JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E.-T. BELL

Sur les représentations propres par quelques formes quadratiques de Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 2 (1919), p. 249-271.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1919_8_2__249_0>

Sur les représentations propres par quelques formes quadratiques de Liouville;

PAR E.-T. BELL,

Assistant Professor à l'Université de Washington (États-Unis).

Dans la deuxième série de son Journal, années 1860 à 1864, Liouville a donné quelques formules relatives aux nombres de représentations d'un entier par des formes quadratiques à quatre et six indéterminées et à coefficients numériques, en supprimant toujours les démonstrations. Soit $T(n)$ le nombre total des représentations de n par une forme homogène quadratique donnée, et $P(n)$ le nombre des représentations propres par la même forme. Alors on sait que Pépin [1] a démontré la plupart des formules $T(n)$; celles qu'il laisse de côté peuvent être prouvées de même, en s'appuyant sur les formules générales de Liouville et les fonctions elliptiques. Mais il ne traite pas les $P(n)$; je me propose ici de démontrer l'ensemble des formules $P(n)$ de Liouville en regardant les $T(n)$ associées comme connues.

Dans un premier Chapitre, j'éclaircis en peu de mots des principes généraux qui s'appliquent à toutes les formes quadratiques homogènes, et qu'on peut étendre sans difficulté à une forme homogène de degré quelconque. Les formules générales, dans ce premier Chapitre, sont toutes fort simples; on les saisira immédiatement des définitions. Dans le deuxième Chapitre je démontre les formules $P(n)$ de Liouville, pour lesquelles n n'a plus qu'un seul facteur premier spécial; et, dans le troisième, celles pour lesquelles n a deux facteurs

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890, p. 1-69.

premiers spéciaux. Ces deux cas renferment tous les théorèmes $P(n)$ de Liouville.

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

1. Soit $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ la décomposition de l'entier positif n en facteurs premiers distincts. Si $a_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, on dit que n est *simple*. Le nombre $\pi(n)$ des facteurs premiers distincts de n, ici $\pi(n) = r$, est la *multiplicité* de n. Les notations

$$\sum_n F(d), \qquad \sum_n F(d) G(\delta)$$

signifient des sommes portant sur tous les diviseurs d de n, et sur tous les couples (d, δ) des diviseurs conjugués de n respectivement. Nous ferons un grand usage de la fonction $\mu(n)$; $\mu(n) = (-1)^{\pi(n)}$ ou 0, suivant que n est ou n'est pas simple, et $\mu(1) = 1$. En posant, pour abréger, $\mu(n) \times \mu(n) = \mu^2(n)$, nous définissons la fonction $f(n)$ par l'identité

$$f(n) = \sum_n \mu(d) \mu^2(\delta).$$

Soit $D(n_1, n_2)$ le plus grand commun diviseur de n_1, n_2. Alors on sait que pour $D(n_1, n_2) = 1$, on a

$$\mu(n_1 n_2) = \mu(n_1) \mu(n_2);$$

et il y a le théorème bien connu

$$\sum_1 \mu(d) = \mu(1) = 1, \qquad \sum_n \mu(d) = 0 \qquad (n > 1).$$

De là, il est aisé de voir que, pour les mêmes valeurs de n_1, n_2,

$$f(1) = 1, \qquad f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2);$$

et par là,

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}, \qquad f(n) = \prod_{i=1}^{r} f(p_i^{a_i}).$$

C'est-à-dire, d'après la définition de Cahen (¹), $\mu(n)$ et $f(n)$ sont des fonctions *régulières*. On verra bientôt que toutes les fonctions $\mathrm{T}(n)$, $\mathrm{P}(n)$ de Liouville s'expriment très simplement par un petit nombre d'autres fonctions régulières. De plus, p étant premier,

$$f(p)=0, \qquad f(p^2)=-1, \qquad f(p^a)=0 \qquad (a>2);$$

et l'on voit que $f(n)=(-1)^{\pi(n)}$ ou o, suivant que n est ou n'est pas le carré d'un entier simple.

Soit maintenant $\varepsilon(n)=1$ ou o, suivant que n est ou n'est pas le carré d'un entier. Donc, $\varepsilon(n)$ étant évidemment régulière,

$$\sum_1 f(d)\,\varepsilon(\delta)=1, \qquad \sum_n f(d)\,\varepsilon(\delta)=0 \qquad (n>1);$$

comme on s'en assure en le vérifiant pour $n=p^a$, p premier, ce qui suffit, $f(n)$ étant aussi régulière. Cette identité est fondamentale.

Enfin, considérons une identité de la forme

$$\mathrm{H}(n)=\sum_n h(d)\,\varepsilon(\delta),$$

valable pour tous les entiers $n>0$. On a donc

$$\mathrm{H}(d)=\sum_d h(d')\,\varepsilon(d'') \qquad (d=d'd'');$$

et de là,

$$\begin{aligned}\sum_n \mathrm{H}(d)\,f(\delta)&=\sum_n\Big[f(\delta)\sum_d h(d')\,\varepsilon(d'')\Big] \qquad (n=d\delta,\ d=d'd''),\\ &=\sum_n\Big[h(d)\sum_\delta f(\delta')\,\varepsilon(\delta'')\Big] \qquad (n=d\delta,\ \delta=\delta'\delta'');\\ &=h(n),\end{aligned}$$

par l'identité fondamentale. D'après cela, nous avons ce résultat capital : l'identité

$$\mathrm{H}(n)=\sum_n h(d)\,\varepsilon(\delta)$$

(¹) *Théorie des Nombres*, t. I, 1914, p. 383.

entraîne celle-ci,

$$h(n)=\sum_n \mathrm{H}(d)f(\delta).$$

Nous appellerons la fonction $h(n)$, liée à $\mathrm{H}(n)$ par la dernière relation, la *conjuguée* de $\mathrm{H}(n)$.

2. Soit $\Gamma(n)$ la conjuguée de $\gamma(n)$. D'après les définitions, on a

$$\Gamma(n)=\sum_n \gamma(d)f(\delta)=\sum_n{}' \gamma(d')-\sum_n{}'' \gamma(d''),$$

où $\sum_n{}'$, $\sum_n{}''$ portent respectivement sur tous les diviseurs d' de n dont les conjugués δ' sont des carrés des nombres simples à multiplicité paire, et sur tous les diviseurs d'' de n dont les conjugués δ'' sont des carrés des nombres simples à multiplicité impaire. Cette forme de $\Gamma(n)$ mène immédiatement à une formule symbolique d'une haute importance pour notre but. Soient p, q premiers, et

$$\mathrm{D}(n,p,q)=1, \qquad n=d\delta, \qquad a>1, \qquad \alpha,\beta\geq 0.$$

Donc, d'après ce qui précède, il est clair que

$$\Gamma(n)=\sum_n \gamma(d)f(\delta), \qquad \Gamma(pn)=\sum_n \gamma(pd)f(\delta),$$

$$\Gamma(p^2n)=\sum_n [\gamma(p^2d)-\gamma(d)]f(\delta), \qquad \Gamma(p^a n)=\sum_n [\gamma(p^a d)-\gamma(p^{a-2}d)]f(\delta);$$

tout ce qui peut être compris dans la seule formule

$$\Gamma(p^\alpha n)=\sum_n [\gamma(p^\alpha d)-\gamma(p^{\alpha-2}d)]f(\delta),$$

avec la convention sous-entendue qu'on doit remplacer $\gamma(x)$ par zéro toutes les fois que x n'est pas un entier positif. Désormais on fait cette convention. Par cela, on voit d'une manière toute semblable que les seize cas auxquels conduit $\Gamma(p^\alpha q^\beta n)$ s'expriment par la formule unique

$$\Gamma(p^\alpha q^\beta n)=\sum_n[\gamma(p^\alpha q^\beta d)-\gamma(p^\alpha q^{\beta-2}d)-\gamma(p^{\alpha-2}q^\beta d)+\gamma(p^{\alpha-2}q^{\beta-2}d)]f(\delta);$$

et ainsi de suite pour

$$\Gamma(p^\alpha q^\beta r^\lambda n),\qquad \Gamma(p^\alpha q^\beta r^\lambda t^\rho n),\qquad \ldots,$$

avec les conditions

$$\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \rho,\ \ldots \geqq 0,\qquad D(n, p, q, r, t, \ldots)=1,$$

p, q, r, t, ... étant premiers. Pour arriver à la formule générale, il convient d'introduire un signe, $\prod'$, de la multiplication symbolique

$$\prod_{i=1}^{r}{}'[\gamma(p_i^{a_i})-\gamma(p_i^{a_i-2})],$$

avec le sens que, la multiplication faite, chaque produit, tel que

$$\gamma(p_1^{a_1})\gamma(p_2^{a_2})\ldots\gamma(p_r^{a_r-2})$$

par exemple, doit être remplacé par la fonction γ du produit des arguments des fonctions γ individuelles qui composent le produit spécifique; ainsi le produit choisi doit être remplacé par ceci :

$$\gamma(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_r^{a_r-2}).$$

Soient p_1, p_2, ..., p_r premiers, et

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_r, n)=1;\qquad n=d\delta;\qquad a_1, a_2, \ldots, a_r\geqq 0.$$

Donc, d'après ce qui précède, on établit par voie d'une induction complète facile la formule fondamentale

$$\Gamma(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_r^{a_r}n)=\sum_n\left\{\prod_{i=1}^{r-1}{}'[\gamma(p_i^{a_i})-\gamma(p_i^{a_i-2})].[\gamma(p_r^{a_r}d)-\gamma(p_r^{a_r-2}d)]\right\}f(\delta),$$

où *tous* les produits entre « accolades » sont symboliques au sens expliqué ci-dessus. Par là, quand $n = 1$, on a

$$\Gamma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}) = {\prod_{i=1}^{r}}' [\gamma(p_i^{a_i}) - \gamma(p_i^{a_i-2})];$$

et ainsi, quand $\gamma(n)$ est une fonction régulière,

$$\Gamma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}) = \prod_{i=1}^{r} [\gamma(p_i^{a_i}) - \gamma(p_i^{a_i-2})].$$

En précisant les fonctions γ, ces trois formules contiennent tout ce dont nous usons pour démontrer les formules $P(n)$ de Liouville. Ceci arrive comme il suit.

3. Revenons à $T(n)$, $P(n)$. Selon les éléments de la théorie des formes quadratiques, on a l'identité

$$T(n) = \sum_n P\left(\frac{n}{d^2}\right),$$

le $\sum_n$ portant sur tous les $d > 0$ tels que $\frac{n}{d^2}$ soit un entier; ou, ce qui revient à la même chose,

$$T(n) = \sum_n P(d)\varepsilon(\delta).$$

Par cela, et les nos **1**, **2**, on a

$$P(n) = \sum_n T(d) f(\delta),$$

qu'on peut paraphraser : le nombre des représentations propres de n par une forme homogène quadratique donnée est égale à la somme des nombres totaux des représentations de tous les diviseurs de n dont les conjugués sont les carrés des nombres simples à multiplicité paire, moins la somme des nombres totaux des représentations de tous les diviseurs de n dont les conjugués sont les carrés des nombres simples à multiplicité impaire, toutes les représentations étant par la forme donnée. Dans cette forme, le résultat est tout à fait évident.

De même, toutes les lettres étant comme dans le no **2**, et $T(x) = 0$

quand x n'est pas un entier > 0,

$$\mathrm{P}(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r} n) = \sum_n \left\{ {\prod_{i=1}^{r}}' [\mathrm{T}(p_i^{a_i}) - \mathrm{T}(p_i^{a_i-2})] . [\mathrm{T}(p_r^{a_r} d) - \mathrm{T}(p_r^{a_r-2} d)] \right\} f(\delta),$$

tous les produits entre « accolades » étant symboliques; et, quand $\mathrm{T}(n')$ est une fonction régulière de n',

$$n' = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}, \qquad \mathrm{P}(n') = \prod_{i=1}^{r} [\mathrm{T}(p_i^{a_i}) - \mathrm{T}(p_i^{a_i-2})].$$

La première de ces formules (ou plutôt les théorèmes qu'on peut en dériver) se présente dans les Mémoires de Liouville seulement quand $r = 1, 2$. Ainsi de même pour la deuxième. C'est pourquoi nous examinerons le cas $r = 2$ en détail; on verra tout à l'heure que ces cas sont renfermés tous deux dans le deuxième.

4. Une fois de plus, j'insiste sur ce que $\mathrm{T}(x) = 0$ quand x n'est pas un entier > 0. Cela compris, soient p, q premiers, et dans tout ce numéro soit

$$\mathrm{D}(n, p, q) = 1; \qquad n = d\delta; \qquad a, b \geq 0; \qquad \alpha, \beta > 2.$$

Or, dans les théorèmes actuels de Liouville, il arrive toujours qu'on a

$$\mathrm{T}(p^a q^b n) = g(a, b, n)\,\varphi(n),$$

où quelquefois $g(a, b, n)$ se réduit à une valeur spéciale quand l'un ou l'autre des $a, b = 0$ ou 1. Ici, $g(a, b, n)$ est une fonction invariable pour une forme spécifique, mais variante de forme à forme; et $\varphi(n)$ est une fonction régulière bien définie pour chaque forme. De plus, d'après la formule générale du n° **3**,

$$\mathrm{P}(p^a q^b n) = \sum_n [\mathrm{T}(p^a q^b d) - \mathrm{T}(p^a q^{b-2} d) - \mathrm{T}(p^{a-2} q^b d) + \mathrm{T}(p^{a-2} q^{b-2} d)] f(\delta).$$

et d'ailleurs, si l'on avait, quels que soient a, b,

$$\sum_n \mathrm{T}(p^a q^b d) f(\delta) = g(a, b, n)\Phi(n),$$

où $\Phi(n)$ est la conjuguée de $\varphi(n)$, on pourrait écrire

$$P(p^a q^b n) = G(a, b, n)\Phi(n),$$

où $G(a, b, n)$ est une fonction linéaire de

$$g(a, b, n), \quad g(a, b-2, n), \quad g(a-2, b, n), \quad g(a-2, b-2, n).$$

Toutes ces circonstances ont lieu dans les théorèmes de Liouville. Il y aura seize cas de $G(a, b, n)$, selon que

$$a = 0, \quad a = 1, \quad a = 2, \quad a > 2; \qquad b = 0, \quad b = 1, \quad b = 2, \quad b > 2.$$

Je les écris en entier, une fois pour toutes, pour la commodité de faire des calculs par rapport aux formes spéciales. D'après la formule générale, on a donc :

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad G(0, 0, n) = g(0, 0, n),\\
&(2) \quad G(0, 1, n) = g(0, 1, n),\\
&(3) \quad G(0, 2, n) = g(0, 2, n) - g(0, 0, n),\\
&(4) \quad G(0, \beta, n) = g(0, \beta, n) - g(0, \beta-2, n),\\
&(5) \quad G(1, 0, n) = g(1, 0, n),\\
&(6) \quad G(1, 1, n) = g(1, 1, n),\\
&(7) \quad G(1, 2, n) = g(1, 2, n) - g(1, 0, n),\\
&(8) \quad G(1, \beta, n) = g(1, \beta, n) - g(1, \beta-2, n),\\
&(9) \quad G(2, 0, n) = g(2, 0, n) - g(0, 0, n),\\
&(10) \quad G(2, 1, n) = g(2, 1, n) - g(0, 1, n),\\
&(11) \quad G(2, 2, n) = g(2, 2, n) - g(2, 0, n) - g(0, 2, n) + g(0, 0, n),\\
&(12) \quad G(2, \beta, n) = g(2, \beta, n) - g(2, \beta-2, n) - g(0, \beta, n) + g(0, \beta-2, n),\\
&(13) \quad G(\alpha, 0, n) = g(\alpha, 0, n) - g(\alpha-2, 0, n),\\
&(14) \quad G(\alpha, 1, n) = g(\alpha, 1, n) - g(\alpha-2, 1, n),\\
&(15) \quad G(\alpha, 2, n) = g(\alpha, 2, n) - g(\alpha, 0, n) - g(\alpha-2, 2, n) + g(\alpha-2, 0, n),\\
&(16) \quad G(\alpha, \beta, n) = g(\alpha, \beta, n) - g(\alpha, \beta-2, n) - g(\alpha-2, \beta, n)\\
&\qquad\qquad + g(\alpha-2, \beta-2, n).
\end{aligned}
$$

Quand $g(0, 0, n)$ ne se réduit pas à une forme spéciale, on peut omettre (3), (7), (11) et (15); quand ni $g(0, b, n)$ ni $g(a, 0, n)$ ne se réduit, on peut omettre quelques autres des sous-cas, mais il n'importe pas pour notre but de les distinguer plus nettement ici.

Lorsqu'il s'agit d'un seul facteur premier spécial, soit p, on écrit

$$g(a, b, n) \equiv g(a, n), \qquad G(a, b, n) \equiv G(a, n).$$

Alors on n'a qu'à tenir compte que de (1), (5), (9) et (13), qui deviennent

$$G(0, n) = g(0, n), \tag{1.1}$$
$$G(1, n) = g(1, n), \tag{5.1}$$
$$G(2, n) = g(2, n) - g(0, n), \tag{9.1}$$
$$G(\alpha, n) = g(\alpha, n) - g(\alpha - 2, n). \tag{13.1}$$

5. Les théorèmes de ce numéro ont une grande importance pour notre objet. Soit désormais $(a \mid b)$ le symbole généralisé de Legendre, $(a \mid b) = 0$ quand a, b ne sont pas premiers entre eux, et $(a \mid b)$ n'existe pas quand b est pair. Soient maintenant les α_i, β_j des entiers constants $\gtrless 0$, tels que

$$D(n, \alpha_i) = D(n, \beta_j) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s);$$

et les c, a_i, b_i des constantes arbitraires. Soit $\varphi(n)$ une fonction régulière, et $\Phi(n)$ sa conjuguée. Alors, $(n \mid \alpha_i)$, $(\beta_j \mid n)$ étant évidemment régulières, il en est de même pour les fonctions

$$(n \mid \alpha_i)\varphi(n), \quad (\beta_j \mid n)\varphi(n) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s).$$

Je dis que les conjuguées respectives de ces fonctions sont

$$(n \mid \alpha_i)\Phi(n), \quad (\beta_j \mid n)\Phi(n) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s).$$

En effet, il suffit de montrer que pour α, β des entiers constants $\gtrless 0$, tels que

$$D(n, \alpha) = D(n, \beta) = 1,$$

les conjuguées respectives de $(n \mid \alpha)\varphi(n)$, $(\beta \mid n)\varphi(n)$ sont $(n \mid \alpha)\Phi(n)$, $(\beta \mid n)\Phi(n)$. Soit $n = \Pi p^k$ la décomposition de n en facteurs premiers distincts. Alors, d'après les définitions, on a pour les conjuguées cherchées,

$$\Pi[(p^k \mid \alpha)\varphi(p^k) - (p^{k-2} \mid \alpha)\varphi(p^{k-2})], \qquad \Pi[(\beta \mid p^k)\varphi(p^k) - (\beta \mid p^{k-2})\varphi(p^{k-2})]$$

d'où, puisque $(p^k \mid \alpha) = (p^{k-2} \mid \alpha)$, et $(\beta \mid p^k) = (\beta \mid p^{k-2})$, on tire, pour les conjuguées,

$$\Pi(p^k | \alpha).\Pi[\varphi(p^k) - \varphi(p^{k-2})], \qquad \Pi(\beta | p^k).\Pi[\varphi(p_k) - \varphi(p^{k-2})],$$

c'est-à-dire

$$(n | \alpha)\Phi(n), \quad (\beta | n)\Phi(n).$$

De là, si l'on pose, pour abréger,

$$c + \sum_{i=1}^{r} a_i(n | \alpha_i) + \sum_{j=1}^{s} b_j(\beta_j | n) \equiv h(c, a, b, \alpha. \beta, r, s),$$

la conjuguée de $h(c, a, b, \alpha, \beta, r, s)\varphi(n)$ est

$$h(c, a, b, \alpha, \beta, r, s)\Phi(n).$$

Soient enfin les α', β', les α'', β'', ... des entiers assujettis aux mêmes conditions que les α, β. D'après les propriétés classiques du symbole $(a | b)$, il est clair que la fonction

$$h(c', a', b', \alpha', \beta', r', s').h(c'', a'', b'', \alpha'', \beta'', r'', s'')\ldots h(c''', a''', b''', \alpha''', \beta''', r''', s'''),$$

quand on fait toutes les multiplications, est encore une fonction de la même sorte que $h(c, a, b, \alpha, \beta, r, s)$, soit

$$h({}_1c, {}_1a, {}_1b, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1r, {}_1s).$$

De là, et des résultats déjà trouvés, la conjuguée de

$$h({}_1c, {}_1a, {}_1b, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1r, {}_1s)\varphi(n)$$

se déduit de celle-ci en remplaçant $\varphi(n)$ par $\Phi(n)$. On peut, si l'on veut, regarder la fonction h dans cette conjuguée, décomposée en facteurs, comme l'a toujours fait Liouville pour les cas de deux facteurs dont il s'est occupé. Il y a un résultat plus général pour les fonctions φ non régulières, et pour d'autres fonctions que celle de Legendre, mais cela n'est pas à propos pour notre but. Les fonctions g du n° 4 sont toutes ou des constantes numériques ou des fonctions h dans les théorèmes de Liouville.

6. Passons aux $\varphi(n)$, $\Phi(n)$ qui se présentent dans les Mémoires de

Liouville. Soient désormais, comme Liouville l'a constamment posé, m un entier positif impair, et l un entier impair, positif ou négatif, notations que nous conservons dans tout ce qui suit. Soit $m = \Pi p^a$ la décomposition de m en facteurs premiers distincts. Définissons les fonctions ω, ω' par les identités, pour lesquelles on a toujours $D(m, l) = 1$:

$$\omega_r(m, l) = \sum_m (d \mid l) d^r \equiv \sum_m (-1)^{\frac{1}{4}(l-1)(d-1)} (l \mid d) d^r,$$

$$\omega_r(l, m) = \sum_m (l \mid d) d^r \equiv \sum_m (-1)^{\frac{1}{4}(l-1)(d-1)} (d \mid l) d^r,$$

$$\omega'_r(m, l) = \sum_m (\delta \mid l) d^r \equiv \sum_m (-1)^{\frac{1}{4}(l-1)(\delta-1)} (l \mid \delta) d^r,$$

$$\omega'_r(l, m) = \sum_m (l \mid \delta) d^r \equiv \sum_m (-1)^{\frac{1}{4}(l-1)(\delta-1)} (\delta \mid l) d^r,$$

$$\omega_r(1, l) = \omega_r(l, 1) = \omega'_r(1, l) = \omega'_r(l, 1) = 1.$$

Toutes ces fonctions étant évidemment régulières, on voit sans peine que

$$\omega'_r(m, l) = \prod \left[\frac{p^{r(a+1)} - (p^{a+1} \mid l)}{p^r - (p \mid l)}\right]; \qquad \omega'_r(l, m) = \prod \left[\frac{p^{r(a+1)} - (l \mid p^{a+1})}{p^r - (l \mid p)}\right],$$

$$\omega_r(m, l) = (m \mid l)\, \omega'_r(m, l), \qquad \omega_r(l, m) = (l \mid m)\, \omega'_r(l, m),$$

les Π portant sur tous les facteurs premiers distincts de m. En remarquant que $(p^{a+1} \mid l) = (p^{a-1} \mid l)$, et de là

$$\omega'_r(p^a, l) - \omega'_r(p^{a-2}, l) = \frac{p^{r(a+1)} - p^{r(a-1)}}{p^r - (p \mid l)} \equiv p^{ra}\left[1 + (p \mid l)\frac{1}{p^r}\right],$$

on a, pour la conjuguée $\Omega'_r(m, l)$ de $\omega'_r(m, l)$,

$$\Omega'_r(m, l) \equiv \prod \left[\omega'_r(p^a, l) - \omega'_r(p^{a-2}, l)\right] = m^r \prod \left[1 + (p \mid l)\frac{1}{p^r}\right].$$

De même, $\Omega'_r(l, m)$, $\Omega_r(m, l)$, $\Omega_r(l, m)$ étant les conjuguées respectives de $\omega'_r(l, m)$, $\omega_r(m, l)$, $\omega_r(l, m)$, on trouve

$$\Omega'_r(l, m) = m^r \prod \left[1 + (l \mid p)\frac{1}{p^r}\right] \equiv m^r \prod \left[1 + (-1)^{\frac{1}{4}(l-1)(p-1)} (p \mid l)\frac{1}{p^r}\right],$$

$$\Omega_r(m, l) = (m \mid l)\, \Omega'_r(m, l), \qquad \Omega_r(l, m) = (l \mid m)\, \Omega'_r(l, m)$$

Rien n'empêche de définir d'une façon toute semblable des fonctions $\omega_r(2l, m)$, $\omega'_r(2l, m)$; mais on ne peut définir ni $\omega_r(m, 2l)$ ni $\omega'_r(m, 2l)$, puisque le symbole $(a \mid b)$ n'existe pas quand b est pair. En effet, pour cela, les fonctions ω, ω' étant régulières, il suffit de définir $\omega_r(2l, m)$ et $\omega'_r(2l, m)$ pour $l = \pm 1$, ce qu'on fait simplement en remplaçant l par ± 2 dans toutes les formules pour $\omega_r(l, m)$, $\omega'_r(l, m)$. Ainsi, on a

$$\omega'_r(\pm 2, m) = \sum_m (\pm 2 \mid \delta) d^r,$$

$$\Omega'_r(\pm 2, m) = m^r \prod \left[1 + (\pm 2 \mid p) \frac{1}{p^r} \right],$$

$$\omega_r(\pm 2, m) = \sum_m (\pm 2 \mid d) d^r = (\pm 2 \mid m) \omega'_r(\pm 2 \mid m),$$

$$\Omega_r(\pm 2, m) = (\pm 2 \mid m) \Omega'_r(\pm 2, m),$$

où, dans chaque cas, on prend les signes ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs.

Enfin, si, dans la notation de Liouville, $\zeta_r(n)$ égale la somme des puissances $r^{\text{ièmes}}$ de tous les diviseurs de n, et $Z_r(n)$ la conjuguée de $\zeta_r(n)$, on trouve de même, pour $n = \Pi p^a$,

$$\zeta_r(n) = \prod \left[\frac{p^{r(a+1)} - 1}{p^r - 1} \right], \qquad Z_r(n) = n^r \prod \left[1 + \frac{1}{p^r} \right].$$

Cette fonction $\zeta_r(n)$ est aussi régulière. Il est clair que, dans chaque formule relative aux fonctions ω_r, Ω_r, on peut, en multipliant par le symbole propre de Legendre, échanger ω_r en ω'_r et Ω_r en Ω'_r ou vice versa. Alors on peut prendre ou les fonctions ω_r, Ω_r, ou ω'_r, Ω'_r comme fondamentales. Pour des raisons qui s'offriront d'elles-mêmes, nous choisissons ω'_r, Ω'_r pour les fonctions fondamentales, comme aussi l'a fait Liouville.

CHAPITRE II.

LES FORMULES $P(n)$ DE LIOUVILLE À UN SEUL FACTEUR PREMIER SPÉCIAL.

7. Considérons dans leur ensemble les dix-huit formes suivantes de Liouville ([1]) :

(17) $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$,
(18) $x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$,
(19) $x^2 + y^2 + z^2 + 8t^2$,
(20) $x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$,
(20 a) $x^2 + 4(y^2 + z^2 + t^2)$,
(21) $x^2 + 2(y^2 + z^2 + 2t^2)$,
(22) $x^2 + 8(y^2 + z^2 + t^2)$,
(23) $x^2 + 4(y^2 + z^2 + 2t^2)$,
(24) $x^2 + 2(y^2 + 2z^2 + 2t^2)$,
(25) $x^2 + 2(y^2 + 4z^2 + 4t^2)$,
(26) $x^2 + y^2 + 2(z^2 + 2t^2)$,
(27) $x^2 + y^2 + 4(z^2 + 2t^2)$,
(28) $x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$,
(29) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$,
(30) $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$,
(31) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$,
(32) $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$,
(33) $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^3 + u^2) + 4v^2$.

Pour donner, d'après les énoncés de Liouville, les $T(n)$ pour (17) à (33), nous restons dans les notations du n° 4; c'est-à-dire

$$T(p^a n) = g(a, n)\varphi(n), \qquad D(p, n) = 1, \qquad (a \geqq 0);$$

donc

$$P(p^a n) = G(a, n)\Phi(n) \qquad (a \geqq 0).$$

Ici, pour toutes les formes, la seule forme (28) exceptée, on a

$$p = 2, \qquad n = m.$$

Sauf pour (28), le nombre a, dans chaque symbole $g(a, m)$, est l'exposant d'une puissance de 2, de sorte que $n = 2^a m$, et il s'agit de la fonction

$$T(2^a m) = g(a, m)\varphi(m).$$

([1]) On les retrouvera dans la deuxième série du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* comme il suit : (17), (18), t. V, 1860, p. 269-272, 305-308; (19), (20), t. VI, 1861, p. 324-328, 440-448; (21), (22), (23), (24), (25), (26), (27), t. VII, 1862, p. 1-4, 5-8, 9-12, 62-64, 65-68, 99-102, 103-104; (28), t. VIII, 1863, p. 141-144; (29), (30), (31), (32), (33), t. IX, 1864, p. 161-174, 175-180, 257-272, 273-280, 421-424.

Je rappelle que m est toujours impair. Pour la forme (28), il s'agit de

$$T(2^a n) = g(a, n)\varphi(n), \qquad D(n, 3) = 1.$$

Pour abréger, nous écrirons les résultats en Table.

TABLE I.

Forme.	Fonction φ.	Fonction Φ.
(17), (18), (20), (20a), (21)...........	$\zeta_1(m)$	$Z_1(m)$
(19), (22), (23), (24), (25), (26), (27).	$\omega_1'(2, m)$	$\Omega_1'(2, m)$
(28), avec $D(3, n) = 1$.................	$\zeta_1(n)$	$Z_1(n)$
(29), (30)...........................	$\omega_2'(-2, m)$	$\Omega_2'(-2, m)$
(31), (32), (33).....................	$\omega_2'(-1, m)$	$\Omega_2'(-1, m)$

On trouvera les φ et leurs conjuguées respectives Φ dans le n° 6. En écrivant les $g(a, n)$, nous ferons un plus grand emploi du symbole généralisé de Legendre que n'a fait Liouville; mais on s'assurera sans peine, en renvoyant aux Mémoires cités, que nos notations s'accordent au fond avec les siennes. Le sens du signe $g(a, m)$ a été déjà expliqué plus haut.

TABLE II.

$$a \geqq 0, \qquad b > 0, \qquad r > 1, \qquad s > 2.$$

Forme. Fonctions g.

(17) $g(0, m) = 4, \quad g(1, m) = 8, \quad g(r, m) = 24.$

(18) $g(0, m) = 2[1 + (-1 \mid m)], \quad g(1, m) = 4, \quad g(2, m) = 8,$
$g(s, m) = 24.$

(19) $g(0, m) = 4 - (2 \mid m) + (-2 \mid m) + 2(-1 \mid m), \quad g(1, m) = 12,$
$g(r, m) = 2[2^r - (2 \mid m)].$

(20) $g(0, m) = 4 + 2(-1 \mid m), \quad g(1, m) = 12, \quad g(2, m) = 8,$
$g(s, m) = 24.$

(20a) $g(0, m) = 1 + (-1 \mid m), \quad g(1, m) = 0, \quad g(2, m) = 8,$
$g(s, m) = 24.$

(21) $g(0, m) = 2, \quad g(1, m) = 4, \quad g(2, m) = 8, \quad g(s, m) = 24.$

(22) $g(0, m) = \frac{1}{2}[1 + (2 \mid m) + (-2 \mid m) + (-1 \mid m)], \quad g(1, m) = 0,$
$g(r, m) = 2[2^{r-1} - (2 \mid m)].$

(23) $g(0, m) = 1 + (-1 \mid m), \quad g(1, m) = 0, \quad g(r, m) = 2[2^r - (2 \mid m)].$

(24) $g(0, m) = 2, \quad g(b, m) = 2[2^b - (2 \mid m)].$

TABLE II (suite).

Forme.	Fonctions g.
(25)	$g(0, m) = 1 + (-2 \mid m)$, $\quad g(1, m) = 2$, $\quad g(r, m) = 2[2^{r-1} - (2 \mid m)]$.
(26)	$g(0, m) = 4$, $\quad g(b, m) = 2[2^{b+1} - (2 \mid m)]$.
(27)	$g(0, m) = 2[1 + (-1 \mid m)]$, $\quad g(1, m) = 4$, $\quad g(r, m) = 2[2^{r} - (2 \mid m)]$.
(28)	$D(3, n) = 1$, $\quad g(a, n) = 12$.
(29)	$g(a, m) = \frac{2}{3}[4^{a+2} - (-2 \mid m)]$.
(30)	$g(a, m) = \frac{2}{3}[4^{a+1} - (-2 \mid m)]$.
(31)	$g(0, m) = 8$, $\quad g(b, m) = 4[2^{2b+1} - (-1 \mid m)]$.
(32)	$g(0, m) = 4$, $\quad g(b, m) = 4[4^{b} - (-1 \mid m)]$.
(33)	$g(0, m) = 2$, $\quad g(1, m) = 8$, $\quad g(r, m) = 4[2^{2r-1} - (-1 \mid m)]$.

Par exemple, on a, pour la forme (20), $T(m) = 6\zeta_1(m)$ si $m \equiv 1 \bmod 4$, mais $2\zeta_1(m)$ si $m \equiv -1 \bmod 4$; $T(2m) = 12\zeta_1(m)$, $T(4m) = 8\zeta_1(m)$, et enfin $T(2^s m) = 24\zeta_1(m)$ pour $s > 2$, quelles que soient les formes linéaires de l'entier impair m.

8. Pour trouver les $P(n)$ pour les formes (17) à (33), on n'a qu'à appliquer les formules (1.1), (5.1), (9.1), (13.1) du n° 4 à la Table II, les Φ étant déjà données par la troisième colonne de la Table I. En effet, on voit, par les théorèmes du n° 3, qu'on peut dériver les $G(a, m)$ immédiatement au moyen des formules citées par des substitutions directes des fonctions g données dans la Table II. De plus, par (1.1), (5.1), on a toujours

$$G(0, n) = g(0, n), \qquad G(1, n) = g(1, n).$$

Il suffit donc de transcrire les formules qu'on obtient ainsi seulement dans les cas $G(\alpha, m)$ où $\alpha > 1$, en s'appuyant sur (9.1), (13.1) et la Table II. Ainsi, on trouve pour la forme (20), par exemple :

$$G(2, m) = g(2, m) - g(0, m) = 8 - [4 + 2(-1 \mid m)] = 2[2 - (-1 \mid m)],$$
$$G(3, m) = g(3, m) - g(1, m) = 24 - 12 = 12,$$
$$G(4, m) = g(4, m) - g(2, m) = 24 - 8 = 16,$$
$$G(\beta, m) = g(\beta, m) - g(\beta - 2, m) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \beta > 4.$$

C'est-à-dire, en renvoyant à la Table I pour la forme de Φ relative à la forme (20) :

$$P(4m) = 2[2-(-1\mid m)]Z_1(m), \qquad P(8m) = 12Z_1(m),$$
$$P(16m) = 16Z_1(m), \qquad P(2^\beta m) = 0 \qquad (\beta > 4),$$

en rappelant que pour cette forme le nombre a dans $g(a, m)$ est un exposant d'une puissance de 2, et par là, ainsi de même pour a dans $G(a, m)$.

En ajoutant les valeurs de $P(m)$, $P(2m)$ d'après la remarque ci-dessus,

$$P(m) \;= G(0, m)\Phi(m) = g(0, m)\Phi(m) = [4+2(-1\mid m)]Z_1(m),$$
$$P(2m) = G(1, m)\Phi(m) = g(1, m)\Phi(m) = 12Z_1(m),$$

on a tout ce qui concerne $P(n)$ pour la forme (20). De même on calcule la Table III, d'où on lit d'un coup d'œil tous les faits $P(n)$ pour les formes (17) à (33).

TABLE III.

$$G(0, n) = g(0, n), \qquad G(1, n) = g(1, n).$$
$$b > 0, \qquad s > 1, \qquad t > 2, \qquad \alpha > 3, \qquad \beta > 4.$$

Forme.	Fonctions G.
(17)	$G(2, m) = 20, \quad G(3, m) = 16, \quad G(\alpha, m) = 0.$
(18)	$G(2, m) = 2[3-(-1\mid m)], \quad G(3, m) = 20, \quad G(4, m) = 16, \quad G(\beta, m) = 0.$
(19)	$G(2, m) = 4-(2\mid m)-(-2\mid m)-2(-1\mid m), \quad G(3, m) = 2[2-(2\mid m)], \quad G(\alpha, m) = 3.2^{\alpha-1}.$
(20)	$G(2, m) = 2[2-(-1\mid m)], \quad G(3, m) = 12, \quad G(4, m) = 16, \quad G(\beta, m) = 0.$
(20*a*)	$G(2, m) = 7-(-1\mid m), \quad G(3, m) = 24, \quad G(4, m) = 16, \quad G(\beta, m) = 0.$
(21)	$G(2, m) = 6, \quad G(3, m) = 20, \quad G(4, m) = 16, \quad G(\beta, m) = 0.$
(22)	$G(2, m) = \frac{1}{2}[7-5(2\mid m)-(-2\mid m)-(-1\mid m)], \quad G(3, m) = 2[4-(2\mid m)], \quad G(\alpha, m) = 3.2^{\alpha-2}.$
(23)	$G(2, m) = 7-2(2\mid m)-(-1\mid m), \quad G(3, m) = 2[8-(2\mid m)], \quad G(\alpha, m) = 3.2^{\alpha-1}.$
(24)	$G(2, m) = 2[3-(2\mid m), \quad G(t, m) = 3\ 2^{t-1}.$

Table III (suite).

Forme.	Fonctions G.
(25)	$G(2, m) = 3 - 2(2 \mid m) - (-2 \mid m)$, $G(3, m) = 2[3 - (2 \mid m)]$, $G(\alpha, m) = 3.2^{\alpha-2}$.
(26)	$G(2, m) = 2[6 - (2 \mid m)]$, $G(t, m) = 3.2^{t}$.
(27)	$G(2, m) = 2[3 - (2 \mid m) - (-1 \mid m)]$, $G(3, m) = 2[6 - (2 \mid m)]$, $G(\alpha, m) = 3.2^{\alpha-1}$.
(28)	$D(3, n) = 1$, $G(b, n) = 0$.
(29)	$G(s, m) = 5.2^{2s+1}$.
(30)	$G(s, m) = 5.2^{2s-1}$.
(31)	$G(2, m) = 4[30 - (-1 \mid m)]$, $G(t, m) = 15.2^{2t-1}$.
(32)	$G(2, m) = 4[15 - (-1 \mid m)]$, $G(t, m) = 15.4^{t-1}$.
(33)	$G(2, m) = 2[15 - 2(-1 \mid m)]$, $G(3, m) = 4[30 - (-1 \mid m)]$, $G(\alpha, m) = 15.2^{2\alpha-3}$.

Tous ces résultats s'accordent avec les énoncés de Liouville.

CHAPITRE III.

LES FORMULES $P(n)$ DE LIOUVILLE À DEUX FACTEURS PREMIERS SPÉCIAUX.

9. Il y a dix formes (¹) à considérer :

(34) $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$,

(35) $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$,

(36) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$,

(37) $x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2$,

(38) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$,

(39) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$,

(40) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$,

(41) $x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$,

(42) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$,

(43) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$

(¹) *Loc. cit.* (34), t. V, p. 147-152; (35), (36), (37), (38), (39), (40), t. VIII, p. 105-114, 115-119, 120-123, 124-128, 129-133, 134-136; (41), (42), (43), t. IX, p. 1-12, 13-16, 89-104. Les formes (35), (36) et (41) ont un intérêt historique; elles étaient les premières, sommes de carrés exceptées, pour lesquelles on trouva les $T(n)$ et $P(n)$ en fonction finie des diviseurs de n. On les rencontre pour la première fois dans un Mémoire célèbre d'Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. XXXV, 1847, p. 134); mais c'est à Liouville qu'on doit le premier expose complet des valeurs de $T(n)$, $P(n)$ pour toute forme de n.

dans les notations du n° **4**, soit

$$T(p^a q^b n) = g(a, b, n)\varphi(n), \qquad P(p^a q^b n) = G(a, b, n)\Phi(n).$$

Alors, pour les formes (41), (42), on a $p = 2$, $q = 5$, $n = m$ (impair, comme toujours) et $D(m, 5) = 1$. Pour toutes les autres, $p = 2$, $q = 3$ et $D(m, 3) = 1$. C'est-à-dire, pour (41), (42), il s'agit de

$$T(2^a 5^b m), \quad P(2^a 5^b m) \qquad \text{avec} \qquad D(m, 5) = 1,$$

et pour toutes les autres, de

$$T(2^a 3^b m), \quad P(2^a 3^b m) \qquad \text{avec} \qquad D(m, 3) = 1.$$

Dans chaque cas donc, les sens de a, b, n sont définis. Ces sens sont valables dans tout ce qui va suivre. On a, de plus, d'après les énoncés de Liouville :

TABLE IV.

Forme.	Fonction φ.	Fonction Φ.
(34)	$\zeta_1(m)$	$Z_1(m)$
(35), (36), (37), (38), (39), (40)	$\omega_1'(3, m)$	$\Omega_1'(3, m)$
(41), (42)	$\omega_1'(m, 5)$	$\Omega_1'(m, 5)$
(43)	$\omega_2'(m, 3)$	$\Omega_2'(m, 3)$

TABLE V.

$$t > 0, \qquad r > 1, \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \beta \geqq 0.$$

Forme. Fonctions g.

(34) $\quad g(0, \beta, m) = 4, \qquad g(t, \beta, m) = 4[2^{t+1} - 3].$

(35) $\quad g(\alpha, \beta, m) = A(\alpha, \beta, m)\,B(\alpha, \beta, m),$

$A(\alpha, \beta, m) = 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta}(-1|m), \qquad B(\alpha, \beta, m) = 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}(m|3).$

(36) $\quad g(\alpha, \beta, m) = A(\alpha, \beta, m)\,B(\alpha, \beta, m),$

$A(\alpha, \beta, m) = 2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta}(-1|m), \qquad B(\alpha, \beta, m) = 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}(m|3).$

(37) $\quad g(\alpha, \beta, m) = A(\alpha, \beta, m)\,B(\alpha, \beta, m),$

$A(\alpha, \beta, m) = 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta}(-1|m), \qquad B(\alpha, \beta, m) = 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}(m|3).$

(38) $\quad g(t, \beta, m) = A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m),$

$A(t, \beta, m) = 2^t - (-1)^{t+\beta}(-1|m), \qquad B(t, \beta, m) = 3^{\beta+1} + (-1)^{t+\beta}(m|3).$

(39) $\quad g(t, \beta, m) = A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m),$

$A(t, \beta, m) = 2^t + (-1)^{t+\beta}(-1|m), \qquad B(t, \beta, m) = 3^{\beta+1} - (-1)^{t+\beta}(m|3).$

Table V (suite).

Forme.	Fonctions g.
(40)	$g(r, \beta, m) = A(r, \beta, m)B(r, \beta, m)$,
	$g(0, \beta, m) = \frac{1}{2} B(0, \beta, m), \qquad g(1, \beta, m) = B(1, \beta, m)$,
	$A(r, \beta, m) = 2^{r-1} - (-1)^{r+\beta}(-1 \mid m), \qquad B(r, \beta, m) = 3^{\beta+1} + (-1)^{r+\beta}(m \mid 3)$.
(41)	$g(t, \beta, m) = \frac{1}{3} A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m)$,
	$A(t, \beta, m) = 2^{t+1} - (-1)^t.5, \qquad B(t, \beta, m) = 5^{\beta+1} + (-1)^t(m \mid 5)$.
(42)	$g(t, \beta, m) = \frac{1}{3} A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m)$,
	$A(t, \beta, m) = 2^{t+2} + (-1)^t.5, \qquad B(t, \beta, m) = 5^{\beta+1} - (-1)^t(m \mid 5)$.
(43)	$g(t, \beta, m) = \frac{1}{5} A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m)$,
	$A(t, \beta, m) = 4^{t+1} - (-1)^t.9. \qquad B(t, \beta, m) = 9^{\beta+1} + (-1)^t(m \mid 3)$.

Exactement, les valeurs de $g(0, \beta, m)$ et celle de $g(1, \beta, m)$, dans (40), ne sont pas définies dans la Table; mais, par convention, on pose $t = 0$ dans $B(t, \beta, m)$ pour obtenir les $g(0, \beta, m)$, et ainsi de même en posant $r = 0, 1$ dans $B(r, \beta, m)$ pour la forme (40). Après les éclaircissements pour les Tables du Chapitre II, il n'est nécessaire de rien ajouter pour celles-ci. Les liens entre ces dix formes, révélés par les Tables, sont frappants; mais je ne m'arrête pas ici pour les discuter.

10. On peut écrire les G pour ces formes, en s'appuyant sur les théorèmes du n° **5**, directement par l'application des formules (1) à (16) à la Table V. Mais en tenant compte de la forme des fonctions g, on peut grandement abréger les calculs, en remarquant quelques relations générales entre les fonctions G. Approfondissons cela un peu. D'abord, pour chacune des fonctions A dans la Table V, on a la relation évidente

$$(\beta') \qquad A(\alpha', \beta', m) = A(\alpha', \beta' - 2, m),$$

où $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)$, (t, β) ou (r, β) respectivement, selon le cas; et pour chacune des fonctions B,

$$(\alpha') \qquad B(\alpha', \beta', m) = B(\alpha' - 2, \beta', m).$$

En deuxième lieu, on peut résumer les seize formules (1) à (16) comme voici. Soit désormais

$$a \gtreqless 1, \qquad b \gtreqless 1, \qquad r > 1, \qquad s > 1, \qquad k > 2, \qquad c > 3.$$

Alors, les formules suivantes (1′), (2′), (3′), (4′) renferment respectivement les groupes de quatre formules (1), (2), (5), (6); (3), (4), (7), (8); (9), (10), (13), (14); (11), (12), (15), (16) :

$$(1') \qquad G(a, b, m) = g(a, b, m),$$
$$(2') \qquad G(a, s, m) = g(a, s, m) - g(a, s-2, m),$$
$$(3') \qquad G(r, b, m) = g(r, b, m) - g(r-2, b, m),$$
$$(4') \qquad G(r, s, m) = g(r, s, m) - g(r, s-2, m) - g(r-2, s, m) + g(r-2, s-2, m).$$

Or, on lit les quatre cas contenus dans (1′) directement de la Table V; il n'y a pas nécessité de les écrire dans la Table VI ci-après. Il reste à considérer (2′), (3′) et (4′). Soit, pour le moment,

$$g(\alpha', \beta', m) = \lambda A(\alpha', \beta', m) B(\alpha', \beta', m),$$

où λ est constant; et supposons d'abord que $g(0, \beta', m)$ ne se réduise pas. Alors, en se servant de la relation (β'), on trouve pour (2′)

$$\begin{aligned} G(a, s, m) &= \lambda[A(a, s, m) B(a, s, m) - A(a, s-2, m) B(a, s-2, m)] \\ &= \lambda A(a, s, m) [B(a, s, m) - B(a, s-2, m)]; \end{aligned}$$

et de même par la relation (α') pour (3′), et (α'), (β') pour (4′). En faisant les calculs, on trouve enfin

$$(44) \quad G(a, s, m) = \lambda A(a, s, m) [B(a, s, m) - B(a, s-2, m)],$$
$$(45) \quad G(r, b, m) = \lambda B(r, b, m) [A(r, b, m) - A(r-2, b, m)],$$
$$(46) \quad G(r, s, m) = \lambda [A(r, s, m) - A(r-2, s, m)] [B(r, s, m) - B(r, s-2, m)].$$

Pour les formes (35) à (40) on a $\lambda = 1$; pour (41), (42), $\lambda = \frac{1}{3}$; pour (43), $\lambda = \frac{1}{5}$. Les valeurs des fonctions entre crochets, dans (44) à (46), se trouvent par l'inspection des formes des fonctions A, B données pour chaque forme dans la Table V. Avec (1′), les formules (44), (45), (46) donnent tout ce qui concerne les G pour les formes (35), (36), (37); on trouvera les résultats dans la Table VI.

Mais si $g(0, s, m)$ se réduit à une forme spéciale, et $g(1, s, m)$ ne se réduit pas ainsi, soit, d'après les indications de la Table V,

$$g(0, s, m) = \lambda' B(0, s, m),$$

où λ' est constant, et

$$g(r, \beta, m) = \lambda A(r, \beta, m) B(r, \beta, m),$$

où λ est constant. Alors on trouve de même, par les relations (α'), (β'), les six cas suivants :

(47) $G(0, s, m) = \lambda'[B(0, s, m) - B(0, s-2, m)]$,
(48) $G(1, s, m) = \lambda A(1, s, m)[B(1, s, m) - B(1, s-2, m)]$,
(49) $G(2, b, m) = [\lambda A(2, b, m) - \lambda'] B(2, b, m)$,
(50) $G(2, s, m) = [\lambda A(2, s, m) - \lambda'][B(2, s, m) - B(2, s-2, m)]$,
(51) $G(k, b, m) = \lambda [A(k, b, m) - A(k-2, b, m)] B(k, b, m)$,
(52) $G(k, s, m) = \lambda [A(k, s, m) - A(k-2, s, m)][B(k, s, m) - B(k, s-2, m)]$.

Les formules (1′) et (47) à (52) donnent, par une inspection de la Table V, toutes les fonctions G pour les formes (38), (39), (41), (42), (43). Pour ces formes, on a respectivement

$$(\lambda, \lambda') = (1, 1), (1, 1), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{5}, 1\right).$$

Enfin, si $g(0, \beta, m)$, $g(1, \beta, m)$ se réduisent tous deux, mais $g(r, \beta, m)$ ne se réduit pas, soit, comme cela a lieu pour la forme (40),

$$g(r, \beta, m) = \lambda A(r, \beta, m) B(r, \beta, m),$$
$$g(0, \beta, m) = \lambda' B(0, \beta, m), \qquad g(1, \beta, m) = \lambda'' B(1, \beta, m).$$

Après quelques réductions faciles au moyen de (α'), (β'), on trouve sans peine :

(53) $G(0, s, m) = \lambda'[B(0, s, m) - B(0, s-2, m)]$,
(54) $G(1, s, m) = \lambda''[B(0, s, m) - B(0, s-2, m)]$,
(55) $G(2, b, m) = [\lambda A(2, b, m) - \lambda'] B(2, b, m)$,
(56) $G(3, b, m) = [\lambda A(3, b, m) - \lambda''] B(3, b, m)$,
(57) $G(c, b, m) = [\lambda A(c, b, m) - A(c-2, b, m)] B(c, b, m)$,
(58) $G(2, s, m) = [\lambda A(2, s, m) - \lambda'][B(2, s, m) - B(2, s-2, m)]$,
(59) $G(3, s, m) = [\lambda A(3, s, m) - \lambda''][B(3, s, m) - B(3, s-2, m)]$,
(60) $G(c, s, m) = \lambda [A(c, s, m) - A(c-2, s, m)][B(c, s, m) - B(c, s-2, m)]$.

Pour la forme (40), on a

$$\lambda = 1, \qquad \lambda' = \frac{1}{2}, \qquad \lambda'' = 1.$$

Liouville n'a indiqué que les formules (1′) à (4′) pour cette forme; nous sommes allé plus loin parce que, dans certaines autres formes dans les écrits de Liouville, il s'agissait des formules (53) à (60) si l'on désirait approfondir les $P(n)$. Il ne reste que la forme (34), qui ne présente aucune difficulté.

D'après tous ces renseignements, on a immédiatement la Table suivante. Les fonctions A, B sont comme aux mêmes numéros de la Table V.

TABLE VI.

$$a \leqq 1, \qquad b \equiv 1, \qquad r > 1, \qquad s > 1, \qquad k > 2, \qquad c > 3.$$

$$G(a, b, m) = g(a, b, m).$$

Forme. — Fonctions G.

(34) $G(a, s, m) = G(r, s, m) = 0, \qquad G(2, b, m) = 16, \qquad G(k, b, m) = 3.2^{k+1}$

(35) $G(a, s, m) = 8.3^{s-1} A(a, s, m), \qquad G(r, b, m) = 3.2^{r-1} B(r, b, m),$

$$G(r, s, m) = 2^{r+2}.3^{s}.$$

(36) $G(a, s, m) = 8.3^{s-1} A(a, s, m), \qquad G(r, b, m) = 3.2^{r-1} B(r, b, m),$

$$G(r, s, m) = 2^{r+2}.3^{s}.$$

(37) $G(a, s, m) = 8.3^{s-1} A(a, s, m), \qquad G(r, b, m) = 3.2^{r} B(r, b, m),$

$$G(r, s, m) = 2^{r+3}.3^{s}.$$

(38) $G(0, s, m) = 8.3^{s-1}, \qquad G(1, s, m) = 8.3^{s-1}[2 + (-1)^{s}(-1 \mid m)],$

$$G(2, b, m) = [3^{b+1} + (-1)^{b}(m \mid 3)][3 - (-1)^{b}(-1 \mid m)],$$

$$G(2, s, m) = 8.3^{s-1}[3 - (-1)^{s}(-1 \mid m)],$$

$$G(k, b, m) = 3.2^{k-2}[3^{b+1} + (-1)^{k+b}(m \mid 3)], \qquad G(k, s, m) = 2^{k+1}.3^{s}.$$

(39) $G(0, s, m) = 8.3^{s-1}, \qquad G(1, s, m) = 8.3^{s-1}[2 - (-1)^{s}(-1 \mid m)],$

$$G(2, b, m) = [3 + (-1)^{b}(-1 \mid m)][3^{b+1} - (-1)^{b}(m \mid 3)],$$

$$G(2, s, m) = 8.3^{s-1}[3 + (-1 \mid m)],$$

$$G(k, b, m) = 3.2^{k-2}[3^{b+1} - (-1)^{k+b}(m \mid 3)], \qquad G(k, s, m) = 2^{k+1}.3^{s}.$$

(40) $G(0, s, m) = \frac{1}{2} G(1, s, m) = 4.3^{s-1},$

$$G(2, b, m) = \frac{1}{2}[3 - 2(-1)^{b}(-1 \mid m)][3^{b+1} + (-1)^{b}(m \mid 3)],$$

$$G(3, b, m) = [3 + (-1)^{b}(-1 \mid m)][3^{b+1} - (-1)^{b}(m \mid 3)],$$

$$G(c, b, m) = 3.2^{c-3}[3^{b+1} + (-1)^{c+b}(m \mid 3)],$$

$$G(2, s, m) = 4.3^{s-1}[2 - (-1)^{s}(-1 \mid m)],$$

$$G(3, s, m) = 8.3^{s-1}[3 + (-1)^{s}(-1 \mid m)], \qquad G(c, s, m) = 2^{c}.3^{s}.$$

TABLE VI (suite).

Forme.	Fonctions G.
(41)	$G(0, s, m) = \frac{1}{3} G(1, s, m) = 24.5^{s-1}$,
	$G(2, b, m) = G(2, s, m) = 0$,
	$G(k, b, m) = 2^{k-1}[5^{b+1} + (-1)^k (m \mid 5)], \qquad G(k, s, m) = 3.2^{k+2}.5^{s-1}$.
(42)	$G(0, s, m) = G(1, s, m) = 24.5^{s-1}$,
	$G(2, b, m) = 6[5^{b+1} - (m \mid 5)], \qquad G(2, s, m) = 144.5^{s-1}$,
	$G(k, b, m) = 2^k[5^{b+1} - (-1)^k (m \mid 5)], \qquad G(k, s, m) = 3.2^{k+3}.5^{s-1}$.
(43)	$G(0, s, m) = \frac{1}{5} G(1, s, m) = 80.9^{s-1}$,
	$G(2, b, m) = 10[9^{b+1} + (m \mid 3)], \qquad G(2, s, m) = 800.9^{s-1}$,
	$G(k, b, m) = 3.4^{k-1}[9^{b+1} + (-1)^k (m \mid 3)], \qquad G(k, s, m) = 15,4^{k+1}.9^{s-1}$.

Pour les deux derniers, Liouville a les facteurs numériques 15,75 au lieu de 3,15; mais je ne puis trouver la faute dans mes calculs. Sauf ces deux exceptions, tous les résultats de la Table s'accordent avec les énoncés de Liouville.

11. Pour quelques-unes de ses formes, Liouville a donné les $T(n)$ quand les indéterminées satisfont à des conditions spéciales, soit toutes impaires. Les $P(n)$ pour ces cas se trouvent comme ci-dessus. De même pour toutes les autres formes pour lesquelles Liouville n'indique que les $T(n)$.