JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Sur quelques lignes brisées

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 3 (1920), p. 265-299.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1920_8_3__265_0>

Sur quelques lignes brisées;

Par Camille JORDAN.

Soient donnés n points dans un plan, et dont il n'y en ait pas trois en ligne droite. Joignons par des segments de droites le premier au second, celui-ci au troisième, etc., jusqu'à ce qu'on arrive au dernier. La ligne brisée L ainsi formée réunira tous les points donnés, dont deux seront à ses extrémités. Chacun des autres est le point de jonction de deux segments (et pas davantage).

En faisant varier l'ordre de succession des points donnés, nous obtiendrons $\frac{1}{2}n!$ lignes L distinctes, décrites chacune dans les deux sens. Quelques-unes d'elles pourront offrir des points multiples si des segments non contigus se coupent. Celles où cette particularité ne se présente pas semblent plus intéressantes et l'on peut se proposer d'en déterminer le nombre N.

Ce nombre dépend de la position relative des points donnés, et notamment de la nature du *polygone principal.* (Nous donnons ce nom à un polygone convexe ayant pour sommets soit tous les points donnés, soit une partie seulement d'entre eux, les autres lui étant intérieurs.)

Nous déterminerons le nombre N dans les trois cas suivants :

1° Les n points sont les sommets d'un polygone convexe;
2° n est au plus égal à 6;
3° n étant égal à 7, le polygone principal a 6 côtés.

La discussion complète d'autres cas entraînerait trop de longueurs.

Cas où le polygone principal a n sommets.

1. Soit l une portion d'une des lignes L sans point multiple qu'il s'agit de construire, telle que ses deux extrémités P et Q soient des sommets du polygone principal. Elle partagera l'intérieur de ce polygone en deux régions distinctes R_1, R_2.

Si nous supposons que parmi les points donnés il y en ait dans chacune de ces deux régions (ce qui aura nécessairement lieu si P et Q ne sont pas deux sommets consécutifs du polygone principal), la ligne L ne pourra se terminer ni à P ni à Q.

En effet une portion l_1 de L doit se trouver dans R_1, une autre l_2 dans R_2. La ligne L n'ayant pas de point multiple, la jonction entre l_1 et l_2 ne pourra se faire que par l'intermédiaire de l. Donc l_1 doit rejoindre l en l'un des deux points P et Q et l_2 aboutir à l'autre.

Ce lemme général est fort utile. Dans le cas présent, nous en déduirons aisément la valeur de N.

2. Soient A, B, C, ..., K les sommets consécutifs du n-gone.

Théorème. — *Le nombre des lignes cherchées qui commencent à un quelconque* A *des sommets donnés est égal à* 2^{n-2}.

Cette proposition est évidente si $n = 3$, car on a les deux solutions ABC, ACB.

Supposons-la établie pour un $(n-1)$-gone et passons au cas du n-gone.

Le premier côté de la ligne cherchée, ne pouvant être une diagonale, sera AB ou AK. Si c'est AB, la suite de L sera une ligne analogue, issue de B et relative au $(n-1)$-gone convexe BC...K. Elle peut donc être déterminée de 2^{n-3} manières.

Si le premier côté de L était AK, le résultat serait le même. Le nombre des solutions est donc bien 2^{n-2}.

Corollaire. — $N = n.2^{n-3}$.

Car le polygone a n sommets à considérer successivement; mais si l'on fait la somme, chacune des lignes cherchées ayant deux bouts y figurera deux fois.

3. Le cas où le polygone principal est un $(n-1)$-gone avec un point intérieur a est plus complexe. Nous nous bornerons à déterminer le nombre N_0 de celles des lignes cherchées qui ne contiennent aucune diagonale du polygone principal.

La ligne cherchée doit se composer de $n-1$ segments dont un au moins et deux au plus joignent le point a aux sommets du polygone.

S'il n'y a qu'un segment de jonction, l'un des $n-1$ côtés du polygone, AB par exemple, manquera dans L; et la ligne de jonction sera aB ou aA. Cette hypothèse donne donc $2(n-1)$ solutions.

S'il y a deux lignes de jonction, deux côtés du polygone manqueront. S'ils sont consécutifs, tels que AB et BC, l'une des lignes de jonction sera nécessairement Ba, l'autre Aa ou Ca. D'ailleurs, on peut prendre pour AB chacun des $n-1$ côtés successivement; d'où ici encore $2(n-1)$ solutions.

Si les côtés manquants, AB et DE par exemple, ne sont pas consécutifs (ce qui peut avoir lieu de $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$ manières, l'une des lignes de jonction pourra être Ba, ou Da, l'autre Aa ou Ea, d'où quatre combinaisons distinctes.

Réunissant ces résultats, on aura

$$N_0 = 2(n-1) + 2(n-1) + 4\frac{(n-1)(n-4)}{2} = 2(n-1)(n-2).$$

Cas où $n=4$.

4. Si le polygone principal est un quadrilatère ABCD, on aura, d'après le n° **2**, $N=8$; et chacun des sommets sera l'origine de quatre lignes L sans point double.

5. Si c'est un triangle ABC avec un point intérieur a, les droites qui joignent deux à deux les quatre points donnés ne se coupant nulle part, aucune des lignes L que l'on peut former n'aura de point double. On aura donc

$$N = \frac{1}{2}.4! = 12.$$

L'un quelconque A des points donnés sera l'origine de six de ces lignes. Soit ABCa l'une d'elles. Les autres s'obtiendront par permutation des lettres B, C, a.

Cas où $n = 5$.

6. 1° Si le polygone principal est un pentagone, on aura

$$N = 5.2^2 = 20.$$

7. 2° Si c'est un quadrilatère ABCD avec un point intérieur a, on aura, d'après le n° **3**,

$$N_0 = 2.4.3 = 12.$$

Mais il reste à examiner celles des lignes L qui contiennent l'une ou l'autre des diagonales, par exemple AC.

Cette diagonale partage le quadrilatère en deux triangles ABC et ACD. Supposons pour fixer les idées que a soit dans ABC. Pour achever la ligne cherchée il faudra joindre à la ligne AC déjà donnée, soit

$$\text{CD} \quad \text{et l'une des deux lignes} \quad \text{AB}a,\ \text{A}a\text{B},$$

soit

$$\text{AD} \quad \text{et l'une des deux lignes} \quad \text{CB}a,\ \text{C}a\text{B}.$$

On obtient ainsi quatre solutions différentes.

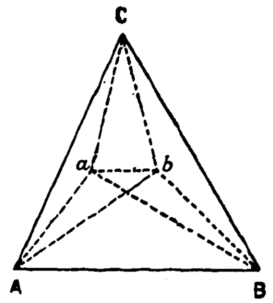
La seconde diagonale BD en donnera autant. Donc

$$N = 12 + 4 + 4 = 20.$$

8. 3° Si le polygone est un triangle ABC avec deux points intérieurs a, b, nous pourrons admettre pour fixer les idées que les côtés coupés par le prolongement de ab soient AC et BC.

Parmi les segments qui joignent deux à deux les points A, B, C, a, b, les seuls qui se coupent sont Ab et Ba (*fig.* 1). Donc parmi les $\frac{1}{2}.5\,! = 60$ lignes L qu'ils peuvent former, les seules à exclure comme ayant un point double sont celles qui contiennent à la fois ces deux segments. Chacune d'elles peut être supposée décrite dans un sens tel que A y précède b. Soit AbBaC l'une d'elles. Les autres s'en déduisent par les permutations des éléments Ab, Ba, C combinées avec l'échange de B avec a; ce qui porte à 12 le

Fig. 1.



nombre des lignes à rejeter. Donc

$$N = 60 - 12 = 48$$

Cas où $n = 6$.

I.

9. Si le polygone principal est un hexagone, on aura

$$N = 6.2^3 = 48.$$

10. Si c'est un pentagone ABCDE avec un point intérieur a, on aura

$$N = N_0 + N_1 + N_2,$$

N_i désignant le nombre des lignes cherchées qui contiennent précisément i diagonales.

Nous avons trouvé déjà (**5**) la valeur de N_0,

$$N_0 = 2.5.4 = 40.$$

11. Pour calculer N_1 considérons une diagonale déterminée telle que AD (*fig.* 2). Elle partage le polygone en un triangle ADE et un quadrilatère ABCD.

Si a est dans le triangle il faudra, pour achever la ligne L cherchée, adjoindre à la diagonale AD, soit

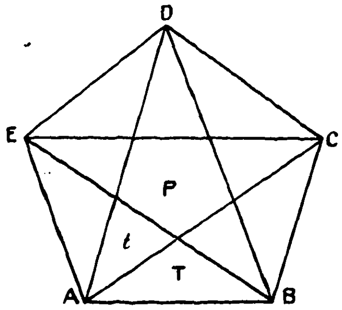
ABC avec une des deux lignes DEa, DaE,

soit

DCB avec une des deux lignes AEa, AaE,

ce qui donne quatre solutions.

Fig. 2.



Si a est dans le quadrilatère, les lignes à adjoindre seront

AE avec une des quatre lignes $DaBC$, $DaCB$, $DCaB$, $DCBa$

ou

DE avec une des quatre lignes $AaBC$, $AaCB$, $ACaB$, $ACBa$,

d'où huit solutions.

Si donc parmi les cinq diagonales il y en a α qui laissent a dans le quadrilatère correspondant, on aura

$$N_1 = 8\alpha + 4(5 - \alpha) = 20 + 4\alpha.$$

12. Passons au calcul de N_2.

Soit AD, BD (*fig.* 2) un couple de diagonales (qui ne se coupent pas). Si le point a est en dehors de l'angle ADB, par exemple dans le triangle ADE, on pourra, pour achever L, adjoindre à ADB,

BC avec une des deux lignes AaE, AEa:

d'où deux solutions. Mais on n'en aura aucune si a est dans l'angle ADB.

Or il existe cinq couples de diagonales tels que celui que nous venons de considérer. Si pour β d'entre eux a n'est pas compris dans l'angle correspondant, on aura $N_2 = 2\beta$, et par suite

$$N = N_0 + N_1 + N_2 = 60 + 4\alpha + 2\beta.$$

13. Reste à déterminer α et β.

A cet effet, menons les cinq diagonales du pentagone (*fig.* 2). Elles en partagent l'intérieur en onze régions, à savoir :

Un pentagone central P;

Cinq triangles T ayant un côté commun avec le pentagone principal;

Cinq triangles t ayant un côté commun avec P.

Or, à l'inspection de la figure, on voit immédiatement que, si a est dans P, on aura

$$\alpha = 5, \qquad \beta = 0;$$

s'il est dans un triangle T,

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 4;$$

s'il est dans un triangle t,

$$\alpha = 4, \qquad \beta = 2.$$

Dans toutes ces hypothèses, N aura la même valeur 80.

II.

14. Passons au cas où le polygone principal est un quadrilatère ABCD avec deux points intérieurs a, b.

Soient respectivement N_{01}, N_{02}, N_{03} les nombres de lignes L (sans point multiple) qui contiennent 1, 2, 3 côtés du polygone, sans aucune diagonale; N_1 celui de ces lignes où figure une diagonale. On aura

$$N_0 = N_{01} + N_{02} + N_{03}, \qquad N = N_0 + N_1.$$

D'ailleurs les N_{02} lignes qui contiennent deux côtés sont de deux sortes : celles où figurent deux côtés opposés, en nombre M; et celles où figurent deux côtés contigus, en nombre M'. On aura donc

$$N_{02} = M + M'.$$

15. Pour la détermination successive de ces nombres, on doit distinguer plusieurs cas :

Cas I. — La droite *ab* prolongée traverse deux côtés opposés du quadrilatère et par suite les deux diagonales. Mais le nombre de ses points de rencontre avec celles-ci compris entre *a* et *b* peut être égal à 0, 1, 2, d'où trois *sous-cas*, que nous représenterons respectivement par I_0, I_1, I_2.

Cas II. — La droite *ab* prolongée traverse deux côtés adjacents du quadrilatère, et par suite une seule diagonale. Son point de rencontre avec celle-ci peut être extérieur ou intérieur au segment *ab*; d'où deux nouveaux sous-cas, II_0 et II_1.

16. Calcul de N_{01}. — Soit AB le côté du quadrilatère que L

Fig. 3.

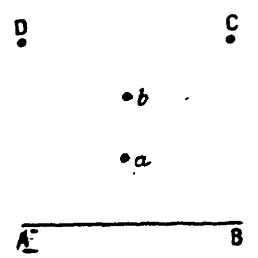
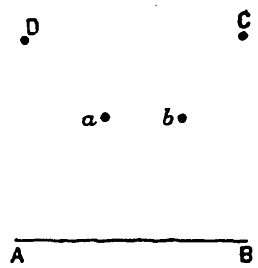


Fig. 4.



doit contenir. On peut faire au sujet de la ligne *ab* quatre hypo-

Fig. 5.

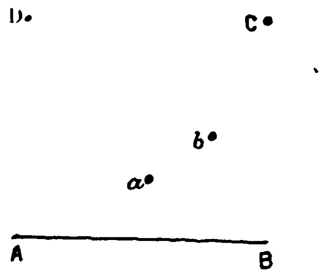
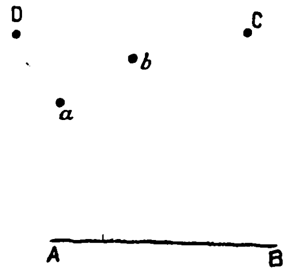


Fig. 6.



thèses différentes représentées par les figures schématiques 3, 4, 5, 6.

Première hypothèse. — *ab* prolongé coupe AB et le côté opposé CD (lequel ne devant pas être utilisé n'a pas été tracé sur la figure).

Pour achever la construction de L, on devra adjoindre à AB l'une des lignes

$$AaDbC;\quad AaCbD;\quad BaCbD;\quad BaDbC$$

ou l'un des couples de lignes suivants :

$$AaD \text{ et } BbC;\quad AbD \text{ et } BaC,$$

ce qui donne six solutions.

Deuxième hypothèse. — *ab* prolongé ne coupe ni AB ni CD. Les lignes à adjoindre à AB seront

$$AaDbc;\quad AbCaD;\quad BaDbC;\quad BbCaD$$

ou le couple AaD et BbC.
Soit cinq solutions.

Troisième hypothèse. — *ab* prolongé coupe AB, mais non CD. On pourra adjoindre à AB les lignes suivantes :

$$AaDbC;\quad BaDbC;\quad BbCaD;\quad AaD \text{ et } BbC.$$

On n'a plus que quatre solutions.

Quatrième hypothèse. — *ab* prolongé ne coupe pas AB, mais coupe CD.
On aura cinq solutions :

$$AaDbC.\quad AaCbD;\quad BaDbC.\quad BaCbD;\quad AaD \text{ et } BbC.$$

Prenons successivement pour l'introduire dans L chacun des quatre côtés du quadrilatère et ajoutons les résultats obtenus. Dans le cas I, les première et deuxième hypothèses ayant été réalisées chacune deux fois, on aura

$$N_{01} = 2.6 + 2.5 = 22.$$

Dans le cas II, ce sont les troisième et quatrième hypothèses qui auront été réalisées ; on aura donc

$$N_{01} = 2.4 + 2.5 = 18.$$

17. Calcul de M. — Soient AB, CD les deux côtés opposés qui doivent figurer dans L.

Nous pourrons distinguer les mêmes hypothèses que dans le calcul précédent et nous servir des mêmes figures à condition d'y rétablir mentalement le côté CD qui maintenant doit être utilisé.

Dans la première hypothèse, on pourra compléter L par l'adjonction à AB et à CD de l'une des six lignes suivantes :

$$\mathrm{A}ab\mathrm{D};\quad \mathrm{A}ab\mathrm{C};\quad \mathrm{A}ba\mathrm{C};\quad \mathrm{B}ab\mathrm{C};\quad \mathrm{B}ab\mathrm{D};\quad \mathrm{B}ba\mathrm{D}$$

ou de l'un des six couples

$$\mathrm{A}a\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{D}b;\quad \mathrm{A}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{C}b;\quad \mathrm{A}b\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{C}a,$$
$$\mathrm{B}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{C}b;\quad \mathrm{B}a\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{D}b;\quad \mathrm{B}a\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{A}b.$$

Soit en tout douze solutions.

La seconde hypothèse en donnera seize, par les huit lignes :

$$\mathrm{A}ab\mathrm{C};\quad \mathrm{A}ab\mathrm{D};\quad \mathrm{A}ba\mathrm{C};\quad \mathrm{A}ba\mathrm{D},$$
$$\mathrm{B}ab\mathrm{C};\quad \mathrm{B}ab\mathrm{D};\quad \mathrm{B}ba\mathrm{C};\quad \mathrm{B}ba\mathrm{D}$$

ou les huit couples

$$\mathrm{A}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{C}b;\quad \mathrm{A}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{B}b;\quad \mathrm{A}a\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B}b;\quad \mathrm{A}b\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{D}a,$$
$$\mathrm{B}b\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{D}a;\quad \mathrm{B}b\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{A}a;\quad \mathrm{B}b\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{A}a;\quad \mathrm{B}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{C}b.$$

La troisième en donne treize, par les six lignes

$$\mathrm{A}ab\mathrm{C};\quad \mathrm{A}ab\mathrm{D};\quad \mathrm{B}ab\mathrm{C};\quad \mathrm{B}ba\mathrm{C};\quad \mathrm{B}ab\mathrm{D};\quad \mathrm{B}ba\mathrm{D}$$

ou l'un des sept couples

$$\mathrm{A}a\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B}b;\quad \mathrm{A}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{B}b;\quad \mathrm{A}a\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{C}b;\quad \mathrm{A}b\mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B}a;$$
$$\mathrm{A}b\mathrm{D} \text{ et } \mathrm{B}a;\quad \mathrm{A}a \text{ et } \mathrm{B}b\mathrm{C};\quad \mathrm{A}a \text{ et } \mathrm{B}b\mathrm{D}.$$

La quatrième hypothèse se ramenant à la troisième par l'échange des côtés AB et CD donnera également treize solutions.

Or le polygone ABCD présente deux couples de côtés opposés. Prenons-les successivement pour faire partie de L, et ajoutons les nombres de solutions correspondants.

Dans le cas I, les hypothèses I et II ayant été réalisées chacune une fois, on aura

$$\mathrm{M} = 12 + 16 = 28,$$

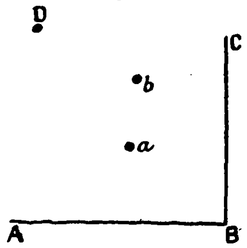
Dans le cas II, les hypothèses réalisées étant III et IV, on aura

$$M = 13 + 13 = 26.$$

18. Calcul de M'. — Soient AB, BC les deux côtés consécutifs qu'on suppose appartenir à L. Nous distinguerons trois hypothèses.

Hypothèse I (*fig.* 7). — La ligne ab prolongée coupe un seul des

Fig. 7.



côtés AB, BC, par exemple AB. On pourra achever L en ajoutant à ABC l'une des lignes

$$AabD;\quad AaDb;\quad CabD;\quad CaDb;\quad CbaD;\quad CbDa$$

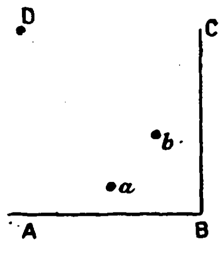
ou l'un des trois couples

$$AaD \text{ et } Cb;\quad AbD \text{ et } Ca;\quad CbD \text{ et } Aa.$$

Soit en tout neuf solutions.

Hypothèse II. — La ligne ab prolongée coupe les deux côtés AB, BC (*fig.* 8).

Fig. 8.



On aura six solutions

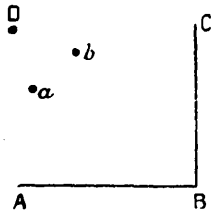
$$AabD;\quad AaDb;\quad CbaD;\quad CbDa;$$
$$AaD \text{ et } Cb;\quad CbD \text{ et } Aa.$$

Hypothèse III. — ab prolongée ne coupe ni AB ni BC (*fig.* 9). On aura dix solutions

$$AabD;\quad AaDb;\quad AbaD;\quad AbDa;$$
$$CabD;\quad CaDb;\quad CbaD;\quad CbDa;$$
$$AaD \text{ et } Cb;\qquad CbD \text{ et } Aa.$$

Prenons successivement pour faire partie de L chacun des

Fig. 9.



quatre systèmes de deux côtés consécutifs et ajoutons les résultats.

Dans le cas I, l'hypothèse I ayant été réalisée constamment, on aura

$$M' = 4.9 = 36.$$

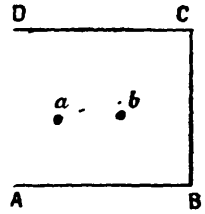
Dans le cas II, cette hypothèse aura été réalisée deux fois, les deux autres chacune une fois. Donc

$$M' = 2.9 + 6 + 10 = 34.$$

19. Calcul de N_{03}. — Soient AB, BC, CD les trois côtés du quadrilatère que L contient. Deux hypothèses seront à distinguer :

Hypothèse I. — ab prolongé coupe le côté DA (*fig.* 10). Nous

Fig. 10.



aurons six solutions en adjoignant aux côtés donnés l'une des lignes

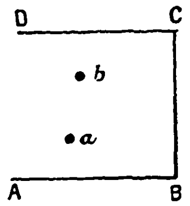
$$Aab;\quad Aba;\quad Dab;\quad Dba$$

ou l'un des couples

$$Aa \text{ et } Db; \quad Ab \text{ et } Da.$$

Hypothèse II. — ab prolongé ne coupe pas DA (*fig.* 11). Les

Fig. 11.



solutions seraient les mêmes que dans la première hypothèse, sauf que les segments Ab, Da se coupant, celle où ils figurent tous deux doit être rejetée. Il reste donc cinq solutions.

Le côté du quadrilatère que L ne contient pas peut être choisi de quatre manières différentes. Faisant la somme des solutions correspondantes et remarquant que sur les quatre côtés il y en a toujours deux coupés par ab prolongé, il viendra

$$N_{03} = 2.6 + 2.5 = 22.$$

On aura donc d'après tout ce qui précède :

Dans le cas I,

$$N_0 = 22 + 28 + 36 + 22 = 108;$$

Dans le cas II,

$$N_0 = 18 + 26 + 34 + 22 = 100.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer N_1.

20. Calcul de N_1. — Soit AC la diagonale qu'on suppose appartenir à L. Elle partage le quadrilatère en deux triangles ABC, ADC; et l'on pourra distinguer trois hypothèses :

Hypothèse I. — Les points a, b sont séparés par la diagonale (*fig.* 12). On pourra adjoindre à AC soit une des lignes

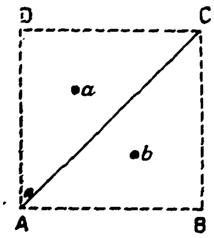
$$AaD \text{ ou } ADa \quad \text{avec} \quad CbB \text{ ou } CBb,$$

soit une des lignes

$$CaD \text{ ou } CDa \text{ avec } AbB \text{ ou } ABb,$$

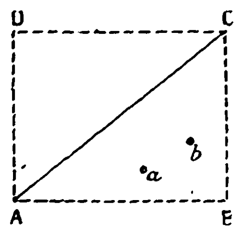
ce qui donne en tout huit solutions.

Fig. 12.



Hypothèse II. — Les points a, b sont du même côté de la diagonale, dans le triangle ABC par exemple. La ligne ab prolongée coupe les deux côtés AB et BC (*fig.* 13).

Fig. 13.



On pourra achever la ligne L en adjoignant à AC, soit CD avec l'une des six lignes

$$AabB;\quad AbaB;\quad AaBb;\quad AbBa,\quad ABab;\quad ABba,$$

soit AD avec une des lignes

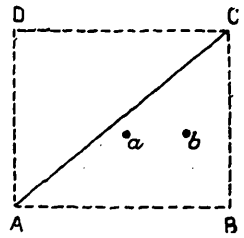
$$CabB;\quad CbaB;\quad CaBb;\quad CbBa,\quad CBab:\quad CBba,$$

ce qui donne douze solutions.

Hypothèse III. — Les points a, b étant encore dans le même triangle ABC, la ligne ab prolongée coupe la diagonale AC (et le côté BC par exemple) (*fig.* 14).

Les solutions sont les mêmes que dans l'hypothèse II, sauf qu'ici les segments Ab, Ba se coupant on doit rejeter les solutions $AbBa$, $AbaB$ qui les contiennent tous deux. Le nombre des solutions est donc réduit à dix.

Fig. 14.



Considérons successivement les deux diagonales comme pouvant appartenir à L et faisons la somme des solutions. Dans le cas I, le prolongement de ab coupe les deux diagonales. Si donc elles ne séparent pas les deux points a, b (sous-cas I_0), chacune d'elles fournira dix solutions; d'où $N_1 = 20$. Si l'une d'elles les sépare (sous-cas I_1), elle ne donne plus que huit solutions; d'où $N_1 = 18$. Si toutes deux les séparent (sous-cas I_2), chacune d'elles en donnant huit, $N_1 = 16$.

Dans le cas II, celle des deux diagonales que ab prolongé ne coupe pas donnera douze solutions. L'autre en donnera dix si elle ne sépare pas a de b (sous-cas II_0); et huit seulement si elle les sépare (sous-cas II_1).

21. Le Tableau suivant résume les résultats ci-dessus :

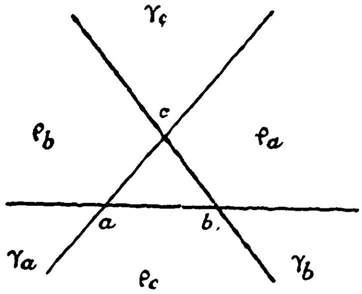
Sous-cas......	I_0.	I_1.	I_2.	II_0.	II_1.
N_0............	108	108	108	100	100
N_1............	20	18	16	22	20
N............	128	126	124	122	120

III.

22. Il reste à examiner le cas où le polygone principal est un triangle ABC contenant à son intérieur les trois autres points a, b, c.

Nous distinguerons six cas, d'après la répartition des points A, B, C, entre les diverses régions déterminées à l'extérieur du triangle *abc* par les prolongements de ses côtés (*fig.* 15).

Fig. 15.



Ces régions, au nombre de six, sont de deux sortes : trois secteurs r, et trois régions ρ opposées à ces secteurs, ayant chacune un côté commun avec le triangle.

Cas I. — Les deux points A, B sont dans une même région r, qu'on peut dénommer r_c. Pour que *abc* soit intérieur à ABC, il est nécessaire que C soit dans la région opposée ρ_c.

Cas II. — A, B sont dans une même région ρ_c et C dans r_c.

Cas III. — A, B, C sont dans des régions r différentes, qu'on peut dénommer respectivement r_a, r_b, r_c.

Cas IV. — A, B, C sont respectivement dans les régions ρ_a, ρ_b, ρ_c.

Cas V. — A, B sont dans les régions r_a, r_b et C dans une région ρ (nécessairement différente de ρ_c) qu'on peut dénommer ρ_a.

Cas VI. — A, B, C sont dans les régions ρ_a, ρ_b, r_a

23. Les segments qui peuvent figurer dans la construction des lignes L sont les côtés des triangles ABC, *abc* et les neuf lignes de jonction A*a*, A*b*, ..., C*c* qui réunissent les sommets de deux triangles différents.

Ces lignes L (avec ou sans point multiple) sont au nombre de $\frac{1}{2}.6! = 360$; on peut les répartir entre cinq classes :

Classe I. — Lignes où ne figure qu'une seule ligne de jonction, à savoir la ligne

$$ABCabc$$

et ses *similaires*, obtenues en permutant les symboles A, B, C d'une part, a, b, c d'autre part. Elles sont au nombre de 36.

Classe II. — Lignes où figurent deux lignes de jonction (n'ayant pas d'extrémité commune), à savoir :

$$AabcBC, \quad aABCbc$$

et leurs similaires; leur nombre est $2.36 = 72$.

Classe III. — Lignes contenant comme partie intégrante $AabB$ ou l'une des 18 lignes similaires, à savoir :

$$AabBCc, \quad AabBcC, \quad cAabBC$$

et leurs similaires. Leur nombre est 3.36. Elles contiennent trois ou quatre lignes de jonction.

Classe IV. — Lignes ne contenant aucune ligne partielle similaire à $AabB$, mais une seule ligne partielle similaire à AcB. Ce sont les lignes

$$AcBCab, \quad CAcBab, \quad aCAcBb$$

et leurs similaires, au nombre de 3.36. Elles contiennent encore trois ou quatre lignes de jonction.

Classe V. — Lignes formées exclusivement de lignes de jonction, à savoir

$$AaBbCc$$

et ses similaires. Leur nombre est 36. Chacune d'elles contient deux lignes partielles similaires à AcB (AaB et BbC, par exemple).

Soient respectivement N_1, ..., N_5 les nombres de lignes L sans point double que contiennent ces diverses classes; nous aurons

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5.$$

24. Calcul de N_1. — Une ligne de jonction donnée, telle que

Ca figure dans quatre lignes de la classe I, à savoir :

$$ABCabc,\quad BACabc,\quad ABCacb,\quad BACacb.$$

Mais ces solutions devront toutes être rejetées si Ca entre dans le triangle abc, car ce serait en traversant le côté bc, ce qui donnerait un point double. Dans le cas contraire elles devront être conservées. On aura donc

$$N_1 = 36 - 4\alpha,$$

α étant le nombre des lignes de jonction qui pénètrent dans le triangle abc.

Or de chacun des sommets A, B, C sont issues trois lignes de jonction. Aucune ne pénètre dans le triangle abc si le sommet considéré est dans une région r; une seule y entre, s'il est dans une région ρ. Donc α est le nombre des sommets situés dans une région ρ. Il est donné dans chaque cas par la définition. On peut donc former le Tableau suivant :

Cas	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
α	1	2	0	3	1	2
N_1	32	28	36	24	32	28

25. Calcul de N_2. — A chaque ligne de jonction, telle que Aa, on peut en associer quatre autres n'ayant aucun sommet commun avec elle. Le nombre des couples ainsi formés sera donc $\frac{9 \cdot 4}{2} = 18$ et l'un quelconque d'entre eux, tel que Aa, Cc par exemple, figurera dans quatre lignes de la classe II, à savoir

$$AabcCB,\quad BAabcC,\quad aABCcb,\quad baABCc.$$

Elles doivent être rejetées toutes si Aa coupe Cc. Elles doivent au contraire être conservées si Aa ne coupant pas Cc, ni Aa ni Cc ne pénètrent dans le triangle abc, car elles ne pourront couper ni ab ni bc. Mais si Aa, par exemple, pénètre dans le triangle, elle coupera le côté bc opposé à a. On devra donc rejeter les trois lignes L qui contiennent ce segment et ne conserver que la dernière. Enfin si Aa et Cc pénétraient toutes deux dans le triangle, ces deux lignes se couperaient. Cette dernière hypothèse est donc contradictoire.

On aura donc

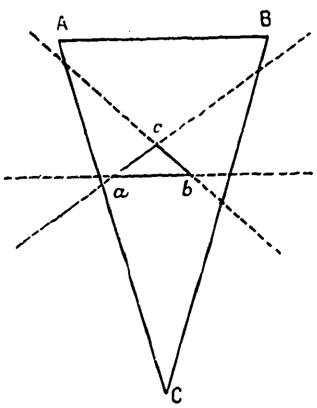
$$N_1 = 7\alpha - 4\beta - 3\gamma,$$

β étant le nombre des couples de lignes de jonction dont les deux lignes se coupent; γ le nombre des couples où ces lignes ne se coupant pas, l'une d'elles pénètre dans le triangle.

26. Les nombres β, γ peuvent se lire immédiatement sur la figure qui indique dans chaque cas la situation des points A, B, C par rapport au triangle *abc*. Car on peut y voir de suite sans avoir besoin d'y tracer effectivement les lignes de jonction (ce qui pourrait même nuire à la clarté) quelles sont celles de ces lignes qui se coupent, ou entrent dans le triangle.

Cas I (*fig.* 16). — Les trois couples (A*c*, B*a*), (B*c*, A*b*), (A*b*, B*a*)

Fig. 16.

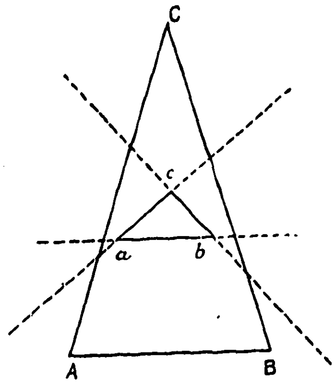


sont les seuls dont les lignes se coupent. Donc $\beta = 3$. D'autre part, la ligne de jonction C*c*, qui seule entre dans le triangle *abc*, peut être associée successivement aux quatre lignes A*a*, A*b*, B*a*, B*b* qui ne la coupent pas. Donc $\gamma = 4$.

Cas II (*fig.* 17). — Les couples dont les droites se coupent sont les mêmes que dans le cas précédent. Donc $\beta = 3$.

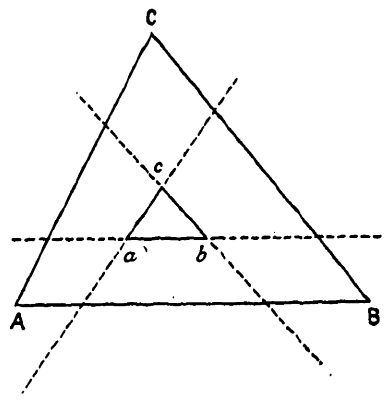
D'autre part, Ac, qui pénètre dans le triangle, peut être associée à Bb, Ca, Cb qui ne la coupent pas. De même Bc peut être associée à Aa, Ca ou Cb. Donc $\gamma = 6$.

Fig. 17.



Cas III (*fig.* 18). — Les couples dont les droites se coupent sont

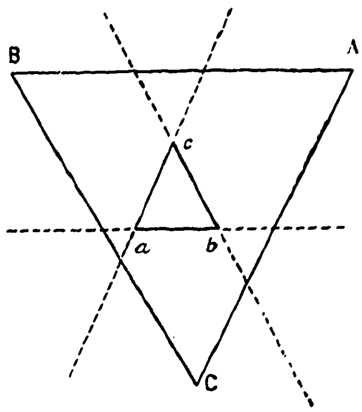
Fig. 18.



(Ab, Ba), (Bc, Cb), (Ca, Ac). D'ailleurs aucune des lignes de jonction n'entre dans abc. Donc $\beta = 3$, $\gamma = 0$.

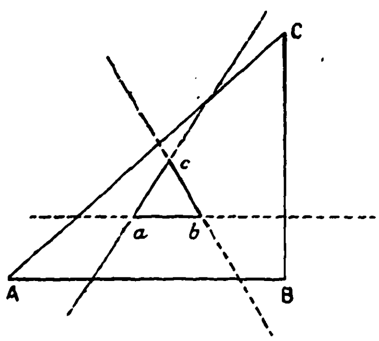
Cas IV (*fig.* 19). — Les couples dont les lignes se coupent sont (Aa, Bb), (Bb, Cc), (Cc, Aa). Donc $\beta = 3$. D'autre part, Aa qui entre dans le triangle peut encore être associée à Bc ou à Cb. On pourra associer de même Bb à Ac ou à Ca; Cc à Ab ou à Ba; d'où $\gamma = 6$.

Fig. 19.



Cas V (*fig.* 20). — Les couples dont les lignes se coupent sont (Ab, Ba), (Bc, Cb), (Bc, Ca). D'ailleurs Ca, qui pénètre dans

Fig. 20.



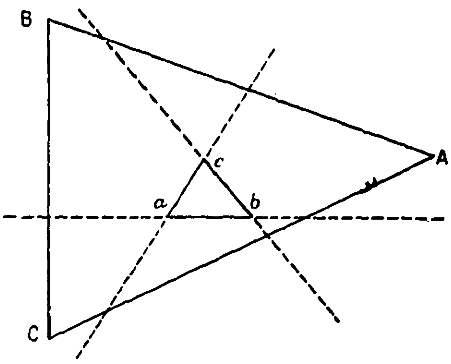
le triangle, peut être associée à trois autres lignes Ab, Ac, Bb. Donc $\beta = 3$, $\gamma = 3$.

Cas VI (*fig.* 21). — Les couples dont les lignes se coupent sont (Cc, Ba), (Cc, Bb), (Aa, Bb); d'où $\beta = 3$. D'ailleurs les lignes Aa et Bb entrent dans le triangle. La première peut encore être associée à B c, C b, C c et la seconde à A c ou C a; d'où $\gamma = 5$.

Ces résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

Cas	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
β	3	3	3	3	3	3
γ	4	6	0	6	3	5
N_2	48	42	60	42	51	45

Fig. 21.



27. Calcul de N_3. — Les lignes L de la classe III contiennent toutes par définition la ligne partielle $AabB$ ou l'une de ses similaires. Celles-si sont au nombre de 18, car les permutations des sommets donnent 36 combinaisons distinctes, mais dont deux (telles que $AabB$ et $BbaA$) représentent la même ligne, sauf le changement du sens du parcours.

Soit l l'une d'elles. Parmi les lignes L qui la contiennent, soit $N_3(l)$ le nombre de celles qui n'ont pas de point double. On aura évidemment

$$N_3 = \Sigma\, N_3(l),$$

la sommation s'étendant aux 18 lignes l.

Nous aurons donc à déterminer la valeur de chacun des termes de la somme.

28. Soit $l = AabB$. Les lignes L dont celle-ci fait partie sont les six suivantes :

$$AabBCc,\quad AabBcC,\quad CcAabB,\quad cCAabB,$$
$$CAabBc,\quad cAabBC.$$

Si les segments Aa, Bb se coupent, toutes les six devront être rejetées et l'on aura $N_3(AabB) = 0$.

Si ces deux segments ne se coupent pas, et que la ligne l ne rencontre ni Ac, ni Bc, ni Cc, on aura au contraire $N_3(AabB) = 6$.

Mais si l rencontre quelqu'un de ces trois segments on devra rejeter celles des six lignes qui le contiennent; d'où les résultats suivants (Aa et Bb ne se coupant pas) :

$N_3(AabB)$	$= 6$	si $AabB$ ne coupe ni Ac, ni Bc, ni Cc;
»	$= 4$	si $AabB$ coupe Ac ou Bc;
»	$= 2$	si elle les coupe toutes deux;
»	$= 2$	si elle coupe Cc;
»	$= 1$	si elle coupe Cc et Ac ou Bc.

Or il est aisé de constater sur celle des figures 16 à 21 qui correspond à chacun de nos six cas, laquelle des hypothèses précédentes se trouve réalisée.

29. On déterminera de même la valeur de $N_3(l)$ pour chacune des lignes l similaires de $AabB$, en opérant sur le système des lignes Ac, Bc, Cc à considérer la même permutation des sommets qui a fait passer de $AabB$ à l. Ainsi pour $l = BacC$ par exemple on devra regarder sur la figure si Ba coupe Cc et s'il ne le coupe pas, quelles sont celles des lignes Bb, Cb, Ab que l pourrait traverser.

On forme ainsi aisément le Tableau suivant :

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$N_3(AabB)$....	2	6	6	0	6	0
$N_3(AbaB)$....	0	0	0	2	0	2
$N_3(AbcB)$....	0	0	4	4	1	4
$N_3(AcbB)$....	4	4	2	4	2	4
$N_3(AcaB)$....	0	0	4	4	4	4
$N_3(AacB)$....	4	4	2	4	2	4
$N_3(BbcC)$....	6	6	6	0	1	0
$N_3(BcbC)$....	6	6	0	2	4	2
$N_3(BcaC)$....	2	2	4	4	6	4
$N_3(BacC)$....	2	2	2	4	6	4
$N_3(BabC)$....	4	2	4	4	2	4
$N_3(BbaC)$....	4	2	2	4	2	4
$N_3(CcaA)$....	6	6	6	0	2	0
$N_3(CacA)$....	6	6	0	2	0	2
$N_3(CabA)$....	2	1	4	4	4	4
$N_3(CbaA)$....	4	1	2	4	4	4
$N_4(CbcA)$....	4	2	4	4	0	4
$N_5(CcbA)$....	2	2	2	4	4	4
N_3..........	58	52	54	54	50	54

30. Calcul de N_4 et de N_5. — Les lignes L de la classe IV contiennent toutes une ligne partielle l similaire à AcB. Celles de la classe V en contiennent deux. Ces lignes l sont au nombre de 9. Considérons en particulier l'une d'elles. Soient, parmi les lignes L sans point double qui contiennent l, $N_4(l)$ celles qui sont de la classe IV, $N_5(l)$ celles qui sont de la classe V. On aura évidemment

$$N_4 = \Sigma N_4(l),$$

la somme étant étendue à toutes les lignes similaires à AcB dont le nombre est 9. Mais on aura d'autre part

$$N_5 = \frac{1}{2}\Sigma N_5(l),$$

car chacune des N_5 lignes de la classe V, contenant comme parties intégrantes deux des lignes l, apparaîtrait deux fois dans $\Sigma N_5(l)$.

Nous aurons donc à déterminer, pour chacune des lignes l, les nombres $N_4(l)$ et $N_5(l)$.

31. Considérons en particulier la ligne AcB; elle est contenue dans douze lignes L de la classe IV, à savoir :

(1) $AcBCab$,	(5) $abAcBC$,	(9) $aAcBCb$,
(2) $AcBCba$,	(6) $baAcBC$,	(10) $bAcBCa$,
(3) $abCAcB$,	(7) $aCAcBb$,	(11) $CAcBab$,
(4) $baCAcB$,	(8) $bCAcBa$,	(12) $CAcBba$,

et dans huit lignes de la classe V :

(13) $AcBaCb$,	(17) $aAcBbC$,
(14) $AcBbCa$,	(18) $bAcBaC$,
(15) $CaAcBb$,	(19) $aCbAcB$,
(16) $CbAcBa$,	(20) $bCaAcB$.

Dans chacune de ces lignes figurent, outre la partie AcB qui leur est commune, quelques-uns des segments

$$ab,\quad Aa,\quad Ab,\quad Ba,\quad Bb,\quad Ca,\quad Cb.$$

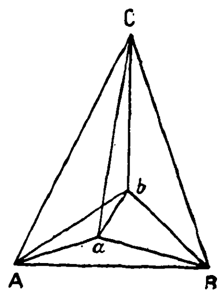
Il faudra rejeter toutes celles des lignes des Tableaux ci-dessus qui offrent des points doubles, soit que les segments que nous venons d'énumérer se coupent entre eux, soit qu'ils soient coupés par la ligne AcB; puis compter les lignes restantes.

Les intersections possibles dépendent de la situation des points a, b, c dans le triangle ABC. On peut faire à cet égard, en ce qui concerne les points a, b, deux hypothèses principales, dont chacune donnera lieu à des hypothèses secondaires d'après la situation du point c.

32. *Hypothèse I.* — La ligne ab prolongée coupe le côté AB (et un autre côté du triangle ABC, que nous supposerons être BC).

Construisons la figure (22) formée par les segments ab, Aa, Ab,

Fig. 22.



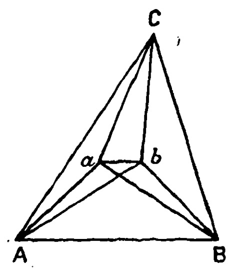
Ba, Bb, Ca, Cb. Elle présente un point double intersection de Ab et de Ca. Nous devrons donc rejeter les lignes (10), (18), (19), de sorte que N_4 (AcB) ne pourra surpasser (onze), ni N_5 (AcB) surpasser (six). Ces chiffres subiront d'ailleurs une nouvelle réduction si c est placé de telle sorte que la ligne AcB coupe quelques-uns des segments tracés sur la figure.

On obtient ainsi sept hypothèses secondaires. Le Tableau suivant donne pour chacune d'elles, avec l'indication des segments coupés, les nombres correspondants N_4 (AcB), N_5 (AcB) des lignes L à conserver :

Hypothèses.	Segments coupés.	N_4(AcB).	N_5(AcB).
I_1.............	aucun	11	6
I_2.............	Aa (ou Ba)	9	4
I_3.............	Aa, Ab	8	2
I_4.............	Ba, Bb	1	1
I_5.............	Ca, ab	2	2
I_6.............	Ca, Ab, ab	2	1
I_7.............	Ca, Cb	4	0

33. *Hypothèse II.* — Le côté ab prolongé ne coupe pas AB. Les segments qui se coupent sont ici Ab et Ba, ce qui entraîne le rejet des lignes (16) et (18), toutes deux de la classe V. D'autres exclu-

Fig. 23.



sions seront nécessaires si AcB coupe quelques-uns des segments: d'où plusieurs hypothèses accessoires dont voici le Tableau :

Hypothèses.	Segments coupés.	$N_4(AcB)$.	$N_5(AcB)$.
H_1........	aucun	12	6
H_2........	Ab (ou Ba)	10	5
H_3........	Aa, Ab (ou Ba, Bb)	8	2
H_4........	Ab, Ba	8	4
H_5........	Ab, Ba, ab	2	4
H_6........	Ca, ab, Ab (ou Cb, ab, Ba)	2	2
H_7........	Ca, Cb	4	0

34. Considérons maintenant une quelconque des lignes similaires à AcB, par exemple BbC. De même que $N_4(AcB)$, $N_5(AcB)$ dépendent des relations des lignes AB et AcB avec les lignes ab, Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb, $N_4(BbC)$, $N_5(BbC)$ dépendront des relations analogues entre BC, BbC et les lignes bc, Ba, Bc, Ca, Cc, Aa, Ac. Au sujet de ces relations on pourra faire les mêmes hypothèses que ci-dessus.

Cela posé, un coup d'œil jeté sur les figures 16 à 21 relatives à chacun de nos six cas montre quelles sont les hypothèses réalisées et par suite les valeurs de $N_4(l)$, $N_5(l)$ pour chacune des lignes l similaires à AcB. On formera ainsi les Tableaux suivants :

Cas I.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_4(l)$.	$N_5(l)$.
AcB........	H_1	aucun	12	6
AaB........	H_3	Ab, Ac	8	2
AbB........	H_3	Ba, Bc	8	2
BaC........	I_7	Ab, Ac	4	0
BbC........	I_1	aucun	11	6
BcC........	I_5	Ab, ab	2	2
CbA........	I_7	Ba, Bc	4	0
CcA........	I_5	Ba, ab	2	2
CaA........	I_1	aucun	11	6
			62	26

$$N_4 = 62, \qquad N_5 = 13.$$

Cas II.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_4(l)$.	$N_5(l)$.
AcB........	H_5	Ab, Ba, ab	2	4
AaB........	H_2	Ab	10	5
AbB........	H_2	Ba	10	5
BaC........	I_7	Ab, Ac	4	0
BbC........	I_1	aucun	11	6
BcC........	I_5	Ab, ab	2	2
CbA........	I_7	Ba, Bc	4	0
CcA........	I_5	Ba, ab	2	2
CaA........	I_1	aucun	11	6
			56	30

$$N_4 = 56 \qquad N_5 = 15.$$

Cas III.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_4(l)$.	$N_5(l)$.
AcB........	H_7	Ca, Cb	4	0
AaB........	I_2	Ab	9	4
AbB........	I_2	Ba	9	4
BaC........	H_7	Ab, Ac	4	0
BbC........	I_2	Bc	9	4
BcC........	I_2	Cb	9	4
CbA........	H_7	Bc, Ba	4	0
CcA........	I_2	Ca	9	4
CaA........	I_2	Ac	9	4
			66	24

$$N_4 = 66, \qquad N_5 = 12.$$

Cas IV.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_4(l)$.	$N_5(l)$.
AcB.......	II_1	aucun	18	6
AaB.......	I_6	Cc, bc, Bb	2	1
AbB.......	I_6	Cc, ac, Aa	2	1
BaC.......	II_1	aucun	18	6
BbC.......	I_6	Aa, ca, Cc	2	1
BcC.......	I_6	Aa, bc, Bb	2	1
CbA.......	II_1	aucun	18	6
CcA.......	I_6	Bb, ab, Aa	2	1
CaA.......	I_6	Bb, ca, Cc	2	1
			66	24

$$N_4 = 66, \qquad N_5 = 12.$$

Cas V.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_4(l)$.	$N_5(l)$.
AcB.......	II_7	Ca, Cb	4	0
AaB.......	I_2	Ab	9	4
AbB.......	I_2	Ba	9	4
BaC.......	I_7	Ab, Ac	4	0
BbC.......	I_5	Ac, ac	2	2
BcC.......	I_1	aucun	11	6
CbA.......	II_6	Ba, Ac, ac	2	2
CcA.......	I_4	Ca, Cb	7	1
CaA.......	II_2	Ac	10	5
			58	24

$$N_4 = 58, \qquad N_5 = 12.$$

Cas VI.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_4(l)$.	$N_5(l)$.
AcB.......	II_1	aucun	18	6
AaB.......	I_6	Cc, Bb, bc	2	1
AbB.......	I_6	Cc, Aa, ac	2	1
BaC.......	II_1	aucun	18	6
BbC.......	II_6	Cc, Aa, ac	2	2
BcC.......	I_3	Ba, Bb	8	2
CbA.......	I_1	aucun	11	6
CcA.......	I_7	Ba, Bb	4	0
CaA.......	I_5	Bb, bc	2	2
			67	26

$$N_4 = 67, \qquad N_5 = 13.$$

55. Récapitulant tous les résultats obtenus, nous aurons finalement :

	Cas I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N_1	32	28	36	24	32	28
N_2	48	42	60	42	51	45
N_3	58	52	54	54	50	54
N_4	62	56	66	66	58	67
N_5	13	15	12	12	12	13
N	213	193	228	198	203	207

Cas où $n = 7$.

56. Nous nous bornerons à traiter le cas où le polygone principal est un hexagone ABCDEF avec un point intérieur a.

Le nombre N_0 des lignes L (sans point double) qui ne contiennent aucune diagonale est, d'après le n° **3**,

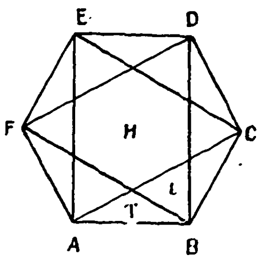
$$N_0 = 2.6.5 = 60.$$

Les diagonales sont d'ailleurs de deux sortes :

Celles de la première sorte, au nombre de trois, joignent deux sommets opposés et partagent l'intérieur de l'hexagone en deux quadrilatères.

Celles de la seconde sorte, au nombre de six, joignent les sommets

Fig. 24.



de deux en deux et partagent l'hexagone en un pentagone et un triangle.

L'ensemble de ces six lignes le partage en treize régions (*fig.* 24), à savoir :

Un hexagone central H;

Six triangles T ayant un côté commun avec le polygone principal;

Six autres triangles t.

D'où trois cas à considérer.

Les lignes cherchées pourront contenir :

1° Une seule diagonale de la seconde sorte;

2° Deux diagonales de la seconde sorte issues d'un même sommet;

3° Deux diagonales de la seconde sorte sans sommet commun;

4° Une seule diagonale, de la première sorte;

5° Deux diagonales, l'une de la première sorte et l'autre de la seconde;

6° Trois diagonales.

Soient respectivement M_1, M_2, ..., M_6 les nombres de lignes L sans point double de chacune de ces six espèces, on aura

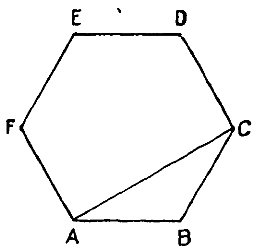
$$N = N_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_6.$$

Déterminons successivement ces divers nombres.

57. Calcul de M_1. — Soit AC la diagonale donnée. Deux hypothèses seront possibles.

Hypothèse I. — a est dans le triangle ABC (*fig.* 25). Les solu-

Fig. 25.



tions s'obtiendront en ajoutant à la diagonale :

Soit la ligne FEDC avec une des deux lignes ABa, AaB;

Soit la ligne DEFA avec une des deux lignes CBa, CaB.

On a ainsi quatre solutions.

Hypothèse II. — a est dans le pentagone ACDEF.

Il faudra ajouter à la diagonale : soit BC avec une des six lignes

$$AFED a,\quad AFE a D,\quad AF a ED,\quad AF a DE,\quad A a FED,\quad A a DEF,$$

soit BA avec une des six lignes

$$CDEF a,\quad CDE a F,\quad \ldots,\quad C a FED.$$

On a ainsi douze solutions.

Considérons successivement les six diagonales. Si a est dans II, l'hypothèse I n'étant jamais réalisée, on aura

$$M_1 = 6.12 = 72.$$

S'il est dans une région t, cette hypothèse étant réalisée pour une diagonale, on aura

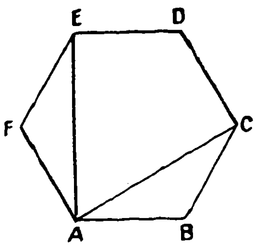
$$M_1 = 5.12 + 4 = 64.$$

S'il est dans une région T, elle le sera pour deux diagonales; d'où

$$M_1 = 4.12 + 2.4 = 56.$$

38. Calcul de M_2. — Soient AC, AE (*fig.* 26) les deux diagonales données.

Fig. 26.



Deux hypothèses sont possibles :

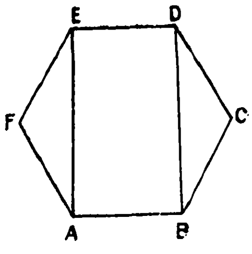
1° a est dans l'un des deux triangles ABC, AEF (dans AEF par exemple). Aucune solution.

2° a est dans l'angle CAE. Aucune solution.

39. Calcul de M_3. — Soient AE, BD les deux diagonales données (*fig.* 27).

Si a est dans l'un des triangles BCD, AEF, par exemple dans

Fig. 27.



BCD, on devra adjoindre aux diagonales données

$$FE,\ AB \text{ et } DCa \quad \text{ou} \quad DaC$$

ou

$$FA,\ ED \text{ et } BCa \quad \text{ou} \quad BaC,$$

soit en tout quatre solutions.

Si a est entre les deux diagonales, il faudra adjoindre

$$FE \text{ avec } AaB \text{ et } DC \quad \text{ou avec} \quad AaD \text{ et } BC$$

ou

$$FA \text{ avec } EaB \text{ et } DC \quad \text{ou avec} \quad EaD \text{ et } BC.$$

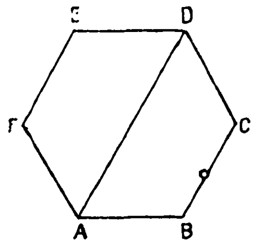
On a encore quatre solutions.

Il existe d'ailleurs trois couples de diagonales analogues à celui que nous avons considéré. On aura donc dans tous les cas

$$M_3 = 3.4 = 12.$$

40. Calcul de M_4. — Soit AD (*fig.* 28) la diagonale donnée.

Fig. 28.



Supposons par exemple que ABCD soit celui des deux quadrilatères qui contient a.

Les lignes à adjoindre seront

FED avec une des lignes $ABCa$, $ABaC$, $AaBC$, $AaCB$

ou

EFA avec une des lignes $DCBa$, $DCaB$, $DaCB$, $DaBC$,

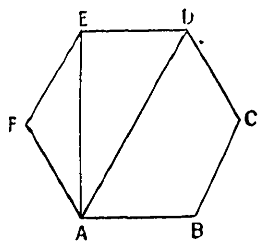
d'où huit solutions.

Or on a trois diagonales telles que AD; donc

$$M_4 = 3.8 = 24.$$

41. Calcul de M_5. — Soient AD et AE les deux diagonales données (*fig.* 29). Trois hypothèses sont possibles :

Fig. 29.



1° a est dans le triangle AEF. Les lignes à adjoindre seront

DCB avec EFa ou EaF,

soit deux solutions;

2° a est dans le quadrilatère ABCD. On aura quatre solutions :

FE avec une des lignes $DCBa$, $DCaB$, $DaCB$, $DaBC$;

3° a est dans l'angle DAE. Aucune solution.

Or il existe douze couples de diagonales analogues à celui que nous venons de considérer. L'un d'eux est formé des diagonales AD et AC. Si nous envisageons successivement ces deux systèmes, nous voyons que l'hypothèse II sera réalisée dans l'un d'eux. L'hypothèse I le sera dans l'autre si a est dans l'un des deux triangles ABC, AEF, de sorte que la somme des solutions sera $4 + 2 = 6$. Mais si a est compris dans l'angle CAF, cette somme ne sera plus que $4 + 0 = 4$.

Achevons la sommation en considérant successivement les six couples de diagonales analogues à AC, AE. Nous aurons

$$N_5 = 4\alpha + 6(6 - \alpha) = 36 - 2\alpha,$$

α étant le nombre de ceux de ces couples dont les deux côtés comprennent entre eux le point a.

Or on voit par l'inspection de la figure 24 que si a est dans H,

$$\alpha = 6, \qquad \text{d'où} \qquad N_5 = 24;$$

s'il est dans une région t,

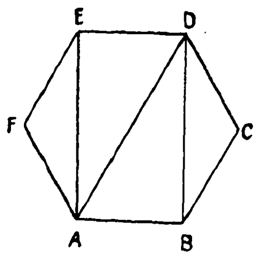
$$\alpha = 5, \qquad \text{d'où} \qquad N_5 = 26;$$

s'il est dans une région T,

$$\alpha = 4, \qquad \text{d'où} \qquad N_5 = 28.$$

42. Calcul de N_6. — Soient AE, BD, AD les trois diagonales données (*fig.* 30).

Fig. 30.



Si a est dans le quadrilatère ABDE, on n'aura aucune solution.

S'il est dans l'un des triangles AEF, BCD (par exemple dans AEF), on aura les deux solutions

$$\text{BC avec } EFa \quad \text{ou} \quad EaF.$$

On aurait obtenu le même résultat en considérant le système des trois diagonales AE, BD, BE.

La valeur de N_6 sera donc 4β, β désignant parmi les trois quadrilatères analogues à ABDE le nombre de ceux qui ne contiennent pas a.

En se reportant encore à la figure 24, on voit que si a est dans H,

$$\beta = 0, \qquad N_6 = 0;$$

s'il est dans t,

$$\beta = 1, \qquad N_6 = 4;$$

s'il est dans T,

$$\beta = 2, \qquad N_6 = 8.$$

43. Rassemblons les résultats précédents; nous aurons, si a est dans H,

$$N = 60 + 72 + 0 + 12 + 24 + 0 = 168;$$

s'il est dans une région t,

$$N = 60 + 64 + 0 + 12 + 26 + 4 = 166;$$

s'il est dans une région T,

$$N = 60 + 56 + 0 + 12 + 28 + 8 = 164.$$