JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les formes d'Hermite ternaires dans un corps quadratique imaginaire (champs $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-2}$)

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 4 (1921), p. 3-35.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1921_8_4__3_0>

Sur les formes d'Hermite ternaires dans un corps quadratique imaginaire (champs $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-2}$);

PAR G. HUMBERT.

I. — Généralités.

Soit la forme d'Hermite

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x, y, z) = {} & a x x_0 + b''_0 x y_0 + b'' x_0 y \\ & + a' y y_0 + b_0 y z_0 + b y_0 z + a'' z z_0 + b'_0 z x_0 + b' z_0 x, \end{aligned}$$

a, a', a'' étant des entiers réels, b, b_0, ... des entiers conjugués du corps quadratique $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-2}$, ainsi que x, x_0, ...

La forme f est dite *primitive* lorsque les coefficients a, b''_0, ... n'ont aucun diviseur, entier réel, commun. Lorsque, de plus, a, a', a'' ne sont pas pairs à la fois, la forme est dite *proprement primitive*.

Le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b''_0 & b' \\ b'' & a' & b_0 \\ b'_0 & b & a'' \end{vmatrix}$$

est appelé *déterminant de la forme*. Son développement est

$$D = aa'a'' + bb'b'' + b_0 b'_0 b''_0 - a b b_0 - a' b' b'_0 - a'' b'' b''_0.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} a\, x_0 + b''_0 y_0 + b' z_0 &= X, & a\, x + b'' y + b'_0 z &= X_0, \\ b'' x_0 + a' y_0 + b_0 z_0 &= Y, & b''_0 x + a' y + b z &= Y_0, \\ b'_0 x_0 + b\, y_0 + a'' z_0 &= Z, & b' x + b_0 y + a'' z &= Z_0, \end{aligned}$$

on a

$$f(x, y, z) = xX + yY + zZ = x_0 X_0 + y_0 Y_0 + z_0 Z_0.$$

La forme obtenue en remplaçant dans la forme donnée x, y, z

(et aussi x_0, y_0, z_0) par leur valeur en fonction de X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0, s'appelle la *forme adjointe* de la forme $f(x, y, z)$.

Son expression est

$$-\begin{vmatrix} a & b''_0 & b' & X \\ b'' & a' & b_0 & Y \\ b'_0 & b & a'' & Z \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & 0 \end{vmatrix} = XX_0(a'a''-bb_0)+\ldots.$$

On désigne par Ω le plus grand commun diviseur (entier ordinaire) des coefficients de l'adjointe; on prend $\Omega > 0$ si la forme f est définie et $\Omega < 0$ si elle est indéfinie. La forme adjointe peut s'écrire ΩF; F est appelée la *forme réciproque* de f.

Les coefficients de l'adjointe sont

$$\begin{aligned} A &= a'a''-b\,b_0, & B''_0 &= b_0\,b'_0-a''b'', \\ A' &= a\,a''-b'\,b'_0, & B'_0 &= b''_0\,b'_0-a'\,b', \\ A'' &= a\,a'-b''\,b''_0, & B_0 &= b'_0\,b''_0-a\,\,b. \end{aligned}$$

Comme on a $A'A''-BB_0 = Da$, ..., Ω^2 divise Da, $D'a'$, ..., c'est-à-dire divise D, car les coefficients de la forme f n'admettent aucun diviseur, entier réel, commun.

On pose alors

$$D = \Omega^2\Delta.$$

Les formes $f(x, y, z)$, pour lesquelles Ω et Δ sont les mêmes, forment un *ordre*.

Les formes f et F sont définies ou indéfinies en même temps (cela résulte des conditions pour qu'une forme soit définie).

On démontre, comme dans le cas des formes ternaires ordinaires, les deux *relations fondamentales*.

La première est

$$f(x, y, z;\, x_0, y_0, z_0)f(x', y', z', \ldots) = HH_0+\Omega F(x'y''-y'x'', \ldots)$$

(la seule différence avec les formes ordinaires est que H^2 est remplacé par HH_0).

Dans les formes d'Hermite, il n'y a pas de *genres*, ce qui simplifie beaucoup la théorie.

II. — Mesure du nombre des représentations d'un entier, premier à $2\Omega\Delta$ par les formes de l'ordre (Ω, Δ).

1. *Représentations propres.* — On passe, comme dans la théorie des formes ordinaires, par la *représentation d'une forme binaire.*

Si, dans la forme $f(x, y, z)$, on pose

$$\begin{aligned} x &= \alpha\xi + \alpha'\eta, & x_0 &= \alpha_0\xi_0 + \alpha'_0\eta_0, \\ y &= \beta\xi + \beta'\eta, & y_0 &= \beta_0\xi_0 + \beta'_0\eta_0, \\ z &= \gamma\xi + \gamma'\eta, & z_0 &= \gamma_0\xi_0 + \gamma'_0\eta_0, \end{aligned}$$

les α, α', ... étant des entiers complexes, tels que les mineurs $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$ soient premiers entre eux (dans le sens de Gauss), et si

$$f(x, y, z) = \varphi(\xi, \eta) = m\xi\xi_0 + n''\xi_0\eta + n''_0\xi\eta_0 + m'\eta\eta_0,$$

on dit que $f(x, y, z)$ représente *proprement* $\varphi(\xi, \eta)$.

Soit $D = n''n''_0 - mm'$ le déterminant de $\varphi(\xi, \eta)$; on a

$$D = -\Omega F(\beta\gamma' - \gamma\beta', \ldots).$$

D est donc de la forme $D = -\Omega M''$.

La représentation de φ par f dépend de congruences, dont il suffit d'écrire celle-ci (inconnues N, N_0, conjuguées) :

$$NN_0 + \Delta m \equiv 0 \pmod{M''}.$$

Étudions d'abord le cas du *champ* $\sqrt{-1}$.

On sait, par Hermite, que si M'' est impair et premier à $\Omega\Delta$, cas dans lequel nous nous placerons, et si

$$M'' = p^{\alpha}p'^{\alpha'}\ldots,$$

le nombre de solutions de la congruence est

$$M''\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\left[1 - \left(\frac{-1}{p'}\right)\frac{1}{p'}\right]\cdots.$$

Supposons Ω et Δ impairs; toutes les formes $\mathcal{F}$ sont, dans ce cas, *proprement primitives.*

On conclut, comme dans la théorie ordinaire, que « la mesure du nombre des représentations propres de M'', premiers à $2\Omega\Delta$, par les $\mathcal{F}$, proprement primitives, d'un même ordre (Ω, Δ) ($\Omega\Delta$ impair), est

$$[\mathrm{H}(-\Omega\mathrm{M}'') + \mathrm{H}_1(-\Omega\mathrm{M}'')]\,\mathrm{M}''\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\cdots,$$

$\mathrm{H}(-\Omega\mathrm{M}'')$ étant la mesure des classes de formes (positives, proprement primitives) binaires d'Hermite, de déterminant $-\Omega\mathrm{M}''$, H_1 la même mesure pour les classes de formes improprement primitives ».

2. *Conséquence*. — On déduit du théorème précédent l'équation

$$\sum \frac{1}{k\,\mathfrak{F}^s(x, y, z)} = \sum \frac{1}{m^s}[\mathrm{H}(-\Omega m) + \mathrm{H}_1(-\Omega m)]\,m\,\Pi_p\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right].$$

Au premier membre, Σ porte :

1° Sur les $\mathfrak{F}$ proprement primitives de l'ordre (Ω, Δ);

2° Sur les x, y, z, entiers complexes du champ $\sqrt{-1}$, premiers entre eux, rendant $\mathfrak{F}$ premier à $2\Omega\Delta$.

k est le nombre de transformations, à déterminant $+1$ de $\mathfrak{F}$ en elle-même.

Au second membre, Σ porte sur les m, entiers ordinaires premiers à $2\Omega\Delta$; $p, p', \ldots$ sont les facteurs premiers de m.

Or, d'après une formule de M. Fatou,

$$\mathrm{H}(-\Omega m) = \frac{\Omega m}{8}\,\Pi_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p\left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right],$$

ω désignant les facteurs premiers > 1 de Ω, et, d'autre part,

$$\mathrm{H}_1(-\Omega m) = 0 \qquad \text{si} \qquad \Omega m \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\mathrm{H}_1(-\Omega m) = \frac{2}{3}\mathrm{H}(-\Omega m) \qquad \text{si} \qquad \Omega m \equiv 3 \pmod 4.$$

Le second membre s'écrit donc

$$\sum \lambda_m \frac{1}{m^{s-2}}\,\frac{\Omega}{8}\,\Pi_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p\left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$\lambda_m = 1$ ou $\frac{5}{3}$, selon que $\Omega m \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$, c'est-à-dire

$$\lambda_m = \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{-1}{\Omega m}\right)\right].$$

Prenons d'abord dans λ_m le terme $\frac{4}{3}$; la partie correspondante du second membre est, en faisant $m = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots$,

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\mathrm{H}_\omega \sum_{\alpha, \alpha', \ldots} \frac{1}{p^{\alpha(s-2)} p'^{\alpha'(s-2)}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p'^2}\right) \cdots,$$

p, p', ... parcourent les nombres premiers impairs, 1 compris; pour $p = 1$, on pose $\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = 1$.

On voit de suite que Σ est un produit par rapport à $p, p', \ldots$. La somme des termes qui répondent, pour p, à $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ est

$$1 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^{s-2}}}.$$

Donc, la première partie du second membre est

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\mathrm{H}_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\mathrm{H}_p \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^{s-2}}},$$

p parcourant tous les nombres premiers réels impairs premiers à $\Omega\Delta$.

Prenons maintenant dans λ_m le terme

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega m}\right).$$

On peut l'écrire

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\left(\frac{-1}{p}\right)^\alpha\left(\frac{-1}{p'}\right)^{\alpha'} \cdots$$

La seconde partie du second membre est donc

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\mathrm{H}_\omega \mathrm{H}_p \left\{1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\left(\frac{-1}{p}\right)^\alpha\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right\}$$

c'est-à-dire, en sommant la progression géométrique,

$$-1\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\mathrm{H}_\omega \mathrm{H}_p \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^s}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}}.$$

Le second membre total devient

$$\frac{4}{3}\,\frac{\Omega}{8}\,\Pi_\omega\,\Pi_p\,\frac{1-\dfrac{1}{p^s}}{1-\dfrac{1}{p^{s-2}}}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\,\Pi_\omega\,\Pi_p\,\frac{1-\left(\dfrac{-1}{p}\right)\dfrac{1}{p^s}}{1-\left(\dfrac{-1}{p}\right)\dfrac{1}{p^{s-2}}}\,.$$

5. *Formule fondamentale.* — Appliquons à la forme $\psi(\xi,\eta)=\xi^2+\eta^2$, de déterminant -1, la formule de Dirichlet du champ réel, on a

$$(\mathrm{R})\qquad \sum\nolimits''\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^s}=\Pi_p\,\frac{1+\dfrac{1}{p^s}}{1-\left(\dfrac{-1}{p}\right)\dfrac{1}{p^s}}.$$

Dans le premier membre, Σ porte sur les nombres ξ et η premiers entre eux, tels que $\xi^2+\eta^2$ soit premier à $2\Omega\Delta$; dans le deuxième, p est premier, >1, premier à $2\Omega\Delta$. On ne prend dans Σ'' qu'une représentation par série (c'est-à-dire que si l'on a pris ξ, η on ne prend pas ξ', η' déduits de ξ, η par une des transformations de $\xi^2+\eta^2$ en elle-même). Autrement, il faudrait multiplier le second membre de la relation (R) par 4.

Multiplions membre à membre la relation obtenue précédemment et R; on obtient au premier membre

$$\sum\frac{1}{k\,\mathcal{F}^s(x,y,z)}\sum\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^s},$$

c'est-à-dire, en posant $\xi^2+\eta^2=uu_0$,

$$\sum\frac{1}{k\,\mathcal{F}^s(xu,yu,zu)},$$

$u=\xi+\eta i$ est un entier complexe premier à $2\Omega\Delta$; ξ et η sont premiers entre eux dans le champ réel (cela exclut ξ entier réel >1 et $\eta=0$). Grâce à la convention faite sur ξ, η, tout système ξ, η convenable figure une fois et une seule au premier membre, k désigne toujours le nombre des transformations à déterminant $+1$ de $\mathcal{F}$ en elle-même.

Le second membre est

$$\frac{4}{3}\,\frac{\Omega}{8}\,\Pi_\omega\,\Pi_p\,\frac{1-\dfrac{1}{p^{2s}}}{\left[1-\left(\dfrac{-1}{p}\right)\dfrac{1}{p^s}\right]\left[1-\dfrac{1}{p^{s-2}}\right]}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\,\Pi_\omega\,\Pi_p\,\frac{1+\dfrac{1}{p^s}}{1-\left(\dfrac{-1}{p}\right)}.$$

Transformons les termes du produit Π_p :

$$\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)} = \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}\right]}.$$

Le second membre devient, par une transformation connue,

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega\frac{\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega\frac{\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}},$$

où n, dans les Σ, parcourt les nombres entiers impairs positifs, premiers à $2\Omega\Delta$.

Faisons passer $\sum\frac{1}{n^{2s}}$ au premier membre; celui-ci devient

$$\sum\frac{1}{k\,\mathcal{F}^s(nux,\,nuy,\,nuz)},$$

c'est-à-dire

$$\sum\frac{1}{k\,\mathcal{F}^s(X,\,Y,\,Z)},$$

où X, Y, Z ne sont plus premiers entre eux, mais sont tels que $\mathcal{F}(X, Y, Z)$ est premier à $2\Omega\Delta$.

Par les conventions faites sur ξ, η, chaque système X, Y, Z convenable ne figure qu'une fois.

On obtient ainsi l'équation fondamentale :

$$\sum\frac{1}{k_i\mathcal{F}_i^s(X,Y,Z)} = \frac{\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]}{24}$$
$$\times\left[4\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}-\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}\right].$$

Au premier membre, Σ porte :

1° Sur les $\mathcal{F}_i$ proprement primitives de l'ordre (Δ, Ω);

2° Sur les X, Y, Z entiers complexes tels que $\mathcal{F}_i(X, Y, Z)$ soit premier à $2\Omega\Delta$.

Au second membre, ω désigne tout facteur premier, impair, >1, de Ω; n, dans les Σ, parcourt les entiers ordinaires positifs premiers à $2\Omega\Delta$.

4. *Représentation d'un entier.* — En égalant dans les deux membres de l'équation précédente les coefficients de $\frac{1}{m^s}$, on obtient le théorème suivant:

La mesure du nombre des représentations, propres ou non, de m, positif, premier à $2\Omega\Delta$, par les formes $\mathfrak{F}$ proprement primitives de l'ordre (Ω, Δ) (Ω, Δ impair), est

$$\frac{1}{24}\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left[4-\left(\frac{-1}{m\Omega}\right)\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n^2}\right),$$

la somme Σ étant étendue aux décompositions $m = nn'$.

Application. — Soit $f = xx_0 + yy_0 + zz_0$. On a

$$\Omega = \Delta = 1, \qquad \mathfrak{F} = f.$$

Il n'y a qu'une classe proprement primitive de l'ordre $(1, 1)$. Pour cette classe, $k = 96$. On a, par suite, le théorème :

Le nombre de décompositions d'un nombre impair en une somme de six carrés est

$$4\left[4-\left(\frac{-1}{m}\right)\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right),$$

Σ étant étendu aux décompositions $m = nn'$.

5. *Cas de $\Delta\Omega$ pair.* — On démontre que, si f est proprement primitive, elle ne peut représenter proprement des formes binaires improprement primitives. Supposons donc f et $\mathfrak{F}$ proprement primitives, c'est-à-dire prenons toutes les f_i proprement primitives de l'ordre $(\Omega\Delta)$ dont les réciproques $\mathfrak{F}_i$ sont proprement primitives. Il n'y a pas à introduire dans la formule les formes improprement primitives, binaires, de déterminant $-\Omega M''$; on fera donc $\lambda_m = 1$. Il vient

$$\sum\frac{1}{k\mathfrak{F}^s(X, Y, Z)} = \frac{\Omega}{8}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

les ω étant les diviseurs impairs, premiers, > 1 de Ω. On en conclut :

La mesure du nombre des représentations (propres et impropres) par les $\mathfrak{f}$ de m impair, premier à $2\Omega\Delta$, est

$$\frac{1}{8}\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right),$$

Σ étant étendu aux décompositions $m = nn'$.

Applications. — 1° Soient

$$f = xx_0 + yy_0 + 2zz_0, \qquad \mathfrak{f} = 2xx_0 + 2yy_0 + zz_0, \qquad \Omega = 1, \qquad \Delta = 2.$$

Les classes correspondantes sont uniques dans leurs ordres respectifs; $k = 32$ pour f et $\mathfrak{f}$. On obtient le théorème suivant :

Le nombre des représentations primitives ou non, de m impair, par l'expression

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_3^2 + x_4^2) + x_5^2 + x_6^2$$

est

$$4\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right).$$

2° $\quad f = 2xx_0 + 2yy_0 + zz_0, \qquad \mathfrak{f} = xx_0 + yy_0 + 2zz_0, \qquad \Omega = 2, \qquad \Delta = 1.$

On obtient, de la même façon :

Le nombre des représentations de m impair par

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_5^2 + x_6^2)$$

est

$$8\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right).$$

Ces deux théorèmes ont été donnés, sans démonstration, par Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2^e série, t. 9).

3° $\quad f = xx_0 + yy_0 + 3zz_0, \qquad \mathfrak{f} = 3xx_0 + 3yy_0 + zz_0, \qquad \Omega = 1, \qquad \Delta = 3.$

Il y a une autre forme proprement primitive, du même ordre, non équivalente :

$$f' = xx_0 + 2yy_0 + yz_0 + y_0z + 2zz_0.$$

La forme $\varphi' = 2yy_0 + yz_0 + y_0z + 2zz_0$ admet 6 automorphies;

f' en admet donc $4 \times 6 = 24$; f admet 32 automorphies. D'où le théorème :

Soient N_m *et* N'_m *les nombres des représentations de* m, *impair, premier à* 3 *par les expressions*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3u^2 + 3v^2$$

et

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zu + 2u^2 + 2t^2 + 2tv + 2v^2.$$

On a, entre N_m *et* N'_m *la relation*

$$3N_m + 4N'_m = 8\left[4 + \left(\frac{-1}{m}\right)\right] \sum n^2 \left(\frac{-1}{n'}\right).$$

III. — Représentations d'un entier (champ $\sqrt{-2}$).

1. *Cas de* $\Delta\Omega$ *impair.* — Les formes f et $\mathfrak{F}$ ont leur discriminant impair, et sont par suite proprement primitives. Le nombre des représentations propres par les $\mathfrak{F}$ de m positif, premier à $2\Omega\Delta$, est ($m = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots$)

$$[M(\Omega m) + M'(\Omega m)]\, m \left[1 - \left(\frac{-2}{p}\right) \frac{1}{p}\right] \cdots.$$

Or, par la théorie des formes binaires, on a :

$$M(\Omega m) = \frac{2\Omega m}{8} \Pi_\omega \left[1 + \left(\frac{-2}{\omega}\right) \frac{1}{\omega}\right] \Pi_p \left[1 + \left(\frac{-2}{p}\right) \frac{1}{p}\right],$$

$$M'(\Omega m) = \mu M(\Omega m) \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{6}\left[2 - \left(\frac{-2}{\Omega m}\right)\right].$$

De même que pour le corps $\sqrt{-1}$,

$$(1) \quad \sum \frac{1}{k\mathfrak{F}^s(x, y, z)} = \sum \frac{1}{m^s} [M(\Omega m) + M'(\Omega m)]\, m\, \Pi_p \left[1 - \left(\frac{-2}{p}\right) \frac{1}{p}\right].$$

Au premier membre, x, y, z sont des entiers, premiers entre eux, du corps $\sqrt{2}$, tels que $\mathfrak{F}$ soit premier à $2\Omega\Delta$; les $\mathfrak{F}$ sont les formes (proprement primitives) d'invariants Δ, Ω. La somme du second membre porte sur les m premiers à $2\Omega\Delta$.

Le second membre s'écrit

$$\sum \frac{1}{m^{s-2}} \left[1 - \left(\frac{-2}{p}\right) \frac{1}{p}\right] \cdots$$
$$\times \frac{1}{p} \Omega \Pi_\omega \left[1 + \left(\frac{-2}{\omega}\right) \frac{1}{\omega}\right] \left[1 + \left(\frac{-2}{p}\right) \frac{1}{r}\right] \cdots \frac{1}{6}\left[8 - \left(\frac{-2}{\Omega m}\right)\right].$$

La quantité sous le signe Σ est

$$(\varepsilon)\quad \frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}\cdots}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left[8-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\left(\frac{-2}{p}\right)^{\alpha}\cdots\right].$$

Pour $m=1$, on a dans cette expression le terme

$$M(\Omega)+M'(\Omega)\quad \text{ou}\quad \frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left[8-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\right]$$

que nous mettrons en évidence en écrivant (ε) de la façon suivante :

$$\frac{\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]}{24}$$
$$\times\left\{8\left[1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\cdots\right]-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\left[1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\left(\frac{-2}{p}\right)^{\alpha}\cdots\right]\right\}.$$

Sommons les progressions géométriques $\alpha=1$ à ∞; on a

$$\frac{\Omega}{3}\Pi_\omega\Pi_p\; 1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left\{\frac{\frac{1}{p^{s-2}}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}}\right\}$$
$$-\frac{\Omega\Pi_\omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_p\left\{1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{\frac{1}{p^{s-2}}\left(\frac{-2}{p}\right)}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}}\right\}$$

ou encore

$$(2)\qquad \frac{\Omega\Pi_\omega}{3}\Pi_p\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}}-\frac{\Omega\Pi_\omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_p\frac{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}},$$

p parcourt, dans Π_p, tous les nombres premiers impairs, premiers à $\Omega\Delta$.

On a, d'autre part :

$$(3)\qquad \sum{}''\frac{1}{(\xi^2+2\eta^2)^s}=\Pi_p\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^s}},$$

$\xi^2+2\eta^2$ premier à $2\Omega\Delta$, ξ et η premiers entre eux.

Multiplions (1) et (3) membre à membre, en remplaçant le second membre de (1) par (2); on trouve

$$\sum \frac{1}{k\mathfrak{F}^s(xu, yu, zu)} = \frac{\Omega}{3}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^{s-2}}\right)\left[1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right]}$$

$$-\frac{\Omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_\omega\Pi_p\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}},$$

u est un entier du corps $i\sqrt{2}$ premier à $2\Omega\Delta$ ($u = \xi + i\eta\sqrt{2}$, ξ et η premiers dans le champ réel).

Le second membre s'écrit

$$\frac{\Omega}{3}\Pi_\omega\frac{\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}} - \frac{\Omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_\omega\frac{\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}},$$

n entier quelconque positif, premier à $2\Omega\Delta$.

Chassant $\sum\frac{1}{n^{2s}}$, on a

$$\sum\frac{1}{k\mathfrak{F}^s(X, Y, Z)} = \frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left|1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right|$$
$$\times\left\{8\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^s}-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}\right\},$$

X, Y, Z sont des entiers quelconques du corps $i\sqrt{2}$, tels seulement que $\mathfrak{F}(X, Y, Z)$ soit premier à $2\Omega\Delta$; ω est un diviseur premier impair > 1 de Ω, n un entier quelconque, positif, premier à $2\Omega\Delta$.

2. *Cas de* $\Omega\Delta$ *pair*. — On démontre, comme pour le corps $\sqrt{-1}$ que $M'(\Omega\Delta)$ n'a pas à intervenir; il reste (les formes f et $\mathfrak{F}$ étant proprement primitives) pour la formule fondamentale :

$$\sum\frac{1}{k\mathfrak{F}^s(X, Y, Z)} = \frac{\Omega}{4}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^s}.$$

3. *Représentations d'un entier*. — Dans le cas de $\Omega\Delta$ impair, on a le corollaire suivant :

Le nombre total des représentations de m, entier positif, premier à $2\Omega\Delta$ *par les* $\mathfrak{F}_i$, *une représentation par* $\mathfrak{F}_i$ *comptant pour* $\frac{1}{k_i}$, *est*

$$\frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left|1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right|\left\{8\sum d^2\left(\frac{-2}{d'}\right)-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\sum d^2\left(\frac{-2}{d}\right)\right\},$$

les sommes étant étendues aux décompositions $m = dd'$, *ou encore*

$$\frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum d^2\left(\frac{-2}{d}\right)\left|8\left(\frac{-2}{m}\right)-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\right|.$$

4. *Application*. — Soit $\Omega = \Delta = 1$.

Les formes $\mathfrak{F}_i$ sont alors :

$$\mathfrak{F}_1 = xx_0 + yy_0 + zz_0 \qquad (k_1 = 24),$$

$$\mathfrak{F}_2 = xx_0 + 2yy_0 + (1+i\sqrt{2})z_0 y + (1-i\sqrt{2})zy_0 + 2zz_0 \qquad (k_2 = 48)$$

[car la forme $2yy_0 + (1+i\sqrt{2})z_0y + (1-i\sqrt{2})zy_0 + 2zz_0$ a 24 automorphies, on en conclut que $\mathfrak{F}_2$ en a 48].

$\mathfrak{F}_1$ donne des représentations par l'expression

$$x^2+y^2+z^2+2(t^2+u^2+v^2),$$

x, y, z, t, u, v étant réels. Soit N_1 le nombre de ces représentations.

Les représentations pour $\mathfrak{F}_2$ sont de la forme

$$m = x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_1z_1 + 4y_2z_2 + 4(y_1z_2 - y_2z_1) + 2z_1^2 + 4z_2^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$m = x_1^2 + 2x_2^2 + (2y_2 + z_2 - z_1)^2 + (z_1 + y_1 + z_2)^2 + (y_1 + z_2)^2 + z_2^2$$

ou encore

$$m = x_1^2 + 2x_2^2 + u^2 + v^2 + w^2 + t^2$$

avec la seule condition

$$u + v + w + t \equiv 0 \pmod 2$$

ou x_1 impair.

Soit N_2 le nombre de ces représentations.

La formule du n° 3 donne

$$N_1 + \frac{1}{2}N_2 = \left[8\left(\frac{-2}{m}\right) - 1\right]\sum d^2\left(\frac{-2}{d}\right).$$

On en déduit une formule de Liouville, en distinguant différents cas.

1° $m \equiv 5 \pmod 8$. — N_1 est le nombre des décompositions

$$(1) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

où t et u ont même parité, c'est-à-dire où $x+y+z$ est impair. Or, les décompositions (1) sont de trois espèces :

1. Celles où v est pair, x, y, z, t, u impairs. Soit X leur nombre;

2. Celles où v est pair, un seul des $x \ldots u$ impair. Soit Y leur nombre;

3. Celles où v est impair, trois des $x \ldots u$ impairs. Soit Z leur nombre.

Quelles sont celles de ces décompositions où $x+y+z$ est impair? D'abord, toutes les décompositions 1, en nombre X; parmi les décompositions 2, celles où le carré impair figure parmi les trois premiers; leur nombre est $\frac{3}{5}$Y.

Parmi les décompositions 3, il faut prendre celles où un ou trois carrés impairs figurent parmi les trois premiers; leur nombre est $\frac{4}{10}$Z.

On a donc

$$N_1 = X + \frac{3}{5}Y + \frac{2}{5}Z.$$

Quant à N_2, c'est le nombre des décompositions (1) où x est impair. La relation entre N_1 et N_2 est

$$N_1 + \frac{1}{2}N_2 = 9\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

D'autre part, $Y = \frac{5}{2}X$. Soit, en effet, Y′ le nombre des décompositions 2 où le carré impair est le premier; $Y' = \frac{Y}{5}$. On a $X = 2Y'$, car dans une décomposition 1 on peut remplacer la somme des quatre carrés impairs qui suivent le premier par une somme de quatre carrés pairs, et l'on sait que le nombre des décompositions de $8M+4$ en quatre carrés impairs est double de celui des décompositions en quatre carrés pairs. On en conclut $X = 2Y'$, et, par suite, $X = \frac{2}{5}Y$.

On a ainsi $Z' = 5X$. Prenons, en effet, les décompositions 3 e nombre Z′, où les trois carrés impairs sont les premiers; $Z' = \frac{1}{10}Z$.

Soit une de ces décompositions :

$$m = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + \varpi_1^2 + \varpi_2^2 + 2j_4^2 \qquad (j_i \text{ impair, } \varpi_i \text{ pair}).$$

Puisque $m \equiv 5 \pmod 8$ il faut que

$$\varpi_1 = 2n_1, \qquad \varpi_2 = 2n_2, \qquad \text{avec } n_1 + n_2 \text{ pair}.$$

Alors,

$$m = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + 2(n_1 + n_2)^2 + 2(n_1 - n_2)^2 + 2j_4^2$$

ou

$$m = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + (n_1 - n_2 + j_4)^2 + (n_1 - n_2 - j_4)^2 + 2(n_1 + n_2)^2.$$

Ce qui est une décomposition I. Une Z′ donne ainsi deux décompositions I. D'où

$$X = 2Z' \qquad \text{et} \qquad X = \frac{1}{5} Z.$$

Il y a ainsi entre X, Y, Z, N_1, N_2 cinq relations qui permettent de déterminer ces quantités.

On trouve

$$N_1 = N_2 = 6 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

$$X = \frac{4}{3} \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right); \qquad Y = \frac{10}{3} \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right); \qquad Z = \frac{20}{3} \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right);$$

d'où

$$X + Y + Z = \frac{34}{3} \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

On a donc le théorème :

Le nombre des décompositions de m ($\equiv 5 \bmod 8$) *en*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$$

est égal à

$$\frac{34}{3} \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right) \qquad \text{(Liouville).}$$

2° $m \equiv 7 \pmod 8$. — Même démonstration et mêmes formules. Soient :

X le nombre des décompositions (1) où v est impair, $x \ldots u$ impairs ;
Y le nombre des décompositions (1) où v est impair, un seul des $x \ldots u$ impair ;
Z le nombre des décompositions (1) où v est pair, deux des $x \ldots u$ pairs, trois impairs.

On a les mêmes relations entre les N et les X, Y, Z.

D'où le théorème :

Le nombre des décompositions de $m \equiv 5$ ou $7 \pmod 8$ *en*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + 2(t^2 + u^2 + v^2)$$

est

$$6 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

3° $m \equiv 1 \pmod 8$. — On considère les décompositions

$$m = n_1^2 + \ldots + x_5^2 + 2v^2$$

et les divise en :

a. v pair ; un des x_i impairs, quatre pairs (en nombre X) ;

b. v impair, trois des x_i impairs, deux pairs (en nombre Y).

Il vient

$$N_2 = \frac{X}{5} + \frac{3}{5} Y,$$

$$N_1 = \frac{3}{5} X + \frac{4}{10} Y = \frac{3}{5} X + \frac{2}{5} Y.$$

$$N_1 + \frac{1}{2} N_2 = 7 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

En éliminant N_1 et N_2, on obtient :

Le nombre des décompositions de $m \equiv 1 \pmod 8$ *en*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$$

est

$$10 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right) \qquad \text{(Liouville)}.$$

4° $m \equiv 3 \pmod 8$. — Même démonstration et même résultat.

On établit ainsi la formule de Liouville :

Le nombre des représentations de m, *impair, par*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$$

est égal à

$$\frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

la somme portant sur les décompositions $m = d\delta$.

IV. — Mesure des classes proprement primitives ternaires, d'invariants Ω, Δ.

1. Traitons d'abord le cas du corps $\sqrt{-1}$, et supposons, pour l'instant, $\Omega\Delta$ impair. Soient f_1, f_2, ... des représentations des classes proprement primitives (positives) ternaires, d'invariants Ω, Δ (une par classe), $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... leurs réciproques. Les $\mathfrak{F}_i$ sont proprement primitives, car leur déterminant $\Delta^2\Omega$ est impair.

On désignera ici par :

ω, tout facteur premier, impair, >1 de Ω ne divisant pas Δ;
r, tout facteur premier, impair, >1 de Ω divisant Δ;
δ, tout facteur premier, impair, >1 de Δ ne divisant pas Ω.

Partons de l'équation fondamentale, que l'on peut écrire

$$\sum \frac{1}{k_j \mathfrak{F}_j^s(x, y, z)} = \frac{\Omega}{24} \Pi_\omega \left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right] \Pi_r \left[1 + \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]$$
$$\times \left[4 \sum \frac{1}{n^{s-2}} \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{-1}{\Omega}\right) \sum \frac{1}{n^s} \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}\right].$$

Posons $s = 3 + \rho$, multiplions les deux membres de l'équation par ρ et cherchons leurs limites, quand ρ tend vers zéro, par valeurs positives (décroissantes).

2. *Limite du second membre.* — Dans le crochet, la limite du terme

$$-\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\rho \sum \frac{1}{n^{3+\rho}} \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}}$$

est zéro. Cette limite est, en effet, celle de

$$-\left(\frac{-1}{\Omega}\right) \sum \frac{1}{n^3} \lim \left[\rho \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}}\right]_{\rho=0},$$

et la limite indiquée est nulle, d'après Dirichlet, car $\sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n}$ est une quantité finie.

La limite du second membre est donc

$$\frac{\Omega}{6}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_r\left[1+\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}\frac{\varphi(2\Omega\Delta)}{2\Omega\Delta},$$

car, d'après Dirichlet, la limite de $\rho\sum\frac{1}{n^{1+\rho}}$ où n parcourt les entiers positifs premiers à $2\Omega\Delta$ est $\frac{\varphi(2\Omega\Delta)}{2\Omega\Delta}$. Dans $\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}$, n parcourt ces mêmes entiers. D'ailleurs,

$$\frac{\varphi(2\Omega\Delta)}{2\Omega\Delta}=\frac{1}{2}\Pi_\omega\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\Pi_r\left(1-\frac{1}{r}\right)\Pi_\delta\left(1-\frac{1}{\delta}\right).$$

L'expression de $\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}$ a été donnée par Cauchy et Stephen Smith. Posons

$$Q=\Pi_\omega\omega\,\Pi_r r\,\Pi_\delta\delta,$$

Le nombre de décomposition de Q^2 en sommes de 7 carrés est

$$N_{Q^2}=448\,Q^5\frac{1}{\pi^3}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3},$$

n parcourant les entiers premiers à $2Q$, c'est-à-dire à $2\Omega\Delta$.

D'autre part (Smith, t. I, p. 522), on a

$$N_{Q^2}=7\,Q^5\,\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^3}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right]\Pi_\delta\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]\times 2,$$

d'où

$$\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}\Pi_{\omega,\delta,r}\left[1-\left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q^3}\right].$$

Cette formule peut être établie autrement.

Smith (t. I, p. 517) calcule $\sum\left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m^3}$, m parcourant les entiers positifs premiers à $2D$.

Posons

$$V=\sum\left(\frac{-D_1}{m'}\right)\frac{1}{m'^3}\qquad (m' \text{ positif premier à } 2D_1)$$

et

$$D=D_1V^2\qquad (V^2 \text{ plus grand carré divisant } D).$$

On a

$$\sum \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m^3} = V\,\Pi_q\left[1-\left(\frac{-D_1}{q}\right)\frac{1}{q^3}\right],$$

q désignant un facteur premier, impair, >1 de V.

Faisons

$$D = Q^2, \qquad Q = \Pi_\omega \Pi_r \Pi_\delta;$$

on a

$$D_1 = 1, \qquad V = Q;$$

de plus,

$$\sum \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m^3} = \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3},$$

n parcourant les entiers premiers à $2\Omega\Delta$.

V est égal à $\sum \left(\frac{-1}{m'}\right)\frac{1}{m'^3}$, où m' est un entier positif, impair, quelconque; on sait que $V = \frac{\pi^3}{32}$, d'où

$$\sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3} = \frac{\pi^3}{32}\,\Pi_{\omega,\delta,r}\left[1-\left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q^3}\right].$$

La limite finale du second membre est donc

$$\frac{\pi^3}{32}\,\frac{\Omega}{12}\,\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^3}\right]\Pi_\delta\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]$$
$$\times\,\Pi_r\left[1+\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]\left[1-\frac{1}{r}\right]\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right].$$

3. *Limite du premier membre.* — La limite des termes provenant de $\mathfrak{F}_j$ sera $\frac{1}{k_j}\lim\frac{3T}{t}$ pour $t=\infty$, où T est le nombre des

$$\mathfrak{F}_j(x, y, z) \leq \sqrt[3]{t}.$$

Or, $\mathfrak{F}_j(x, y, z)$ devant être premier à $2\Omega\Delta$, il faut donner à X, Y, Z les valeurs complexes

$$X = \alpha + 2Q\xi, \qquad Y = \beta + 2Q\eta, \qquad Z = \gamma + 2Q\zeta,$$

comprises dans un certain nombre N de séries (c'est-à-dire qu'il y a N systèmes α, β, γ). Q est toujours Π_ω, Π_r, Π_δ.

Pour les X, Y, Z d'une série posons

$$\frac{X}{\sqrt[6]{t}} = x = \frac{\alpha}{\sqrt[6]{t}} + 2Q\frac{\xi}{\sqrt[6]{t}}, \qquad \cdots\cdot$$

3T sera trois fois le volume V de l'ellipsoïde $\mathfrak{F}(x, y, z) \leqq 1$, divisé par le volume de la maille, qui est $\left(\frac{2Q}{\sqrt[6]{t}}\right)^6$. Ainsi

$$3T = \frac{3V}{2^6 Q^6} t \qquad \text{ou} \qquad \frac{3T}{t} = \frac{3V}{64 Q^6}.$$

D'ailleurs, V se calculerait aisément; il vaut mieux le prévoir *a priori*. Prenons la forme

$$\mathfrak{F} = xx_0 + \Delta yy_0 + \Omega\Delta zz_0,$$

réciproque de

$$f = \Omega\Delta xx_0 + \Omega yy_0 + zz_0,$$

d'invariants Ω et Δ. Le volume de la sphère

$$X_1^2 + \ldots + X_6^2 = a^2$$

est $\frac{\pi^3}{6} a^3$; pour l'ellipsoïde

$$xx_0 + \Delta yy_0 + \Omega\Delta zz_0 = 1,$$

ce sera

$$\frac{\pi^3}{6} \frac{1}{\Omega\Delta^2} (= V).$$

La limite du premier membre est donc

$$N\left(\sum \frac{1}{k_j}\right) \frac{3}{64 Q^6} \frac{\pi^3}{6} \frac{1}{\Omega\Delta^2}$$

ou

$$N\left(\sum \frac{1}{k_j}\right) \frac{\pi^3}{128\,\Omega\Delta^2 Q^6},$$

et tout revient à calculer N.

4. *Calcul de* N. — On établit, comme pour les formes ternaires réelles, que $\mathfrak{F}$, d'invariants Δ, Ω, vérifie la congruence

$$(\mathfrak{C}) \qquad \mathfrak{F} \equiv \alpha xx_0 + \beta\Delta yy_0 + \gamma\Omega\Delta zz_0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\Omega\Delta),$$

où α, β, γ sont trois entiers ordinaires vérifiant

$$\alpha\beta\gamma \equiv 1 \pmod{2\Omega\Delta}.$$

Au premier membre, $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{f}(x, y, z)$, et la congruence a lieu quels que soient x, y, z du corps $\sqrt{-1}$, les mêmes dans les deux membres.

Il faut étudier dans quels cas (c'est-à-dire pour quels x, y, z) $\mathfrak{f}$ est premier à $2\Omega\Delta$, c'est-à-dire aux facteurs r, δ, ω, 2.

1° Pour que $\mathfrak{f}$ soit premier à r, il faut et il suffit, d'après (ε), que xx_0 soit premier à r, y et z étant quelconques. Or, la congruence

$$xx_0 \equiv 1, 2, \ldots, (r-1) \pmod{r}$$

a, quel que soit le second membre choisi,

$$r - \left(\frac{-1}{r}\right) \text{ solutions} \qquad \text{(Hermite).}$$

On a donc

$$(r-1)\left[r - \left(\frac{-1}{r}\right)\right] \text{ solutions} \pmod{r},$$

pour x, y et z étant d'ailleurs quelconques. y et z peuvent prendre chacun (mod r) un nombre de valeurs égal à r^2; donc, le nombre des systèmes de valeurs de x, y, z (mod r) tels que $\mathfrak{f}$ soit premier à r est

$$r^4(r-1)\left[r - \left(\frac{-1}{r}\right)\right].$$

2° Même résultat avec δ; pour que $\mathfrak{f}$ soit premier à δ, il faut donner à x (y et z étant quelconques)

$$(\delta - 1)\left[\delta - \left(\frac{-1}{\delta}\right)\right] \text{ valeurs} \pmod{\delta}.$$

De même que précédemment, le nombre des systèmes de valeurs de x, y, z (mod δ), tels que $\mathfrak{f}$ soit premier à δ, est

$$\delta^4(\delta - 1)\left[\delta - \left(\frac{-1}{\delta}\right)\right].$$

3° Pour que $\mathfrak{f}$ soit premier à ω, distinguons deux cas :

a. Supposons $yy_0 \equiv 0 \pmod{\omega}$. Combien cela donne-t-il de valeurs $\pmod{\omega}$ pour y?

Le nombre total des valeurs de $y \pmod{\omega}$, puisque $y = y_1 + iy_2$ est ω^2; le nombre des valeurs de $y \pmod{\omega}$ telles que $yy_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega}$ est (d'après 1°)

$$(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right].$$

Donc, le nombre des valeurs cherchées de $y \pmod{\omega}$ est

$$\omega^2 - (\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right] \quad \text{ou} \quad \omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right] - \left(\frac{-1}{\omega}\right),$$

y ayant une de ces valeurs, pour que $\mathcal{F}$ soit premier à ω, il faut donner à x un nombre de valeurs égal, par ce qui précède, à

$$(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right].$$

Combinant ces valeurs de x et de y, et donnant à z une valeur quelconque $\pmod{\omega}$, on trouve ainsi, pour x, y, z, un nombre de systèmes égal à

$$(\omega') \qquad \omega^2(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\left\{\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right] - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right\}.$$

b. Supposons $yy_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega}$. Cela donne, pour $y \pmod{\omega}$, un nombre de valeurs égal à $(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]$ par 1°.

D'autre part, la congruence

$$x\alpha_0 + \beta\Delta\, yy_0 \equiv 0 \pmod{\omega}$$

a, en x,

$$\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right) \text{ solutions} \qquad \text{(Hermite)};$$

l'incongruence

$$\alpha x x_0 + \beta\Delta\, yy_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega}$$

en a donc un nombre égal à $\omega^2 - \omega + \left(\frac{-1}{\omega}\right)$.

On trouve ainsi, en tenant compte de z, qui est quelconque, un nombre de systèmes $x, y, z \pmod{\omega}$ égal à

$$(\omega'') \qquad \omega^2(\omega-1)\left[\omega-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\left[\omega^2-\omega+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right].$$

La somme de (ω') et (ω'') est

$$\omega^2(\omega-1)\left[\omega-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\left[\omega+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\omega$$

ou

$$\omega^3(\omega-1)(\omega^2-1).$$

Tel est le nombre des systèmes $x, y, z \pmod{\omega}$ pour lesquels $\mathcal{F}$ est premier à ω.

4° Reste le facteur 2. Puisque α, β, γ sont impairs, pour que $\mathcal{F}$ soit impair, il faut et il suffit que $xx_0+yy_0+zz_0$ le soit, d'où 32 systèmes $x, y, z \pmod{2}$.

Il résulte de là que le nombre des systèmes $x, y, z \pmod{2Q}$, tels que $\mathcal{F}$ soit premier à $2Q$, est

$$\begin{aligned}N = {} & 32\,\Pi_\omega\,\omega^3(\omega-1)(\omega^2-1)\\ & \times \Pi_\delta\,\delta^4(\delta-1)\left[\delta-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\right]\Pi_r\,r^4(r-1)\left[r-\left(\frac{-1}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

5. *Expression de la mesure.* — En remplaçant N par sa valeur, on obtient pour la limite du premier membre :

$$\begin{aligned}&\left(\sum\frac{1}{k_j}\right)\frac{\pi^3}{128\,\Omega\Delta^2Q^6}\times 32\,\Pi_\omega\,\omega^3(\omega-1)(\omega^2-1)\\ &\quad\times\Pi_\delta\,\delta^4(\delta-1)\left[\delta-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\right]\Pi_r\,r^4(r-1)\left[r-\left(\frac{-1}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$Q = \Pi_\omega\,\omega\,\Pi_r\,r\,\Pi_\delta\,\delta.$$

Égalant à la limite du second membre on trouve, tous calculs faits,

$$\sum\frac{1}{k_j} = \frac{1}{96}\,\Omega^2\Delta^2\,\frac{\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^3}\right]\Pi_\delta\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right]\Pi_r\left[1+\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]}{\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_\delta\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]}.$$

On a ainsi l'expression de la mesure de l'ensemble des classes proprement primitives, positives, d'Hermite (corps $\sqrt{-1}$) d'invariants $\Omega\Delta$ impairs :

$$M(\Omega, \Delta) = \frac{1}{96}\Omega^2\Delta^2\Pi_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right]$$
$$\times \Pi_\delta\left[1 - \left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]\Pi_r\left[1 \quad \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right]\Pi'_r\left[1 - \left(\frac{-1}{r_1}\right)\frac{1}{r}\right];$$

ω, facteur premier (impair) > 1 de Ω, ne divisant pas Δ;
δ, facteur premier (impair) > 1 de Δ, ne divisant pas Ω;
r, facteur premier (impair) > 1, commun à Ω et à Δ.

On remarque que $M(\Omega, \Delta) = M(\Delta, \Omega)$, ce qui était évident, *a priori*.

6. *Vérifications.* — 1° $\Omega = \Delta = 1$. On trouve

$$M(\Omega, \Delta) = \frac{1}{96}.$$

La classe $xx_0 + yy_0 + zz_0$ admet un nombre d'automorphies égal à $4.4.1.2.3 = 96$.

C'est la seule classe $(1, 1)$.

2° $\Omega = 1$, $\Delta = 3$. On trouve

$$M(1, 3) = \frac{9}{96}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{7}{96}.$$

On a les deux classes

$$xx_0 + yy_0 + 3zz_0 \qquad (k = 32),$$
$$xx_0 + 2yy_0 + yz_0 + y_0z + 2zz_0 \qquad (k = 24)$$

et

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{24} = \frac{7}{96}.$$

7. *Cas de $\Omega\Delta$ pair.* — Les calculs sont analogues. On a, au second membre de la formule initiale, au lieu de $\frac{4}{24}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{6}$, le facteur $\frac{1}{8}$, en vertu de l'expression obtenue plus haut dans le cas $\Omega\Delta$ pair.

Donc, la formule ci-dessus subsiste, mais avec $\frac{3}{4,96}$ ou $\frac{1}{128}$ au lieu de $\frac{1}{96}$, au second membre.

Vérifications :

1° $\quad \Omega = 1, \quad \Delta = 2, \quad M(1, 2) = \frac{1}{32}.$

La classe $xx_0 + yy_0 + 2zz_0$ a 32 automorphies. C'est donc la seule classe (1, 2).

2° $\quad \Omega = 2, \quad \Delta = 2, \quad M(2, 2) = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}.$

On a les deux classes

$$xx_0 + 2yy_0 + 4zz_0 \qquad (k = 16),$$
$$2xx_0 + 2yy_0 + (1+i)yz_0 + (1-i)yz_0 + 3zz_0 \qquad (k = 16)$$

(le nombre des automorphies de

$$2yy_0 + (1+i)yz_0 + (1-i)yz_0 + 3zz_0$$

est en effet $k' = 4$).

D'où la conclusion :

« Le nombre de représentations de $2m$ (m impair) par

$$2m = y_1^2 + y_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4z_1^2 + 4z_2^2 \qquad (\text{où } z_1 + z_2 \text{ est pair})$$

et

$$2m = y_1^2 + y_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4z_1^2 + 4z_2^2 \qquad (\text{où } z_1 + z_2 \text{ est impair}),$$

c'est-à-dire le nombre total des représentations

$$2m = y_1^2 + y_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4z_1^2 + 4z_2^2,$$

est

$$4\sum d^2\left(\frac{-1}{\delta}\right),$$

étendu aux décompositions $m = d\delta$. »

Cette formule est connue (démonstration par le développement de $\eta_1^2\theta_1^4$).

8. *Corps* $\sqrt{-2}$. — Le calcul de $\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^3}$, où n parcourt les nombres impairs, est donné par une formule de Stephen Smith (t. I, p. 518). On trouve

$$V = \pi^3 \frac{3}{64\sqrt{2}}.$$

La formule de la mesure, dans le corps $i\sqrt{2}$, pour les formes d'Hermite ternaires, positives, proprement primitives, d'invariants Ω et Δ impairs, premiers entre eux, est

$$M(\Omega, \Delta) = \frac{1}{64} \times 2^2\Omega^2\Delta^2 \Pi_q \frac{1 - \left(\frac{-2}{q}\right)\frac{1}{q^3}}{1 - \left(\frac{-2}{q}\right)\frac{1}{q}},$$

q étant un facteur premier, positif, > 1 de $\Omega\Delta$.

9. *Remarque.* — La formule $M(\Omega, \Delta)$ est plus simple pour les formes d'Hermite que pour les formes ternaires du champ réel; cela tient à ce qu'il n'y a pas de genres pour les formes d'Hermite.

V. — Mesure des classes, primitives ou non, mais propres, positives, de déterminant donné.

1. *Mesure des classes proprement primitives de déterminant donné.* — Supposons donné, au lieu des invariants Ω et Δ, le déterminant $D(= \Omega^2\Delta)$, et D impair.

Considérons toutes les décompositions

$$D = \Omega^2\Delta.$$

Pour l'une d'elles, les ω, δ, r sont les facteurs premiers (> 1) de D; appelons-les p. Appelons toujours r les facteurs premiers > 1 communs à Ω et Δ; nous avons

$$96\,M(\Omega, \Delta) = D^2 \Pi_p \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}} \frac{1}{\Omega^2} \Pi'_r \left[1 + \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right].$$

Sommons pour toutes les décompositions $D = \Omega^2\Delta$; il vient

$$96\,M(D) = D^2 \Pi_p \sum \frac{1}{\Omega^2} \Pi'_r \left[1 + \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right].$$

Or, soient

$$D = p^\alpha p'^{\alpha'}\dots, \qquad \Omega = p^\rho p'^{\rho'}\dots, \qquad \Delta = p^{\alpha-2\rho}\dots$$

Le facteur p est commun à Ω et Δ si $\rho > 0$ et $\alpha - 2\rho > 0$; il ne l'est pas si $\rho = 0$ ou si $2\rho = \alpha$.

Calculons la somme $\sum$, en distinguant les cas de α impair et α pair.

1° α impair; 2ρ ne peut être α; on a donc

$$\rho = 0, \qquad 1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\alpha-1}{2}.$$

Alors, dans $\frac{1}{\Omega^2}H'_\rho$, on a, provenant du facteur p, les termes

$$(1)\quad 1, \quad \frac{1}{p^2}\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \frac{1}{p^4}\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \ldots, \quad \frac{1}{p^{\alpha-1}}\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right].$$

On voit aisément que $\sum$ est un produit étendu aux facteurs $p, p', \ldots$. Si α est impair, le terme du produit qui répond à p est la somme des quantités (1), c'est-à-dire

$$1+\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\left\{\frac{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{\alpha-1}}}{1-\frac{1}{p^2}}\right\},$$

ou

$$1+\frac{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}};$$

2° α pair :

$$\rho = 0, \qquad 1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\alpha}{2};$$

d'où, dans $\frac{1}{\Omega^2}H'_\rho$, provenant de p, les termes

$$1, \quad \frac{1}{p^2}\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \ldots, \quad \frac{1}{p^{\alpha-2}}\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \frac{1}{p^\alpha}$$

de somme

$$1+\frac{1}{p^\alpha}+\left[1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\frac{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^\alpha}}{1-\frac{1}{p^2}},$$

ou

$$1+\frac{1}{p^{\alpha}}+\frac{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{\alpha}}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}},\quad \text{c'est-à-dire}\quad \frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}.$$

On a donc ainsi

$$96\,\mathrm{M}(\mathrm{D})=\mathrm{D}^2\Pi_p\left\{\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}\;\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-\eta\frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}\right\},$$

η étant 1 si α est impair, et $\left(\frac{-1}{p}\right)$ si α est pair; donc, en général, $\eta=\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha+1}$ et finalement

$$96\,\mathrm{M}(\mathrm{D})=\mathrm{D}^2\Pi_p\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^2}\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha+1}\right]$$

$$(\mathrm{D}=p^{\alpha}p'^{\alpha'}\ldots;\ \mathrm{D}\ \text{impair}).$$

formule assez compliquée, qui donne la mesure de l'ensemble des classes ternaires d'Hermite, positives, proprement primitives, de déterminant D, impair.

2. *Passage aux classes primitives ou non.* — Soit $(a, a', a'', \ldots)$ une réduite proprement primitive (une réduite par classe) ternaire de déterminant

$$aa'a''+\ldots,\quad \text{impair}.$$

Soit k le nombre de ses automorphies; nous aurons la relation fondamentale (déduite de la mesure)

$$96\sum\frac{1}{k(aa'a''+\ldots)^s}=\sum\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}^s}\Pi_p.$$

Au premier membre, $\sum$ s'étend à toutes les réduites $(a, a', a'', \ldots)$ ternaires d'Hermite, positives, proprement primitives, des déterminants $(aa'a''+\ldots)$ impairs; k est le nombre d'automorphies de la réduite $(a, a', a'', \ldots)$; au second membre, $\sum$ s'étend à tous les entiers positifs impairs D, et $D = p^{\alpha} p'^{\alpha'} \ldots$.

Remplaçons au second membre D par $p^{\alpha} p'^{\alpha'} \ldots$, on voit de suite que ce second membre est un produit étendu aux nombres premiers impairs p, p' et que le facteur qui répond à p est

$$1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\,\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{3}}}{\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^{2}}\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{2}}-\cdots-\frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha+1}\right].$$

Sommant les progressions géométriques, on trouve pour ce facteur

$$1+\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{3}}}{\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^{2}}\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{2}}\right]\frac{\frac{1}{p^{s-2}}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}}$$
$$-\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{3}}}{\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^{2}}\,\frac{1}{p}\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}}$$

et, tous calculs faits,

$$\frac{1+\frac{1}{p^{s}}+\frac{1}{p^{2s}}}{\left[1-\frac{1}{p^{s-2}}\right]\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}\right]}.$$

On a ainsi

$$96\sum\frac{1}{k(aa'a''+\ldots)^{s}}=\Pi_{p}\,\frac{1-\frac{1}{p^{3s}}}{\left[1-\frac{1}{p^{s}}\right]\left[1-\frac{1}{p^{s-2}}\right]\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}\right]}.$$

Le second membre s'écrit, n parcourant les entiers positifs impairs,

$$\frac{1}{\sum\frac{1}{n^{3s}}}\sum\frac{1}{n^{s}}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-1}}.$$

Chassant $\frac{1}{n^{3s}}$, on obtient la relation

$$96\sum\frac{1}{k[AA'A''+\ldots]^{s}}=\sum\frac{1}{n^{s}}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-1}}.$$

Au premier membre, $\sum$ s'étend à toutes les réduites ternaires $(A, A', A'', \ldots)$ positives d'Hermite (des déterminants $AA'A''+\ldots$) primitives ou non, mais propres, c'est-à-dire que $A\,A'\,A''$ ne sont pas pairs à la fois; k est le nombre d'automorphies de la réduite $(A, A', A'', \ldots)$. Au second membre, n parcourt, dans les $\sum$, les entiers positifs impairs.

5. *Mesure des classes primitives ou non.* — Égalant dans les deux membres les coefficients de $\frac{1}{D^s}$, on a la formule suivante :

« La mesure des classes d'Hermite ternaires, positives, primitives ou non, mais propres, de déterminant D donné, impair, est

$$\frac{1}{96}\sum d^2\left(\frac{-1}{d}\right)d',$$

la $\sum$ s'étendant aux décompositions $D = d\,d'\,d''$ ou

$$\frac{1}{96}\,S\left\{d\left(\frac{-1}{d}\right)\zeta_2\left(\frac{D}{d}\right)\right\} \quad \text{ou} \quad \frac{D}{96}\left(\frac{-1}{D}\right)S_d\left\{\zeta_2(d)\,\frac{1}{d}\left(\frac{-1}{d}\right)\right\};$$

S s'étend aux diviseurs d de D, et $\zeta_2(n)$ désigne la somme des carrés des diviseurs de n. »

On peut écrire aussi

$$\sum\frac{\mathfrak{M}_3(D)}{D^s} = \frac{1}{96}\sum\frac{1}{n^s}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\frac{1}{n^{s-1}}\left(\frac{-1}{n}\right),$$

D impair, n impair quelconque (positifs).

Pour les classes binaires, avec les mêmes notations, on a trouvé

$$\sum\frac{\mathfrak{M}_2(D)}{D^s} = \frac{1}{8}\sum\frac{1}{n^{s-1}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}$$

ou

$$\sum\frac{\mathfrak{M}_2(D)}{D^{s-1}} = \frac{1}{8}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-1}}.$$

On en conclut :

$$\mathfrak{M}_3(D) = \frac{1}{12}\sum d\,\mathfrak{M}_2(d),$$

la somme étant étendue aux diviseurs d de D.

VI. — Évaluation arithmétique du volume du domaine de réduction ternaire (corps $\sqrt{-1}$).

Reprenons la formule

$$\sum \frac{1}{k[\mathrm{A}\,\mathrm{A}'\mathrm{A}''+\ldots]^s} = \frac{1}{96}\sum \frac{1}{n^s}\sum \frac{1}{n^{s-2}}\sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-1}}.$$

Au premier membre, la $\sum$ s'étend à toutes les réduites positives ternaires d'Hermite, de l'ordre propre (A, A′, A″, ...) des déterminants $\mathrm{A}\,\mathrm{A}'\mathrm{A}''+\ldots$ impairs; k est le nombre d'automorphies de la réduite (A, A′, A″, ...) (une seule réduite par classe). Au second membre, n est un nombre positif impair quelconque.

Faisons $s = 3 + \rho$, multiplions par ρ et faisons tendre ρ vers zéro par valeurs positives décroissantes.

La limite du second membre est

$$\frac{1}{96}\sum \frac{1}{n^3}\sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{2}.$$

Cherchons la limite du premier membre.

Nous prendrons seulement les termes où $k = 1$; nous verrons ensuite que les autres n'ont effectivement pas à intervenir.

Les inégalités de réduction sont

$$\mathrm{F}_j(\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'', \ldots) \leqq 0;$$

elles sont linéaires et homogènes en A, A′, A″; B_1, B_2, ...; en posant

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 + i\mathrm{B}_2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} \geqq 0, \qquad \mathrm{A}' \geqq 0, \qquad \mathrm{A}'' \geqq 0.$$

Les A, B prennent au premier membre toutes les valeurs entières réelles vérifiant

$$\mathrm{F}_j \leqq 0, \qquad \mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'' \geqq 0,$$

A, A′, A″ non pairs à la fois, et $\mathrm{A}\,\mathrm{A}'\mathrm{A}''+\ldots$ impairs.

Cherchons combien il y a de systèmes de valeurs (mod 2) des A, B vérifiant ces deux dernières conditions.

Le déterminant est

$$AA'A'' + BB'B'' + B_0 B'_0 B''_0 - ABB_0 - A'B'B'_0 - A''B''B''_0.$$

Sa parité est celle de

$$AA'A'' - A(B_1^2 + B_2^2) - A'(B'^2_1 + B'^2_2) - A''(B''^2_1 + B''^2_2).$$

Distinguons différents cas :

a. A, A', A'' impairs. — Il faut $B_1 + B_2 + B'_1 + B'_2 + B''_1 + B''_2$ pair. D'où, pour les B, 32 systèmes (mod 2).

b. A pair, A', A'' impairs. — Il faut $B'_1 + B'_2 + B''_1 + B''_2$ impair. D'où, pour $B'_1, B'_2, \ldots$, 8 systèmes (mod 2), 2 pour les B_1, 2 pour les B_2, en tout 32.

c. B' pair, A, A'' impairs. — On trouve de même 32 systèmes pour les B.

d. A'' pair, A', A'' impairs. — On trouve de même 32 systèmes pour les B.

e. A impair, A', A'' pairs. — Il faut $B_1^2 + B_2^2$ impair; d'où 2 systèmes (mod 2) pour B_1 et B_2; les $B'_1, \ldots, B''_2$ étant quelconques (mod 2). Cela fait $2.2^4 = 32$ systèmes pour les $B, \ldots, B''$.

f. A' impair, A', A'' pairs. — Même résultat.

g. A'' impair, A, A' pairs. — Même résultat.

En tout, on obtient 32×7 systèmes (mod 2) pour les $A, \ldots, B''$. Prenons un de ces systèmes; on a

$$A = \alpha + 2a, \qquad B''_2 = \beta''_2 + 2b''_2,$$

les α, β''_2 étant fixes, les $a, \ldots, b''_2$ entiers réels quelconques.

La limite de la somme des termes correspondants du premier membre est celle, pour $t = \infty$ de $\frac{3T}{t}$, où T est le nombre des $AA'A'' + \ldots$ qui sont $\leqq \sqrt[3]{t}$.

Posons

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\sqrt[3]{t}} = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{t}} + \frac{2a}{\sqrt[3]{t}}, \qquad \ldots.$$

On aura

$$F_j(\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'', \quad \mathfrak{b}_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}''_2) \leqq 0,$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'' \geqq 0,$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'' + \ldots + \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{b}''_0 \leqq 1$$

et limite

$$\frac{3T}{t} = \frac{2V}{2^9},$$

où

$$V = \int_9 da\, da' \ldots db''_2,$$

l'intégrale étant étendue au volume défini par

$$F_j[a, a', \ldots] \leq 0 \qquad (a > 0,\ a' \geq 0,\ a'' \geq 0),$$
$$aa'a'' + \ldots \leq 1.$$

La limite totale du premier membre est donc

$$32 \times 7 \frac{3V}{2^9}.$$

Égalant à celle du second membre, nous avons

$$7 \cdot 32 \frac{3V}{2^9} = \frac{1}{96} \cdot \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^3} \sum \left(\frac{-1}{n}\right) \frac{1}{n^2};$$

d'où

$$V = \frac{1}{4 \cdot 63} \sum \frac{1}{n^3} \sum \left(\frac{-1}{n}\right) \frac{1}{n^2},$$

n, dans les $\sum$, parcourant les entiers positifs impairs.

Nota. — Les termes où $k > 1$ correspondent à des réduites dont le point représentatif $(A, A', \ldots, B''_2)$ est, dans l'espace à 9 dimensions, sur une face (ou une arête) du volume V. Donc, il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans le calcul de V.

Remarque. — Si l'on désigne par $\mathcal{R}$ le volume de réduction de l'espace à 9 dimensions des formes ternaires positives d'Hermite, c'est-à-dire la région de l'espace où est le point $(a, a', a'', \ldots, b''_2)$, la réduite étant $(a, a', a'', \ldots, b''_2)$, $\mathcal{R}$ est un volume conique ayant l'origine pour sommet. Dans $\mathcal{R}$, on prend la région où sont les points $(a, a', \ldots, b''_2)$ qui répondent aux réduites de déterminant ≤ 1; le volume de cette région est V.