p, mais qui, p étant donné, peut être pris aussi voisin de D_p qu'on le voudra pourvu qu'il n'ait aucun point commun avec la frontière de D_p, les fonctions $\Phi, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ admettent des bornes qui ne dépendent ni de u (supposé sur σ), ni de x (supposé dans Δ_{p-1}).

Les fonctions $\psi(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{p-1}(x)$, qui ne dépendent pas de u, sont régulières dans Δ_p, elles y admettent des bornes. Il est facile d'en déduire, par un procédé analogue au précédent, que $H[\Phi_2, \psi]$, $H[\Phi_3, \psi_2]$, ... admettent des bornes dans un domaine Δ_p intérieur à Δ_{p-1} aussi voisin de lui (et par suite aussi de D_p) qu'on le veut et sans point commun avec sa frontière, ces bornes ne dépendant encore ni de x, ni de u.

Enfin la série

$$H[Q, H[\Phi_p, \psi_p]] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (b_n - a_n)^p}{(u - a_n)^p (u - b_n)}$$

est convergente dans Δ_p puisque Δ_p et D_p sont intérieurs au cercle de rayon r^p et que la plus grande des limites de $\sqrt[n]{|b_n - a_n|}$ est r^{-1}.

Comme la courbe σ contient à son intérieur les a_n et les b_n, on a

$$\left| \frac{1}{(u - a_n)^p (u - b_n)} \right| < M,$$

M étant une borne indépendante de u (situé sur σ) et de n.

On peut trouver ε tel que si x est dans Δ_p, $|x| < r_p - \varepsilon$. Alors

$$|H[Q, H[\Phi_p, \psi_p]]| < M \sum_{n=0}^{\infty} |r^p - \varepsilon|^n |b_n - a_n|^p,$$

et le deuxième membre est une borne du premier, borne indépendante de u et de x.

De cette discussion il résulte que $Q(x, u)$ admet une borne, si x est dans Δ_p et u sur σ, puisqu'il en est ainsi des différents termes du deuxième membre de l'équation (6).

Δ_p peut contenir tout point du domaine intérieur au cercle de centre origine, de rayon r_p autre que les points singuliers de $\psi, \psi_2, \ldots, \psi_{p-1}$. On en déduira comme on l'a fait déjà plusieurs fois que si $g(u)$ *est fonction holomorphe pour* $u = 0$ (*donc aussi pour* $u = b^n$ *qui tend vers zéro si* n *croît indéfiniment*), *sous les autres conditions énoncées plus haut*, $\Sigma g(b_n)x^n$ *n'a d'autres points singuliers que les points donnés par*

$$\gamma = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ *étant des points singuliers de* $\varphi(x)$ *autres que* 1 *et qui ne sont pas nécessairement distincts*. Ce résultat s'applique en particulier si 1 est point régulier de $\varphi(x)$ et si $\varphi(x)$ a son rayon de convergence supérieur à 1. On peut en effet, sans rien changer aux démonstrations, supposer que les a_n sont nuls et que $\Phi(x, u) = \frac{1}{u}\,\frac{1}{1-x}$. *Le problème* B *est donc particulièrement simple si les points singuliers de* $\varphi(x)$ *sont tous extérieurs au cercle de rayon* 1 *et si* $g(u)$ *est holomorphe à l'origine*, ce dernier résultat a été énoncé par M. Desaints [1].

27. *Cas où la fonction donnée a deux points sur le cercle de convergence.* — Je me bornerai, afin de mettre en évidence les difficultés qui se présentent dans ce cas, à démontrer la propriété suivante : *Si la fonction* $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ *n'a, sur le cercle de convergence, que deux points singuliers* β *et* β_1 *tous deux principaux, si le rapport* $s = \frac{\beta}{\beta_1}$ *n'est pas racine de l'unité, la fonction* $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ *admet son cercle de convergence comme coupure*. (On suppose que la plus petite des limites R′ de $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas nulle.)

Je suppose d'abord R′ inférieur à la plus grande des limites $\frac{1}{R}$ de $\sqrt[n]{|a_n|}$. Soit γ un point singulier de $\varphi_{-1}(x)$ tel que $|\gamma| = R'$; $\beta\gamma$ ne peut être égal à 1, il doit donc disparaître dans $H[\varphi, \varphi_{-1}]$. Il existe un point singulier γ' de $\varphi_{-1}(x)$ et un point singulier β' de $\varphi(x)$ tels que $\beta\gamma = \beta'\gamma'$. Les modules des deux membres ne peuvent être égaux que si β' et γ' sont sur les cercles de convergence respectifs des deux fonctions, β' n'est donc autre que β_1. Il existe donc sur le cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$ le point singulier $\gamma' = \gamma s$. On verra de même qu'il y

(1) Desaints, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1902.

a $\gamma s^2, \gamma s^3, \ldots$; l'ensemble de ces points est dense sur tout le cercle qui est coupure essentielle. (On remarquera que cette démonstration suppose seulement β principal, β_1 peut ne pas l'être.)

Supposons maintenant $R' = \frac{1}{R}$. Il y a un point singulier γ de $\varphi_{-1}(x)$ et un point singulier de $\varphi(x)$ dont le produit est 1, mais le produit des deux rayons de convergence R et R' étant 1, ceci ne peut avoir lieu que si les deux points en question sont sur le cercle de convergence qui leur correspond. Le point singulier de $\varphi(x)$ est donc β ou β_1, supposons par exemple que ce soit β. En associant $\frac{1}{\beta}$ de $\varphi_{-1}(x)$ à β_1 de $\varphi(x)$, on démontre l'existence d'un point singulier $\gamma' = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ de $\varphi(x)$ et l'on achève comme précédemment (1).

Cette proposition montre la difficulté à laquelle on se heurte si l'on cherche à traiter le problème B dans un cas analogue à celui du n° **8**, en supposant que le point singulier n'est plus 1, mais un point de module 1 : $\Phi(x, u)$ peut alors admettre son cercle de convergence comme coupure.

28. Je terminerai par l'étude de la fonction $\varphi_{-1}(x)$ lorsque x possède sur son cercle de convergence deux points β et β_1 tels que $s = \frac{\beta_1}{\beta}$ soit racine de l'unité. La méthode précédente ne donne pas de résultat : nous devrons appliquer des hypothèses plus restrictives, les points β et β_1 seront supposés séparables.

Je suppose donc que l'on ait

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) + k(x) = \Sigma a_n x^n,$$

$f(x)$ n'ayant que le point β, $g(x)$ n'ayant que le point singulier β_1. Ces deux points sont supposés principaux. On a $|\beta| = |\beta_1| = R$ et le rayon de convergence de $k(x)$ est supérieur à R, $s = \frac{\beta_1}{\beta}$ est la racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a que la limite $\frac{1}{R}$ et enfin une autre condition sera indiquée plus loin.

(1) Des exemples du cas précédent sont bien connus et utilisés pour former des fonctions simples ayant leur cercle de convergence comme coupure : GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 248 (2e édition).

Nous partirons de la relation suivante :

$$H[f, \varphi_{-1}] + H[g, \varphi_{-1}] = \frac{1}{1-x} + \xi(x),$$

$\xi(x)$ désignant $-H[k, \varphi_{-1}]$ dont le rayon de convergence est supérieur à 1.

Je combine les deux membres de l'égalité précédente avec $f_{-1}(x)$ et je pose

$$q(x) = H[g, f_{-1}]; \qquad \psi(x) = H[\xi, f_{-1}].$$

J'obtiens

$$(7) \qquad \varphi_{-1}(x) + H[\varphi_{-1}, q] = f_{-1}(x) + \psi(x),$$

$q(x)$ a pour point singulier s, $\psi(x)$ a un rayon de convergence supérieur à $\frac{1}{R}$.

Je combine ensuite $p-1$ fois les deux membres de l'équation (7) avec $q(x)$. Je pose

$$H[q, q] = q_2; \qquad H[q_2, q] = q_3; \qquad \dots.$$

J'ai ainsi :

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} H[\varphi_{-1}, q] + H[\varphi_{-1}, q_2] = H[f_{-1}, q] + H[\psi, q], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ H[\varphi_{-1}, q_{p-1}] + H[\varphi_{-1}, q_p] = H[f_{-1}, q_{p-1}] + H[\psi, q_{p-1}]. \end{array}\right.$$

J'ajoute ensuite membre à membre les équations (7) et (8), après avoir multiplié les termes de la $i^{\text{ème}}$ par $(-1)^{i-1}$:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\varphi_{-1} + (-1)^{p-1} H[\varphi_{-1}, q_p] \\ &\quad = f_{-1} - H[f_{-1}, q - q_2 + \ldots \pm q_{p-1}] + \psi - H[\psi, q - q_2 + \ldots \pm q_{p-1}]. \end{aligned}$$

Je pose

$$\theta(x) = \frac{1}{1-x} + (-1)^{p-1} q_p(x)$$

et je suppose que le point singulier 1 de $\theta(x)$ soit principal, ce qui, d'après les résultats du n° **8**, a lieu dans le cas où le point singulier 1 de $q_p(x)$ est d'ordre inférieur à 1 et dans bien d'autres cas usuels. On voit alors que les points singuliers de $\varphi_{-1}(x)$ sont les mêmes que ceux du premier membre de l'équation (9) et, par suite, aussi que ceux du deuxième membre. Ce sont donc ceux de $q - q_2 + \ldots \pm q_{p-1}$ combinés avec le point $\frac{1}{\beta}$ de $f_{-1}(x)$ ou avec les points singuliers de $\psi(x)$ qui dépendent de ceux de $k(x)$ et qui sont de module supérieur à $\frac{1}{R}$. En particulier, les points singuliers du cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$ ne peuvent être que $\frac{1}{\beta}, \frac{s}{\beta}, \frac{s_2}{\beta}, \ldots, \frac{s^{p+1}}{\beta}$. Le cercle de convergence n'est donc plus coupure.

Les restrictions que nous avons adoptées pour traiter le cas actuel sont bien essentielles. Si, par exemple, on ne suppose pas que $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite, le résultat ne subsiste plus nécessairement.

Soit $\varphi(x) = \frac{x}{1-x^2} + k(x)$, $k(x)$ ayant un rayon de convergence R supérieur à 1. Posons $k(x) = \sum b_n x^n$,

$$\varphi_{-1}(x) = \sum \left(\frac{x^{2n}}{b_{2n}} + \frac{x^{2n+1}}{1 + b_{2n+1}} \right).$$

Le rayon de convergence est le même que celui de $\sum \frac{x^{2n}}{b_{2n}}$ au plus égal à $\frac{1}{R}$ et les points singuliers du cercle de convergence dépendent de ceux de $k(x)$; ils peuvent être quelconques.