

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GLOBAL-MIKHAÏLENKO

Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation

Journal de mathématiques pures et appliquées 8^e série, tome 2 (1919), p. 273-340.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1919_8_2_273_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide
en rotation;*

PAR GLOBA-MIRHAÏLENKO,

Docteur de l'Université de Paris.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire a pour but l'étude des figures d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation uniforme autour d'un axe fixe et assujettie soit aux seules forces capillaires, soit aux seules forces newtoniennes.

Dans la première Partie, les conditions admises sont celles de l'expérience de Plateau. La masse fluide est un cylindre liquide, soumis aux seules forces capillaires.

Nous supposons que ce cylindre a une hauteur finie, et il est limité par deux disques circulaires horizontaux de même axe et de même rayon.

Nous faisons tourner ce cylindre et nous trouvons d'abord les conditions de sa stabilité, ensuite ses figures de bifurcation, en tous points analogues aux figures de bifurcation relatives à une masse fluide soumise aux seules forces newtoniennes. Nous trouvons les nouvelles figures, infiniment voisines du cylindre primitif et, en les suivant dans

leur développement, nous rattachons les résultats ici obtenus à ceux obtenus dans la troisième Partie de notre première Thèse.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation soumise aux seules forces newtoniennes. Nous y étudions les figures creuses, limitées par des ellipsoïdes ou par des cylindres elliptiques, et nous démontrons que seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre. Ici, comme dans le cas des figures ellipsoïdales, nous avons tout le jeu des figures de bifurcation et des séries de nouvelles figures s'amorçant à chacune des figures de bifurcation.

Enfin, dans la troisième et dernière Partie, nous étudions le problème des petits mouvements d'une masse fluide en rotation autour de sa position d'équilibre ellipsoïdale. Ce problème a été traité par Poincaré au n° 13 de son Mémoire classique des *Acta mathematica*. Nous y relevons une erreur de calcul qui a faussé tous les résultats de Poincaré et nous démontrons l'impossibilité des oscillations simples, sorte de clapotis sur la surface de l'ellipsoïde, trouvées par Poincaré.

Nous tenons à renouveler ici toute notre gratitude et exprimer toute notre reconnaissance la plus affectueuse à M. Paul Appell, membre de l'Institut, qui, par ses précieux conseils, nous a encouragé et guidé dans nos travaux et nos recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

Équilibre et figures de bifurcation d'un cylindre liquide homogène soumis aux seules forces capillaires et tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire constante.

1. *Position du problème.* — Considérons un liquide homogène incompressible non pesant et soumis aux seules forces capillaires. Un tel liquide peut être réalisé si nous le plaçons dans un autre liquide de même densité et si nous prenons son volume assez petit pour que nous puissions négliger les attractions newtoniennes, c'est-à-dire si nous le plaçons dans les conditions des expériences de Plateau.

Supposons qu'à l'état d'équilibre le liquide affecte la figure d'un cylindre circulaire de rayon a et de hauteur h soit finie et constante,

soit indéfinie. Dans le premier cas, les deux bases du cylindre seront limitées par deux disques solides plans, parallèles entre eux, et de rayon a égal à celui du cylindre. La distance entre les disques reste constante et détermine la hauteur du cylindre.

Nous savons que si la hauteur h du cylindre est inférieure au périmètre de la base $2\pi a$, le cylindre est une figure d'équilibre stable.

Imprimons à notre cylindre un mouvement de rotation uniforme autour de son axe. Évidemment la figure cylindrique sera encore une figure d'équilibre. Pour quelle vitesse angulaire reste-t-elle stable?

Nous savons qu'il existe des figures d'équilibre de révolution et non cylindriques (1); pour quelle valeur de la vitesse angulaire le cylindre se transforme-t-il en une de ces figures?

Existe-t-il encore des figures d'équilibre cylindriques indéfinies mais non de révolution?

Ce sont ces trois questions que nous nous proposons à résoudre.

2. Formules générales. — Nous savons que l'énergie potentielle des forces capillaires est (2)

$$-fS + \text{const.},$$

f étant la tension superficielle et S la surface libre du liquide, car la surface de contact avec les disques solides reste invariable. En effet, comme l'a montré Poincaré (*Capillarité*, p. 102), le raccordement ne pourra se faire que suivant le bord du disque où, l'arête étant toujours plus ou moins émoussée, l'angle de raccordement peut prendre la valeur qui lui convient. Dans ces conditions, le rayon des circonférences des bases, et par suite la surface de contact du liquide avec les disques, conserve bien une valeur constante.

D'autre part, l'énergie de la force centrifuge est

$$\frac{\omega^2}{2} J,$$

(1) Voir ma première Thèse, *Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1916, fasc. 1).

(2) POINCARÉ, *Capillarité*, Paris, 1895, p. 48.

J étant le moment d'inertie de la masse liquide par rapport à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire.

L'énergie potentielle totale de la masse liquide est donc

$$(1) \quad W = \frac{\omega^2}{2} J - fS + \text{const.}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la variation première de W soit nulle pour toute déformation infiniment petite du cylindre liquide. Nous dirons que la déformation est infiniment petite si le maximum de distance entre la surface primitive donnée et la surface déformée reste inférieur à un nombre donné d'avance, si petit qu'il soit. La distance entre les surfaces est mesurée suivant la perpendiculaire à l'axe de rotation.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que l'énergie soit maximum, c'est-à-dire il faut que sa deuxième variation soit négative.

Si la deuxième variation est nulle, nous avons une figure de bifurcation. En effet, soit ε le paramètre définissant la figure déformée et W_0 la valeur de W correspondant à la surface primitive ($\varepsilon = 0$). En développant W suivant les puissances de ε , nous aurons pour les surfaces déformées

$$(2) \quad W = W_0 + \varepsilon W' + \varepsilon^2 W'' + \dots$$

Si la figure primitive est d'équilibre, nous aurons

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = W' = 0.$$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que W'' soit négatif. Le coefficient W'' n'est donc autre chose que le coefficient de stabilité de Poincaré (1). En appliquant sa théorie, on voit bien que, lorsque $W'' = 0$, nous sommes en présence d'une figure de bifurcation.

3. Masse liquide finie. — Reprenons notre cylindre de révolution de hauteur h et de rayon a . En adoptant les coordonnées semi-polaires

(1) H. POINCARÉ, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t, VII, 1885).

r, θ, z , nous prendrons pour axe z l'axe du cylindre. L'équation du cylindre sera alors

$$r = a.$$

Le volume du liquide sera

$$V_0 = \pi a^2 h.$$

Sa surface latérale

$$S_0 = 2\pi a h$$

et son moment d'inertie par rapport à l'axe

$$J_0 = \rho \frac{\pi h a^4}{2} = \rho V_0 \frac{a^2}{2},$$

ρ étant sa densité.

Comme surface infiniment voisine considérons d'abord une surface de révolution dont la méridienne est donnée par l'équation

$$r = a + \mu + \varepsilon \sin kz,$$

μ étant une fonction de ε , ce dernier étant un paramètre très petit déterminant l'écart entre la figure cylindrique primitive et la figure nouvelle. La déformation est infiniment petite si ε est infiniment petit.

Nous désignerons par z_0 et z_1 les ordonnées des bases du cylindre.

Comme le diamètre des bases doit rester constant, égal à a , nous devons avoir

$$\mu = \varepsilon \sin kz_0 = \varepsilon \sin kz_1$$

et par conséquent k doit vérifier l'une des conditions :

$$\begin{array}{l} 1^\circ \quad kz_1 - kz_0 = 2n\pi; \\ 2^\circ \quad k(z_1 + z_0) = (2n + 1)\pi, \end{array}$$

n étant un nombre entier.

Nous aurons ainsi des figures de deux genres différents. Toutes les deux seront pour ainsi dire ondulées suivant leurs longueurs ; mais les figures du premier genre auront un nombre pair de demi-ondes et celles du second genre auront un nombre impair de demi-ondes entières. En donnant à n les valeurs 1, 2, 3, ..., nous obtiendrons toutes les figures de chaque genre.

En posant

$$kz_0 = \alpha,$$

nous aurons respectivement dans les deux cas :

$$1^{\circ} \quad kz_1 = 2n\pi + \alpha;$$

$$2^{\circ} \quad kz_1 = 2(n+1)\pi - \alpha.$$

La hauteur du cylindre sera alors :

$$1^{\circ} \quad h = z_1 - z_0 = \frac{2n\pi}{k},$$

d'où

$$k = \frac{2n\pi}{h};$$

$$2^{\circ} \quad h = z_1 - z_0 = \frac{2(n+1)\pi - \alpha}{k},$$

d'où

$$k = \frac{2(n+1)\pi - \alpha}{h}.$$

Désignons encore par 2λ la longueur d'onde sinusoïdale, nous aurons dans les deux cas

$$k = \frac{\pi}{\lambda},$$

et nous aurons également :

$$1^{\circ} \quad h = 2n\lambda;$$

$$2^{\circ} \quad h = (2n+1)\lambda - \frac{2\lambda\alpha}{\pi}.$$

Enfin, l'équation de la méridienne sera dans les deux cas

$$r = a - \mu + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z.$$

Considérons séparément chacun des deux cas.

4. PREMIER CAS : Nombre pair de demi-ondes. — Cherchons d'abord à déterminer μ , fonction de ε , de manière que le volume du liquide reste constant pendant la déformation.

Le volume de la figure déformée est

$$(3) \quad V = \pi \int_{z_0}^{z_1} r^2 dz = \pi \int_{z_0}^{z_1} \left(a - \mu + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z \right)^2 dz.$$

En effectuant l'intégration et en remplaçant z_1 par $z_0 + 2n\pi$, nous

aurons, en remarquant que $2n\lambda = h$,

$$V = \pi h \left(a^2 + \mu^2 - 2a\mu + \frac{\varepsilon^2}{2} \right);$$

et comme le volume primitif est égal à $\pi a^2 h$, la condition d'invariabilité du volume s'écrira

$$\mu^2 - 2a\mu + \frac{\varepsilon^2}{2} = 0.$$

En considérant ε comme infiniment petit du premier ordre, nous voyons que μ devra être du second ordre et μ^2 du quatrième. En le négligeant, nous aurons

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4a}.$$

et l'équation de la méridienne s'écrira

$$(4) \quad r = a - \frac{\varepsilon^2}{4a} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z.$$

Cherchons maintenant la variation de W . D'après la formule (1), nous aurons

$$\delta W = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f. \delta S.$$

Calculons séparément δJ et δS . La surface de la figure déformée est

$$S = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} r \sqrt{1 + r'^2} dz.$$

Or

$$r' = \varepsilon \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda} z,$$

d'où

$$\sqrt{1 + r'^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} z - \frac{3}{8} \varepsilon^4 \frac{\pi^4}{\lambda^4} \cos^4 \frac{\pi}{\lambda} z + \dots$$

En négligeant les puissances de ε supérieures à la deuxième, on aura

$$(5) \quad S = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} \left(a - \frac{\varepsilon^2}{4a} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z \right) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} z \right) dz.$$

Remarquons que $S_0 = 2\pi ah$ et négligeons le terme en ε^4 , il

vient

$$(6) \quad \delta S = \frac{\pi h \varepsilon^2}{2a} \left(\frac{a^2 \pi^2}{h^2} - 1 \right) = \frac{\pi h \varepsilon^2}{2a \lambda^2} (a^2 \pi^2 - \lambda^2).$$

Remplaçons λ par $\frac{h}{2n}$, on aura finalement

$$(6') \quad \delta S = \frac{\pi \varepsilon^2}{2ah} (4a^2 \pi^2 n^2 - h^2).$$

On voit ainsi que δS est d'autant plus grande que n est plus grand, c'est-à-dire que, h étant constant, la longueur d'onde sinusoidale est plus petite.

Par conséquent, si la surface cylindrique n'est pas minimum ($h > 2\pi a$), la surface minimum s'obtiendra en faisant $n = 1$, c'est-à-dire en prenant une seule onde sur toute la longueur du cylindre.

Passons à δJ . Nous avons

$$J = \rho \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^2 dz - \rho \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} \left[a - \frac{\varepsilon^2}{4a} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z \right]^2 dz.$$

En négligeant les termes de degrés supérieurs à 2 en ε , on a

$$(7) \quad J = \rho \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} \left(a^2 - a^2 \varepsilon^2 + 4a^3 \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z + 6a^2 \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} z \right) dz.$$

Effectuons l'intégration et, en tenant compte de ce que

$$J_0 = \rho \frac{\pi a^2 h}{2},$$

nous aurons

$$(8) \quad \delta J = \rho \pi a^2 h \varepsilon^2.$$

L'accroissement de δJ est donc toujours positif.

Nous pouvons maintenant écrire δW :

$$\delta W = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f \cdot \delta S = \rho \frac{\pi \varepsilon^2}{2ha} [(\omega^2 a^3 + f') h^2 - 4f' n^2 a^2 \pi^2],$$

ou encore

$$(9) \quad \delta W = \frac{\rho}{2} \pi \varepsilon^2 a^2 h \left[\omega^2 - \frac{f' (4n^2 a^2 \pi^2 - h^2)}{a^3 h^2} \right],$$

en posant

$$f' = \frac{f}{\rho}.$$

§. *Stabilité.* — Si l'on assujettit la figure d'équilibre à la condition de rester cylindrique ou ondulée du premier genre (nombre pair de demi-ondes), la figure cylindrique sera stable si δW est positive ou

$$\omega^2 < \frac{f'(4n^2 a^2 \pi^2 - h^2)}{a^3 h^2},$$

quel que soit n .

Or il est clair que la partie droite de cette inégalité croît avec n . Nous devons donc avoir pour la stabilité du cylindre la condition suivante :

$$(9') \quad \omega^2 < f' \frac{4a^2 \pi^2 - h^2}{a^3 h^2}.$$

Si nous n'assujettissons notre fluide à aucune condition, la condition de stabilité, restant toujours nécessaire, pourra ne pas être suffisante.

En posant $\omega^2 = 0$, nous retrouvons le résultat de Plateau : pour la stabilité statique du cylindre, il faut avoir

$$4a^2 \pi^2 - h^2 > 0 \quad \text{ou} \quad h < 2a\pi.$$

6. *Figures de bifurcation.* — En remarquant que l'accroissement δW que nous venons de trouver n'est autre chose que

$$\varepsilon^2 W''$$

de la formule (2), nous voyons que le cylindre devient une figure de bifurcation chaque fois que δW s'annule ou que l'équation suivante est vérifiée :

$$(10) \quad \omega^2 = f' \frac{4n^2 a^2 \pi^2 - h^2}{a^3 h^2}$$

ou

$$(10') \quad \omega^2 = \frac{f\pi}{M} \frac{a}{h} \left(4n^2 \pi^2 - \frac{h^2}{a^2} \right),$$

M étant la masse du liquide.

En donnant à n les valeurs

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

nous obtenons une série discontinue de valeurs de ω :

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$$

Chacune de ces valeurs détermine une figure cylindrique de bifurcation qui pourra donner naissance à une figure ondulatoire de longueur d'onde

$$2\lambda = \frac{h}{n}.$$

Ces figures sont dissymétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et passant par son milieu. Nous les appellerons « figures Ω ».

La première de ces figures est analogue à la figure piriforme de Poincaré.

Il est à remarquer que toutes ces figures seront instables pour $n > 1$. En effet, comparons une de ces figures à la figure correspondant à la même valeur de ε , mais à $n = 1$. Nous verrons que, pour le passage de la première de ces figures à la deuxième ($n = 1$), la variation d'énergie, que nous désignerons par $\delta W_{n,1}$, sera positive.

En désignant par δW_n et δW , les variations de W relatives au passage de la figure cylindrique à chacune des figures considérées, nous aurons

$$\delta W_{n,1} = \delta W_1 - \delta W_n = \frac{\pi \varepsilon^2}{ah} f' a^2 \pi^2 (n^2 - 1),$$

qui est toujours positive pour $n > 1$.

7. DEUXIÈME CAS : Nombre impair de demi-ondes. — Considérons maintenant le deuxième mode de déformation, pour lequel la hauteur du cylindre contient un nombre impair de demi-ondes entières. Les calculs dans ce cas seront identiquement pareils à ceux que nous venons de faire pour le premier cas, à cela près que, dans toutes les intégrales, nous devons prendre pour les limites

$$z_0 = \frac{\alpha \lambda}{\pi} \quad \text{et} \quad z_1 = (2n + 1)\lambda - \frac{\alpha \lambda}{\pi}.$$

L'intégrale (3) s'écrit alors, en développant le carré,

$$V = \int_{\frac{\alpha\lambda}{\pi}}^{(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}} \left[a^2 + \mu^2 - 2a\mu + 2\varepsilon(a - \mu) \sin \frac{\pi}{\lambda} s + \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} s \right] ds.$$

En effectuant l'intégration et en retranchant $V_0 = \pi a^2 h$, nous obtenons pour la variation du volume l'expression suivante :

$$\delta V = \pi \left[(\mu^2 - 2a\mu) h + 4(a - \mu) \frac{\lambda\varepsilon}{\pi} \cos \alpha + \varepsilon^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{\lambda}{2\pi} \sin 2\alpha \right) \right].$$

Nous sommes obligé de considérer ici ε et μ comme des infiniment petits de même ordre de grandeur; en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous aurons

$$\delta V = 2\pi a \left(-\mu h + \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi} \cos \alpha \right).$$

La condition d'invariabilité de volume s'écrit alors, dans ce cas,

$$(11) \quad \mu = \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi h} \cos \alpha.$$

Or, de la condition

$$\mu = \varepsilon \sin \alpha,$$

nous tirons

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{\varepsilon}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}}.$$

Portons cette valeur dans (11), d'où

$$(12) \quad \mu = \frac{2\lambda\varepsilon}{\sqrt{h^2\pi^2 + 4\lambda^2}}.$$

La comparaison avec (11) donne enfin

$$(13) \quad \sin \alpha = \frac{2\lambda}{\sqrt{h^2\pi^2 + 4\lambda^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\pi h}{\sqrt{h^2\pi^2 + 4\lambda^2}}.$$

L'équation du méridien s'écrit alors

$$(14) \quad r = a - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi h} \cos \alpha + \varepsilon \sin \frac{\pi s}{\lambda}.$$

Ceci posé, calculons δW . Elle sera calculée à l'aide des mêmes formules que dans le premier cas, à cela près que, dans les intégrales donnant la surface et le moment d'inertie, les limites z_0 et z , seront $\frac{\alpha\lambda}{\pi}$ et $(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}$.

Ainsi l'intégrale (5) sera remplacée par la suivante, où l'on a négligé les termes en ε^3 et ε^4 :

$$S = 2\pi \int_{\frac{\alpha\lambda}{\pi}}^{(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}} \left(a - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi h} \cos \alpha + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z + \frac{a\varepsilon^2}{2} \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} z \right) dz.$$

En effectuant l'intégration, et en tenant compte de ce que

$$S_0 = 2\pi ah,$$

nous aurons comme précédemment

$$(15) \quad \delta S = \frac{a\varepsilon^2 \pi^2}{4\lambda^2} \left(h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha \right).$$

On remarque que, dans ce cas, δS est toujours positive, et que, par conséquent, les figures d'équilibre statique de ce genre n'existent pas.

Passons au moment d'inertie.

L'intégrale (7) s'écrit maintenant, en négligeant toujours les termes en ε^3 et d'ordres supérieurs :

$$J = \rho \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\alpha\lambda}{\pi}}^{(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}} \left[a^4 - 4a^3\mu + 6a^2\mu^2 + (4a^3 - 12a^2\mu)\varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z + 6a^2\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} z \right] dz;$$

et comme $J_0 = \frac{\rho\pi a^4 h}{2}$, nous aurons, en effectuant l'intégration,

$$\delta J = \rho \frac{\pi}{2} \left[-4a^3 \left(\mu h - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi} \cos \alpha \right) + 6a^2\mu \left(\mu h - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi} \cos \alpha \right) - \frac{12a^2\lambda}{\pi} \varepsilon \mu \cos \alpha + 3a^2\varepsilon^2 \left(h + \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha \right) \right].$$

Enfin, tenons compte de (11) et remplaçons μ par $\varepsilon \sin \alpha$, d'où

$$(16) \quad \delta J = 3\rho a^2 \varepsilon^2 \left(h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha \right).$$

Nous pouvons maintenant écrire δW :

$$(17) \quad \delta W = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f \delta S = \frac{3}{2} a^2 \varepsilon^2 \left(h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha \right) \left(\rho \omega^2 - f \frac{\pi^2}{6 a \lambda^2} \right).$$

8. *Stabilité. Figures d'équilibre.* — Comme le terme

$$h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha$$

est toujours positif, δW sera négative si

$$(18) \quad \rho \omega^2 < f \frac{\pi^2}{6 a \lambda^2}.$$

Si nous assujettissons notre liquide à la condition de conserver la figure cylindrique, ou ondulée de deuxième espèce, l'inégalité précédente nous donnera aussi la condition de stabilité d'équilibre relatif. Mais, dans le cas général, la condition (18) est une condition nécessaire d'équilibre et peut ne pas être suffisante.

Lorsque

$$(19) \quad \rho \omega^2 = \frac{f \pi^2}{6 a \lambda^2},$$

la figure cylindrique sera une figure de bifurcation.

Remplaçons λ par sa valeur

$$\lambda = \frac{h}{(2n+1) - \frac{2\alpha}{\pi}};$$

posons comme avant $\frac{f}{\rho} = f'$, la condition (19) devient

$$(19') \quad \omega^2 = \frac{f' \pi^2 \left(2n+1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2}{6 a h^2}.$$

En donnant à n les valeurs

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

nous verrons qu'à chaque valeur de n correspond une et une seule racine de ω , que nous appellerons ω_n . Nous aurons ainsi une suite

discontinue de valeurs de ω :

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots,$$

correspondant chacune à une figure de bifurcation qui donne naissance à une figure ondulatoire de 1, 2, .., n , ... ondes.

Nous appellerons ces figures « figures ω ». Elles diffèrent des figures Ω , déjà étudiées, parce qu'elles ont un plan de symétrie normal à l'axe et passant par son milieu.

Pour chaque valeur de n , il y aura deux figures différentes, suivant le signe de ε . Pour $\varepsilon > 0$, on aura une figure avec un creux au milieu, et pour $\varepsilon < 0$, on y aura une saillie.

Pour $n = 1$, ces figures sont analogues aux « haltères » de Poincaré.

Il est évident que les valeurs de ω , données par l'équation (19), vont en croissant avec n . Par conséquent, si le fluide part du repos et commence à tourner avec une vitesse de plus en plus grande, la première figure de bifurcation que l'on rencontrera sera celle qui correspond à $n = 1$ et à ω déterminée par l'équation

$$(20) \quad \rho \omega_1^2 = f \frac{\pi^2}{6ah^2} \left(3 - \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2.$$

Pour le calcul effectif de ω , et de la figure qu'affectera la masse liquide après la bifurcation, il nous faut savoir la valeur de α . Cette dernière est donnée par les équations (13), qui donnent

$$\tan \alpha = \frac{2\lambda}{\pi h} = \frac{2}{\pi(2n+1) - 2\alpha}.$$

Dans le cas particulier de $n = 1$, cette équation devient

$$(21) \quad f(\alpha) = \tan \alpha - \frac{1}{\frac{3}{2}\pi - \alpha} = 0;$$

et comme

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,2679 - 0,2300 = +0,0379,$$

$$f\left(\frac{\pi}{15}\right) = 0,2126 - 0,2170 = -0,0044,$$

nous voyons que la racine de (21) se trouve entre $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{15}$.

Cette racine décroît évidemment lorsque n croît.

9. *Ordre des figures de bifurcation.* — Cherchons d'abord dans quel ordre se rencontrent les différentes figures de bifurcation lorsque la vitesse angulaire, partant de zéro, va en croissant. En désignant comme auparavant par Ω_n et ω_n les vitesses angulaires correspondant aux figures de bifurcation du premier et du second genre et de $n^{\text{ième}}$ ordre, nous aurons, en vertu des formules (10) et (19),

$$\omega_n^2 - \Omega_n^2 = \frac{f' \pi^2}{6ah^2} \left[-20n^2 + 4n + 1 + \frac{6h^2}{a^2\pi^2} - 4(2n+1)\frac{\alpha}{\pi} + 4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \right].$$

En considérant $\frac{\alpha}{\pi}$ comme variable, nous voyons que la différence qui nous intéresse est de signe du trinôme du second degré en $\frac{\alpha}{\pi}$.

Pour toutes les valeurs de n , à partir de $n = 2$, le terme constant de notre trinôme est négatif, car $\frac{6h^2}{a^2\pi^2}$ ne peut pas être supérieur à 24. Par conséquent, ses racines sont de signes contraires et la racine positive est supérieure à

$$\frac{2n+1}{2} \leq \frac{5}{2} \quad (n = 2, 3, \dots);$$

et comme $\frac{\alpha}{\pi}$ est en tout cas inférieure à $\frac{1}{12}$, nous voyons que

$$\omega_n^2 - \Omega_n^2 < 0 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Quant à $n = 1$, nous aurons deux cas à considérer suivant la valeur de $\frac{h^2}{\pi a}$. Si cette valeur est assez petite, l'inégalité précédente a lieu, et, si elle est voisine de 2, l'inégalité en question se présente changée de signe.

Ainsi, si notre cylindre est large et court, c'est la figure ω , qui se présente la première; au contraire, s'il est assez long, c'est la figure Ω , qui se rencontre d'abord.

Cherchons maintenant quelles sont les figures suivantes. Nous avons

$$\omega_{n+1}^2 - \Omega_n^2 = \frac{f' \pi^2}{6ah^2} \left[-20n^2 + 12n + 9 + \frac{6h^2}{a^2\pi^2} - 4(2n+3)\frac{\alpha}{\pi} + 4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \right].$$

Pour $n \geq 2$, cette différence est toujours négative, car $\frac{6h^2}{a^2\pi^2}$ étant au

plus égal à 24 , les racines du trinôme sont de signes contraires et la racine positive est forcément plus grande que $\frac{\alpha}{\pi}$.

Mais pour $n = 1$, cette différence est positive. En effet, dans ce cas, les deux racines du trinôme sont positives et la plus petite est supérieure à

$$\frac{10 - \sqrt{96}}{4} = 0,050.$$

Or, la valeur de α est donnée maintenant par l'équation

$$f(\alpha) = \tan \alpha - \frac{1}{\frac{5}{2}\pi - \alpha} = 0;$$

et comme

$$f(0,05\pi) = 0,1584 - 0,1299 = +0,0285,$$

la racine de cette équation est inférieure à $0,05\pi$ et, par conséquent, la différence

$$\omega_2 - \Omega_1$$

est bien positive.

Nous aurons ainsi quatre premières figures de bifurcation.

Pour les cylindres larges et courts ($\frac{h}{\pi a}$ est petit), on aura

$$\omega_1 < \Omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots;$$

la première figure qui se rencontre est donc la figure de genre « haltère » avec une demi-onde entière.

Mais si le cylindre est allongé, on aura

$$\Omega_1 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

et la première figure de bifurcation sera analogue à la figure piri-forme.

Pour une certaine valeur de $\frac{h}{\pi a}$, la différence $\Omega_1 - \omega_1$ peut être nulle. Calculons cette valeur. Nous avons, en posant

$$f(\alpha) = \tan \alpha - \frac{1}{\frac{3}{2}\pi - \alpha},$$

et en donnant à α les différentes valeurs :

$$\begin{aligned} f(0,07\pi) &= 0,2235 - 0,2226 = +0,0009, \\ f(0,0695\pi) &= 0,2219 - 0,2225 = -0,0006. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons prendre, pour la valeur approchée de $\frac{\alpha}{\pi}$, la valeur

$$\frac{\alpha}{\pi} = 0,0697.$$

En écrivant que la différence $\omega_1 - \Omega_1$ est nulle pour $n = 1$ et $\frac{\alpha}{\pi} = 0,0697$, nous aurons l'équation

$$-15 + \frac{6h^2}{a^2\pi^2} - 12 \cdot 0,0697 + 4 \cdot 0,0697^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{h}{a\pi} = 1,6236$$

ou

$$\frac{h}{2\pi a} = 0,8118.$$

Pour cette valeur du rapport entre la hauteur et le périmètre de la base du cylindre, nous aurons une figure de bifurcation où se rencontrent trois séries de figures d'équilibre :

- 1° Les cylindres circulaires;
- 2° Les figures genre « piriforme »;
- 3° Les figures genre « haltère ».

En continuant nos calculs, nous verrons que la cinquième figure de bifurcation sera ω_4 ou Ω_2 , suivant que le rapport de $\frac{h}{\pi a}$ sera petit ou voisin de 2. Pour une valeur particulière de $\frac{h}{\pi a}$, nous pouvons avoir $\omega_4 = \Omega_2$, et nous aurons encore une figure de bifurcation où se rencontrent trois différentes séries de figures d'équilibre.

En général, il est facile de s'en assurer, entre deux figures consécutives Ω_n et Ω_{n+1} de la série Ω , nous aurons au moins deux et au plus trois figures de la série ω . En effet, nous voyons facilement que

$$\omega_{\frac{3}{2}n} > \Omega_n > \omega_{2n} \quad (n = 3, 4, \dots),$$

car

$$\omega_{\frac{1}{2}n} = \frac{f' \pi^2}{6ah^2} \left[25n^2 + 10n + 1 - 4(5n+1) \frac{\alpha}{\pi} + 4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \right],$$

$$\Omega_n = \frac{f' \pi^2}{6ah^2} \left[24n^2 - \frac{6h^2}{\pi^2 a^2} \right],$$

$$\omega_{2n} = \frac{f' \pi^2}{6ah^2} \left[16n^2 + 8n + 1 - 4(4n+1) \frac{\alpha}{\pi} + 4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \right].$$

Les calculs numériques donnent la suite suivante des valeurs de ω déterminant les figures de bifurcation

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 < \Omega_1 \\ \Omega_1 < \omega_1 \end{array} \right\} < \omega_2 < \omega_3 < \left. \begin{array}{l} \omega_4 < \Omega_2 \\ \Omega_2 < \omega_4 \end{array} \right\} < \omega_5 < \omega_6 < \Omega_3 \\ < \omega_7 < \omega_8 < \omega_9 < \Omega_4 < \omega_{10} < \omega_{11} < \Omega_5 < \omega_{12} < \omega_{13} < \omega_{14} \\ < \Omega_6 < \omega_{15} < \omega_{16} < \Omega_7 < \dots$$

10. Condition suffisante de stabilité. — Nous pouvons maintenant résoudre la question de stabilité du cylindre liquide en rotation dans le cas où le liquide est assujéti à la condition d'affecter la forme cylindrique ou sinusoïdale. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que δW soit négative pour toute déformation compatible avec cette liaison. Afin que cette condition soit vérifiée, nous devons avoir l'inégalité

$$\omega < \omega_1,$$

si le cylindre est court $\left(\frac{h}{2\pi a} < 0,8118 \right)$; et l'inégalité

$$\omega < \Omega_1,$$

si le cylindre est long $\left(\frac{h}{2\pi a} > 0,8118 \right)$.

Dans le premier cas, cette condition s'exprime par l'inégalité

$$\omega^2 < \frac{f' \pi^2}{6ah^2} \left(3 - \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2$$

et, dans le deuxième, par

$$\omega^2 < f' \frac{4a^2 \pi^2 - h^2}{a^3 h^2}.$$

Pour la valeur de ω , supérieure à ω dans le premier cas et à Ω , dans le second, le maximum relatif de W correspondra à la figure s'amorçant

à cette valeur de la vitesse angulaire. Dans le premier cas cette figure est de genre « haltère » et dans le deuxième du genre « piriforme ».

Le principe d'échange de stabilités de Poincaré se trouve ainsi vérifié.

II. Forme exacte de la méridienne. — Nous avons étudié jusqu'ici les figures de révolution engendrées par la rotation d'une sinusoïde. Mais nous savons que la forme exacte de ces figures est beaucoup plus compliquée. Nous allons montrer que, lorsque la déformation est infiniment petite, la figure exacte diffère de la figure sinusoïdale par des écarts infiniment petits d'au moins du deuxième ordre.

En commençant nos calculs, nous pouvons affirmer seulement que le rayon de la section droite de notre figure sera une fonction périodique de z , et comme telle sera développable en une série de Fourier.

Nous chercherons ainsi l'équation de la méridienne sous la forme

$$r = a + \mu \sum_{i=1}^{i=\infty} (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz),$$

le paramètre k ayant la même signification que précédemment. La période de r étant désignée par 2λ , on aura

$$k = \frac{\lambda}{\pi}.$$

Pour que la déformation soit infiniment petite, il faut que les coefficients

$$a_i \quad \text{et} \quad b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

soient infiniment petits au moins du premier ordre. Si la figure diffère beaucoup de la figure sinusoïdale, parmi les coefficients a_i et b_i il doit s'en trouver au moins un du premier ordre, autre que b_1 . Les conditions aux bases s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ikz_0 + b_i \sin ikz_0) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ikz_1 + b_i \sin ikz_1). \end{aligned}$$

Cette double condition peut être vérifiée de deux manières :

1^o Soit

$$kz_1 = 2n\pi + kz_0;$$

2^o Soit en supposant que tous les a_i et b_i d'indice impair sont nuls et en posant

$$kz_1 = (2n + 1)\pi + kz_0.$$

Le premier mode correspond aux figures Ω et le second aux figures ω .

Considérons comme précédemment chacun des deux cas séparément.

La condition d'invariabilité de volume s'écrit ici

$$\delta V = \pi \int_{z_0}^{z_1} \left[-2a\mu + \mu^2 + \varepsilon(a - \mu) \sum_1^{\infty} (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) + \left(\sum_1^{\infty} a_i \cos ikz + b_i \sin ikz \right)^2 \right] dz = 0.$$

En intégrant et en remplaçant z_1 par $2n\pi + z_0$ et $z_1 - z_0$ par h , nous aurons

$$\delta V = \pi \left[-2a\mu h + \mu^2 h + \sum_1^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) h \right],$$

et la condition d'invariabilité de volume s'écrira finalement

$$-2a\mu + \mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} = 0.$$

en posant

$$\sum_1^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) = \varepsilon^2.$$

Considérons ε comme infiniment petit du premier ordre et négligeons μ^2 qui sera du quatrième, nous aurons une condition identique à celle que nous avons trouvée pour les figures sinusoïdales du genre Ω :

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4a}.$$

Géométriquement, ε désignera ici la limite supérieure de la distance

entre le cylindre $r = a - \mu$ et la surface déformée. La limite supérieure de la distance entre la surface et le cylindre primitif $r = a$ sera donc $\varepsilon + \mu$; mais comme μ est du deuxième ordre, nous pouvons prendre pour mesure de maximum de l'écart entre la surface déformée et la surface primitive la valeur ε .

Calculons maintenant ∂S et ∂J . Nous avons

$$r' = k \sum i (-a_i \sin ikz + b_i \cos ikz) = k \sum i'$$

et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au deuxième, nous aurons

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{z_0}^{z_1} r \sqrt{1 + r'^2} dz \\ &= 2\pi \int_{z_0}^{z_1} \left[a - \mu + \sum_1^{\infty} (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ak^2}{2} \sum i'^2 (-a_i \sin ikz + b_i \cos ikz)^2 \right] dz, \end{aligned}$$

d'où, en intégrant et en remplaçant μ par sa valeur,

$$\partial S = 2\pi h \left(-\frac{\varepsilon^2}{4a} + \frac{ak^2}{4} \varepsilon'^2 \right).$$

où nous posons

$$\varepsilon'^2 = \sum_1^{\infty} i^2 (a_i^2 + b_i^2).$$

Enfin, en remplaçant k^2 par sa valeur,

$$\partial S = \frac{\pi}{2ah} (4a^2 \pi^2 n^2 \varepsilon'^2 - h^2 \varepsilon^2)$$

De même

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^3 dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} \left\{ (a - \mu)^3 + 3(a - \mu)^2 \sum (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) \right. \\ &\quad \left. + 6(a - \mu)^2 [\sum (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz)]^2 + \dots \right\} dz. \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration et en se bornant aux infiniment petits du

deuxième ordre, on aura

$$\delta J = \frac{\pi}{2} \left(- \{ a^2 \mu + 6 a^2 \frac{\sum (a_i^2 + b_i^2)}{2} \} h \right);$$

et finalement

$$\delta J = \pi a^2 h \varepsilon^2,$$

expression identique à celle que nous avons trouvée pour les figures sinusoïdales Ω .

Par conséquent, la variation de l'énergie sera

$$\delta W_1 = \frac{\rho}{2} \pi a^2 h \varepsilon^2 \left[\omega^2 - f' \frac{\{ n^2 a^2 \pi^2 \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} - h^2 \}}{a^3 h^2} \right].$$

En comparant cette expression à celle donnée par la formule (9), nous voyons que

$$\delta W_1 < \delta W.$$

En faisant le même calcul pour les figures analogues aux figures ω , nous trouverons le même résultat.

Donc, pour que W soit minimum pour une de ces figures, c'est-à-dire pour que le liquide puisse affecter une de ces figures, il faut que

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 1.$$

et, par conséquent, il faut que tous les coefficients, sauf h_1 , soient d'ordre supérieur au premier.

Les vraies figures d'équilibre diffèrent donc des figures sinusoïdales par des écarts infiniment petits d'ordre supérieur. Et, en première approximation, les figures sinusoïdales sont les seules figures possibles d'équilibre.

C'est pourquoi nous pouvons lever la restriction énoncée au n° 10, les conditions suffisantes de stabilité trouvées dans ce numéro seront alors applicables dans le cas où la déformation possible est absolument quelconque. Une seule restriction reste encore en vigueur : le liquide doit tourner à la manière d'un corps solide, c'est-à-dire toutes les particules doivent avoir à chaque instant la même vitesse angulaire, et les composantes de la vitesse suivant l'axe et suivant le rayon doivent être nulles.

12. *Figures s'écartant beaucoup du cylindre circulaire.* — La question suivante se pose maintenant : Que deviennent toutes ces figures infiniment voisines du cylindre quand la vitesse angulaire diffère beaucoup de la vitesse de bifurcation? La méridienne de ces figures sera encore une ligne ondulée du même nombre d'ondes, mais différant beaucoup d'une sinusoïde.

Son équation a été donnée dans la troisième Partie de notre première Thèse où nous avons résolu le problème direct suivant :

Trouver toutes les figures d'équilibre de révolution que peut affecter une masse liquide en rotation, soumise aux seules forces capillaires.

Nous y avons trouvé pour la méridienne de ces figures l'équation suivante [éq. (6), p. 60] :

$$(z) \quad z = \int_{z_0}^z \frac{ar^2 + 2br^2 + \sqrt{c}}{\sqrt{46r^2 - (ar^2 + 2br^2 + \sqrt{c})^2}} dz,$$

où $a = \frac{2\omega^2}{2f}$ et b et c sont deux constantes.

En écrivant que le volume du liquide est égal à celui du cylindre primitif et que la courbe méridienne, partant de $z = z_0$, $r = a$ arrive en $z = z_1 = z_0 + h$ avec la même valeur $r = a$, après avoir effectué un nombre donné d'ondulations, nous obtiendrons deux relations entre a , b , c à l'aide desquelles nous exprimerons b et c en fonctions de a , c'est-à-dire en fonction de ω .

L'intégrale (z) sera alors fonction d'un seul paramètre ω . En faisant varier ω à partir de la valeur de bifurcation, il serait possible de suivre toutes les variations de la figure d'équilibre considérée.

Il est nécessaire de remarquer que les calculs effectifs sont ici très difficiles sinon impossibles, l'intégrale (z), ainsi que l'intégrale donnant le volume du liquide, étant hyperelliptiques. Par suite, les relations entre a , b et c ne pourront pas être exprimées sous une forme finie.

On ne pourra donc résoudre (approximativement, mais avec une précision voulue) que le problème inverse : se donner arbitrairement les constantes a , b , c et chercher ensuite à quel cylindre primitif correspond la figure ainsi déterminée.

15. Cylindre indéfini. Figures infiniment voisines. — Occupons-nous maintenant des figures qui ne sont pas de révolution. Bornons-nous pour le moment au cas idéal d'une masse cylindrique indéfinie et cherchons les figures infiniment voisines. Nous supposons que la déformation est telle que la nouvelle figure reste cylindrique sans être de révolution. Nous aurons ainsi à résoudre un problème à deux dimensions. En considérant une tranche de hauteur τ , le volume sera remplacé par l'aire de la section droite, et la surface latérale par son périmètre.

Soient comme précédemment

$$r = a$$

l'équation du cylindre, et

$$r = a - \mu + \varepsilon \sin k\theta$$

l'équation de la surface déformée, θ étant l'angle polaire.

Le volume d'une tranche de hauteur τ sera

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a - \mu)^2 + 2(a - \mu)\varepsilon \sin k\theta + \varepsilon^2 \sin^2 k\theta] d\theta$$

et la condition d'invariabilité du volume s'écrira

$$\delta V = \pi \left(-2a\mu + \mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) = 0.$$

Elle est identique à celle que nous avons trouvée pour les figures ondulées dans le sens longitudinal et donne

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4a}.$$

L'élément de la surface déformée est

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \\ &= (a - \mu) \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{a - \mu} \sin k\theta + \frac{\varepsilon^2}{(a - \mu)^2} (\sin^2 k\theta + k^2 \cos^2 k\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

En développant le radical en série suivant les puissances de ε et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 2, nous aurons

$$dS = \left[(a - \mu) + \varepsilon \sin k\theta + \frac{\varepsilon^2}{2a} k^2 \cos^2 k\theta \right] d\theta.$$

En intégrant, de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$ et en soustrayant $S_0 = 2\pi a$, nous aurons

$$\delta S = -2\pi\mu + \frac{k^2 \varepsilon^2}{4a} 2\pi$$

et finalement

$$\delta S = \frac{\pi}{2a} (k^2 - 1) \varepsilon^2.$$

Pour $k = 1$, $\delta S = 0$, ce qui est tout à fait compréhensible, car la déformation correspondante consiste en une translation du cylindre parallèlement à son axe. Naturellement nous excluons cette transformation et nous posons seulement

$$k = 2, 3, \dots$$

Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \int_0^r r^3 dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (a - \mu + \varepsilon \sin k\theta)^4 d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [(a - \mu)^4 + 4(a - \mu)^3 \varepsilon \sin k\theta + 6(a - \mu)^2 \varepsilon^2 \sin^2 k\theta + \dots] d\theta. \end{aligned}$$

Tous les calculs faits, nous trouvons la formule déjà rencontrée

$$\delta J = \pi a^2 \varepsilon^2.$$

Nous pouvons former maintenant δW :

$$\delta W = \frac{\rho \omega^2}{2} \pi a^2 \varepsilon^2 - f \frac{\pi}{2a} (k^2 - 1) \varepsilon^2 = \frac{\pi \varepsilon^2}{2a} [\rho \omega^2 a^3 - f(k^2 - 1)].$$

L'équation qui détermine les figures de bifurcation est donc

$$\omega^2 = f' \frac{k^2 - 1}{a^3}.$$

En donnant à k les valeurs 2, 3, 4, ..., nous obtiendrons les valeurs

$$\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$$

déterminant une série discontinue des figures de bifurcation. Le nombre k désigne le nombre de saillies ou de côtes de la nouvelle figure.

La valeur $k = 2$ donne une figure analogue au cylindre elliptique.

Si nous assujettissons la masse liquide à la condition de rester cylindrique, le cylindre circulaire sera stable lorsque

$$\omega^2 - \frac{f'(k^2 - 1)}{a^3} < 0$$

pour toutes les valeurs de k . Pour cela, il faut évidemment que cette inégalité soit vérifiée pour $k = 2$, c'est-à-dire il faut que

$$\omega^2 < \frac{3f'}{a^3}.$$

Lorsque ω dépasse légèrement cette valeur, il y aura deux figures possibles d'équilibre : cylindre circulaire et cylindre genre elliptique. Mais alors le maximum de l'énergie correspondra à ce dernier et non pas au cylindre circulaire. La figure stable sera donc représentée par le cylindre genre elliptique.

Nous observons ici encore une fois la vérification du principe d'échange des stabilités.

Mais si nous n'introduisons aucune condition supplémentaire, toutes les figures cylindriques indéfinies seront instables, car, quel que soit le rayon a , nous pouvons toujours transformer notre cylindre en une figure ondulée de révolution et prendre la longueur d'onde λ assez grande ($\lambda > 2\pi a$) pour que δW correspondant à cette transformation soit positive pour toutes les valeurs de ω , même pour $\omega = 0$.

14. Cas général. — Si nous voulons étudier les figures plus générales, données par l'équation

$$r = a - \mu + \sum_{i=k}^{\infty} (a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta).$$

nous trouvons, en refaisant les mêmes calculs,

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4a},$$

$$\delta S = \frac{\pi}{2a} (\varepsilon' - \varepsilon^2),$$

$$\delta J = \pi\rho a^2 \varepsilon^2;$$

enfin

$$\delta W = \frac{\rho\pi}{2a} \varepsilon^2 \left[\omega^2 a^3 - f' \left(\frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} - 1 \right) \right],$$

où l'on pose comme précédemment

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=k}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2); \quad \varepsilon'^2 = \sum_{i=k}^{\infty} i^2 (a_i^2 + b_i^2).$$

En remarquant que $\varepsilon'^2 > k^2 \varepsilon^2$, nous voyons que, pour qu'une de ces figures soit d'équilibre, et côtelée à k côtes, il faut que tous les coefficients, sauf b_k , soient d'ordre supérieur à 1. Par conséquent, en se bornant à la première approximation, nous pouvons affirmer que les seules figures cylindriques d'équilibre, infiniment voisines d'un cylindre indéfini de rotation, sont les figures sinusoïdales côtelées que nous venons d'étudier; et que les figures exactes d'équilibre diffèrent des figures sinusoïdales simples par des écarts infiniment petits d'ordre supérieur.

15. Problème direct. — Nous venons de voir que pour une certaine vitesse ω_k , que nous appellerons *vitesse de bifurcation relative à la figure k* , la masse liquide pourra affecter non seulement la figure d'un cylindre circulaire, mais encore une figure infiniment voisine du cylindre à k côtes ou, autrement dit, à k maxima de r .

Si la vitesse ω_k est très peu supérieure à ω_k , la nouvelle figure est très voisine d'une figure sinusoïdale. Mais ω croissant, les saillies se marquent davantage et notre figure s'éloigne de la forme sinusoïdale.

La question suivante se pose immédiatement : *Que deviennent effectivement ces figures, d'abord sinusoïdales, lorsque ω croît?*

Pour répondre à cette question, proposons-nous de résoudre le problème direct suivant :

Trouver toutes les figures d'équilibre cylindriques et non de révolution que peut affecter une masse liquide indéfinie, soumise aux seules forces capillaires et tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante.

Cherchons donc l'équation finie de la section droite d'une figure d'équilibre cylindrique et non de révolution.

L'équation de la surface d'équilibre d'une masse fluide, soumise aux seules forces moléculaires et tournant autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante ω , est

$$f \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) - \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const.},$$

R et R' étant des rayons principaux de courbure.

Mais pour la figure cylindrique un des rayons de courbure est infini et l'autre est celui de la section droite.

En employant les coordonnées polaires r et θ , l'équation précédente devient, en divisant par la tension superficielle f et en posant

$$(1) \quad \frac{\omega^2}{2f} = a, \\ \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} - ar^2 - b = 0,$$

b étant une constante arbitraire.

Pour intégrer cette équation, prenons r' pour la nouvelle fonction et r pour la nouvelle variable, en posant

$$r' = p, \quad r'' = p p'.$$

Il vient

$$\frac{r^2 + 2p^2 - r p p'}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = ar^2 + b.$$

Prenons ensuite pour nouvelle inconnue

$$u = \sqrt{r^2 + p^2},$$

d'où

$$p^2 = u^2 - r^2, \quad p p' = u u' - r,$$

et l'équation (1) devient

$$\frac{2}{u} - \frac{r u'}{u^2} = a^2 r^2 + b.$$

Enfin, en posant $v = \frac{1}{u}$, nous obtiendrons une équation linéaire

$$r v' + 2v = a^2 r^2 + b.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$v = \frac{a^2 r^3 + 2br^2 + c}{4r^2},$$

c étant une constante d'intégration.

En faisant le changement de variables dans le sens inverse, nous aurons

$$u = \frac{4r^2}{a^2 r^3 + 2br^2 + c},$$

$$p = \frac{dr}{df} = \sqrt{u^2 - r^2} = \sqrt{\frac{16r^3}{(a^2 r^3 + 2br^2 + c)^2} - r^2}$$

$$= \frac{\sqrt{16r^3 - r^2(a^2 r^3 + 2br^2 + c)^2}}{a^2 r^3 + 2br^2 + c}.$$

Ensuite,

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{(a^2 r^3 + 2br^2 + c) dr}{r \sqrt{16r^3 - (a^2 r^3 + 2br^2 + c)^2}}.$$

Enfin, en posant $r^2 = u$, nous aurons

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r^2} \frac{(a^2 u^2 + 2bu + c) du}{u \sqrt{16u - (a^2 u^2 + 2bu + c)^2}},$$

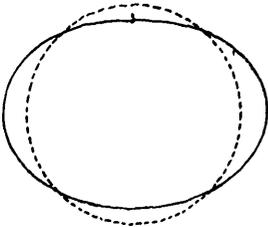
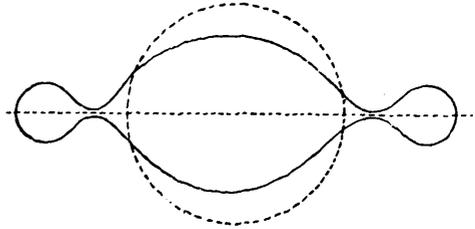
équation presque identique à celle que nous avons obtenue pour les figures de révolution.

La différence essentielle entre cette équation et celle des figures de révolution consiste en ce que la constante c ne peut jamais être nulle.

De plus, en outre de la condition d'invariabilité de volume (ici l'invariabilité de l'aire de la section droite), nous devons introduire encore la condition que la courbe, périmètre de la section droite, se ferme. C'est-à-dire que la distance angulaire entre deux maxima successifs de r soit un sous-multiple de 2π . Sans cela, la courbe obtenue ne correspondra à aucune figure réelle.

Nous aurons ainsi deux conditions auxquelles doivent satisfaire les trois constantes a, b, c . Ces conditions, qui exprimeront que l'aire de la section droite est constante, et que le nombre de maxima de r (nombre de côtés) est égal à n , nous permettront d'exprimer toutes les constantes en fonction de ω . Pour avoir toutes les variations de la figure à n côtés, nous donnerons à ω toutes les valeurs à partir de $\omega = \omega_n$ (vitesse de bifurcation).

En répétant mot à mot la discussion que nous avons faite pour les figures de révolution (ma première Thèse, troisième Partie), nous verrons que, ω croissant, le discriminant $b^2 - 4ac$ est d'abord négatif, ensuite nul et enfin positif. La section droite prend alors successivement les formes analogues aux méridiens des figures de révolution. Pour ω voisine de ω_n , les saillies ne sont pas très prononcées et la ligne est ondulée par rapport au cercle du cylindre. Quand ω croît, les saillies deviennent plus fortes, et, quand $b^2 - 4c$ devient positif, elles reçoivent des étranglements latéraux qui s'accroissent et puis se rencontrent. La courbe a alors un point double à chaque saillie. Représentons ces variations pour le cas de $n = 2$.

Fig. 1. — $b^2 - ac < 0$.Fig. 2. — $b^2 - ac > 0$.

Si ω croît encore, il se forme deux points doubles à chaque saillie. Ensuite, les tangentes aux points doubles coïncident et deviennent perpendiculaires au rayon vecteur. Enfin, la courbe se décompose en trois courbes distinctes. Ces trois cas sont représentés sur les figures 3, 4 et 5.

Nous aurons la même succession de figures si nous prenons $n = 3, 4, 5, \dots$

Il faut seulement remarquer que les figures 3, 4 et 5 n'ont aucune signification réelle, car le liquide ayant pris la forme de la figure 2 se divise en trois parties. Ces parties, une fois détachées l'une de l'autre, prennent la forme de la figure 1 comme si elles étaient libres.

En résumant, nous pouvons dire que, lorsque ω croît, toutes les saillies s'allongent, puis reçoivent des étranglements latéraux, enfin donnent naissance chacune à un petit cylindre qui jouera le rôle de satellite. La figure à n saillies produira alors n satellites.

Il est utile de noter ici, encore une fois, que les calculs nécessaires pour la détermination des constantes a, b, c en fonction de ω sont

impossibles à effectuer, les intégrales donnant ces relations étant hyperelliptiques. Nous ne pouvons donc que résoudre le problème

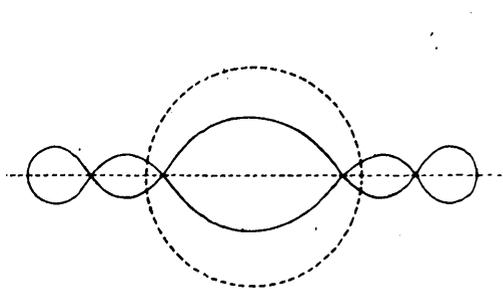


Fig. 3.

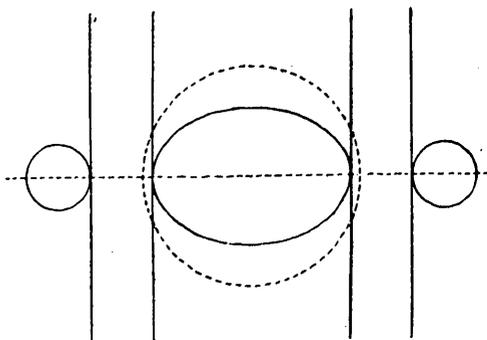


Fig. 4.

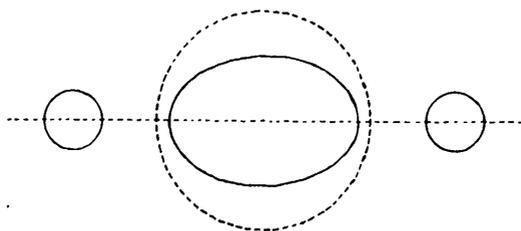


Fig. 5.

inverse : se donner arbitrairement les valeurs des constantes et déterminer la figure correspondante et le cylindre duquel elle provient.

16. Résumé. — Pour résumer notre analyse, considérons une masse liquide à l'état d'équilibre statique. Ensuite, imprimons à cette masse une rotation autour d'un axe fixe et faisons croître peu à peu la vitesse angulaire. La figure de la masse liquide se modifiera, mais elle affectera toujours une figure d'équilibre stable.

Tâchons de suivre ces transformations à partir de la forme cylindrique. Considérons d'abord un cylindre de longueur finie limité en haut et en bas par deux disques circulaires. Nous devons considérer ici deux cas différents : 1° le cylindre est large et court,

$$\frac{h}{2\pi a} < 0,8118$$

et 2° le cylindre est long,

$$\frac{h}{2\pi a} > 0,8118.$$

Dans le premier cas, la figure restera cylindrique jusqu'au moment où la vitesse angulaire atteindra la valeur

$$\omega = f' \frac{\pi^2}{6ah^2} \left(3 - \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2$$

ou

$$\omega = f' \frac{\pi^2}{6ah^2} (3 - 0,1394) = 2,8606 f' \frac{\pi^2}{6ah^2}.$$

Lorsque la vitesse ω croît encore, le cylindre, d'abord droit, affectera un renflement au milieu et deux creux près des bases ⁽¹⁾. Ensuite ce renflement deviendra de plus en plus prononcé, s'aplatira d'abord dans le sens de l'axe de rotation, recevra ensuite des creux circulaires en haut et en bas, et enfin laissera se détacher un anneau qui continuera à tourner sous l'impulsion de la force vive acquise. Quant à la masse centrale, elle changera brusquement de forme et son mouvement ne sera plus régi par les équations que nous avons établies. En effet, la masse liquide ayant diminué de volume après le détachement de l'anneau, la figure d'équilibre statique ne serait plus le cylindre, mais un onduloïde ou un nodoïde creux. Le point de départ étant différent, toute l'analyse doit être refaite de nouveau.

Nous obtenons le résultat analogue pour le deuxième cas, où le cylindre est long.

La figure cylindrique reste stable jusqu'au moment où la vitesse angulaire atteint

$$\omega = \Omega_1 = f' \frac{4a^2\pi^2 - h^2}{a^3h^2}.$$

Après quoi, le cylindre recevra un renflement près d'une base et un creux près de l'autre. La vitesse croissant toujours, le renflement devient de plus en plus prononcé et, finalement, laisse se détacher un anneau.

Ensuite l'anneau tournera séparément, et la masse centrale changera brusquement de forme en prenant une figure d'équilibre correspondant, non plus au cylindre circulaire, mais à un onduloïde ou à un nodoïde, comme nous l'avons montré pour le premier cas.

(1) Voir page 24.

Si la masse liquide est assujettie à rester cylindrique et si la figure primitive est un cylindre indéfini, les déformations successives sont déjà données par les figures 1 et 2. La forme du cylindre satellite sera donnée par la figure 5.

Mais ce cas ne présente aucun intérêt pratique, car tous ces cylindres sont irréalisables.

DEUXIÈME PARTIE.

Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation.

1. *Introduction.* — Toutes les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation, soumise aux seules forces newtoniennes étudiées jusqu'à ce moment, étaient des figures limitées par une surface fermée d'un seul tenant (1).

Nous voulons démontrer maintenant qu'il existe aussi des figures d'équilibre creuses, c'est-à-dire limitées par deux surfaces distinctes ne se coupant pas.

Nous ne nous occuperons ici que des figures dont on connaît actuellement le potentiel newtonien, autrement dit, des figures limitées par des ellipsoïdes ou par des cylindres elliptiques ou circulaires.

Nous montrerons que, parmi toutes ces figures, seule la couche cylindrique de révolution peut présenter une figure d'équilibre. Cette figure existe pour toutes les valeurs de la vitesse angulaire ω depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \sqrt{2\pi}$, et présente deux séries discontinues et infinies de figures de bifurcation.

Chacune de ces figures peut donner naissance à une nouvelle série de figures d'équilibre.

(1) Voir P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III. — POINCARÉ, *Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation*, leçons professées à la Sorbonne en 1900, ou son Mémoire classique dans le n° VII des *Acta mathematica*, 1885. — LIAPOUNOFF, *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes...* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, 1884). — Enfin, ma Thèse *Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Journal de Mathématiques*, 1916).

2. Impossibilité des figures creuses ellipsoïdales. — Imaginons une masse fluide homogène, limitée par deux ellipsoïdes homothétiques, soumise aux seules forces newtoniennes et tournant autour d'un axe fixe commun aux deux ellipsoïdes, avec une vitesse angulaire constante. Nous prendrons l'axe de rotation pour axe Oz .

Le liquide affecte donc la figure d'une couche elliptique. Nous savons qu'à l'intérieur d'une telle couche (à l'intérieur de l'ellipsoïde intérieur), le potentiel reste constant.

Donc la fonction des forces à l'intérieur et sur la surface intérieure est donnée par la formule suivante :

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + c,$$

ω désignant la vitesse angulaire. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde intérieur.

Si la masse fluide est en équilibre relatif, cet ellipsoïde présente une surface de niveau et, par conséquent, ses coefficients doivent vérifier les relations suivantes :

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot a^2 = \frac{\omega^2}{2} \cdot b^2 = 0 \cdot c^2$$

qui peuvent être vérifiées de deux manières :

$$1^\circ \quad a = b = 0;$$

la couche elliptique est un ellipsoïde plein.

$$2^\circ \quad a = b, \quad c = \infty;$$

la couche ellipsoïdale dégénère en une couche cylindrique de révolution.

Par conséquent, parmi toutes les figures ellipsoïdales limitées par deux surfaces homothétiques de second ordre, seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre.

3. Ellipsoïdes homofocaux. — Montrons maintenant l'impossibilité de la figure d'équilibre limitée par deux ellipsoïdes homofocaux. Mais pour cela nous devons introduire les coordonnées elliptiques.

En admettant les notations de Poincaré ⁽¹⁾, nous prendrons pour les coordonnées d'un point (x, y, z) les racines ρ, μ, ν de l'équation en λ

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0,$$

et nous désignerons par R_i et S_i les fonctions de Lamé de première et de seconde espèce. Ces fonctions ne dépendent que de ρ et conservent une valeur constante sur la surface de chacun des ellipsoïdes appartenant à la famille (1).

A chaque valeur de ρ , prise entre ∞ et a , correspond un ellipsoïde de cette famille, et par chaque point de l'espace passe un de ces ellipsoïdes.

Ceci posé, rappelons que pour $n = 1$ nous n'aurons qu'une fonction de Lamé (n désignant ici l'ordre de la fonction) :

$$R_0 = 1.$$

Pour $n = 2$, nous en aurons trois :

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\rho^2 - a^2}, \\ R_2 &= \sqrt{\rho^2 - b^2}, \\ R_3 &= \sqrt{\rho^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, nous aurons déjà cinq fonctions; et, en général, pour n quelconque, nous aurons $2n - 1$ fonctions différentes.

Si, dans R_i , nous remplaçons ρ par μ ou par ν , nous aurons les fonctions analogues que nous désignons par M_i et N_i .

Les fonctions de seconde espèce, S_i , sont données par la formule suivante :

$$S_i = R_i \int_{\rho}^{\infty} \frac{2n + 1}{R_i^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Avec ces notations, et en posant

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, & h_2 &= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}, \\ h_3 &= \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}. \end{aligned}$$

(1) Voir *Figures d'équilibre...* de Poincaré ou voir ma première Thèse.

on aura

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1; \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2; \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3.$$

Considérons un ellipsoïde E_0 , ayant pour équation

$$(E_0) \quad \frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0.$$

Son potentiel en un point extérieur (x, y, z) sera alors donné par la formule suivante :

$$(2) \quad V_i = -\frac{T}{2} \left[\frac{S_1}{R_1} x^2 + \frac{S_2}{R_2} y^2 + \frac{S_3}{R_3} z^2 \right] + \text{const.},$$

T étant le volume de l'ellipsoïde E_0

$$T = \frac{4}{3} \pi R_1 R_2 R_3$$

et les fonctions S_i et R_i ($i = 1, 2, 3$) correspondant à l'ellipsoïde de la famille (1) passant par le point (x, y, z) .

En un point situé à l'intérieur de E_0 , ce potentiel prend la forme

$$(3) \quad V_i = -\frac{T}{2} \left[\frac{S_1^0}{R_1^0} x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0} y^2 + \frac{S_3^0}{R_3^0} z^2 \right] + \text{const.},$$

S_i^0 et R_i^0 désignant les valeurs des S_i et R_i qu'elles prennent sur la surface de l'ellipsoïde E_0 .

Imaginons maintenant une couche ellipsoïdale limitée par deux ellipsoïdes homofocaux : à l'extérieur par E^0 et à l'intérieur par l'ellipsoïde E' , dont l'équation s'écrira

$$(E') \quad \frac{x^2}{R_1'^2} + \frac{y^2}{R_2'^2} + \frac{z^2}{R_3'^2} - 1 = 0.$$

En désignant encore par ρ' la valeur de ρ correspondant à l'ellipsoïde E' , nous verrons facilement que

$$\rho' < \rho$$

Soient A le volume de l'ellipsoïde extérieur E^0 et B celui de l'ellipsoïde intérieur E' . Le volume de la couche sera alors

$$T = A - B.$$

En un point extérieur, le potentiel de cette couche sera égal à la différence des potentiels des ellipsoïdes E_0 et E' , et, en vertu des formules (2) et (3), sera donné par la formule suivante :

$$V_e = - \frac{A - B}{2} \left[\frac{S_1}{R_1} x^2 + \frac{S_2}{R_2} y^2 + \frac{S_3}{R_3} z^2 \right] + \text{const.}$$

Sur la surface extérieure du fluide, c'est-à-dire sur la surface de E_0 , ce potentiel prend évidemment la forme suivante :

$$(4) \quad V_e^0 = - \frac{A - B}{2} \left[\frac{S_1^0}{R_1^0} x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0} y^2 + \frac{S_3^0}{R_3^0} z^2 \right] + \text{const.}$$

En remarquant que chaque point de la surface E' est intérieur à E^0 , nous aurons pour les valeurs du potentiel sur la surface E' la formule suivante :

$$(5) \quad V_i = - \frac{A}{2} \left[\frac{S_1^0}{R_1^0} x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0} y^2 + \frac{S_3^0}{R_3^0} z^2 \right] + \frac{B}{2} \left[\frac{S_1'}{R_1'} x^2 + \frac{S_2'}{R_2'} y^2 + \frac{S_3'}{R_3'} z^2 \right] + \text{const.}$$

Si la couche présente une figure d'équilibre pour une certaine valeur de la vitesse angulaire ω , et si l'on suppose que la pression exercée sur chacune des deux surfaces libres soit la même, la fonction des forces

$$(6) \quad U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + V$$

doit alors prendre la même valeur constante sur chacun des deux ellipsoïdes E^0 et E' .

Remplaçons les variables x, y, z par leurs valeurs en fonction des R_i, M_i, N_i , et, en vertu des formules (4), (5) et (6), nous pourrons écrire

$$U^0 = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A - B}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} \right] h_1^2 R_1^{02} M_1^2 N_1^2 \\ + \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A - B}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} \right] h_2^2 R_2^{02} M_2^2 N_2^2 - \frac{A - B}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} h_3^2 R_3^{02} M_3^2 N_3^2,$$

U^0 désignant la valeur que prend U sur E^0 .

De même, sur E' , U devient

$$U' = \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2} \frac{S_1'}{R_1'} \right) h_1^2 R_1'^2 M_1^2 N_1^2 \\ + \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} + \frac{B}{2} \frac{S_2'}{R_2'} \right) h_2^2 R_2'^2 M_2^2 N_2^2 - \left(\frac{A}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{B}{2} \frac{S_3'}{R_3'} \right) h_3^2 R_3'^2 M_3^2 N_3^2.$$

Mais nous devons avoir

$$U^0 = U'$$

identiquement, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de μ et de ν . Nous pouvons donc identifier les coefficients des divers produits M_i , N_i , et nous aurons les trois équations suivantes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A-B}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} \right] R_1^{0^2} = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2} \frac{S_1'}{R_1'} \right] R_1'^2, \\ \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A-B}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} \right] R_2^{0^2} = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} + \frac{B}{2} \frac{S_2'}{R_2'} \right] R_2'^2, \\ -\frac{A-B}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} R_3^{0^2} = \left[-\frac{A}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} + \frac{B}{2} \frac{S_3'}{R_3'} \right] R_3'^2. \end{array} \right.$$

Nous pouvons écrire encore quatre équations [dont deux seulement seraient distinctes des équations (7)] en exprimant que U^0 et U' sont constantes respectivement sur les surfaces V^0 et V' . Mais il nous suffira de démontrer l'impossibilité de la dernière des équations déjà écrites pour démontrer l'impossibilité des figures considérées.

Écrivons cette équation comme il suit :

$$(8) \quad (A-B) \frac{S_3^0}{R_3^0} (R_3^{0^2} - R_3'^2) = B \left(\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S_3'}{R_3'} \right) R_3'^2,$$

et montrons qu'elle est impossible. Pour cela, rappelons que, dans nos notations,

$$\begin{array}{lll} R_1^0 = \sqrt{\rho_0^2 - a^2}, & R_2^0 = \sqrt{\rho_0^2 - b^2}, & R_3^0 = \sqrt{\rho_0^2 - c^2}, \\ R_1' = \sqrt{\rho'^2 - a^2}, & R_2' = \sqrt{\rho'^2 - b^2}, & R_3' = \sqrt{\rho'^2 - c^2}; \end{array}$$

enfin

$$S_i = R_i \int_{\rho}^{\infty} \frac{2n+1}{R_i^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Désignons par x la variable d'intégration, posons, pour abrégier l'écriture,

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}} = \varphi(x) > 0;$$

rappelons que nous aurons, pour $i = 3$,

$$\frac{S_3^0}{R_3^0} = 3 \int_{c_0}^{\infty} \frac{1}{x^2 - c^2} \varphi(x) dx > 0$$

et

$$\frac{S'_3}{R'_3} = 3 \int_{\rho'}^{\infty} \frac{1}{x^2 - c^2} \varphi(x) dx;$$

enfin

$$R_3^{0,2} - R_3'^2 = \rho_0^2 - \rho'^2 > 0.$$

Formons maintenant la différence

$$\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S'_3}{R'_3} = 3 \left\{ \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^2 - c^2} - \int_{\rho'}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^2 - c^2} \right\} = -3 \int_{\rho'}^{\rho_0} \frac{\varphi(x) dx}{x^2 - c^2} < 0.$$

Par conséquent, l'équation (8) ne peut jamais être vérifiée, les deux membres de cette équation étant de signes différents. Les conditions (7) ne peuvent donc jamais être vérifiées et la figure envisagée est impossible.

Par conséquent, une couche fluide limitée par deux ellipsoïdes homofocaux et tournant autour de leur axe commun avec une vitesse angulaire constante ne peut jamais être en équilibre relatif.

C. Q. F. D.

Nous aurons toujours le même résultat en supposant que la pression extérieure, étant constante le long de chaque surface, est différente sur les deux surfaces. La condition d'équilibre s'écrira alors

$$U^0 = U' + \text{const.}$$

et les conditions (7) resteront les mêmes.

4. Cas général. Ellipsoïdes quelconques. — Considérons maintenant le cas le plus général, où les ellipsoïdes E^0 et E' ne sont ni homothétiques ni homofocaux. Nous supposerons seulement qu'ils ont le même centre et les mêmes axes principaux.

Désignons par \bar{R}_i et \bar{S}_i les fonctions de Lamé correspondant à la famille des ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde E' . La fonction des forces U prendra alors dans ce cas sur E^0 la valeur suivante :

$$U_0 = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2} \frac{\bar{S}_1^0}{\bar{R}_1^0} \right] h_1^2 R_1^{0,2} M_1^2 N_1^2 + \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} + \frac{B}{2} \frac{\bar{S}_2^0}{\bar{R}_2^0} \right] h_2^2 R_2^{0,2} M_2^2 N_2^2 \\ + \left[-\frac{A}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} + \frac{B}{2} \frac{\bar{S}_3^0}{\bar{R}_3^0} \right] h_3^2 R_3^{0,2} M_3^2 N_3^2.$$

Seulement les fonctions \overline{R}_i^0 et \overline{S}_i^0 ($i = 1, 2, 3$) ne sont plus constantes sur E^0 , car E^0 et E' ne sont pas homofocaux. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\overline{S}_1^0}{\overline{R}_1^0} = \frac{S_1^0}{R_1^0} + \varphi_1(\mu, \nu),$$

ou, en développant $\varphi_1(\mu, \nu)$ en série de produits de Lamé,

$$\frac{\overline{S}_1^0}{\overline{R}_1^0} = \frac{S_1^0}{R_1^0} + \Sigma A_1^i M_i N_i.$$

De même

$$\frac{\overline{S}_2^0}{\overline{R}_2^0} = \frac{S_2^0}{R_2^0} + \Sigma A_2^i M_i N_i,$$

$$\frac{\overline{S}_3^0}{\overline{R}_3^0} = \frac{S_3^0}{R_3^0} + \Sigma A_3^i M_i N_i.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de U^0 , nous aurons

$$U^0 = \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\Lambda - B}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} \right) h_1^2 R_1^{0,2} M_1^2 N_1^2 \\ + \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{\Lambda - B}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} \right] h_2^2 R_2^{0,2} M_2^2 N_2^2 - \frac{\Lambda - B}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} h_3^2 R_3^{0,2} M_3^2 N_3^2 + \Phi(\mu, \nu),$$

où $\Phi(\mu, \nu)$, développée en série des produits de Lamé, ne contiendra pas de fonctions de Lamé de degré inférieur à 3, car $M_1^2 N_1^2$, $M_2^2 N_2^2$, $M_3^2 N_3^2$ sont du deuxième degré et, par conséquent, leur produit par une somme de Lamé ne pourra jamais contenir des termes au-dessous du troisième degré.

En faisant le même calcul pour U' , nous aurons

$$U' = \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\Lambda}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2} \frac{\overline{S}_1^0}{\overline{R}_1^0} \right) \overline{h}_1^2 \overline{R}_1'^2 \overline{M}_1^2 \overline{N}_1^2 \\ + \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\Lambda}{2} \frac{S_2^0}{R_2^0} + \frac{B}{2} \frac{\overline{S}_2^0}{\overline{R}_2^0} \right) \overline{h}_2^2 \overline{R}_2'^2 \overline{M}_2^2 \overline{N}_2^2 \\ + \left(-\frac{\Lambda}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} + \frac{B}{2} \frac{\overline{S}_3^0}{\overline{R}_3^0} \right) \overline{h}_3^2 \overline{R}_3'^2 \overline{M}_3^2 \overline{N}_3^2 + \psi(\mu, \nu),$$

$\psi(\mu, \nu)$ ne contenant pas de termes en μ et ν de degré inférieur au troisième.

En écrivant que

$$U^0 = U$$

et en identifiant les coefficients des différents produits de Lamé, nous aurons une infinité de conditions parmi lesquelles figureront au premier plan les conditions analogues aux conditions (7). La dernière de ces conditions s'écrira

$$\frac{\Lambda - B}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} h_3^2 R_3^{02} = \left(\frac{\Lambda}{2} \frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{B}{2} \frac{\overline{S_3^0}}{R_3^0} \right) \overline{h_3^2 R_3^{02}}$$

ou encore

$$(9) \quad (\Lambda - B) \frac{S_3^0}{R_3^0} (h_3^2 R_3^{02} - \overline{h_3^2 R_3^{02}}) = B \left(\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{\overline{S_3^0}}{R_3^0} \right) h_3^2 \overline{R_3^{02}}.$$

De la même manière, nous pouvons écrire deux autres équations :

$$(9') \quad (\Lambda - B) \frac{S_1^0}{R_1^0} (h_1^2 R_1^{02} - \overline{h_1^2 R_1^{02}}) = B \left(\frac{S_1^0}{R_1^0} - \frac{\overline{S_1^0}}{R_1^0} \right) \overline{h_1^2 R_1^{02}},$$

$$(9'') \quad (\Lambda - B) \frac{S_2^0}{R_2^0} (h_2^2 R_2^{02} - \overline{h_2^2 R_2^{02}}) = B \left(\frac{S_2^0}{R_2^0} - \frac{\overline{S_2^0}}{R_2^0} \right) \overline{h_2^2 R_2^{02}}.$$

Pour démontrer l'impossibilité des figures considérées, il nous suffira de démontrer l'impossibilité de l'une des équations (9), (9') ou (9'').

Considérons un ellipsoïde E'' homofocal à E^0 et tangent à E' de manière qu'il lui soit tout extérieur. Choisissons encore les constantes a'' , b'' , c'' relatives à l'ellipsoïde E'' de manière que ρ soit le même pour E' et E'' . Il suffira pour cela de prendre

$$a'' = \bar{a}, \quad \text{ou} \quad b'' = \bar{b}, \quad \text{ou} \quad c'' = \bar{c},$$

suivant que les ellipsoïdes se touchent suivant les sommets situés sur l'axe Ox , l'axe Oy ou l'axe Oz .

Supposons d'abord que les ellipsoïdes se touchent suivant l'axe Oz . Nous aurons alors

$$c'' = \bar{c}, \quad b'' > \bar{b}, \quad a'' > \bar{a};$$

ensuite

$$R_3'' = \overline{R_3}, \quad h_3'' > \overline{h_3}, \quad \varphi''(x) > \overline{\varphi}(x).$$

Ceci posé, démontrons que l'équation (9) est impossible. Pour cela, il

nous suffira de démontrer les inégalités suivantes :

$$(a) \quad h_3^2 R_3^{0^2} - \overline{h_3^2} \overline{R_3'^2} > 0,$$

$$(b) \quad \frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{\overline{S_3'}}{\overline{R_3'}} < 0.$$

Mais nous avons déjà démontré dans le numéro précédent que, si E^0 est intérieur par rapport à E^0 , nous aurons :

$$(a') \quad h_3^2 R_3^{0^2} - h_3^{n^2} R_3^{n^2} > 0,$$

$$(b') \quad \frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S_3^n}{R_3^n} < 0.$$

Or, nous voyons que

$$h_3^{n^2} R_3^{n^2} > \overline{h_3^2} \overline{R_3'^2},$$

et par conséquent l'inégalité (a) est bien vérifiée. Ensuite

$$\frac{S_3^n}{R_3^n} - \frac{\overline{S_3'}}{\overline{R_3'}} = \int_{c'}^{\infty} \frac{\varphi''(x) - \overline{\varphi'}(x)}{x^2 - c^2} dx > 0,$$

car

$$\varphi''(x) - \overline{\varphi'}(x) > 0.$$

Donc l'inégalité (b) est aussi vérifiée et les figures envisagées sont impossibles.

Si, au lieu d'avoir $c'' = c$, nous avons $a'' = \overline{a}$ ou $b'' = \overline{b}$, nous considérons l'équation (g') ou (g'') et la conclusion reste la même.

Des calculs analogues nous montrent qu'il est impossible d'avoir des figures d'équilibre ayant la forme d'une couche limitée par deux cylindres autres que deux cylindres circulaires de même axe.

Par conséquent, la seule figure possible d'équilibre limitée par deux surfaces du second ordre est la couche cylindrique de révolution.

C'est donc de cette figure que nous nous occuperons dans la suite.

§. Conditions d'équilibre d'une couche cylindrique de révolution. — Nous savons que le potentiel d'un cylindre circulaire indéfini, de rayon R, est donné par les formules

$$(10) \quad \begin{cases} V_c = -2\pi R^2 L \frac{\rho}{R} - \pi R^2 + C, \\ V_i = -\pi \rho^2 + C, \end{cases}$$

ρ étant la distance du point considéré à l'axe du cylindre et C une constante.

Imaginons maintenant une masse fluide homogène, de densité 1, limitée par deux cylindres circulaires de même axe et de rayons

$$R \quad \text{et} \quad r = kR,$$

k désignant le rapport des rayons ($0 < k < 1$). Le potentiel de notre masse étant égal à la différence des potentiels des cylindres de rayons R et r , nous verrons que ce potentiel sera donné par les formules suivantes :

1° A l'extérieur de la masse fluide ($\rho > R$),

$$V_e = -\pi R^2(1 - k^2) - 2\pi R^2 \left(L \frac{\rho}{R} - k^2 L \frac{\rho}{kR} \right) + C;$$

2° A l'intérieur de la masse fluide ($r < \rho < R$),

$$(11) \quad V_i = -\pi(\rho^2 - k^2 R^2) + 2\pi k^2 R^2 L \frac{\rho}{kR} + C;$$

3° Dans le creux ($\rho < r$), le potentiel est constant, égal à C.

En faisant $\rho = R$ et $\rho = r = kR$ dans la formule (11), nous aurons les valeurs suivantes pour le potentiel sur les deux surfaces :

$$V_e^0 = -\pi R^2(1 - k^2 + k^2 L k^2) + C,$$

$$V_i^0 = C.$$

Supposons maintenant que notre masse fluide tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω . La fonction des forces à l'intérieur de la masse fluide sera

$$(12) \quad U_i = \frac{\omega^2}{2} \rho^2 - \pi(\rho^2 - k^2 R^2) + 2\pi k^2 R^2 L \frac{\rho}{kR} + C$$

et sur les deux surfaces

$$U_e^0 = \frac{\omega^2}{2} R^2 - \pi R^2(1 - k^2 + k^2 L k^2) + C,$$

$$U_i^0 = \frac{\omega^2}{2} k^2 R^2 + C.$$

En supposant que la pression est la même sur les deux surfaces, nous

aurons les conditions d'équilibre en écrivant que

$$U_e^0 = U_i^0,$$

ce qui donne la condition d'équilibre cherchée :

$$(13) \quad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{1 - k^2 + k^2 L k^2}{1 - k^2} = f(k^2).$$

Il est facile de voir que, lorsque k varie de 0 à 1, $f(k^2)$ varie de 1 à 0 et passe une fois par toutes les valeurs comprises entre 1 et 0. Par conséquent, pour toutes les valeurs de ω comprises entre 0 et $\sqrt{2\pi}$, il existe une et une seule figure d'équilibre, déterminée par la valeur du rapport k des deux rayons.

Remarque. — En supposant que la pression n'est pas la même sur les deux surfaces, nous aurons une condition d'équilibre identique, à cela près que ω pourra varier entre d'autres limites.

Soient, en effet, p_e et p_i les pressions sur la surface extérieure et sur la surface intérieure. La condition d'équilibre sera

$$U_i^0 = p_i, \quad U_e^0 = p_e,$$

ce qui donne, en posant

$$p_e - p_i = C \cdot R^2 \pi (1 - k^2),$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = C + \frac{1 - k^2 + k^2 L k^2}{1 - k^2} = C + f(k).$$

On voit ainsi que si $C > 0$ ($p_e > p_i$), la quantité $\frac{\omega^2}{2\pi}$ peut varier entre C et $C + 1$. Les figures creuses sont alors impossibles pour une vitesse assez petite.

Si $-1 < C < 0$, $p_e < p_i$, mais la différence n'est pas très grande, $\frac{\omega^2}{2\pi}$ varie entre 0 et $C + 1$. Les figures creuses sont impossibles pour des vitesses se rapprochant de $\omega = \sqrt{2\pi}$, et les figures trop dilatées n'existent pas.

Si enfin $C < -1$, $p_i - p_e$ trop grande, aucune figure d'équilibre n'est possible.

6. Figures d'équilibre infiniment voisines d'une couche cylin-

drique de révolution. Position du problème. — Imaginons une masse fluide homogène, de densité 1, tournant autour d'un axe fixe à la manière d'un solide avec une vitesse angulaire constante ω , et affectant, comme figure d'équilibre relatif, la figure d'une couche cylindrique de révolution.

Nous déformons cette couche en appliquant sur chacune de ses surfaces une couche d'épaisseur infiniment petite, constante le long de chaque génératrice, et de masse totale nulle. On demande quelle doit être la figure primitive (figure de bifurcation) et quelles doivent être les couches appliquées pour que la nouvelle figure reste d'équilibre?

Soient ζ_e et ζ_i les épaisseurs des couches extérieure et intérieure, et v et w leurs potentiels respectifs. En conservant les notations du numéro précédent, nous compterons les ζ_e et ζ_i dans la direction de la normale extérieure au fluide.

Dans ces conditions, la fonction des forces prend la forme

$$U = U^0 + v + w.$$

Pour calculer U sur la surface extérieure et sur la surface intérieure, nous la considérerons comme fonction de ρ et nous la développerons suivant les puissances de $\Delta\rho = \zeta$ et nous aurons, pour la surface extérieure par exemple,

$$U_e = [U]_{\rho=R+\zeta_e} = (U^0 + v + w)_{\rho=R} + \frac{d}{d\rho} (U^0 + v + w)_{\rho=R} \times \zeta_e + \dots$$

En considérant $\frac{\partial v}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial w}{\partial \rho}$ comme des infiniment petits de même ordre que ζ , et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, nous aurons finalement

$$(14) \quad U_e = U^0 + v^0 + (w_e)_{\rho=R} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U^0 \right)_{\rho=R} \times \zeta_e.$$

De même pour la surface intérieure

$$(15) \quad U_i = U^0 + (v_i)_{\rho=r} + w^0 + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U^0 \right)_{\rho=r} \times \zeta_i.$$

Pour que la figure déformée soit d'équilibre, nous devons avoir

$$U_e = U_i = C.$$

Mais la figure primitive était d'équilibre, nous avons donc

$$U^0 = U^0,$$

et la condition d'équilibre prendra la forme définitive

$$(16) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U_i \right)_{\rho=R} \zeta_a + v^0 + (w_e)_{\rho=R} = - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U_i \right)_{\rho=r} \zeta_i + (v_i)_{\rho=r} + v^0 = C.$$

Nous développerons ensuite toutes les valeurs qui entrent dans cette double condition en séries suivant une variable convenablement choisie, et, en identifiant les coefficients des termes semblables, nous obtiendrons une double série de conditions qui nous permettront de calculer les épaisseurs ζ_a et ζ_i des couches déformantes et le rapport des rayons

$$k = r : R,$$

qui détermineront la nouvelle figure d'équilibre et la figure de bifurcation.

Comme nos figures sont cylindriques, chacune d'elles sera complètement déterminée par sa section droite. Le problème se réduit à un problème de deux dimensions. Au lieu des volumes des cylindres, nous considérerons des aires de leurs sections droites. Les couches cylindriques seront remplacées par des couronnes circulaires. Les couches de l'épaisseur ζ deviendront bandes de largeur ζ et enfin, au lieu de potentiels newtoniens, nous chercherons les potentiels logarithmiques.

Mais, d'abord, nous devons traiter quelques questions auxiliaires.

7. PROBLÈME DE DIRICHLET POUR UN CERCLE DANS UN PLAN. — *Étant données les valeurs d'une fonction harmonique sur un cercle de rayon R et à l'infini, trouver cette fonction à l'intérieur et à l'extérieur du cercle.*

Toute fonction harmonique V peut être développée sur le cercle de rayon R en une série trigonométrique

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (\cos n \vartheta + B_n \sin n \vartheta),$$

l'indice 0 désignant les valeurs de la fonction sur le cercle.

Ceci posé, le problème de Dirichlet se résout immédiatement, et nous aurons, à l'intérieur :

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

et à l'extérieur,

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + \varphi,$$

φ étant une fonction harmonique s'annulant sur le cercle et prenant à l'infini la valeur que doit prendre V , et ρ la distance du point considéré au centre du cercle.

En effet, les fonctions V_i et V_e sont harmoniques et deviennent, sur le cercle ($\rho = R$), égales à V_0 .

Notre problème est ramené ainsi à un problème analogue. Mais dans beaucoup de cas particuliers, la fonction φ peut être facilement déterminée. Par exemple, si V doit s'annuler à l'infini, la fonction φ est identiquement nulle. Si V est le potentiel logarithmique d'une aire de masse M , on aura évidemment

$$\varphi = M L \frac{R}{\rho}.$$

8. Potentiel logarithmique d'une bande circulaire homogène. — Nous appellerons *bande circulaire* l'aire comprise entre le cercle donné et une courbe quelconque.

Nous appellerons *largeur de la bande* la distance entre le cercle et la courbe, mesurée suivant le rayon. Si cette largeur est infiniment petite, nous dirons que la courbe est infiniment voisine du cercle.

Nous désignerons par ζ la largeur de la bande et nous la considérerons comme fonction de l'angle polaire θ , et nous supposerons qu'elle est développable en une série trigonométrique de la forme

$$(17) \quad \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Cherchons le potentiel logarithmique de cette bande sous forme d'une série analogue. Ce potentiel étant une fonction harmonique,

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \\ V_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \\ V_e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{\rho^n} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) + M \log \frac{R}{\rho}; \end{aligned}$$

M étant la masse de la bande, ou, en supposant que la densité superficielle est égale à 1, M désignera aussi l'aire de notre bande.

Nous supposons encore que la bande est infiniment mince et que la tangente à la courbe déterminant la couche fait avec le rayon un angle infiniment voisin d'un angle droit. Nous pourrions alors considérer ζ comme densité linéaire d'une masse répandue sur la circonférence du cercle donné.

Nous savons que le potentiel logarithmique d'une telle masse vérifie la condition suivante :

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial n_e} \right)_0 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial n_i} \right)_0 = -2\pi\zeta.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = -2\pi\zeta;$$

et, en effectuant les opérations, on aura

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^{\infty} n R^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} n R^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) - \frac{M}{R} \\ & = -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

L'identification des coefficients nous donne alors

$$\frac{M}{R} = A_0, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{n} R A_n, \quad \beta_n = \frac{\pi}{n} R B_n;$$

et le potentiel logarithmique de la couche de largeur

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta)$$

sera

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} V_0 &= \pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n} (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta), \\ V_i &= \pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta), \\ V_e &= \pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{n \rho^n} (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta). \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Pour obtenir le potentiel newtonien d'une couche homogène de densité 1, répandue sur la surface du cylindre et de l'épaisseur ζ constante le long de chaque génératrice, il suffit de multiplier par 2 les formules (18).

9. *Recherche des figures de bifurcation.* — En reprenant le problème énoncé au n° 6, et en conservant les mêmes notations, nous supposerons que les épaisseurs ζ_e et ζ_i des couches appliquées sur les deux surfaces cylindriques sont fonctions de l'angle θ et nous les chercherons sous la forme des séries trigonométriques suivantes :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_e &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta), \\ \zeta_i &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A'_n \cos n \theta + B'_n \sin n \theta). \end{aligned} \right.$$

Notre problème se réduira ainsi à la recherche des coefficients A_n, B_n, A'_n, B'_n .

Nous supposerons que la masse totale de chaque couche est nulle et par conséquent nous devons prendre

$$A_0 = A'_0 = 0.$$

En vertu des formules (18) et de la remarque qui les suit, les poten-

tiels respectifs de ces couches seront

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} v_0 &= 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ v_i &= 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ v_c &= 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{n\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{aligned} \right.$$

De même

$$(20') \quad \left\{ \begin{aligned} w_0 &= 2\pi r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta), \\ w_i &= 2\pi r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta), \\ w_c &= 2\pi r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n\rho^n} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta). \end{aligned} \right.$$

La fonction ϕ est nulle dans les deux cas, car on suppose que la masse totale de chaque couche est nulle.

Les formules (12) et (13) nous donneront ensuite

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_i}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} &= \omega^2 R - 2\pi R(1 - k^2) = 2\pi R[f(k^2) - 1 + k^2], \\ \left(\frac{\partial U_i}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} &= \omega^2 r = \omega^2 k R = 2\pi R k f(k^2). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire explicitement la condition d'équilibre (16) et nous aurons, en remplaçant partout r par kR ,

$$\begin{aligned} &2\pi R[f(k^2) - 1 + k^2] \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &+ 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + 2\pi k R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n} R^n}{n} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) \\ &= -2\pi R k f(k^2) \sum_{n=1}^{\infty} k^n R^n (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) \\ &+ 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + 2\pi k R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n R^n}{n} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $\cos n\theta$ et de $\sin n\theta$, nous obtenons une suite de conditions

$$(21) \quad [f(k^2) - 1 + k^2] A_n + \frac{1}{n} A_n + \frac{k^{2n+1}}{n} A'_n \\ = -k^{n+1} f(k^2) A'_n + \frac{k^n}{n} A_n + \frac{k^{n+1}}{n} A''_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

et une suite identique pour B_n et B'_n .

Désignons par p_n le rapport entre A'_n et A_n :

$$p_n = \frac{A'_n}{A_n},$$

les conditions (21) se réduisent en une double série de conditions

$$f(k^2) - 1 + k^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} k^{2n+1} p_n = 0, \\ k \left[f(k^2) - \frac{1}{n} \right] p_n - \frac{1}{n} = 0 \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ces équations permettent de calculer la valeur k correspondant à la figure de bifurcation et le rapport p de l'épaisseur de la couche intérieure à celle de la couche extérieure.

L'élimination de p_n donne

$$(22) \quad \left[f(k^2) + k^2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[f(k^2) - \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{n^2} k^{2n} = 0$$

et

$$(23) \quad p_n = \frac{1}{k_n \left[n f(k^2) - 1 \right]},$$

où l'on désigne par k_n une des racines de l'équation (22).

Le problème se réduit alors à la recherche des racines de l'équation (22).

10. *L'équation (22) n'a pas de racines pour $n \leq 4$ et pour chaque valeur de $n > 4$ possède deux et seulement deux racines. — Pour abrégér l'écriture posons*

$$k^2 = u,$$

u variera alors entre 0 et 1 lorsque k variera entre ces limites, et à

chaque valeur de u correspondra une et une seule valeur de k

$$k = +\sqrt{u}.$$

Ceci posé, écrivons notre équation comme il suit :

$$(24) \quad F(u, n) = \left[f(u) + u - \frac{n-1}{n} \right] \left[f(u) - \frac{1}{n} \right] + \frac{u^n}{n^2} = 0.$$

La dérivation successive donne

$$\frac{\partial}{\partial u} F(u, n) = f'(u)[2f(u) + u - 1] + f(u) - \frac{1}{n} + \frac{u^{n-1}}{n},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F(u, n) = f''(u)[2f(u) + u - 1] + 2f'(u)[f'(u) + 1] + \frac{n-1}{n} u^{n-2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial u^3} F(u, n) &= f'''(u)[2f(u) + u - 1] \\ &+ 3f''(u)[2f'(u) + 1] + \frac{(n-1)(n-2)}{n} u^{n-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial u^4} F(u, n) &= f^{(4)}(u)[2f(u) + u - 1] + 4f'''(u)[2f'(u) + 1] \\ &+ 6[f''(u)]^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n} u^{n-4}. \end{aligned}$$

Pour juger des valeurs de ces dérivées, calculons les valeurs des dérivées successives de $f(u)$.

D'après la formule (13) nous avons

$$f(u) = \frac{1-u+uLu}{1-u} = 1 + \frac{uLu}{1-u}$$

et, par conséquent,

$$f'(u) = \frac{Lu + (1-u)}{(1-u)^2}.$$

Mais, en écrivant

$$u = 1 - (1-u),$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Lu &= L[1 - (1-u)] \\ &= -\frac{1-u}{1} - \frac{(1-u)^2}{2} - \frac{(1-u)^3}{3} - \dots - \frac{(1-u)^i}{i} - \dots \end{aligned}$$

et, par suite,

$$f'(u) = -\frac{1}{2} - \frac{1-u}{3} - \frac{(1-u)^2}{4} - \dots - \frac{(1-u)^{i-2}}{i} - \dots$$

d'où, en dérivant,

$$f''(u) = \frac{1}{3} + \frac{2}{4}(1-u) + \frac{3}{5}(1-u)^2 + \dots + \frac{i-2}{i}(1-u)^{i-3} + \dots,$$

$$f'''(u) = -\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 2}{5}(1-u) - \frac{4 \cdot 3}{6}(1-u)^2 - \dots \\ - \frac{(i-2)(i-3)}{i}(1-u)^{i-3} - \dots,$$

$$f^{iv}(u) = \frac{6}{5} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6}(1-u) + \dots + \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{i}(1-u)^{i-5} + \dots$$

On voit facilement que chacune de ces dérivées conserve son signe dans l'intervalle

$$0 \leq u \leq 1.$$

Pour $u = 0$ et $u = 1$, elles prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & f(1) &= 0, \\ f'(0) &= -\infty, & f'(1) &= -\frac{1}{2}, \\ f''(0) &= +\infty, & f''(1) &= \frac{1}{3}, \\ f'''(0) &= -\infty, & f'''(1) &= -\frac{1}{2}, \\ f^{iv}(0) &= +\infty, & f^{iv}(1) &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

En vertu de ces formules, nous aurons :

$$\begin{aligned} F(0, n) &= \frac{n-1}{n^2}, & F(1, n) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} F(0, n) &= -\infty, & \frac{\partial}{\partial u} F(1, n) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2} F(0, n) &= +\infty, & \frac{\partial^2}{\partial u^2} F(1, n) &= \frac{n-1}{2n}, \\ \frac{\partial^3}{\partial u^3} F(0, n) &= -\infty, & \frac{\partial^3}{\partial u^3} F(1, n) &= \frac{(n-1)(n-2)}{n}. \end{aligned}$$

Enfin, $\frac{\partial^4}{\partial u^4} F(u, n)$ restera positive dans l'intervalle $(0, \dots, 1)$.

Ceci posé, on voit qu'au voisinage de $u = 1$, $F(u, n)$ reste positive, car la dérivée seconde y est positive et par suite la dérivée première

y est négative. On peut voir encore que dans l'intervalle

$$0 \leq u < 1,$$

$F(u, n)$ ne peut pas avoir plus de deux racines. En effet, sa quatrième dérivée conservant le signe constant, elle ne peut pas avoir dans l'intervalle

$$0 \leq u \leq 1$$

plus de quatre racines. Mais $u = 1$ est déjà une racine double, et par conséquent, entre 0 et 1, il ne peut y avoir plus de deux racines.

Nous allons maintenant démontrer que pour tout n supérieur à 4, l'équation (22) possède effectivement deux racines et pour $n = 2, 3, 4$, n'en possède pas du tout.

Pour $n = 2$, en effet, la racine $u = 1$ est triple; la fonction ne peut donc avoir plus d'une racine entre 0 et 1. Mais comme le nombre de racines est toujours pair, ce nombre doit être zéro pour $n = 2$.

Pour $n = 1$, la racine $u = 1$ est au moins quadruple, et par conséquent la fonction n'a pas de racines.

Pour $n = 3, 4, \dots$, la fonction peut avoir deux racines. Sa courbe représentative est de la forme

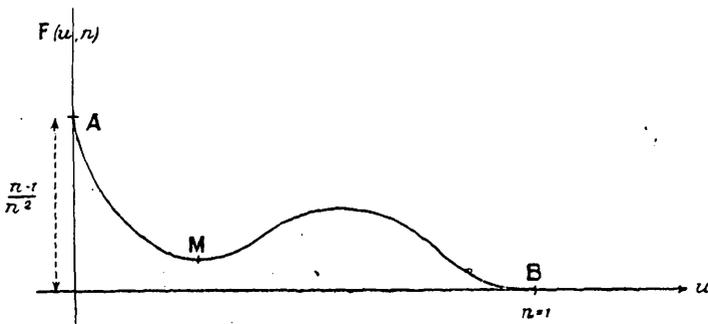


Fig. 6.

On voit immédiatement que la fonction $F(u, n)$ a deux racines si son minimum en M est négatif et qu'elle n'en a pas du tout si son minimum est positif.

Pour trancher cette question, faisons des calculs numériques et établissons le Tableau des valeurs de $F(u, n)$ pour différentes valeurs de u et de n .

En posant

$$\psi(u) = 1 - f(u) - u,$$

il nous faudra étudier la fonction

$$(25) \quad F(u, n) = \frac{u^n}{n^2} - \left[f(u) - \frac{1}{n} \right] \left[\psi(u) - \frac{1}{n} \right].$$

En calculant $f(u)$ et $\psi(u)$ pour différentes valeurs de u , et en portant dans la formule précédente, nous aurons le Tableau suivant des valeurs de $F(u, n)$:

u .	$r : R$ $= k = \sqrt{u}$.	$\frac{\omega^2}{2\pi}$ $= f(u)$.	$\psi(u)$ $= [1 - f(u) - u]$.	$\frac{1}{n} = 0,3333$. $F(u, 3)$.	$\frac{1}{n} = 0,2500$. $F(u, 4)$.	$\frac{1}{n} = 0,2000$. $F(u, 5)$.	$\frac{1}{n} = 0,1667$. $F(u, 6)$.
0,0.....	0,0000	1,0000	0,0000	0,2222	0,1875	0,1600	0,1389
0,1.....	0,3162	0,7442	0,1558	0,0730	0,0465	0,0240	0,0063
0,2.....	0,4472	0,5977	0,2023	0,0355	0,0158	-0,0009	-0,0153
0,3.....	0,5477	0,4939	0,2161	0,0220	+0,0088	-0,0048	-0,0161
0,4.....	0,6325	0,3888	0,2112	0,0138	0,0101	-0,0019	-0,0099
0,5.....	0,7071	0,3063	0,1937	0,0105	0,0071	-0,0019	-0,0034
0,6.....	0,7746	0,2338	0,1662	0,0075	0,0068	+0,0042	0,0013
0,7.....	0,8361	0,1678	0,1322	0,0027	0,0055	0,0045	0,0033
0,8.....	0,8944	0,1074	0,0926	0,0025	0,0032	0,0032	0,0029
0,9.....	0,9487	0,0517	0,0483	0,0008	0,0010	0,0011	0,0012
1,0.....	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Ce Tableau montre d'abord que lorsque u varie de 0 à 1, $f(u)$ décroît de 1 à 0 et $\psi(u)$ varie de 0 à 0 en passant, au voisinage de $u = 0,3$, par un maximum voisin de 0,2161 et en tout cas inférieur à 2500.

Nous aurons donc, dans tout l'intervalle ($0 < u < 1$),

$$(26) \quad \psi(u) < 0,2500.$$

Le Tableau montre encore que $F(u, 3)$ décroît constamment de 0,2222 à 0 sans accuser aucun maximum ni minimum.

Quant aux $F(u, 4)$, $F(u, 5)$, ... et suivantes, elles accusent déjà un minimum au voisinage de

$$u = 0,3$$

et un maximum après $u = 0,5$.

Mais le minimum de $F(u, 4)$ est encore positif et la fonction n'a pas de racines.

En effet, pour que $F(u, n)$ puisse être négative, il faut que les deux différences

$$(27) \quad f(u) - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \psi(u) - \frac{1}{n}$$

soient de même signe.

Or, pour $n = 4$,

$$\frac{1}{n} = 0,2500$$

et la première des différences (27) est manifestement positive au voisinage de $u = 0,3$; quant à la deuxième, elle est négative en vertu de l'inégalité (26). La fonction $F(u, 4)$ ne pourra donc jamais devenir négative.

Par contre, toute fonction

$$F(u, n), \quad (n = 5, 6, 7, \dots)$$

a deux racines, car son minimum est bien négatif.

C. Q. F. D.

11. Distribution des racines. — Démontrons maintenant la proposition suivante :

Si nous avons deux fonctions

$$F(u, n) \quad \text{et} \quad F(u, m)$$

et si

$$n > m,$$

les racines de la fonction $F(u, m)$ sont intérieures par rapport à celles de la fonction $F(u, n)$.

Pour le prouver, il nous suffira de démontrer que, pour toute valeur de u annulant $F(u, m)$, la fonction $F(u, n)$ est encore négative.

Soit u_m une des racines de $F(u, m)$. Nous aurons

$$F(u_m, m) = \frac{u_m^m}{m^2} - \left[f(u_m) - \frac{1}{m} \right] \left[\psi(u_m) - \frac{1}{m} \right] = 0.$$

En remarquant que dans ce cas chacune des différences entre les crochets est positive, et que

$$m < n, \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{m}, \quad u_m < 1,$$

nous aurons, en remplaçant dans la formule précédente m par n ,

$$F(u_n, n) = \frac{u_n^n}{n^2} - \left[f(u_n) - \frac{1}{n} \right] \left[\psi(u_n) - \frac{1}{n} \right] < 0.$$

G. Q. F. D.

Par conséquent, en donnant à n les valeurs

$$n = 5, 6, 7, \dots,$$

nous aurons deux séries de racines de la fonction $F(u, n)$ s'éloignant d'un point moyen

$$u = 0,3 \quad \text{ou même} \quad k = 0,5,$$

et se rapprochant l'une de 0 et l'autre de 1.

Pour $n = \infty$, l'une des racines devient nulle et l'autre égale à 1.

12. Figures infiniment voisines d'une couche cylindrique de révolution. — A chacune des racines que nous venons de trouver correspond une figure de bifurcation pouvant donner naissance à une nouvelle figure d'équilibre.

Comme à chaque racine k_n correspond une seule valeur de n , la couche déformante, tant extérieure qu'intérieure, sera de la forme

$$\zeta_c = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

ou, en choisissant convenablement l'origine des arcs,

$$\zeta_c = \varepsilon_n \sin n\theta,$$

De même

$$\zeta_i = \varepsilon'_n \sin n\theta,$$

où

$$\varepsilon'_n = p_n \varepsilon_n$$

et

$$p_n = \frac{1}{k_n [nf(k^2) - 1]} = \frac{1}{n\sqrt{u_n} \left[f(u_n) - \frac{1}{n} \right]}.$$

Et comme pour toutes les racines u_n la différence $f(u_n) - \frac{1}{n}$ est positive, nous voyons que p_n est toujours positif. Cela prouve que les figures dérivées de toutes les figures de bifurcation sont toutes de même genre. Elles présentent une suite de renflements et de rétrécis-

sements successifs de la couche cylindrique, comme c'est indiqué sur la figure 7 que nous avons faite en supposant $n = 6$.

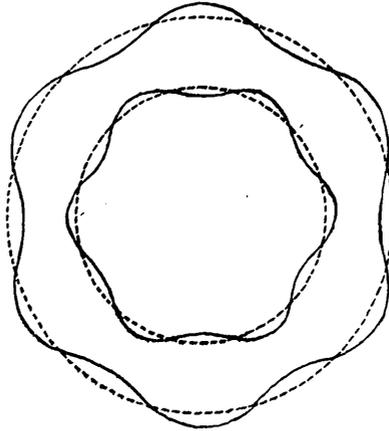


Fig. 7.

Si nous accentuons cette déformation, la couche cylindrique tendra à se décomposer en n cylindres pleins.

Ce fait est analogue à la décomposition en petites sphères de l'anneau dans l'expérience de Plateau.

Nous avons ainsi encore une analogie entre les figures d'équilibre d'une masse fluide soumise aux forces newtoniennes et de celle soumise aux seules forces capillaires.

13. Conclusion. — Nous nous sommes proposé d'étudier les figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation limitées par deux surfaces différentes et ne se coupant pas, autrement dit, les figures creuses, ayant un vide à l'intérieur. Nous avons vu que, parmi les figures limitées par des surfaces ellipsoïdales ou cylindriques du second ordre, seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre.

Cette dernière figure existe pour toutes les valeurs de la vitesse angulaire entre 0 et $\sqrt{2\pi}$, et présente deux séries discontinues de figures de bifurcation. Chacune de ces figures peut donner naissance à une nouvelle figure d'équilibre du genre de la figure représentée sur la figure 7.

Si nous prenons, pour l'état initial de notre masse liquide, la figure d'une couche cylindrique correspondant à

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0,5 \quad \text{ou} \quad k = 0,54,$$

et si nous supposons que la vitesse angulaire décroît jusqu'à zéro, la masse fluide passera par toutes les figures de bifurcation dans l'ordre des n croissants, en commençant par la figure correspondant à $n = 5$, c'est-à-dire ayant cinq renflements.

De même, si la vitesse angulaire croît jusqu'à $\sqrt{2\pi}$, la masse fluide passera par toutes les figures de bifurcation correspondant à la deuxième série des racines de la fonction $F(u, n)$ et toujours dans l'ordre des n croissants. La première figure que l'on rencontrera sera encore une figure correspondant à $n = 5$ et ayant par conséquent cinq renflements.

Mais si nous prenons comme point de départ un cylindre plein, nous verrons que le cylindre plein ne pourra se transformer en une couche cylindrique que pour la valeur maxima de la vitesse angulaire

$$\omega = \sqrt{2\pi}.$$

A partir de ce moment, la vitesse angulaire ne pourra que diminuer, et par suite la masse fluide passera par toutes les figures de bifurcation correspondant à la deuxième série des racines de $F(u, n)$ dans le sens inverse, c'est-à-dire dans l'ordre des n décroissants, en commençant par $n = \infty$.

La figure déformée correspondante aura une infinité de renflements, ce qui correspondra à la désagrégation de la masse.

Par conséquent, la masse liquide ne pourra jamais affecter naturellement la figure d'une couche cylindrique, car avant de l'affecter elle se désagrègera.

Cela tient à ce que toutes ces figures creuses sont évidemment instables.

TROISIÈME PARTIE.

Petits mouvements d'un ellipsoïde fluide en rotation
autour de sa position d'équilibre relatif.

1. *Historique.* — La question des petits mouvements d'une masse fluide en rotation autour de sa position d'équilibre est une des plus importantes après celle de la démonstration de l'existence de ces figures. Une fois complètement résolue, elle permettrait, en effet, de résoudre toutes les questions relatives à la stabilité de ces figures. Malheureusement, peu de mathématiciens se sont occupés de cette question.

Poincaré, le premier, a étudié le problème des petits mouvements d'un fluide autour de sa position d'équilibre relatif, et lui a consacré un Chapitre entier de son Mémoire classique, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, 1885, n° 13).

Il y traite d'abord un cas fictif où le fluide homogène est soumis aux forces newtoniennes et à une force analogue à la force centrifuge et dont les projections sur les axes coordonnés s'expriment, par conséquent, de la manière suivante :

$$\alpha x, \quad \beta y, \quad \gamma z,$$

les coefficients α , β , γ étant choisis de manière que la masse fluide affecte la figure ellipsoïdale comme figure d'équilibre absolu.

En admettant que le mouvement est irrotationnel, Poincaré suppose que les déplacements de chaque molécule δx , δy , δz peuvent être considérés comme dérivées partielles d'une certaine fonction φ :

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \delta y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \delta z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

et il cherche φ sous la forme d'une série de produits de Lamé

$$\varphi = \sum_i \xi_i R_i M_i N_i,$$

ξ_i étant des fonctions du temps à déterminer.

Il calcule la force vive de la masse fluide ainsi que la fonction des forces, et, en écrivant l'équation de Lagrange, relative à ξ_i , il trouve pour chacune de ces fonctions l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} R_i = - 4\pi \xi_i \frac{dR_i}{d\rho} \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \left(gl - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right).$$

Une fois les ξ_i déterminés, il détermine la surface libre. En supposant que le déplacement d'une molécule quelconque estimé normalement à l'ellipsoïde a pour expression

$$\varepsilon = \Sigma A_i l M_i N_i,$$

il trouve, pour déterminer les coefficients A_i , la formule suivante :

$$A_i = \xi_i \frac{dR_i}{d\rho} \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

A chaque déformation initiale simple, c'est-à-dire telle que le déplacement d'une molécule est donnée par la formule

$$\varepsilon = A_i l M_i N_i,$$

correspond une oscillation bien déterminée de période égale à

$$T_i = 2 R_i \frac{dR_i}{d\rho} \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \left(gl - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right).$$

La surface libre reste donc toujours de même nature. Toutes les molécules de la surface ont un mouvement pendulaire de même période et synchrone. Au bout d'un temps égal à la période T_i , la surface repasse par sa position initiale.

Si la déformation initiale n'est pas simple, l'oscillation sera représentée comme une somme d'oscillations simples superposées.

Poincaré étudie ensuite le cas général et réel où la masse fluide est en rotation autour d'un axe fixe. Dans ce cas, en tenant compte de la force centrifuge composée et en appliquant une autre méthode, il obtient un résultat analogue. Il trouve que toute oscillation peut être considérée comme le résultat de superposition de plusieurs oscillations simples.

Nous reviendrons dans la suite à cette analyse pour montrer que ces résultats sont inexacts.

Quatre ans après (en 1889) ⁽¹⁾, M. Love a repris cette question et a appliqué l'analyse indiquée par Poincaré, mais avec d'autres notations, au cas d'un cylindre elliptique indéfini. Les résultats qu'il a trouvés concordent absolument avec ceux de Poincaré. Mais ils sont exacts, car son problème, étant réduit à deux dimensions, il n'a pas eu à appliquer le changement de variables qui, à notre avis, a faussé les résultats de Poincaré.

La même année, il a étudié les oscillations d'une enveloppe élastique sphérique, remplie de liquide ⁽²⁾. Il a introduit dans ses calculs les fonctions sphériques et obtient aussi des ondes régulières.

Depuis, personne ne s'est intéressé à cette question et elle est restée au point où elle a été laissée par Poincaré. Malgré tout son intérêt, ni M. Liapounoff, ni M. Darwin ne se la posent.

Il y a quelque temps, nous avons essayé de résoudre cette question par une méthode différente de celle employée par Poincaré; mais les difficultés de l'analyse étant trop grandes, nous n'avons pu que démontrer que l'analyse de Poincaré était inexacte et que les oscillations simples semblables à celles que l'on obtient en négligeant la force centrifuge composée sont impossibles.

Nous commencerons par donner le résumé de la méthode de Poincaré, ensuite nous montrerons qu'en admettant ses résultats et en les appliquant aux cas particuliers, nous arriverons à des conclusions impossibles à admettre.

Enfin, nous indiquerons l'inadvertance commise par Poincaré et nous démontrerons l'impossibilité des oscillations simples.

2. Méthode de Poincaré ⁽³⁾. — Au n° 13 (p. 348 à 365) de son Mémoire classique des *Acta mathematica*, Poincaré traite la question

⁽¹⁾ LOVE, *The oscillations of a mass of gravitating liquid in the forme of an elliptic cylinders which rotates as if rigid about its axes* (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXIII, 1889).

⁽²⁾ *The free and forced vibrations of an Elastic spherical Shell containing a given mass of liquid* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XIX).

⁽³⁾ Pour faciliter les recherches, nous conserverons, pour indiquer les formules, les numéros donnés par Poincaré au n° 13 de son Mémoire.

des petits mouvements d'un ellipsoïde en rotation autour de sa position d'équilibre relatif.

Il commence par écrire les équations générales de mouvement d'un liquide, sous leur forme habituelle; ensuite, en supposant que le mouvement est assez petit pour pouvoir négliger les carrés et les produits des vitesses et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées x, y, z , et en tenant compte de la condition d'incompressibilité du liquide, il obtient l'équation suivante :

$$(3) \quad \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} = - \omega^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2},$$

où ψ désigne la différence $V - p$ entre la fonction des forces V et la pression p .

La vitesse angulaire est désignée, comme toujours, par ω ; l'axe de rotation est pris pour axe Oz et la densité du liquide est supposée égale à 1.

Comme sur la surface libre la pression est nulle, on doit avoir

$$\psi = V$$

sur la surface libre du liquide.

L'équation (3), avec cette dernière condition, déterminent formellement la fonction ψ et, par suite, donnent la solution du problème.

Pour résoudre effectivement ce problème, Poincaré emploie l'artifice suivant : il suppose que chaque molécule fait un mouvement pendulaire autour de sa position d'équilibre et il représente les déplacements $\delta x, \delta y, \delta z$ de la molécule des coordonnées x, y, z de la manière suivante :

$$\delta x = e^{i\lambda t} \xi, \quad \delta y = e^{i\lambda t} \eta, \quad \delta z = e^{i\lambda t} \zeta,$$

λ étant une constante et ξ, η, ζ fonctions des coordonnées moyennes x, y, z , mais indépendantes du temps t .

Poincaré admet par là la possibilité des oscillations simples, où toutes les molécules ont la même période d'oscillation.

En supposant encore que, dans ce cas,

$$\psi = e^{i\lambda t} \psi_1,$$

ψ_1 étant une fonction de x, y, z mais pas du temps, il trouve l'équa-

tion suivante pour déterminer ψ_1 :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0.$$

Désignons par

$$\varepsilon = \partial x \cos \alpha + \partial y \cos \beta + \partial z \cos \gamma$$

l'épaisseur de la couche qu'il faut ajouter à notre ellipsoïde pour obtenir la surface déformée à l'instant t ; et supposons que, pour $t = 0$, ε soit développable en une série de fonctions de Lamé

$$(a) \quad \varepsilon_0 = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = \sum A_k \ell M_k N_k,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale. Alors

$$\varepsilon = e^{i\lambda t} \sum A_k \ell M_k N_k$$

et le potentiel à la surface libre sera

$$V_0 = -4\pi e^{i\lambda t} \sum A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) M_k N_k.$$

car la surface primitive était d'équilibre.

La condition sur la surface libre devient alors

$$(5) \quad \psi_1 = -4\pi \sum A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) M_k N_k.$$

La formule (a) se transforme et donne finalement

$$(6) \quad \lambda \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{x}{\rho^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{y}{(\rho^2 - b^2)} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right) \frac{z}{\rho^2 - c^2} \right] \\ + 2\omega i \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{x}{\rho^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{y}{\rho^2 - b^2} \right] = \frac{\lambda (4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2}} \sum A_k M_k N_k.$$

La fonction ψ_1 et les coefficients A_k sont déterminés par l'équation (4) et les conditions (5) et (6), qui doivent être vérifiées sur la surface libre.

Ensuite, Poincaré pose

$$1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2} = \tau^2, \quad z = \tau z'$$

et considère deux ellipsoïdes :

$$(E) \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1 \quad (\text{l'ellipsoïde de départ}),$$

$$(E') \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{\tau^2 z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

et il fait suivre du signe (') toutes les quantités relatives à (E').

La fonction ψ_1 devient une fonction harmonique des variables (x, y et z'), et, par suite, peut être représentée par une somme de produits de Lamé :

$$\psi_1 = D_{\eta} R'_{\eta} M'_k N'_k.$$

Puis, en posant

$$(1) \quad \rho^2 - c'^2 = \frac{\rho^2 - c^2}{\tau^2},$$

il démontre, en transformant (E) et (E') en une même sphère, qu'un produit de Lamé $M'N'$ sur (E') peut être représenté sur (E) par une somme de Lamé du même ordre :

$$(7) \quad M'_\eta N'_\eta = \sum B_{k,\eta} M_k N_k.$$

A l'aide de cette formule, il développe en série de $M_k N_k$ la fonction ψ_1 , et la partie gauche de l'équation (6) et obtient les équations suivantes :

$$(8) \quad -4\pi A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) = \sum_{\eta} D_{\eta} B_{k,\eta} R_{\eta},$$

$$(9) \quad \frac{A_k \lambda (4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2}} = \lambda \sum_{\eta} D_{\eta} B_{k,\eta} \frac{dR_{\eta}}{\rho d\rho} + 2\omega i \sum_{\eta} D_{\eta} G_{\eta k},$$

où $G_{\eta k}$ et $B_{k,\eta}$ sont des constantes connues.

Ces deux systèmes d'équations donneront les valeurs des A_k, D_{η} et λ . Pour les résoudre, on suppose d'abord tous les A_k et D_{η} nuls, sauf ceux qui correspondent à des fonctions de Lamé d'un certain ordre, d'ordre n par exemple. Il y aura $4n+2$ équations linéaires homogènes. Si la solution en A_k, D_k existe, le déterminant est nul. En l'écrivant, on a une équation pour déterminer λ . A chaque racine réelle de cette équation correspondra une oscillation avec la période λ . Si toutes les racines sont réelles, la figure de départ est stable.

3. *Conclusions impossibles à admettre.* — Nous voulons montrer qu'en admettant les formules de ce Mémoire, on arrive à des conclusions impossibles. En effet, considérons un ellipsoïde de bifurcation, déformons-le en lui ajoutant une couche le transformant en une figure d'équilibre infiniment voisine et laissons-le sans vitesse initiale. Dans ce cas, la formule (A) s'écrira

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = A_k l M_k N_k$$

et la formule (5) deviendra

$$\psi_1 = -4\pi A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) M_k N_k = 0.$$

Par conséquent, ψ_1 sera identiquement nul sur la surface libre (ce qu'il fallait prévoir, car la figure déformée est encore d'équilibre). Nous concluons de là que tous les D_q sont nuls. L'équation (9) nous donnera alors

$$A_k \lambda (4\omega^2 - \lambda^2) = 0,$$

et, comme $A_k \neq 0$, on aura trois racines pour λ :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm 2\omega.$$

Le liquide pourra choisir entre le repos ($\lambda = 0$) et un mouvement d'oscillation de période 2ω ou -2ω (?), ce qui est manifestement impossible. Si nous faisons le même calcul dans l'exemple que donne Poincaré sur l'ellipsoïde de Maclaurin, nous trouverons λ indéterminée.

4. *Inadvertance de Poincaré.* — Ces résultats bizarres ont pour cause une inadvertance qui s'est glissée dans ce Mémoire et qui n'a pas encore été remarquée. Je signalerai d'abord le changement de variables que fait Poincaré pour ramener l'équation (E') à la forme canonique. Il pose en effet

$$\rho^2 - c'^2 = \frac{\rho^2 - c^2}{\tau^2},$$

c' , c et τ étant des constantes et ρ la même variable. Dans ces conditions, la transformation est absolument impossible. Ce n'est pas une faute d'impression et ρ est bien le même dans les deux parties de la

formule. Cela devient évident si nous considérons les formules à l'aide desquelles Poincaré transforme (E) et (E') en une même sphère. Il pose

$$X = \frac{x}{\rho}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \quad Z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 - c'^2}}.$$

On voit donc bien que ρ est le même dans toutes les formules.

Une autre remarque non moins importante est la suivante :

$V - p$ étant une fonction linéaire des déplacements $\delta x, \delta y, \delta z$ (s'ils sont petits) n'est pas homogène par rapport à ces derniers, car elle possède une partie principale, indépendante de $\delta x, \delta y, \delta z$, à savoir : la valeur de $V - p$ relative à l'ellipsoïde non déformé. Par conséquent, en posant $\delta x = e^{i\lambda t} \xi, \dots$, on n'a pas le droit de poser

$$\psi = e^{i\lambda t} \psi_1.$$

En conservant les notations, il faudrait poser

$$\psi = \psi_0 + e^{i\lambda t} \psi_1,$$

ψ_0 étant une fonction connue de x, y, z , constante sur la surface de l'ellipsoïde E.

3. Impossibilité des oscillations simples de l'espèce considérée. —

Cette remarque conduit naturellement à la conclusion de l'impossibilité des oscillations avec une seule période commune à toutes les molécules.

En effet, les équations générales de l'Hydrodynamique sont :

$$\frac{du}{dt} + 2\omega v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} - 2\omega u = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Avec les notations admises, on aura

$$u = \frac{d \delta x}{dt}, \quad v = \frac{d \delta y}{dt}, \quad w = \frac{d \delta z}{dt}.$$

En remplaçant $\delta x, \delta y, \delta z$ par leurs valeurs et en les portant dans les

équations ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned} \left(-\xi \lambda^2 + 2\omega i \lambda \eta - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) e^{i\lambda t} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \\ \left(-\eta \lambda^2 - 2\omega i \lambda \xi - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) e^{i\lambda t} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ \left(-\zeta \lambda^2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) e^{i\lambda t} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial z}, \end{aligned}$$

et, comme ψ_0 est indépendant du temps, ces équations sont généralement impossibles. Donc le mouvement d'oscillation que nous avons supposé dans ce cas impossible. C'est ce que nous avons voulu démontrer.

6. Conclusion. — Il se pose maintenant la question de savoir si la nature sera alors l'oscillation d'une masse fluide dans des conditions susindiquées? Car si la figure de départ est telle que les conditions auront lieu forcément. Il est évident aussi que, si l'on considère seulement des petits mouvements, l'oscillation de chaque molécule prise séparément, ne peut être que simple, pendulaire. Nous pourrions proposer

$$\delta x = e^{i\lambda t} \xi, \quad \dots,$$

seulement λ sera une fonction de coordonnées et non une constante. Chaque molécule oscillera pendulairement, mais la période d'oscillation variera d'une molécule à l'autre. Nous n'aurons pas d'ondes régulières, mais la surface libre se déformera continuellement et ne reprendra jamais sa forme primitive.