JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI LEBESGUE

Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 4 (1921), p. 67-96.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1921_8_4__67_0>

Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations ;

PAR HENRI LEBESGUE.

Dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, paru en 1914 (*Théorèmes sur les courbes et les surfaces fermées*), M. R. Bricard traitait la question suivante : « Quel est le plus petit rayon R que l'on puisse choisir tel que tout ensemble, formé de points d'un plan dont les distances mutuelles soient au plus égales à un nombre donné D, puisse être enfermé dans une circonférence de rayon R. » En d'autres termes, supposons que, dans un morceau de carton par exemple, nous découpions un cercle, quel rayon faudra-t-il donner à ce cercle pour qu'avec le « couvercle », ainsi obtenu, nous puissions recouvrir tous les ensembles considérés, que l'on appelle les ensembles de largeur D.

Cette question ainsi que son analogue relative à l'espace est résolue très simplement par M. Bricard ; elle avait été traitée antérieurement par M. H. Jung dans deux articles du *Journal de Crelle*, Bd 129 et 137. Elle a fait depuis l'objet d'une courte Note de M. J. Pál (*Nouvelles Annales*, 1915).

L'article de M. Bricard appela mon attention sur la question, qui me fournit la matière de la communication, sorte de petite conférence, que je fis à la Société mathématique, le 1er avril 1914, à l'occasion de la réunion à Paris de la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique. La rédaction de cette conférence, faite à l'époque, constitue les douze premiers numéros de ce Mémoire ; ce qui explique le mode d'exposition de certains paragraphes. J'y ai ajouté le développement d'une autre communication faite peu après à la Société mathématique ([1]). J'avais d'abord eu l'intention de réunir ces remarques avec d'autres analogues concernant des questions qui présentent ce caractère commun de relever du calcul des variations et de n'appartenir cependant pas aux types de problèmes étudiés dans ce calcul; celles que je considère ici suffiront pour faire comprendre de quels problèmes il s'agit. Les méthodes classiques, convenablement modifiées, s'y appliquent beaucoup plus souvent qu'on ne serait tenté de le croire ([2]); c'est un point qui ne ressortira pas de ce Mémoire où je traite les questions surtout par des procédés de géométrie élémentaire, mais que je tiens à indiquer pour que le lecteur ne croie pas que l'analyse classique le laisse complètement désarmé en face des problèmes que je vais indiquer.

Revenons au problème de M. Bricard et considérons un ensemble E de largeur D; le plus petit couvercle qui lui convienne a un rayon R(E), fonction de l'ensemble E. C'est le maximum de R(E) qu'il faut chercher; et il suffit évidemment de considérer le cas où l'ensemble E est une courbe convexe C de largeur D. Nous avons donc à rechercher le maximum d'une fonction de ligne, R(C), d'une fonctionnelle comme on dit maintenant. Seulement, cette fonctionnelle ne s'exprime pas à l'aide d'une intégrale comme celles auxquelles on se borne dans le Calcul des Variations,

$$J = \int f[x, y(x), y'(x)]\,dx,$$

par exemple. Quelle que soit l'importance des fonctionnelles du type J, on voit que des questions très simples conduisent à en considérer d'autres.

Après les fonctionnelles du type J, celles qui se présentent de suite à l'esprit sont celles qu'on obtiendrait en prenant une fonction ordinaire composée à l'aide d'intégrales J; un produit ou un quotient d'intégrales, par exemple. Je ne crois pas que les problèmes de ce

---

([1]) *Comptes rendus des séances de l'année* 1914, p. 43 et 72.

([2]) Ceci deviendra plus fréquent encore quand on utilisera les résultats du travail fondamental de M. Tonelli : *Sur une méthode directe du Calcul des Variations* (*Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, t. XXXIX).

type aient été encore abordés, bien que M. Fréchet [1] se soit occupé avec succès de la différentiation des fonctionnelles les plus générales. La méthode que j'indique pour traiter le problème des isopérimètres, traduite analytiquement, apparaît comme la recherche de minimum d'une expression $\frac{J^2}{J_1}$; elle s'appliquerait aussi à la recherche du minimum d'autres expressions, très particulières à la vérité, formées à l'aide d'intégrales.

Dans le problème de M. Bricard, la fonction $R(C)$ dont on a à chercher le maximum ne s'exprime d'aucune manière à l'aide d'intégrales J; je montre qu'elle n'est cependant pas nouvelle. Si, en effet, $p(\varphi)$ est la distance de l'origine à la tangente à C de direction φ, $R(C) - \frac{D}{2}$ est la meilleure approximation, au sens de Tchebycheff, de $p(\varphi)$ par une expression

$$A \cos\varphi + B \sin\varphi + D.$$

Et la recherche du maximum de $R(C)$ est celle de la limite supérieure de la meilleure approximation pour la classe des fonctions $p(\varphi)$ considérées. Il s'agit donc d'une question analogue à celles qui ont fait récemment l'objet des études de MM. Dunham Jackson, Serge Bernstein, de la Vallée Poussin. Seulement, nous avons à calculer ici une limite exacte de l'approximation et non pas seulement l'ordre de grandeur de cette approximation; cette question d'approximation conduit donc à rechercher le minimum d'une fonctionnelle qui n'est pas une intégrale J [2].

Dans la recherche de ce maximum, on peut se borner à la considération de certaines courbes convexes C, déjà rencontrées par Euler, qui jouissent de la propriété curieuse d'avoir la même largeur dans toute direction, c'est-à-dire que chacune de leurs normales est normale double.

Ces orbiformes, comme on les appelle, ont toutes la même longueur

---

(1) *Sur la notion de différentielle d'une fonction de lignes* (*Trans. of the Am. Math. Sc.*, 1914).

(2) Comparer avec les questions d'approximation traitées dans mon article : *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1910).

que la circonférence de même largeur. Les orbiformes de largeur D ayant toutes la même longueur πD, on est naturellement conduit à comparer les aires de ces orbiformes ; c'est, on le sait à l'avance, l'orbiforme circulaire qui a l'aire maximum ; mais quelle est l'orbiforme d'aire minimum ? Cette fois nous avons à rechercher le minimum d'une fonctionnelle de la forme J ; mais, tandis qu'il s'agit d'une intégrale dont le calcul des variations classique nous fournirait le maximum, c'est du minimum que nous nous occupons. On est donc certain à l'avance que ce minimum sera obtenu pour une fonction frontière du champ fonctionnel envisagé ; mais cette remarque est très insuffisante.

Quand il s'agit d'une fonction de points, de $f(x, y, z)$ par exemple, savoir que le minimum est obtenu sur la frontière du domaine, c'est savoir que le problème est d'un degré moins difficile puisqu'on se trouve ramené à la recherche du minimum d'une fonction $\varphi(u, v)$ des deux variables définissant un point de la surface frontière.

Quand il s'agit d'une fonctionnelle $J(C)$, définie dans les champs que l'on considère ordinairement et auxquels s'applique l'analyse classique, on a un résultat de même nature ; car le calcul de la variation de J montre que C ne peut être extrémale que si, sur chacun de ses arcs, si petit qu'il soit, on aperçoit que c'est une courbe frontière. Par exemple, si le champ fonctionnel est défini par

$$f(x, y, y', y'') > 0,$$

on devra avoir *en tout point*

$$f(x, y, y', y'') = 0 ;$$

et y est à choisir dans une famille de fonctions dépendant de constantes arbitraires ; nous avons affaire à un problème de minimum d'une fonction de plusieurs variables.

Dans le cas actuel on a encore cette propriété que la courbe extrémale C est frontière du champ fonctionnel, en chaque point si je puis dire [1]. Et le minimum s'en déduit facilement ; il est donné par l'orbiforme équilatérale, c'est-à-dire par la courbe formée par les trois arcs

---

[1] C'est là une propriété que l'on pourrait obtenir grâce à des modifications assez profondes de l'analyse classique et que je démontrerai ici par des artifices géométriques. Je compte revenir ailleurs sur ce point.

de circonférences décrits des trois sommets d'un triangle équilatéral comme centres, chacun d'eux étant sous-tendu par le côté opposé à son centre.

On voit que la géométrie conduit tout naturellement à la recherche de maximum et minimum qui sont obtenus pour des courbes ou fonctions qui sont, en tout point, à la frontière du domaine fonctionnel considéré.

Sans sortir de l'ordre de questions considérées ici, voici deux problèmes du même genre. Quelle est, parmi toutes les orbiformes de largeur D qui admettent un couvercle circulaire de rayon ρ, celle qui a la plus petite aire? La solution du problème de M. Bricard montre qu'il faut supposer ρ compris entre $\frac{D}{2}$ et $\frac{D}{\sqrt{3}}$; la solution est alors donnée par l'orbiforme construite de la façon suivante : Prenons trois points A, O, A′ en ligne droite, $AO = D - \rho$, $OA' = \rho$, $AA' = D$ et, de A′ comme centre, décrivons un arc de cercle AB qui sera tel que $OB = OA'$, vu de O sous un angle φ inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Puis, de O comme centre, traçons deux arcs de cercle aA, Bb, vus de O sous l'angle $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$. La courbe $aABb$ formée de trois arcs de cercle est le sixième de l'orbiforme cherchée, laquelle admet Oa et Ob pour axes de symétrie.

Guidé par ce qui suit, on démontrera facilement ce résultat; voici une autre question dont, au contraire, j'ignore la solution. On peut la formuler comme il suit. Dans le problème de M. Bricard, on se demande quel est le plus petit couvercle, parmi ceux qui conviennent à la fois à tous les ensembles de largeur D, et qui sont de forme donnée : la forme circulaire. Plus généralement demandons-nous quel est, de tous les couvercles de forme arbitraire qui conviennent pour tous les ensembles de largeur D, celui de plus petite aire ou de plus petit périmètre (¹).

(¹) Sur cette question, on pourra consulter un article de M. Julius Pál : *Ueber ein elementares Variationsproblem* (*Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab-Mat. fys.*, t. III, 2; 1920).

Dans une très courte Note (*Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles*, t. II, 1914), M. le Dr Kollros traite aussi d'un problème en rapport avec les questions étudiées ici.

1. Considérons un ensemble E de points; si P et Q sont deux points de E, l'ensemble des distances PQ a une borne supérieure : cette borne s'appelle l'*élongation* ou le *diamètre* de l'ensemble E. Quand ce diamètre est fini, E est dit *borné*.

Nous nous proposons de trouver la plus petite valeur de R, *telle que tout ensemble plan de diamètre* D *puisse être enfermé dans une circonférence de rayon* R. On entend par là que tous les points de E doivent être, soit à l'intérieur de cette circonférence, soit sur elle.

Pour éviter des précautions de langage, sans cela nécessaires, nous supposerons que E est fermé, c'est-à-dire tel que tout point limite de points de E appartienne aussi à E. Si l'ensemble donné E n'était pas fermé, en lui ajoutant ses points limites, on aurait un ensemble fermé de même diamètre que E.

Si l'on considère un nombre $f(P)$ fonction de la position d'un point P d'un ensemble fermé E, la continuité de cette fonction se définit comme pour le cas où E est un segment fini de droite ou un domaine borné du plan ou de l'espace. On démontre, comme dans le cas classique, qu'une fonction continue des points d'un ensemble fermé borné atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure.

Soient E un ensemble plan, fermé et borné, A un point de son plan, P un point quelconque de E. La distance AP est une fonction continue du point P de E, elle atteint sa limite supérieure $\rho(A)$ pour une position P_0 de P. Soit B un autre point du plan, on a évidemment $\rho(B) \geqq BP_0$, donc

$$\rho(A) - \rho(B) \leqq |AP_0 - BP_0| \leqq AB.$$

Puisque A et B sont deux points quelconques du plan, nous pouvons conclure

$$|\rho(A) - \rho(B)| \leqq AB,$$

et la fonction $\rho(A)$ est continue. D'ailleurs, quand A s'éloigne à l'infini, $\rho(A)$ grandit indéfiniment, donc la fonction $\rho(A)$ atteint sa limite inférieure ρ pour une position au moins de A.

Cette limite inférieure ne peut d'ailleurs pas être atteinte pour deux positions de A; si, en effet, elle était atteinte pour les positions A_1 et A_2, E serait enfermé dans la partie commune aux deux cercles égaux de rayon ρ et de centres A_1 et A_2, donc dans le cercle décrit sur la corde commune à ces deux cercles comme diamètre. Or ce dernier cercle serait de rayon plus petit que ρ, ce qui est impossible.

Donc, *parmi toutes les circonférences qui entourent un ensemble donné* E, *il y en a toujours une qui a un rayon plus petit que toutes les autres*. Nous l'appellerons *circonférence circonscrite* à E.

2. Relativement à cette circonférence circonscrite, je démontrerai, avec M. Bricard, le théorème suivant :

Pour qu'une circonférence C, *enfermant un ensemble fermé* E, *soit la circonférence circonscrite, il faut et il suffit que les points communs à* E *et à* C *n'appartiennent pas tous à un même arc de cercle* C' *plus petit qu'une demi-circonférence.*

La condition est suffisante. — Si elle est remplie, en effet, toute autre circonférence Γ, contenant E, doit contenir un arc C' au moins égal à la moitié de C; donc Γ a un rayon plus grand que C.

La condition est nécessaire. — Supposons, en effet, que tous les points communs à C et à E soient sur un arc $\alpha\beta\gamma$ de C, inférieur à la moitié de C, et soit $\alpha'\beta'\gamma'$ un arc de C, supérieur à la moitié de C, et n'ayant aucun point commun avec $\alpha\beta\gamma$. Faisons passer par α' et γ' un cercle C' voisin de C et de rayon un peu inférieur. Les seuls points du plan qui soient intérieurs à C sans être intérieurs à C' sont des points voisins de $\alpha'\beta'\gamma'$. Comme il n'y a pas de points de E voisins de $\alpha'\beta'\gamma'$, si C' est très peu différent de C, C' contient E et C n'est pas la circonférence circonscrite à E.

3. La proposition de M. Bricard étant obtenue, la recherche du nombre R est presque achevée. Pour un ensemble E de diamètre D, la circonférence circonscrite C, de rayon ρ, doit avoir en commun avec D des points n'appartenant pas tous à la même moitié de C. Soient α et β deux points communs à E et C, soient α', β' les points de C diamétralement opposés à α et β. Si α' ou β' appartient à E, alors $2\rho = D$. S'il n'en est pas ainsi, ou bien il y a sur l'arc $\alpha'\beta'$ un point γ au moins de E et un tel point forme avec α et β un triangle acutangle, ou bien il y a des points de E à la fois sur $\alpha\beta'$ et sur $\alpha'\beta$.

Dans ce dernier cas, soient λ le dernier de ces points rencontré en allant de α vers β' et μ le dernier rencontré en allant de β vers α'. L'arc $\lambda\beta'\alpha'\mu$ est inférieur ou au plus égal à une demi-circonférence, car il ne contient pas de points de E. Donc, ou $\lambda\mu = 2\rho = \text{D}$, ou le triangle $\lambda\mu\alpha$ est acutangle. Si donc on n'a pas $2\rho = \text{D}$, on est certain de trouver un triangle acutangle $\alpha\beta\gamma$, ou $\alpha\lambda\mu$, formé de points de E et inscrit dans C (1). Un tel triangle, s'il n'est pas équilatéral, a un de ses côtés au moins supérieur au côté du triangle équilatéral inscrit; donc on a alors

$$\text{D} \geqq \rho\sqrt{3}.$$

Dans tous les cas on a donc

$$\rho \leqq \frac{\text{D}}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, on a

$$\text{R} \leqq \frac{\text{D}}{\sqrt{3}};$$

cette valeur minimum étant d'ailleurs atteinte, par exemple, pour le cas où E est un triangle équilatéral de côté D.

4. Les définitions et les raisonnements des nos **1** et **2** s'appliquent de suite, moyennant des modifications de mots évidentes, au cas des ensembles de l'espace ordinaire. Si l'on appelle « ensemble de l'espace à n dimensions » les ensembles de systèmes de n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ces définitions et raisonnements s'appliquent encore facilement. Il faudra naturellement y remplacer la considération des circonférences par celle des hypercirconférences qui sont les variétés à $n - 1$ dimensions définies par des équations de la forme

$$(\text{X}_1 - x_1)^2 + (\text{X}_2 - x_2)^2 + \ldots + (\text{X}_n - x_n)^2 = \text{R}^2,$$

dans lesquelles les X sont les coordonnées courantes, les x les coor-

(1) Je n'ai pas voulu admettre sans démonstration que si l'on a un ensemble de points d'une circonférence, fermé et qui ne peut être enfermé dans une demi-circonférence, il y a trois points de cet ensemble qui forment un triangle acutangle ou deux points qui sont diamétralement opposés, parce que le fait analogue pour l'espace ne me paraît nullement évident. Aussi, pour le cas de l'espace, le raisonnement de M. Bricard aurait besoin, il me semble, d'être complété.

données du centre; le premier membre est le carré de la distance des deux points X, x; le second membre est le carré du rayon.

Une telle variété est la frontière du domaine correspondant au cercle; ce domaine, un hypercercle, est donc défini par l'inégalité

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + \ldots + (X_n - x_n)^2 \leqq R^2.$$

Les théorèmes des n^{os} **1** et **2** étant acquis pour le cas général, pour achever la détermination du rayon R_n des plus petits hypercercles égaux dans lesquels on puisse enfermer tous les ensembles de diamètre D de l'espace à n dimensions, il va falloir imiter le raisonnement du n° **3**. Le triangle équilatéral ou régulier sera remplacé par l'hypertriangle régulier, c'est-à-dire, si l'on veut, la figure formée par $n - 1$ points situés deux à deux à la distance D. Si l'on désigne par h_n la hauteur d'un hypertriangle régulier et ρ_n le rayon de l'hypercirconférence circonscrite, on voit facilement que l'on a

$$\rho_n = \frac{n}{n+1} h_n, \qquad \overline{\rho_{n-1}}^2 + h_n^2 = D^2;$$

d'où, puisque $\rho_2^2 = \dfrac{D^2}{3} = \dfrac{2^2}{3^2}\left[1 - \dfrac{1^2}{2^2}\right] D^2 = \dfrac{2^2 - 1^2}{3^2} D^2$,

$$\rho_3^2 = \frac{3^2}{4^2}\left[1 - \frac{2^2}{3^2}\left[1 - \frac{1^2}{2^2}\right]\right] D^2 = \frac{3^2 - 2^2 + 1^2}{4^2} D^2,$$

$$\rho_4^2 = \frac{4^2}{5^2}\left[1 - \frac{3^2}{4^2}\left[1 - \frac{2^2}{3^2}\left[1 - \frac{1^2}{2^2}\right]\right]\right] D^2 = \frac{4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2}{5^2} D^2, \quad \ldots .$$

La sommation donne finalement

$$\rho_n^2 = \frac{n}{2(n+1)} D^2.$$

L'hypertriangle régulier étant un ensemble de largeur D, on a

$$R_n \geqq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\, D.$$

Je vais démontrer que, pour n quelconque comme pour $n = 2$, c'est le signe $=$ qui convient. Pour cela, il suffira de prouver, ce qui a été fait au n° **3** pour $n = 2$, que si l'on a sur une hypercirconférence un ensemble fermé de points qui ne peut être enfermé dans une moitié de cette hypercirconférence, il y a deux de ces points dont la distance est égale ou supérieure au côté de l'hypertriangle régulier inscrit. Le raisonnement est un raisonnement de proche en proche, il suffira d'indiquer comment on passe de $n = 2$ à $n = 3$.

Remarquons d'abord que, si l'on a sur une sphère un ensemble fermé E de points, les théorèmes des n^{os} **1** et **2** s'appliquent à la recherche de la plus petite calotte sphérique contenant E.

Ceci étant, soit, sur une sphère S de rayon ρ, un ensemble fermé e de points, ensemble qui ne peut être tout entier enfermé dans une moitié de la sphère S. Soient a, b deux points de e dont la distance d ait la valeur la plus grande possible; on a évidemment $\rho\sqrt{2} \leqq d \leqq 2\rho$. Le petit cercle de S, qui passe par b et qui admet a pour pôle, a un rayon égal à $\dfrac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}$.

Ce petit cercle partage S en deux zones, dont l'une Z, la plus grande, contient e, l'autre ne contenant aucun point de e. Soit γ la frontière de la plus petite zone contenant e, laquelle, étant contenue dans Z et contenant une demi sphère, a un rayon au moins égal à $\dfrac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}$.

Sur γ, d'après **3**, il y a deux points de e qui sont distants au moins de

$$\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}\sqrt{3}$$

et l'on doit avoir

$$\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}\sqrt{3} \leqq d,$$

d'où

$$\sqrt{\frac{8}{3}}\rho \leqq d.$$

Finalement, on a donc

$$\sqrt{\frac{8}{3}}\rho \leqq d \leqq 2\rho,$$

les limites extrêmes étant atteintes dans le cas où des points de e sont sommets d'un tétraèdre régulier et dans le cas où des points de e sont diamétralement opposés.

Finalement il est ainsi prouvé que

$$R_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}\,D.$$

Le passage de n à $n+1$ se fait exactement de même, l'inégalité précédente devient

$$\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} \leq d,$$

d'où

$$4\rho^2[2(n+1) - n] \leq 2(n+1)d^2,$$

$$\rho \leq \sqrt{\frac{n+1}{2(n+2)}}\,d.$$

5. Nous bornant au cas des ensembles plans, nous allons traiter la même question d'une façon moins simple et moins rapide, mais qui nous montrera le lien intime qui lie le problème posé à celui de la meilleure approximation avec laquelle on peut représenter une fonction continue par une série limitée de Fourier, problème considéré d'abord par Tchebycheff.

Notre point de départ sera une utilisation plus systématique de cette remarque : il n'y a pas besoin de considérer le cas de tous les ensembles de diamètre D, on peut se borner à certains d'entre eux. Ceci nous a déjà permis de ne considérer que les ensembles fermés.

Nous dirons qu'un ensemble E de diamètre D est *complet* s'il est impossible de lui adjoindre des points tout en lui laissant le même diamètre D. Nous allons démontrer que *tout ensemble de diamètre* D *fait partie d'un ensemble complet de diamètre* D.

Soit E un ensemble fermé de diamètre D; s'il n'est pas complet, nous pouvons, sans modifier son diamètre, lui ajouter des points. Soient A l'un d'eux, B le point de E le plus voisin de A, ou l'un des plus voisins. Soient C_1 et C_2 les points de rencontre des cercles de rayon D décrits de A et B comme centres. Soient enfin AMB, ANB les arcs de cercle de rayon D décrits de C_1 et C_2 comme centres. Tous les points compris entre AMB et ANB peuvent être ajoutés à E sans changer le diamètre D de l'ensemble. Certains de ces points font peut-être déjà partie de l'ensemble E, mais les points du segment AB n'en font pas partie et comme E est fermé nous voyons que si d'un point de AB comme centre, on décrit un cercle assez petit, tous les points de ce cercle, dont aucun ne faisait partie de E, peuvent être ajoutés à E.

Ceci étant, soit E un ensemble de diamètre D; je lui ajoute ses points limites. Si l'ensemble obtenu e n'est pas complet, je lui ajoute le plus grand cercle λ [1] qu'il soit possible de lui ajouter sans augmenter son diamètre; s'il y a plusieurs tels cercles, j'ajoute l'un quelconque choisi d'après une loi que chacun prendra à sa volonté et qu'il serait puéril de préciser une fois pour toutes.

Si l'ensemble $e+\lambda$ ainsi obtenu n'est pas complet, je lui ajoute le plus grand cercle possible λ_1, etc.

Si l'on est arrêté au bout d'un nombre fini d'opérations, le théorème est démontré pour l'ensemble E considéré; sinon, je dis que l'ensemble fermé obtenu en ajoutant à $e+\lambda+\lambda_1+\ldots$ ses points limites, qui est évidemment de diamètre D, est complet. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait lui ajouter les points d'un cercle Λ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ devraient être tous au moins aussi grands que Λ. Or cela est impossible, car ils sont sans points communs deux à deux et tous intérieurs à une circonférence de rayon D décrite d'un point quelconque de E comme centre.

6. Ainsi, pour trouver le maximum du rayon de la circonférence circonscrite aux ensembles de largeur D, nous pouvons nous borner à la considération des ensembles complets de largeur D. Étudions ces ensembles.

La distance d'un point quelconque M à un point C d'un segment AB étant plus petite que la plus grande des deux distances MA, MB, si deux points A et B font partie d'un ensemble complet, tous les points du segment AB en font aussi partie. Donc les ensembles complets sont des domaines convexes, c'est-à-dire l'ensemble des points d'un contour convexe et des points intérieurs à un tel contour. Un contour convexe qui limite un domaine constituant un ensemble complet, s'appelle *une courbe orbiforme*.

Soit A un point d'une orbiforme Γ. Γ est tout entière à l'intérieur de la circonférence de rayon D et de centre A. Je dis que cette circon-

---

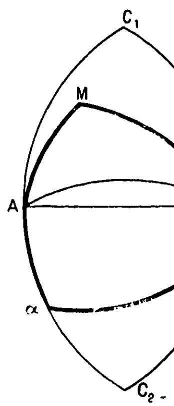
[1] Il peut y avoir des points frontières de λ qui appartiennent à e, mais aucun point intérieur à λ ne doit appartenir à e. J'omets la preuve du fait que les rayons des cercles qu'on peut ajouter à e atteignent leur limite supérieure.

férence a un point commun au moins avec Γ; sans quoi, en effet, la plus grande distance de A aux points de Γ serait inférieure à D, soit D — ε. En ajoutant au domaine Δ limité par Γ les points du cercle de rayon ε et de centre A, et certains de ces points sont extérieurs à Δ, on aurait encore un ensemble de largeur D; donc Δ ne formerait pas un ensemble complet, Γ ne serait pas une orbiforme.

Ainsi la circonférence de rayon D et de centre A touche l'orbiforme en un point B, la circonférence égale de centre B passe par A. Ces deux circonférences se coupent en C_1, C_2 et Γ est dans le fuseau limité par les arcs C_1AC_2, C_2BC_1.

Soit M un autre point de Γ; supposons-le situé dans le triangle cur-

Fig. 1.



viligne ABC_1. M ne peut être entre la corde AB et l'arc AB de centre C_2, car tous les points de cette région, étant distants de moins de D de tous les points du fuseau, sont intérieurs à Γ. Il résulte de là que la circonférence de rayon D décrite de M coupe l'arc AC_2 en un point α et l'arc BC_2 en un point β. Γ est tout entière dans le triangle curviligne $C_1\alpha\beta$. αβ contient d'ailleurs des points de Γ, car M est distant de moins de D de tous les points intérieurs au triangle $C_1\alpha\beta$ et des points des côtés $C_1A\alpha$, $C_1B\beta$ (α et β exclus).

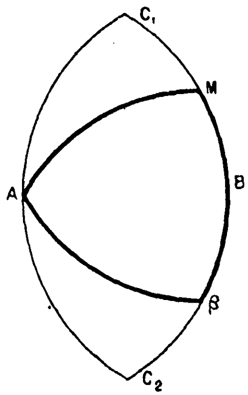
Traçons les arcs de rayon D et de centres α et β joignant respectivement BM et AM. Nous obtenons un pentagone Π limité par les arcs AM, MB, Bβ, Bα, αA.

Si l'arc αβ fait tout entier partie de Γ, Γ ne peut pas avoir de points extérieurs à H; d'ailleurs, H étant évidemment une courbe orbiforme, Γ ne diffère pas de H. Si certains points de $\alpha\beta$ ne font pas partie de Γ, l'ensemble complet limité par Γ pourra, au voisinage de M, sortir de H; mais, en ce voisinage, il contiendra tous les points de H et tous les points intérieurs à H.

Pour énoncer les résultats obtenus, rappelons que l'on appelle *tangente* (ou droite d'appui) d'un contour convexe en un point P toute droite passant par P et ne passant par aucun point intérieur au contour. Une perpendiculaire en P à une tangente en P est une *normale* en P.

Les tangentes en A et B aux arcs C_1AC_2, C_1BC_2 sont des tangentes à Γ; AB est donc une normale double à Γ et sa longueur est D. Les tangentes à Γ en M sont tout ou partie des tangentes à H en M, de

Fig. 2.



même pour les normales. C'est dire que les normales en M à Γ rencontrent toutes l'arc $\alpha\beta$. Donc aucune ne passe par A, à moins que α ne soit en A, donc que M soit sur BC_1. Dans ce cas particulier, H devient un triangle curviligne H_1 constitué par trois arcs égaux de rayon D, décrits respectivement des trois sommets, A, M, β d'un triangle équilatéral pour centres, et sous-tendus par les côtés de ce triangle. Γ se réduit à H_1 si tous les points de $A\beta$ font partie de Γ. Si tous n'en font pas partie, Γ diffère de H_1; mais, en tous cas, Γ contient l'arc MB puisque les points de MB ne sont pas à une distance supérieure à D d'aucun des points du triangle $C_1A\beta$.

En résumé, si, de A, on abaisse une normale AB de pied B, AB = D et AB est aussi normale en A : *Toute normale à une orbiforme est normale double, la distance des deux points d'incidence est la largeur de la courbe.*

De A on peut toujours abaisser une telle normale puisque la ou les normales en A répondent à la question. Si l'on a deux normales AB et AM, toutes les droites intermédiaires sont aussi normales et l'orbiforme se réduit, entre B et M, à un arc de cercle de centre A.

A une courbe convexe quelconque on peut toujours mener une tangente dirigée unique ; pour une orbiforme on peut dire, de plus, qu'elle a un seul point de contact. Si, en effet, elle touchait la courbe en A et B, les normales AA′ et BB′, de longueur D, feraient connaître deux points A′ et B′ de l'orbiforme. Ce qui est absurde, car AB′ est plus grand que D. *Les tangentes et normales à une orbiforme sont donc déterminées par leur inclinaison et varient de façon continue avec elle.*

7. Considérons une orbiforme Γ analytique, ou à laquelle du moins s'applique la théorie des développées. En chaque point de Γ, le rayon de courbure compté vers l'intérieur de Γ sera compris entre zéro et D, les valeurs extrêmes pouvant être atteintes. La développée Λ de Γ sera une courbe à distance finie, à laquelle, parallèlement à chaque droite, on ne pourra mener qu'une tangente. En d'autres termes, les tangentes à Λ de directions α et $\alpha + \pi$ seront confondues, quel que soit α. Λ sera donc une courbe ayant un nombre impair de points de rebroussements, trois au moins [1].

Prenons, par exemple, pour Λ, une hypocycloïde à trois rebroussements ; et soit Γ une de ses développantes. Soient ω un point décrivant Λ, ωt la tangente en ω affectée d'un sens variant de façon continue avec ω. Quand ω a parcouru tout Δ, ωt ne revient pas à sa position primitive, mais dans le prolongement de cette position primitive, le sens étant différent.

---

[1] J'omets les démonstrations rigoureuses ; les faits énoncés dans les n^{os} 7 et 8 ne seront pas utilisés, ils sont donnés pour familiariser avec la notion d'orbiforme.

Quant au point M de ωt qui décrit Γ, il vient, après cette révolution, dans une position M_1; un calcul immédiat montre que M et M_1 sont symétriques par rapport au point de ωt qui décrit celle des développantes de Λ qui est une hypocycloïde.

Quand ω a décrit deux fois Λ, ωt revient exactement à sa position primitive et Γ se ferme. Γ a donc pour normale double toute tangente à Λ, c'est une courbe parallèle à elle-même; c'est une courbe doublement parallèle à l'hypocycloïde dont Λ est la développée. Si donc Γ est convexe, Γ est une orbiforme.

On comprend ainsi qu'Euler ait été conduit à la notion de courbe orbiforme par l'étude des développantes des courbes triangulaires, c'est-à-dire des courbes, analogues à l'hypocycloïde à trois rebroussements, formées par trois arcs de courbes convexes raccordés par des points de rebroussement de première espèce. L'étude des courbes parallèles aux courbes triangulaires, ou à 5, 7, ... points de rebroussement, y conduirait aussi.

Déformons une courbe triangulaire de façon que les trois arcs qui la composent diffèrent de moins en moins des côtés du triangle des rebroussements et prenons chaque fois la plus petite développante orbiforme; si le triangle des rebroussements est équilatéral, nous obtiendrons à la limite l'orbiforme équilatérale, que nous avons déjà rencontrée et que nous avions désignée par H_1. Pour H_1, ce qui joue le rôle de la développée, c'est le triangle $AM\beta$. Pour H, ce serait la figure, limite d'une courbe à cinq rebroussements, formée par les droites AB, $B\alpha$, αM, $M\beta$, βA.

Si l'on imagine que, dans les déformations dont il vient d'être parlé, les longueurs des arcs des courbes développées, triangulaires par exemple, sont conservées, on peut établir une correspondance entre les points ω de ces différentes développées transformées. Et si l'on imagine que, dans la déformation d'une développée Λ, chaque tangente ωt emporte le segment ωM qui va du point ω de Λ au point M de sa développante Γ, on établit aussi une correspondance précise entre les diverses développantes. En particulier, dans le cas où Λ est triangulaire, les différentes développantes triangulaires des Λ déformées se correspondent. Or, transformons Λ en un triangle ABC, ce qui est toujours possible, car entre les trois arcs a, b, c, on a évidemment des inégalités telles que $a < b + c$. La développante triangulaire, dans le cas du triangle ABC, est constituée par trois arcs de cercles de centres A, B, C et tangents entre eux. Les points de contact de ces cercles sont les points de contact avec AB, BC, CA, du cercle inscrit dans ABC. De sorte que les points de rebroussements de cette développante partagent les arcs de la développée en morceaux de longueurs connues $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Ce que je veux faire remarquer surtout, c'est que l'orbiforme équilatérale est la plus petite courbe convexe qui soit parallèle à la courbe triangulaire formée de trois arcs de cercles égaux. De même, II est la plus petite courbe convexe parallèle à une courbe à cinq rebroussements formée par cinq arcs de cercle de rayons égaux.

8. Ce n'est pas seulement par la géométrie analytique que la notion de courbe orbiforme s'est imposée aux mathématiciens; si les courbes parallèles aux courbes à 3, 5, ... points d'inflexions et très voisines de ces courbes ont reçu une application mécanique, car ce sont les formes de rails qu'on peut adopter pourqu'en parcourant la voie ainsi construite une locomotive se trouve retournée bout pour bout (¹), les courbes convexes parallèles à ces courbes-là sont aussi utiles industriellement.

Pour transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne on emploie quelquefois une came agissant sur une pièce P, dont le mouvement rectiligne est guidé par l'un ou l'autre des deux bords parallèles d'une entaille faite dans P, entaille entre les bords de laquelle la came peut tourner. On voit de suite que, si l'on veut que le mouvement puisse avoir lieu dans les deux sens, auquel cas la came doit toucher constamment les deux bords de l'entaille et si le mouvement de la came doit être révolutif complet, il faut que cette came soit limitée par une orbiforme.

C'est surtout à l'occasion de probabilités géométriques que les orbiformes ont été étudiées. La plus simple des questions de probabilités géométriques est celle de l'aiguille de Buffon : *On jette au hasard une aiguille sur un plancher, quelle est la probabilité pour qu'elle rencontre une raie du plancher?* Convenons d'attribuer à un

(¹) Et cela, parce que quand ω parcourt une fois A, ωt ne revient à sa position primitive qu'au sens près, n° 7.

coup le poids n si l'aiguille rencontre n fois les raies du plancher, soit parce que l'aiguille est très longue par rapport à la largeur des lames du parquet, soit parce que l'aiguille est courbe. Dans tous les cas on peut partager l'aiguille en éléments de même longueur assez petite pour que chaque élément puisse être regardé comme rectiligne et soit moindre que l'écartement des raies du plancher. La probabilité pour qu'un élément déterminé rencontre les raies est alors la même pour tous les éléments et la probabilité pour l'aiguille tout entière, étant la somme de ces probabilités élémentaires, est proportionnelle à la longueur de l'aiguille ([1]).

D'autre part, la probabilité pour que l'aiguille, supposée tombée dans une orientation déterminée, rencontre les raies ne dépend que de l'écartement des tangentes à l'aiguille qui sont parallèles aux raies.

Or, si l'aiguille est une orbiforme, cet écartement est indépendant de l'orientation de l'aiguille, c'est le diamètre de l'orbiforme et par suite l'étude de cette forme d'aiguille s'imposait. Pour une aiguille orbiforme, la probabilité ne dépend que du diamètre.

En rapprochant cela de ce qui précède, on voit que toutes les orbiformes de même diamètre ont même longueur.

Nous retrouverons cela plus tard. Je reviens maintenant à la question de M. Bricard.

9. Soit A un point du plan d'une orbiforme Γ de diamètre D. Soit C_A le plus petit cercle de centre A contenant Γ, soit R_A son rayon. C_A a au moins un point commun avec Γ, sans quoi on pourrait rapetisser C_A; soit B un point commun à C_A et à Γ. AB étant normale à Γ en B est aussi normale à Γ en un autre point C, situé sur la demi-droite indéfinie BA d'origine B, à la distance D de B.

Si A est intérieur à Γ, ces points ont la disposition BAC et $R_A < D$; si A est extérieur, on a la disposition BCA et $R_A > D$. Plaçons-nous

([1]) Cette remarque capitale est due à Barbier qui a le premier établi la relation entre les questions de probabilités et les propriétés des orbiformes (*Journal de Math.*, 1860). Je tire cette référence d'un petit Livre : *Contribution à l'étude des courbes convexes fermées*, publié à la librairie Hermann par MM. Ch. Jordan et R. Fiedler, dans lequel le lecteur trouvera des renseignements intéressants concernant les orbiformes.

dans la première hypothèse, puisque nous voulons chercher le minimum de R_A, pour A variable. Dans ce cas, le cercle c_A de centre A et passant par C, dont le rayon r_A égale $D - R_A$, est le plus grand cercle de centre A qui soit intérieur à Γ. La recherche du plus petit cercle C_A est équivalente à la recherche du plus grand cercle c_A ou encore, puisque $R_A + r_A = D$, à la recherche du minimum de $R_A - r_A$. Nous allons interpréter cette différence.

Soit Λ la circonférence de centre A et de rayon ρ. Établissons sur Λ et Γ le même sens de parcours direct, les tangentes à Λ et à Γ sont par là même dirigées. Établissons entre Λ et Γ une correspondance par tangentes dirigées parallèles et soit ε le maximum de l'écartement des tangentes correspondantes de Λ et de Γ. Si l'on a $\rho > R_A$, on a évidemment $\varepsilon = \rho - r_A > R_A - r_A$; si l'on a $\rho < r_A$, on a

$$\varepsilon = R_A - \rho > R_A - r_A.$$

Enfin, pour $R_A > \rho > r_A$, la valeur de ε est le plus grand des deux nombres $R_A - \rho$ et $\rho - r_A$. Il résulte de tout cela que le minimum de ε est $\frac{R_A - r_A}{2}$, qui est atteint pour $\rho = \frac{R_A + r_A}{2} = \frac{D}{2}$.

Si Λ est extérieur à Γ, le minimum de ε est supérieur à $\frac{D}{2}$ et il est obtenu encore pour $\rho = \frac{D}{2}$, comme on le voit facilement.

Donc, trouver le minimum de R_A revient à trouver le minimum de ε, c'est-à-dire à trouver la circonférence qui diffère le moins de Γ quand on établit une correspondance par tangentes parallèles dirigées entre Γ et cette circonférence. C'est un problème à la Tchebycheff.

Représentons la courbe Γ par ses tangentes, comme on le fait toujours quand il s'agit d'une courbe convexe. Soit

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0 \tag{1}$$

l'équation de la tangente dirigée à Γ de direction $\varphi + \frac{\pi}{2}$. p est une fonction $f(\varphi)$ bien déterminée et continue. Si l'origine des coordonnées est intérieure à Γ, p est constamment positif. Dans tous les cas, l'équation $p = f(\varphi)$ peut être considérée comme l'équation de Γ.

Dans le même système de coordonnées polaires tangentielles, l'équation d'un cercle de rayon R est

$$p = \mathrm{R} + a\cos\varphi + b\sin\varphi, \tag{2}$$

a et b étant deux constantes. Pour ce cercle A, la valeur de ε est le maximum de la différence

$$|f(\varphi) - (\mathrm{R} + a\cos\varphi + b\sin\varphi)| = |\delta(\varphi, \mathrm{R}, a, b)|. \tag{3}$$

Donc la recherche du minimum de ε est exactement équivalente à la recherche de la meilleure approximation avec laquelle la fonction $f(\varphi)$ peut être représentée par une expression de la forme (2). C'est le problème même de Tchebycheff.

10. Tchebycheff a surtout considéré le cas de l'approximation d'une fonction continue par un polynome. Ses raisonnements ont été simplifiés et précisés par MM. Kircherberger et Borel ([1]). Le cas de l'approximation par des suites trigonométriques finies a été considéré par M. J.-W. Young ([2]) et par M. Fréchet ([3]). Mais il sera plus simple ici de prouver directement les quelques résultats qu'on utilisera.

Remarquons d'abord que l'on a

$$f(\varphi + \pi) + f(\varphi) = \mathrm{D}, \tag{4}$$

en supposant l'origine intérieure à Γ, ce que nous réaliserons toujours. Donc

$$\delta(\varphi, \mathrm{R}, a, b) + \delta(\varphi + \pi, \mathrm{R}, a, b) = \mathrm{D} - 2\mathrm{R}.$$

Si donc, quand φ varie, a, b, R étant fixes, $\delta(\varphi, \mathrm{R}, a, b)$ atteint la limite supérieure m, il a pour limite inférieure $-n = \mathrm{D} - 2\mathrm{R} - m$. Et par suite en prenant $2\mathrm{R} = \mathrm{D}$, nous rendons aussi petit que possible le plus grand des deux nombres m et n. En d'autres termes, pour a, b fixes, c'est-à-dire le centre A d'un cercle A étant fixe, on obtient le minimum du maximum μ de $|\delta(\varphi, \mathrm{R}, a, b)|$, c'est-à-dire la circonfé-

([1]) *Voir* l'exposition qu'en a donnée M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles* et aussi la manière originale grâce à laquelle M. de la Vallée Poussin retrouve et complète les résultats de Tchebycheff (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910, p. 809 et suiv.).

([2]) *Transactions of the American mathematical Society*, 1907.

([3]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1908.

rence A différant le moins de Γ au sens précédemment indiqué, en prenant $R = \frac{D}{2}$ et alors $|\delta|$ varie entre $-\mu$ et $+\mu$. Résultat déjà obtenu et, en somme, par le même raisonnement.

Prenons ainsi R, et faisons varier a et b. Si l'un des deux, ou tous deux, augmentent indéfiniment en valeur absolue, μ augmente indéfiniment. Donc le minimum de μ, pour a, b variables, s'obtient pour des valeurs finies de a et b.

Cette valeur minimum de μ est positive, sans quoi $f(\varphi)$ serait de la forme (2) et Γ serait une circonférence, cas que l'on peut laisser de côté. Alors donc, pour les valeurs minimisantes de a et b, δ varie entre μ et $-\mu$ et l'on a

$$\delta(\varphi + \pi) + \delta(\varphi) = 0.$$

Soient deux valeurs, α et $\alpha + \pi$, de φ annulant δ. Dans $(\alpha, \alpha + \pi)$ δ atteint soit la valeur μ, soit la valeur $-\mu$, ceci est évident; je dis qu'en réalité, il atteint les deux. Supposons en effet que δ varie entre μ et $-m$, avec $m < \mu$, et modifions a et b de façon à remplacer $a \cos\varphi + b \sin\varphi$ par $a \cos\varphi + b \sin\varphi + \lambda \sin(\varphi - \alpha)$; δ deviendra

$$\delta - \lambda \sin(\varphi - \alpha) = \delta'$$

et δ' varie entre μ' et m' avec $\mu' < \mu$, $m < m' < \mu$, si λ est positif et assez petit. Ainsi μ n'aurait pas sa valeur minimum pour les valeurs considérées de a et b, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Traduisons le résultat en disant que, pour les valeurs minimisantes a et b, $\delta(\varphi)$ atteint ses valeurs extrêmes $+\mu$ et $-\mu$ dans tout intervalle $(\theta, \theta + \pi)$ d'étendue π.

La réciproque est vraie : si $\delta(\varphi)$ atteint ses valeurs extrêmes $+m$ et $-m$ dans tout intervalle $(\theta, \theta + \pi)$, pour tout autre système de valeurs de a et b, $|\delta(\varphi)|$ atteint des valeurs plus grandes que m. En effet, modifier a et b revient toujours à remplacer $\delta(\varphi)$ par une expression de la forme

$$\delta(\varphi) + \lambda \sin(\varphi - \alpha) = \delta'(\varphi),$$

et, puisque $\delta(\varphi)$ atteint $+m$ et $-m$ dans $(\alpha, \alpha + \pi)$, dans cet intervalle δ' atteindra des valeurs supérieures à m si λ est positif, des valeurs inférieures à $-m$ si λ est négatif.

Nous pouvons conclure : *Il existe toujours une circonférence Λ qui, dans la correspondance par tangentes parallèles dirigées, diffère moins que toute autre d'une orbiforme donnée Γ. La circonférence C_Λ concentrique à Λ est la plus petite de toutes celles qui enferment Γ, nous l'avons appelée la circonférence circonscrite; la circonférence c_Λ concentrique à Λ est la plus grande des circonférences intérieures à Γ, c'est la circonférence inscrite. Si l'on considère deux moitiés correspondantes de C_Λ et c_Λ* [c'est-à-dire données par les mêmes valeurs $(\alpha, \alpha+\pi)$ de φ], *il y a toujours sur chacune de ces demi-circonférences des points de Γ.*

11. Ces propositions correspondent exactement à celles des n^{os} **1** et **2**; elles sont un peu plus complètes, mais s'appliquent seulement aux orbiformes. Quant à la similitude des raisonnements, qui va souvent jusqu'à l'identité, il est inutile d'y insister davantage.

Soit l'équation d'une tangente en A à une orbiforme Γ

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \tag{1}$$

soit

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - q = 0, \tag{5}$$

l'équation de la normale correspondante. p et q sont des fonctions continues de φ (n° **6**). La tangente voisine est

$$x\cos(\varphi+\delta\varphi) + y\sin(\varphi+\delta\varphi) - p - \delta p = 0; \tag{6}$$

le point commun à (1) et (6) est aussi sur la droite

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - p\frac{1-\cos\delta\varphi}{\sin\delta\varphi} - \frac{\delta p}{\sin\delta\varphi} = 0. \tag{7}$$

Faisons tendre $\delta\varphi$ vers zéro, le point commun aux deux tangentes doit tendre vers A, c'est-à-dire vérifier (5), donc $\frac{\delta p}{\delta\varphi}$ tend vers q. Ainsi : *la fonction $p = f(\varphi)$ définissant une courbe orbiforme est continue et a une dérivée continue.*

Cette fonction doit vérifier la condition

$$f(\varphi+\pi) + f(\varphi) = D \tag{4}$$

et une autre condition qui exprimera la convexité de l'enveloppe de (1).

Les coordonnées du point A sont

$$x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \qquad y = p\sin\varphi + p'\cos\varphi;$$

donc, le segment OA projeté sur la direction ψ donne

$$p\cos(\varphi-\psi) - p'\sin(\varphi-\psi),$$

et, pour la convexité, on doit avoir

$$(8) \qquad p(\psi) > p(\varphi)\cos(\psi-\varphi) + p'(\varphi)\sin(\psi-\varphi).$$

Pour la commodité, posons $D = 2r$, $p = h + r$ et représentons $h(\varphi)$ par une courbe L comme si h et φ étaient deux coordonnées cartésiennes rectangulaires. Supposons, de plus, que O est le centre du cercle circonscrit à Γ, alors h varie entre $+\mu$ et $-\mu$.

La condition (8) exprime alors que la courbe L est tout entière au-dessus de chaque sinusoïde de la forme

$$(8') \qquad h = A\sin\varphi + B\cos\varphi - r,$$

qui lui est tangente. Et, comme conséquence de (4) et (8), on voit que L est tout entière au-dessous de chaque sinusoïde de la forme

$$(8'') \qquad h = A\sin\varphi + B\cos\varphi + r,$$

qui lui est tangente (¹).

Soient α un point où $h(\varphi) = 0$, β la plus petite valeur supérieure à α où $h(\varphi) = \pm\mu$ et supposons que $h(\beta) = +\mu$. L'arc de L correspondant à $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ est au-dessus de la sinusoïde (8') qui lui est tangente au point $\varphi = \beta$, on a donc

$$h(\varphi) \geqq (r+\mu)\cos(\varphi-\beta) - r,$$

d'où, en faisant $\varphi = \alpha$,

$$\cos(\beta-\alpha) \leqq \frac{r}{r+\mu}.$$

Appelons $\cos\theta$ le second membre, θ étant aigu. On a $\beta - \alpha \geqq \theta$.

(¹) Ceci revient à dire que si l'on connaît un point A et une normale dirigée en A d'une orbiforme Γ de diamètre D, on en déduit le second pied B de la normale AB et Γ est située entre les tangentes en A et B et aussi entre les circonférences de rayon D et de centres A et B. Comparer avec le n° **6**.

Soit γ la plus petite valeur supérieure à β et telle que $\varphi(\gamma) = -\mu$. Quand on passe de β à γ, h passe de $+\mu$ à o, puis de o à $-\mu$; en utilisant comme on vient de le faire la sinusoïde (8′) et de façon analogue (8″), on trouve que $\gamma - \beta \geqq 2\theta$. Nous savons que γ est inférieur à $\alpha + \pi$. Je dis qu'entre γ et $\alpha + \pi$ il y a encore un point δ où $h(\delta) = +\mu$. Sans quoi en effet il n'y aurait pas de tel point entre $\gamma - \theta$ et $\gamma + \pi$ soit dans un intervalle d'étendue supérieur à π, ce qui est impossible. δ existe donc et l'on a

$$\delta - \gamma \geqq 2\theta, \qquad \alpha + \pi - \delta \geqq \theta;$$

d'où

$$\alpha + \pi - \alpha \geqq 6\theta, \qquad \theta \leqq \frac{\pi}{6}.$$

Donc

$$r \geqq (r + \mu)\cos\frac{\pi}{6} = (r + \mu)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où pour le rayon $r + \mu$ du cercle circonscrit

$$r + \mu \leqq \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Le plus grand cercle circonscrit est donc de rayon $\frac{D}{\sqrt{3}}$; mais cette valeur n'est atteinte que si toutes les inégalités précédentes se changent en égalité, auquel cas L est formée de sinusoïdes (8′) et (8″). Donc, en prenant $\alpha = 0$, on a

$$\begin{aligned}
p(\varphi) &= \frac{D}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), && \text{de o à } \frac{\pi}{3};\\
p(\varphi) &= -\frac{D}{\sqrt{3}}\sin\varphi + D, && \text{de } \frac{\pi}{3} \text{ à } \frac{2\pi}{3};\\
p(\varphi) &= -\frac{D}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi - \frac{5\pi}{6}\right), && \text{de } \frac{2\pi}{3} \text{ à } \pi;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les valeurs non écrites de $p(\varphi)$ résultant de suite de la condition (4). Or on reconnaît la définition de $p(\varphi)$ pour l'orbiforme équilatérale. C'est donc pour elle et pour elle seule que le maximum du cercle circonscrit est atteint.

12. On pourrait traiter de même le cas des ensembles de l'espace, les modifications à apporter à ce qui précède sont banales. Seules les considérations du numéro précédent doivent subir des modifications assez notables. Mais je ne veux pas traiter à nouveau la question de la sphère circonscrite, je dis seulement quel sera ici le problème d'approximation de Tchebycheff.

L'équation (1) sera remplacée par

$$x\cos\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\sin\theta + z\cos\theta - p = 0,$$

où p sera une fonction continue de θ, φ, à dérivées partielles du premier ordre continues. Et nous aurons à représenter au mieux cette fonction $p(\varphi, \theta)$ par une expression de la forme

$$R - [A\cos\varphi\sin\theta + B\sin\varphi\sin\theta + C\cos\theta].$$

Je signale encore la nouvelle forme que prendra la relation (4) : si l'on suppose que $p(\varphi, \theta)$ est définie pour $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ et quel que soit θ,

$$p(\varphi, \theta) + p(\varphi, \theta + \pi) = D.$$

Cette relation montre que le contour apparent en projection d'une surface orbiforme est une courbe orbiforme. De là il résulte que ce contour apparent en projection est de longueur indépendante de la direction des projetantes. Minkowski [1], dans un ingénieux petit Mémoire, a démontré la réciproque. C'est le seul travail que je connaisse sur les surfaces orbiformes. Au point de vue géométrique, celles de ces surfaces qui sont analytiques doivent mériter d'être étudiées. Leur surface des centres doit être bien curieuse; la correspondance qui existe entre leurs lignes de courbure doit aussi être l'origine de faits géométriques intéressants. J'ai dit que le problème du maximum du rayon de la sphère enveloppante se traitait comme le problème plan analogue; il y a cependant une différence à signaler:

Il existait une seule forme de courbe orbiforme donnant au rayon du cercle circonscrit sa valeur maximum; dans l'espace, il existe une infinité de surfaces orbiformes inégales donnant au rayon de la sphère circonscrite sa valeur maximum. En voici la raison, une courbe orbi-

(1) *Œuvres*, t. II, p. 277.

forme de diamètre D est entièrement déterminée quand on l'assujettit à passer par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté D ; au contraire, une surface orbiforme de diamètre D n'est pas définie par la seule condition de passer par les sommets d'un tétraèdre régulier d'arête D.

13. Nous avons déjà remarqué que toutes les orbiformes de même largeur D ont la même longueur. Comme parmi ces orbiformes se trouve la circonférence de diamètre D, elles ont toutes une longueur égale à πD. Du théorème des isopérimètres, il résulte alors que la circonférence de diamètre D est, de toutes les orbiformes de même largeur, celle qui a la plus grande aire, $\frac{\pi D^2}{4}$; cette remarque conduit naturellement à rechercher quelle est l'orbiforme de largeur D qui a la plus petite aire.

Pour traiter ce problème, j'emploierai ici une méthode purement géométrique qui nous permettra de démontrer à nouveau que toutes les orbiformes D ont même longueur que celle de ces orbiformes qui est circulaire et qu'elles ont une aire plus petite qu'elle.

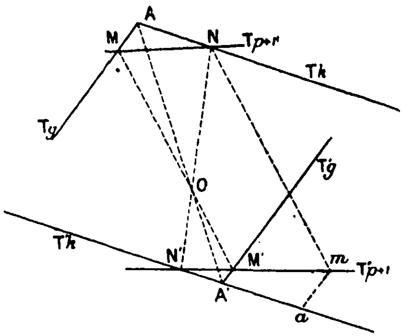
Soient $\alpha_1 = 0$, α_2, α_3, ... un ensemble dénombrable de nombres, positifs et inférieurs à π, partout dense dans $(0, \pi)$; je pose $\alpha'_i = \alpha_i + \pi$. A chaque entier i, j'attache les deux tangentes T_i, T'_i, de directions α_i et α'_i, d'une orbiforme donnée. Cette orbiforme sera parfaitement déterminée par la connaissance de cette infinité dénombrable de tangentes ; sa longueur et son aire peuvent être considérées comme des fonctions des nombres α_i. Les problèmes de Calcul des Variations relatifs aux orbiformes peuvent ainsi être considérés comme des questions de minimum pour des fonctions des variables α_i. Cette transformation banale est ici avantageuse.

Nous allons, pour une orbiforme quelconque, calculer L et S comme limites des nombres analogues relatifs au polygone circonscrit Π_p formé par les tangentes T_1, T'_1, T_2, T'_2, ..., T_p, T'_p. On passe de Π_p à Π_{p+1} en enlevant de Π_p deux triangles ; pour préciser, supposons que α_{p+1} soit compris entre les deux nombres α_g et α_k de la suite α_1, α_2, ..., α_n, α'_1.

Les tangentes T_g et T'_g, distantes de la largeur D de l'orbiforme, et les deux tangentes T_k et T'_k, distantes aussi de D, forment un losange dont les points A et A' de rencontre de T_g et T_k, de T'_g et T'_k sont deux sommets opposés. De sorte que AA' est la bissectrice de T_g et de T_k, de T'_g et de T'_k dont la direction est $\left(\frac{\alpha_g + \alpha_k}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Si T_{p+1} rencontre T_g en M et T_k en N et si, de même, T'_{p+1} rencontre T'_g et T'_k en M' et N', MM' et NN' sont les bissectrices extérieures des angles AMN, A'M'N'; ANM, A'N'M'. Les deux triangles AMN, A'M'N' sont donc homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre à la fois du cercle exinscrit dans AMN, suivant le côté MN, et du cercle analogue relatif à A'M'N'.

Fig. 3.



La longueur MN + M'N' est la base $N'm$ d'un triangle semblable à la fois à OMN et à O M'N' et dont la hauteur est la somme D des hauteurs de ces triangles. MN + M'N' a donc une valeur que l'on peut calculer dès que l'on connaît α_g, α_{p+1}, α_k et qui est indépendante de celle des orbiformes de largeur D que l'on considère.

De même AM + A'M' et AN + A'N' ont des valeurs connues, celles des longueurs des côtés am, aN' d'un triangle 0_p semblable à AMN et de base MN + MN'. Donc, quand on passe de Π_p à Π_{p+1}, on diminue le périmètre du polygone circonscrit d'une longueur bien déterminée $D\varepsilon_p$.

La longueur de Π_p est donc égale à

$$\text{longueur de } \Pi_2 - D(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{p-1});$$

elle est donc la même pour toutes les orbiformes de largeur D et, par suite, celles-ci ont toutes même longueur; résultat déjà connu.

14. Évaluons de même la différence entre les aires de Π_{p+1} et Π_p; c'est-à-dire la somme des aires des triangles AMN, A'M'N'. Cette somme est égale à l'aire du triangle θ_p déjà considéré, semblable à AMN et de base $MN + M'N'$, multipliée par $\lambda_p^2 + (1 - \lambda_p)^2$ si λ_p est le rapport $\frac{MN}{MN + M'N'}$.

Le triangle θ_p est indépendant de l'orbiforme considérée; c'est-à-dire de la forme particulière du polygone Π_p; il en est de même de son aire. La seule quantité qui varie d'une orbiforme à l'autre c'est la grandeur de la quantité λ_p qui peut varier de o à 1. Or, le multiplicateur $|\lambda_p^2 + (1 - \lambda_p)^2|$ est minimum pour $\lambda_p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $MN = M'N'$, et maximum pour $\lambda_p = 0$, ou 1, c'est-à-dire MN ou M'N', égal à zéro. Les deux limites entre lesquelles peut varier l'aire de Π_p sont donc, en désignant par η_p l'aire de θ_p,

$$\text{aire de } \Pi_2 - \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_{p-1})$$

et

$$\text{aire de } \Pi_2 - (\eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_{p-1}).$$

Et puisque l'aire de l'orbiforme est la limite de l'aire de Π_p, les maximum et minimum de cette aire seront

$$\text{aire de } \Pi_2 - \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 + \ldots)$$

et

$$\text{aire de } \Pi_2 - (\eta_2 + \eta_3 + \ldots);$$

du moins s'il existe bien des orbiformes pour lesquelles ces limites sont atteintes.

Le maximum est atteint pour une orbiforme telle que l'on ait constamment $MN = M'N'$; alors les deux triangles AMN, A'M'N' sont égaux et les deux circonférences de centre O exinscrites respectivement dans AMN et A'M'N' étant de même rayon, sont confondues. Le point O est donc également distant de T_g, T'_g, T_k, T'_k, T_{p+1}, T'_{p+1}; par suite, en raisonnant de proche en proche, on voit qu'il existe un point O également distant de toutes les tangentes à l'orbiforme qui est donc une circonférence. Résultat connu.

15. Le minimum indiqué serait atteint si l'on avait constamment $MN = 0$ ou $M'N' = 0$; on va voir que cela est impossible, en général, de sorte que le véritable minimum est plus petit que celui que nous avions trouvé plus haut. Ceci peut paraître en contradiction avec les dernières lignes de ma Note des *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, 1914, p. 76. Aussi je vais développer ici le raisonnement indiqué en quelques mots seulement dans la Note citée.

Sans précautions particulières, on ne peut pas avoir constamment $MN . M'N' = 0$; supposons en effet que Π_2 soit un carré ABCD; T_3 ou T'_3 devrait passer par un sommet de Π_2; par A, par exemple. Alors A appartiendrait certainement à l'orbiforme, AB et AD seraient donc deux normales à la courbe; B et D seraient deux points de l'orbiforme, ce qui est impossible, car $BD = D\sqrt{2}$.

Mais nous allons voir qu'en choisissant convenablement les orientations α_1, α_2, il est possible que la condition $MN . M'N' = 0$ soit réalisée à partir du passage de Π_2 à Π_3.

Prenons $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$; Π_2 est un losange formé par deux triangles équilatéraux accolés par leur base. L'aire de Π_2 est la même pour toutes les orbiformes.

Prenons $\alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$; si la condition $MN . M'N' = 0$ est remplie, l'une des tangentes T_3 ou T'_3 passera par l'un des sommets de Π_2 en lequel l'angle de Π_2 est $\frac{2\pi}{3}$. Soit A ce sommet, soit ABCD le losange. Alors A fait partie de l'orbiforme, donc les perpendiculaires en A à AB et AD sont deux normales et leurs points de rencontre, respectivement avec CD et BC sont deux autres points β et γ de l'orbiforme. Mais $A\beta\gamma$ est équilatéral ; l'orbiforme est donc l'orbiforme équilatérale. C'est par celle-ci, et par celle-ci seule, que le minimum est atteint.

Ainsi *l'orbiforme d'aire minimum est l'orbiforme équilatérale; son aire est* $D^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (¹).

(¹) Le calcul effectif des ε et η fournit des identités intéressantes, mais qui ne diffèrent pas de celles que donnent les calculs classiques de π.

16. Présenté sous la forme précédente, l'artifice paraît très spécial et basé entièrement sur le fait que toute normale à une orbiforme est une normale double. On peut lui donner une forme qui le rend utilisable dans des cas assez variés.

Supposons que nous ayons à chercher le minimum d'une fonction de contour $F(c)$, qui conserve la même valeur pour deux contours homothétiques et dont le minimum ne puisse être atteint que par un contour convexe. Il sera alors tout naturel de déterminer ces contours par leurs tangentes de directions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, les α_p étant des nombres donnés partout denses dans $(0, 2\pi)$. Les p premières tangentes forment un polygone Π_p; le passage à Π_{p+1} fera passer la fonction de $F(\Pi_p)$ à $F(\Pi_{p+1})$ et, grâce à la condition d'homothétie, il arrivera souvent que le gain, $F(\Pi_p) - F(\Pi_{p+1})$, le meilleur qui puisse se réaliser, soit indépendant de Π_p; on déterminera donc alors facilement les tangentes successives, donc le contour minimisant.

Pour retrouver ce que nous avons fait précédemment, il suffit de rechercher, pour les orbiformes, le maximum et le minimum du quotient $\frac{L^2}{S}$, du carré de la longueur à la surface; dans ce cas, pour tenir compte de la définition de l'orbiforme, on déterminera toujours simultanément les tangentes de directions α_p et $\alpha_p + \pi$.

J'ai montré, dans la Note citée, qu'ainsi présenté, l'artifice réussit très bien pour le problème des isopérimètres, problème qu'il faut ici énoncer comme étant encore la recherche du minimum de $\frac{L^2}{S}$; mais cette fois pour toutes les courbes possibles.

On voit, qu'en somme, on trouve avantage à ne pas raisonner sur une intégrale, comme on le fait ordinairement dans le calcul des variations, mais à raisonner sur une expression construite à l'aide de plusieurs intégrales.