JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CERF

Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 1 (1918), p. 309-412.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1918_8_1__309_0>

Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes;

Par G. CERF,

Ancien Élève de l'École Normale.

INTRODUCTION.

1. Étant donnée une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre, par une transformation de contact convenablement choisie, il est possible de ramener son intégration à celle d'une équation de même ordre immédiatement intégrable (¹). On ne possède aucune théorie permettant de procéder d'une façon analogue pour une équation d'ordre supérieur à l'unité : les transformations de contact prolongées $m-1$ fois sont les seules transformations réversibles portant sur les coordonnées d'élément d'ordre m, telles que toute multiplicité se change en une autre multiplicité (²); elles permettent parfois de ramener une équation à une forme plus simple (³), mais ces applications sont limitées en raison de ce que les propriétés d'où proviennent les principales difficultés du problème d'intégration des équations d'ordre supérieur à l'unité sont invariantes par rapport aux transformations de contact. Les divers modes de transformations de

(¹) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 289. Cet Ouvrage sera désigné par la notation I, les deux volumes de celui sur les équations du second ordre par II_1 et II_2.

(²) Backlund, *Math. Ann.*, t. IX, p. 297.

(³) Goursat, II_1, Chap. II.

ces équations que l'on connaît [1] ne réussissent que grâce à la forme particulière des équations auxquelles elles s'appliquent.

2. La recherche des transformations des équations aux dérivées partielles peut se rattacher à l'intégration des systèmes différentiels les plus généraux [2] : dans le travail qui va être présenté, il sera traité de transformations des équations à deux variables indépendantes que l'on déduit de l'étude des systèmes de quatre équations à deux inconnues z et z', fonctions de deux variables indépendantes, respectivement x, y et x', y' :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} F_i(x', y', z', p'_{10}, p'_{01}, \ldots, p'_{0,m'_i}; x, y, z, p_{10}, \ldots, p_{0,m_i}) = 0 \\ \qquad\qquad (m'_i \leqq m'; \; m_i \leqq m; \; i = 1, 2, 3, 4); \end{array} \right.$$

il suffit, du reste, de légères modifications pour que les méthodes employées permettent d'étudier des systèmes plus généraux [3].

Le problème de l'intégration du système (1) peut s'énoncer de manière à généraliser le problème de Bäcklund [4] : déterminer un couple de surfaces (s) et (s'), l'une d'un espace (e), l'autre d'un espace (e'), entre lesquelles il soit possible de déterminer une correspondance ponctuelle telle que les coordonnées d'éléments d'ordre m de (s), d'ordre m' de (s'), en deux points correspondants satisfassent aux relations (1).

Aucune des surfaces (s) et (s') ne peut être prise arbitrairement; chacune d'elles doit être choisie parmi les intégrales d'un ou plusieurs systèmes en involution; il arrive que certains de ces systèmes se réduisant à une seule équation, les relations (1) permettent de définir une ou plusieurs transformations entre deux équations, l'une à l'inconnue z, l'autre à l'inconnue z'.

3. La méthode que nous emploierons, dans cette recherche, s'appuie

---

(1) Pour le second ordre, *voir* GOURSAT, II_2, Chap. IX.

(2) GOURSAT, II_2, p. 293. — DELASSUS, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XIV, p. 238. — GAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, p. 116.

(3) Même de systèmes où les fonctions dépendent de plus de deux variables indépendantes.

(4) GOURSAT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 167, p. 547.

sur les résultats suivants, qui sont nouveaux, sauf le premier, relatifs à l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles à une inconnue ([1]).

Soient deux équations d'ordres m et M, $m \gtreqless$ M :

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, p_{10}, \ldots, p_{0m}) = 0, \\ F(x, y, z, p_{10}, \ldots, p_{0M}) = 0. \end{cases}$$

Posons

$$[f, F]^{(2)} = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\partial f}{\partial p_{m-i,i}} \left(\frac{d^m F}{dx^{m-i}\, dy^i} \right) - \sum_{I=0}^{I=M} \frac{\partial F}{\partial p_{M-I,I}} \left(\frac{d^M f}{dx^{M-I}\, dy^I} \right).$$

Formons le système (A) comprenant les équations (2) et celles qu'on en déduit par différentiations, jusque et y compris celles d'ordre $m + M - 1$ en z : si les équations (2) n'ont pas de direction commune de caractéristiques, c'est-à-dire si le résultant D des équations algébriques qui déterminent leurs directions de caractéristiques n'est pas nul, soit identiquement, soit comme conséquence algébrique de (A), ce système admet comme condition de complète intégrabilité la relation (3) :

$$(3) \qquad [f, F] = 0.$$

Supposons que les équations (2) admettent r directions communes de caractéristiques; et représentons par D^r les conditions qui l'expriment : elles sont satisfaites soit identiquement, soit comme conséquence algébrique de (A). Au moyen de différentiations et d'éliminations, il est possible de former un système B^r qui admette (3) comme condition de complète intégrabilité ; la forme de ce système ne dépend pas uniquement de m, M et r. Comme circonstance exceptionnelle, il arrive que les calculs fassent apparaître une relation non identique entre x et y.

Dans bien des cas, les premiers membres des équations (2)

([1]) Une partie de ces résultats se trouve exposée dans une Note parue aux *C. R. Acad. Sc.*, t. **162**, p. 552.

([2]) Cette expression avait été considérée précédemment par CAMPBELL, *Proc. of the London Math. Soc.*, t. XXI, p. 235, pour des équations à un nombre quelconque de variables indépendantes.

contenant des fonctions indéterminées par exemple, on ne peut effectuer jusqu'au bout les éliminations nécessaires pour la formation du système B^r ($r = 0, 1, \ldots, m$, le cas où $r = 0$ correspond à A); on peut cependant former un système C^r dont les relations, convenablement résolues, donneraient le système B^r : la condition d'intégrabilité de B^r est satisfaite si (3) est conséquence algébrique de C^r.

Il n'est pas nécessaire que les équations (2) possèdent r directions communes de caractéristiques pour qu'on puisse former le système C^r, puis le résoudre suivant le schéma fourni par B^r; admettons qu'elles en possèdent moins de r qui leur soient communes et que les relations D^r et (3) soient conséquences algébriques de C^r : le système B^r correspondant est alors complètement intégrable; il fournit des solutions singulières du système (2) engendrées par des caractéristiques communes à ses deux équations appartenant à r familles différentes. On est assuré qu'il en est ainsi, si l'on sait, *a priori*, que ce système B^r est possible et admet un groupe de transformations de contact dont l'ordre est un nombre égal à celui de ses dérivées paramétriques; cela suppose, bien entendu, que la solution générale de ce système dépend de constantes en nombre fini.

Nous avons mis ainsi en évidence certains cas d'intégrabilité des équations (2), ce ne sont évidemment pas les seuls qui peuvent se présenter.

Nous supposons toujours, comme on est obligé de le faire dans ce genre de questions, que les calculs qui sont effectués à un moment quelconque ne sont pas en contradiction avec ceux qui précèdent.

4. Soit (s) une surface de (e) d'équation $z = g(x, y)$; surlignons d'un trait le symbole d'une expression pour indiquer que nous y remplaçons $z, p_{10}, p_{01}, \ldots$ par $g, g_x, g_y, \ldots$. A (s) correspondent des surfaces (s') si les deux équations (4)

$$(4) \qquad \varphi' = 0, \qquad \Phi' = 0,$$

obtenues par l'élimination de x et y entre les quatre relations ($\overline{1}$), admettent des solutions communes. Par différentiations et éliminations, on peut déduire des relations (1) un système Γ^r ($r = 0, 1, \ldots, m$) tel que $\overline{\Gamma^r}$ soit équivalent au système C^r construit en partant des relations (4), puis des relations H^r et $K = 0$, telles que $\overline{H^r}$ et $\overline{K} = 0$ soient équivalentes aux conditions D^r et $[\varphi', \Phi'] = 0$ relatives à (4), en tenant compte algébriquement de $\overline{\Gamma}^r$. Supposons que celles des relations H^r qui ne sont pas identiquement satisfaites soient conséquences algébriques de Γ^r : si $K = 0$ est équivalente, en tenant compte algébriquement de Γ^r, à une relation

$$U = 0 \tag{5}$$

ne contenant que x, y, z et ses dérivées jusqu'à un certain ordre, on obtient une équation aux dérivées partielles en z dont les intégrales permettent de déterminer par l'intégration du système B^r qui correspond à chacune d'elles des solutions du problème de Bäcklund relatif au système (1). Il est possible de former cette équation (5), si ce dernier système est invariant par rapport à un groupe de transformations de contact de l'espace (e') dont l'ordre est un nombre égal à celui des dérivées paramétriques de B^r, y compris le cas où ce nombre est nul, les conditions relatives aux H^r étant supposées satisfaites.

5. Il ne paraît pas possible d'indiquer un procédé régulier pour former toutes les transformations qu'on peut déduire des systèmes (1) : on verra, par la suite, qu'on peut en trouver un grand nombre. En s'appuyant sur les résultats généraux que nous venons d'esquisser, on trouve des transformations intéressant, en particulier, des équations admettant un groupe continu de transformations de contact (équations linéaires comprises); au fur et à mesure que l'ordre des équations s'élève, l'ampleur de ces applications diminue par rapport à la généralité des équations de l'ordre considéré : des équations d'ordre p admettant une famille de caractéristiques $(p-1)^{\text{uple}}$ se comportent toutefois à peu près comme celles du second ordre à caractéristiques quelconques.

Supposons que deux des équations (1), au moins, soient d'ordre m' en z'; les équations (4) sont alors d'ordre m' : on obtient de nouveaux résultats en recherchant s'il est possible que le système (4) admette des solutions singulières engendrées de m' façons par des caractéristiques appartenant aux m' familles des deux équations. Il faut pour cela que les déterminants déduits de la matrice

$$\left\| \left(\frac{dF_i}{dx'}\right) \quad \left(\frac{dF_i}{dy'}\right) \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}} \quad \cdots \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}} \right\|_{i=1,2,3,4}$$

soient nuls comme conséquences algébriques de (1). Ces conditions étant satisfaites, le système (1) est équivalent à un système (I) où une des relations peut être prise arbitrairement, les trois autres étant assujetties à certaines conditions. Si $m' = 1$, on retrouve des transformations de surfaces indiquées par Bäcklund; on peut certainement former l'équation (5); si $m' > 1$, pour que cette équation existe, il faut que des conditions supplémentaires soient remplies, mais qui sont plus simples que pour un système quelconque d'ordre m' en z'.

Lorsque trois des conditions (1) satisfont aux conditions dont nous venons de parler, on est conduit à rechercher ce qui se passe lorsque l'on complète le système par une certaine relation d'ordre $m' + 1$ en z', déduite des trois premières :

$m' = m = 1$, on trouve des transformations qui changent des équations du deuxième ordre appartenant à une classe très générale en équations du deuxième ordre admettant une famille au moins de caractéristiques du premier ordre; les équations qui possèdent une seule transformation infinitésimale de contact appartiennent à cette classe ;

$m' = 1$, $m = 2$: on est conduit à des transformations d'équations du troisième ordre admettant des caractéristiques d'ordre 1, 2 ou 3;

$m' = 2$, $m = 1$: les transformations obtenues intéressent des équations du troisième ordre qui possèdent des caractéristiques du premier ou du deuxième ordre, etc.

Le travail dont l'exposé va suivre est divisé en trois Chapitres.

La théorie générale relative au système (2) est exposée dans le premier, après quelques remarques sur le système de deux équations du premier ordre à une inconnue.

Dans le Chapitre II, les résultats du précédent sont appliqués au système (1), en commençant par le cas où deux de ses relations sont $x' = x$, $y' = y$.

Enfin le dernier Chapitre est consacré spécialement aux transformations de surfaces de Bäcklund et, en particulier, à l'étude des cas singuliers de ces transformations.

Il me reste à exprimer à M. Goursat mes sentiments de profonde reconnaissance pour la bienveillance qu'il m'a constamment témoignée et pour les conseils et les encouragements qu'il m'a adressés au cours de ces recherches.

CHAPITRE I.

SUR QUELQUES PROPOSITIONS RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Étant données deux équations du premier ordre à une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ G(x, y, z, p, q) = 0, \end{cases}$$

elles peuvent admettre une intégrale commune qui constitue une solution singulière de leur système et qu'il peut être avantageux, pour des raisons que nous ferons apparaître, de mettre en évidence.

Posons

$$\delta = F_p G_q - F_q G_p.$$

Supposons que

$$\text{(II)} \qquad \delta = 0$$

ne soit pas conséquence algébrique de (I); les trois relations (I) et (II) déterminent ∞^2 éléments du premier ordre; si ces éléments sont ceux d'une surface, celle-ci représente l'intégrale que nous avons en vue. En général, il n'en est pas ainsi; on trouve aisément des conditions nécessaires pour que cette circonstance se présente.

Toute solution de (I) satisfait aux équations obtenues en différentiant les équations de ce système

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = F_p r + F_q s + \left(\dfrac{dF}{dx}\right) = 0, & \dfrac{dG}{dx} = G_p r + G_q s + \left(\dfrac{dG}{dx}\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{dF}{dy} = F_p s + F_q t + \left(\dfrac{dF}{dy}\right) = 0, & \dfrac{dG}{dy} = G_p s + G_q t + \left(\dfrac{dG}{dy}\right) = 0. \end{cases}$$

Si la solution considérée satisfait aussi à (II), on déduit des relations (III), en supposant $F_p.G_p \neq 0$,

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} F_p\left(\dfrac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\dfrac{dF}{dx}\right) = 0, \\[2ex] F_p\left(\dfrac{dG}{dy}\right) - G_p\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = 0. \end{cases}$$

Toute solution commune aux équations (I) et (II) est solution des équations (IV), c'est-à-dire que les relations (I), (II) et (IV) doivent être algébriquement compatibles en z, p, q pour qu'une telle solution existe.

Ceci n'est valable que si $F_p.G_p \neq 0$. Si $F_p.G_p = 0$ est compatible avec les relations (I) et (II), différents cas peuvent se présenter. Supposons d'abord $F_p = 0$; d'après (II)

$$F_q G_p = 0;$$

si $F_q = 0$, nous sommes amenés à considérer le cas où l'équation $F = 0$ admet une solution singulière, qui est intégrale de $G = 0$; si $F_q \neq 0$, on a $G_p = 0$: ou $G_q = 0$, et alors c'est $G = 0$ qui admet une solution singulière, solution de $F = 0$; ou $G_q \neq 0$, et des relations (III) on déduit

$$(\mathrm{IV}') \qquad \left\{ \begin{aligned} F_q\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_q\left(\frac{dF}{dx}\right) &= 0, \\ F_q\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_q\left(\frac{dF}{dy}\right) &= 0, \end{aligned} \right.$$

analogues aux relations (IV); nous supposerons dans la suite, sauf indications contraires, sans nuire à la généralité, que

$$F_p G_p \neq 0.$$

Nous allons montrer que la condition nécessaire que nous venons d'établir est en général suffisante :

Soient $Z(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, *trois expressions qui, substituées à* z, p, q *satisfont identiquement aux relations* (I), (II) *et* (IV); *de plus elles vérifient l'inéquation* $\delta' = F_p G_z - F_z G_p \neq 0$; *il en résulte que*

$$P = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

et par suite que $z = Z(x, y)$ *représente une solution du système* (I).

En effet, par hypothèse, on a

$$F(x, y, Z, P, Q) = 0,$$
$$G(x, y, Z, P, Q) = 0;$$

par suite

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dZ + F_p\,dP + F_q\,dQ = 0,$$
$$G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dZ + G_p\,dP + G_q\,dQ = 0,$$

où, par exemple,

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, Z, P, Q).$$

Comme on a également

$$F_p(x, y, Z, P, Q)\,G_q - F_q G_p = 0 \qquad \text{et} \qquad F_p G_p \neq 0,$$

il vient

$$(F_p G_x - F_x G_p)\,dx + (F_p G_y - F_y G_p)\,dy + (F_p G_z - F_z G_p)\,dZ = 0$$

et, en tenant compte des relations (IV), qui donnent

$$F_p(G_x + PG_z) - G_p(F_x + PF_z) = 0, \qquad F_p(G_y + QG_z) - G_p(F_y + QF_z) = 0,$$

on obtient

$$(F_p G_z - F_z G_p)(dZ - P\,dx - Q\,dy) = 0.$$

Comme

$$F_p G_z - F_z G_p \neq 0,$$

on a

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0.$$

La solution qui peut être ainsi déterminée est une solution singulière; elle jouit de la propriété d'être engendrée par des caractéristiques communes aux deux équations (I) puisque, sur cette intégrale, $\delta = 0$.

Elle peut être l'unique solution du système, mais elle peut aussi coexister avec d'autres. Si les deux équations (I) sont en involution, elles admettent des solutions communes dépendant d'une constante arbitraire; lorsque ces surfaces intégrales admettent une enveloppe, elle constitue la solution singulière : les caractéristiques (au sens de la théorie des enveloppes) sont des caractéristiques pour chacune des équations aux dérivées partielles.

Il est très facile de donner des exemples : soit $f(x, y, z, a) = 0$ l'équation d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre arbitraire a, la fonction f étant telle que ces surfaces admettent une enveloppe.

L'élimination de a entre

$$f = 0, \qquad f_x + pf_z = 0, \qquad f_y + qf_z = 0$$

conduit en général à un système de deux équations du premier ordre; ces deux équations sont en involution et admettent une solution singulière déterminée par l'élimination de a entre $f=0$ et $f_a=0$.

Soit

$$z=ax+a^2y;\qquad p=a,\qquad q=a^2.$$

La famille de plans est intégrale du système

$$\begin{gathered}p^2y+px-z=0,\\ q=p^2\end{gathered}$$

qui admet une solution singulière

$$x^2+4yz=0;$$

cette solution est singulière aussi pour la première équation du système.

Les plans sont aussi intégrales du système

$$\begin{gathered}px+qy-z=0,\\ q=p^2,\end{gathered}$$

mais la solution singulière du système ne l'est plus pour aucune des équations.

On trouvera des systèmes non en involution possédant une intégrale singulière en considérant, par exemple, une famille de sphères dont les équations dépendent d'un paramètre arbitraire

$$S=x^2+y^2+z^2-2ax+2by-2cz+2d=0,$$

a, b, c, d étant fonction d'un paramètre t; l'enveloppe s'obtient en adjoignant l'équation

$$P=a'x+b'y+c'z-d'=0;$$

a', b', c', d' représentant les dérivées par rapport à t de a, b, c, d. λ étant quelque fonction de t, soit la famille de quadriques $S+\lambda P^2=0$, elle admet comme enveloppe celle de la famille de sphères; ces deux familles de surfaces peuvent être considérées chacune comme appartenant à une certaine famille à deux paramètres : $S+\mu\Sigma=0$, $S+\lambda P^2+\nu\Sigma'=0$, Σ dépendant des paramètres μ et t, Σ' des paramètres ν et t, ces deux expressions étant définies pour μ et ν nuls.

Chacune de ces deux familles à deux paramètres est l'intégrale complète d'une équation du premier ordre, et les deux équations obtenues n'admettent en général aucune intégrale commune autre que l'enveloppe commune des sphères et des quadriques, qui est une intégrale singulière pour leur système. Si l'on s'arrange pour que λ, a', b', c', d' s'annulent pour une même valeur de t, la sphère et la quadrique correspondant à cette valeur, coïncident et constituent une intégrale du système autre que l'intégrale singulière.

La solution singulière, quand elle existe, provient d'une décomposition du problème constitué par l'intégration du système (I). Des équations (III), on déduit

$$\delta s + F_p\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_q\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0,$$

$$\delta t + F_p\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

s'il existe une solution singulière, on peut écrire

$$F = l'_1[z - Z(x, y)] + l''_1(p - P) + l'''_1(q - Q) = 0,$$

l'_1, l''_1, l'''_1 étant certaines fonctions de x, y, z, p, q, et des expressions analogues pour

$$G, \quad \delta, \quad F_p\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dx}\right), \quad F_p\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dy}\right)$$

avec pour l', l'', l''' les indices 2, 3, 4, 5.

On a d'abord la solution $z = Z$, $p = Q$, $q = Q$, puis on devra satisfaire aux équations

$$\begin{vmatrix} l'_1 & l''_1 & l'''_1 \\ l'_2 & l''_2 & l'''_2 \\ l'_3 s + l'_4 & l''_3 s + l''_4 & l'''_3 + s l'''_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} l'_1 & l''_1 & l'''_1 \\ l'_2 & l''_2 & l''_3 \\ l'_3 t + l'_5 & l''_3 t + l''_5 & l'''_3 t + l'''_5 \end{vmatrix} = 0,$$

par quoi on remplacera dans (III) les deux équations $\dfrac{dG}{dx} = 0$, $\dfrac{dG}{dy} = 0$; et en y adjoignant les deux équations (I), on obtient un système dont on poursuivra l'intégration.

Rappelons maintenant que l'on pose

$$[F, G] = F_p(G_x + pG_z) - G_p(F_x + pF_z) + F_q(G_y + qG_z) - G_q(F_y + qF_z).$$

et observons que si $\delta = 0$ et $F_p \neq 0$, on a

$$[F, G] = F_p\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{F_q}{F_p}\left[F_p\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dy}\right)\right].$$

En nous appuyant sur des résultats bien connus et sur ceux que nous venons d'établir, pour discuter un système de deux équations du premier ordre nous procéderons de la manière suivante :

Nous formons les relations (II), (IV) et (V)

$$\text{(V)} \qquad [F, G] = 0;$$

nous désignons par (VI) le système formé de (I) et l'une des équations (IV).

1° $\delta \neq 0$ [même en tenant compte de (I)] : si (V) est conséquence algébrique de (I), ce système est en involution; il peut admettre en outre une solution singulière si ses surfaces intégrales ont une enveloppe.

2° (II) et (V) sont conséquences algébriques de (VI) [on peut aussi remplacer (V) par la relation (IV) qui ne figure pas dans (VI)] : une solution, en général singulière, non nécessairement unique (*voir* 1° et 3°).

Cas particuliers. — a_1. (V) est conséquence de (I) sans que (II) le soit : le système (I) est en involution.

a_2. (II) est conséquence de (I) : une solution, et pas d'autre.

3° (V) n'est pas conséquence de (I) [non plus que (II)] : on l'adjoint au système (I), etc.

Remarque. — Lorsque (II) est conséquence algébrique de (I), il peut être avantageux dans une discussion de grouper 1° et 2°, a_2.

Nous donnerons plus loin de nombreuses applications de ce mode de discussion : signalons qu'il permet de déterminer le cas des transformations de Bäcklund signalé par Clairin et qui correspond à la deuxième partie du Tableau. On en déduit également une interprétation du rôle de la relation [F, G] quand $\delta = 0$.

Remarquons, enfin, que les conditions d'existence de la solution singulière ne font intervenir que les dérivées du premier ordre des fonctions F et G, tandis que celles de la solution qui peut résulter de la troisième partie du Tableau contiennent les dérivées secondes de F et G; de là provient l'intérêt que l'on trouve à mettre en évidence la solution singulière dans des discussions analogues à celles où conduit l'étude du problème de Bäcklund.

Nous allons étendre au système formé par deux équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques, et par la même occasion à des systèmes plus généraux, les résultats que nous venons de démontrer relativement au système de deux équations du premier ordre. Nous serons conduits à des propositions que nous emploierons avantageusement dans la résolution de ces systèmes, et leur discussion, lorsqu'il y figure des paramètres.

1. Soient les deux équations aux dérivées partielles d'ordre m et M, $m \leqq \mathrm{M}$, (e_m) et $(\mathrm{E_M})$:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots, p_{0m}) = 0, & (e_m), \\ \mathrm{F}(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots, p_{0\mathrm{M}}) = 0, & (\mathrm{E_M}). \end{cases}$$

Nous supposons que les premiers membres sont des fonctions analytiques, définies dans certains domaines, des arguments qui y figurent.

Désignons par $(e_m)_h$ le système des $h+1$ équations d'ordre $m+h$ obtenues par différentiation à partir de l'équation (e_m); $(e_m)_h^k$ représente l'équation de ce système dont le premier membre se déduit de celui de (e_m) en en prenant k fois la dérivée par rapport à y, $k \leqq h$, et $h-k$ fois par rapport à x,

$$(e_m)_h^k \qquad \frac{d^h f}{dx^{h-k}\, dy^k} = \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} p_{m+h-k,k} + \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}} p_{m+h-k-1,k+1} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial p_{0m}} p_{h-k,k+m} + \left(\frac{d^h f}{dx^{h-k}\, dy^k}\right) = 0;$$

la forme linéaire par rapport aux dérivées d'ordre $m+h$ qui constitue la première partie de cette somme, nous la représentons par $(\varepsilon_m)_h^k$. Les notations analogues seront appliquées aux équations dérivées de $(\mathrm{E_M})$.

Par des différentiations successives, nous obtenons les systèmes

$$\begin{array}{llll} (e_m)_1, & (e_m)_2, & \ldots, & (e_m)_h, \quad \ldots, \\ (\mathrm{E_M})_1, & (\mathrm{E_M})_2, & \ldots, & (\mathrm{E_M})_\mathrm{H}, \quad \ldots. \end{array}$$

Le nombre des équations qui figurent dans chacun de ces systèmes s'obtient en ajoutant 1 à l'indice extérieur de la parenthèse, l'ordre, en ajoutant les deux indices. Les équations des systèmes $(e_m)_h$ et

$(E_M)_H$ sont du même ordre si $m + h = M + H$; leur nombre est alors au total de $h + H + 2 = 2h + m - M + 2$; il croît de deux unités lorsque l'ordre des équations croît d'une unité; la différence entre le nombre des équations et celui des dérivées de z de l'ordre de ces équations croît donc d'une unité, dans les mêmes conditions. Les équations des systèmes $(e_m)_{M-1}$, $(E_M)_{m-1}$ sont d'ordre $m + M - 1$, et dans leur ensemble au nombre de $m + M$, c'est-à-dire précisément celui des dérivées de z d'ordre $m + M - 1$, le nombre des équations des systèmes $(e_m)_M$, $(E_M)_m$ d'ordre $m + M$ est $m + M + 2$ dépassant d'une unité celui des dérivées de z de cet ordre; les équations d'ordre μ $(M \leqq \mu \leqq M + m - 1)$ obtenues en différentiant les équations (1) sont au contraire en nombre inférieur à celui des dérivées de z d'ordre μ.

Appelons (A) le système obtenu en adjoignant aux équations (1) celles qu'on en déduit par différentiations jusque et y compris celles d'ordre $m + M - 1$:

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} (e_m)_1, & (e_m)_2, & \ldots\ldots & (e_m)_{M-1}, \\ (E_M)_1, & (E_M)_2, & \ldots, & (E_M)_{m-1}; \end{cases}$$

lorsque nous considérons les équations de (A) d'ordre au plus égal à K, nous représentons leur ensemble par (A_K).

Désignons par D le déterminant des coefficients des dérivées d'ordre $m + M - 1$ dans les équations $(e_m)_{M-1}$, $(E_M)_{m-1}$:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} & 0 & 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\
0 & \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial p_{1,m-1}} & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} & 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \cdots\cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} & 0 \\
0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial p_{1,m-1}} & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} \\
\frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \frac{\partial F}{\partial p_{M-1,1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} & 0 & 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\
0 & \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{1,M-1}} & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} & 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \cdots\cdots & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} & 0 \\
0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \cdots & \cdots\cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}}
\end{vmatrix}$$

Ce déterminant est égal au résultant des deux équations de degrés m et M qui donnent les directions des caractéristiques des équations (1):

$$\frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} dy^m - \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}} dy^{m-1} dx + \ldots + (-1)^m \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} dx^m = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} dy^M - \frac{\partial F}{\partial p_{M-1,1}} dy^{M-1} dx + \ldots + (-1)^M \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} dx^M = 0.$$

2. *Quelques propriétés algébriques du système* (A). — Considérons les divers arguments qui figurent dans les équations de (A) comme autant de variables indépendantes. Si, dans ces conditions, D n'est nul ni identiquement, ni comme conséquence de certaines équations de (A), les équations d'ordre $m + M - 1$ de (A) permettent de calculer les dérivées de z d'ordre $m + M - 1$ au moyen de x, y, z et de ses dérivées d'ordres inférieurs à $m + M - 1$, et cela, même en tenant compte des autres équations de (A). Nous allons montrer, de plus, que les équations d'un ordre quelconque i de (A) permettent d'exprimer un nombre de dérivées de cet ordre égal au nombre des équations de (A) d'ordre i, au moyen des autres dérivées d'ordre i, de x, y, z et des dérivées d'ordres moindres, même moyennant les équations (A_{i-1}); pour cela, il suffit de montrer que les équations $(e_m)_{i-m}$, $(E_M)_{i-M}$, considérées comme équations linéaires en $p_{i,0}, \ldots, p_{0,i}$, ou encore que les formes linéaires $(\varepsilon_m)_{i-m}$, $(\mathcal{E}_M)_{i-M}$ sont linéairement indépendantes. Or, si ces formes ne sont pas linéairement indépendantes, il y a entre elles ρ relations linéaires identiques; en y remplaçant les dérivées d'ordre i par les dérivées d'ordre $m + M - 1$ obtenues en augmentant l'ordre de dérivation par rapport à x de $m + M - 1 - i$ unités, nous obtenons ρ relations linéaires identiques entre les formes $(\varepsilon_m)_{M-1}$, $(\mathcal{E}_M)_{m-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse $D \neq 0$.

Si $\rho = 1$, une des formes d'ordre i s'exprime linéairement au moyen des autres; il en résulte que deux des formes $i + 1$ s'expriment au moyen des autres, etc., que $m + M - i$ des formes d'ordre $m + M - 1$ s'expriment au moyen des autres formes de cet ordre. Si $\rho > 1$, il y a plus de $m + M - i$ des formes d'ordre $m + M - 1$ qui sont dans ce cas.

La propriété essentielle que nous voulons établir est la suivante :

Si, parmi les formes $(\varepsilon_m)_{M-1}$, $(\mathcal{E}_M)_{m-1}$, il y en a exactement $m + M - r$ qui sont indépendantes, les formes $(\varepsilon_m)_{M-r}$, $(\mathcal{E}_M)_{m-r}$

d'ordre $m+\mathrm{M}-r$, au nombre de $m+\mathrm{M}+2-r$, sont dépendantes et, parmi elles, il s'en trouve exactement $m+\mathrm{M}+1-r$ qui sont indépendantes.

Il est d'abord évident que r est au plus égal à m. En raison de l'hypothèse, entre $m+\mathrm{M}+1-r$ des formes $(\varepsilon_m)_{\mathrm{M}-1}$, $(\mathcal{E}_\mathrm{M})_{m-1}$ il existe une relation linéaire identique; on peut donc trouver, en particulier, des coefficients λ, μ, λ', μ' fonctions de $x, y, z, \ldots p_{0,\mathrm{M}}$ tels que l'on ait identiquement :

$$\begin{aligned}\lambda_0(\varepsilon_m)^0_{\mathrm{M}-1}+\lambda_1(\varepsilon_m)^1_{\mathrm{M}-1}+\ldots+\lambda_{\mathrm{M}-r}(\varepsilon_m)^{\mathrm{M}-r}_{\mathrm{M}-1}+\lambda_{\mathrm{M}-r+1}(\varepsilon_m)^{\mathrm{M}-r+1}_{\mathrm{M}-1}+\ldots\\+\lambda_{\mathrm{M}-1}(\varepsilon_m)^{\mathrm{M}-1}_{\mathrm{M}-1}+\mu_0(\mathcal{E}_\mathrm{M})^0_{m-1}+\ldots+\mu_{m-r}(\mathcal{E}_\mathrm{M})^{m-r}_{m-1}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda'_0(\varepsilon_m)^0_{\mathrm{M}-1}+\lambda'_1(\varepsilon_m)^1_{\mathrm{M}-1}+\ldots+\lambda'_{\mathrm{M}-r}(\varepsilon_m)^{\mathrm{M}-r}_{\mathrm{M}-1}+\mu'_0(\mathcal{E}_\mathrm{M})^0_{m-1}+\ldots\\+\mu'_{m-r}(\mathcal{E}_\mathrm{M})^{m-r}_{m-1}+\ldots+\mu'_{m-1}(\mathcal{E}_\mathrm{M})^{m-1}_{m-1}=0.\end{aligned}$$

La proposition est établie si les coefficients $\lambda_{\mathrm{M}-r+1}, \lambda_{\mathrm{M}-r+2}, \ldots \lambda_{\mathrm{M}-1}$, ou bien les coefficients $\mu'_{m-r+1}, \mu'_{m-r+2}, \ldots, \mu'_{m-1}$ sont nuls; car, par exemple, dans le premier cas, on en déduit la relation

$$\lambda_0(\varepsilon_m)^0_{\mathrm{M}-r}+\lambda_1(\varepsilon_m)^1_{\mathrm{M}-r}+\ldots+\lambda_{\mathrm{M}-r}(\varepsilon_m)^{\mathrm{M}-r}_{\mathrm{M}-r}+\mu_0(\mathcal{E}_\mathrm{M})^0_{m-r}+\ldots+\mu_{m-r}(\mathcal{E}_\mathrm{M})^{m-r}_{m-r}=0.$$

Soient λ_i, μ_j, $\lambda'_{i'}$, $\mu'_{j'}$ les coefficients de plus haut indice qui ne soient pas nuls; nous allons voir que si j' est supérieur à $m-r$, i est inférieur à $\mathrm{M}-r$, de sorte que l'un des deux cas que nous venons de signaler se présente nécessairement.

En effet, désignons par h et H le plus haut ordre de dérivation par rapport à y des dérivées d'ordres m et M dans (ε_m) et $(\mathcal{E}_\mathrm{M})$. En raison des identités (2)

$$h+i=\mathrm{H}+j,$$
$$h+i'=\mathrm{H}+j';$$

d'où

$$i-i'=j-j',$$
$$i=i'+j-j';$$

or

$$j'>m-r;$$

par hypothèse, de plus,

$$j\leqq m-r,\quad i'\leqq \mathrm{M}-r;$$

donc

$$i<\mathrm{M}-r+m-r-m+r,$$
$$i<\mathrm{M}-r.$$

Nous pouvons ajouter que les formes d'ordre $m+M-r-1$ sont indépendantes et aussi que les r relations identiques qui existent entre les formes d'ordre $m+M-1$ peuvent être résolues par rapport à r des formes $(\mathcal{E}_M)_m$, dont les indices supérieurs sont r nombres consécutifs.

Remarque. — La propriété que nous venons d'établir donne un procédé pour exprimer que deux équations algébriques de degrés m et M ont r solutions communes; on le déduit aisément de la condition classique.

3. *L'expression* $[f, F]$; *première propriété.* — Le système (A) est complètement intégrable, suivant la définition connue, lorsque toutes les solutions non singulières de ce système ne vérifient aucune équation d'ordre au plus égal à $m+M-1$ qui ne soit conséquence algébrique de (A). Cela entraîne que D soit différent de zéro, même moyennant (A) [ou, ce qui suffit, (A_M), puisque D est d'ordre M au plus], et que les $m+M+2$ équations $(e_m)_M$, $(E_M)_m$ soient compatibles par rapport aux $m+M+1$ dérivées d'ordre $m+M$, ce qui procure une seule condition. On l'obtient de la façon suivante : multiplions le premier membre de chaque équation $(E_M)_m^i$ par $\frac{\partial f}{\partial p_{m-i,i}}$, celui de chaque équation $(e_m)_M^i$ par $-\frac{\partial F}{\partial p_{M-i,i}}$ et ajoutons; les dérivées d'ordre $m+M$ disparaissent; posons

$$\begin{aligned}[f, F] = {} & \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}}\left(\frac{d^m F}{dx^m}\right) + \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}}\left(\frac{d^m F}{dx^{m-1}dy}\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{d^m F}{dy^m}\right) \\ & - \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}}\left(\frac{d^M f}{dx^M}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_{M-1,1}}\left(\frac{d^M f}{dx^{M-1}dy}\right) - \ldots - \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}}\left(\frac{d^M f}{dy^M}\right).\end{aligned}$$

Cette expression est d'ordre $m+M-1$ au plus et représente le résultat de la combinaison que nous venons d'effectuer; cela subsiste même si quelques-unes des expressions $\frac{\partial f}{\partial p_{i,j}}$, $\frac{\partial F}{\partial p_{i,j}}$ sont nulles. La condition de compatibilité cherchée est donc

$$[f, F] = 0. \tag{3}$$

Nous allons préciser ce qu'il faut entendre par là. $D=0$ n'étant pas conséquence algébrique de (A), par la résolution algébrique de ce système, on en déduit d'autres : $(A)^1, (A)^2, \ldots, (A)^n$, qui ne sont pas analytiquement distincts, où les dérivées principales de chaque ordre sont en nombre égal à celui des équations de (A) qui sont de cet ordre. Soient P_r les dérivées principales, P_a les dérivées paramétriques [1], P_r^μ, P_a^μ désigneront ces dérivées jusqu'à l'ordre μ. Voici comment se fait cette résolution : on détermine d'abord un élément d'ordre $m + M - 1$ dont les coordonnées vérifient le système (A); pour cela on donne aux dérivées P_a^M un système de valeurs numériques $P_{a,0}^M$ n'annulant pas D; nous en déduisons, par les équations (A_M), un certain nombre de systèmes de valeurs numériques pour les dérivées P_r^M, soit $P_{r,0}^M$ l'un d'eux; nous supposons que les nombres $P_{a,0}^M$, $P_{r,0}^M$ n'annulent pas non plus D. Prenons arbitrairement les valeurs numériques des dérivées P_a de chaque ordre supérieur à M jusqu'à $m + M - 1$ compris; on en déduit pour les dérivées de chacun de ces ordres un système de valeurs numériques. Le nombre des coordonnées de l'élément d'ordre $m + M - 1$ que l'on obtient ainsi, qui sont arbitraires, est égal à

$$\frac{(m+M-1)(m+M)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} - \frac{(M-1)M}{2} = mM.$$

Nous supposons que l'élément considéré appartient au domaine d'analycité. Alors le théorème d'existence des fonctions implicites nous apprend qu'il existe, correspondant à chacune des P_r, une fonction des P_a et de x, y, dont la valeur numérique pour $P_{a,0}, x_0, y_0$ concorde avec celle de la coordonnée correspondante de l'élément.

Si le système (A) est complètement intégrable, la substitution de ces fonctions aux P_r dans $[f, F]$ donne un résultat identiquement nul. Au lieu de l'élément d'ordre $m + M - 1$ considéré, nous aurions pu en obtenir un autre en partant d'un système de valeurs numériques différent de $P_{r,0}^M$, le nombre des coordonnées arbitraires y serait également mM, et l'on en déduirait un système de fonctions pour les P_r jouissant de propriétés analogues à celles des fonctions précédentes.

Cela suppose que l'on a pu effectuer la résolution numérique des équations (A), comme il a été indiqué, c'est-à-dire que la relation

$$D = 0 \tag{4}$$

(1) RIQUIER. *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 169.

ne soit satisfaite ni identiquement, ni comme conséquence algébrique de (A). On est conduit à rechercher quel est le rôle de la relation $[f, F] = 0$, lorsque les deux équations (1) ont une ou plusieurs directions communes de caractéristiques, et à étudier certaines solutions singulières des systèmes tels que (1). Mais, par suite de la multiplicité des cas possibles, croissante avec l'ordre des deux équations, la démonstration générale des résultats que nous avons en vue ne peut se faire de la même manière que pour deux équations du premier ordre. Nous ne la ferons pas directement sur le système (A), mais sur un système plus général auquel nous attribuerons uniquement les propriétés de (A) qui sont nécessaires à la démonstration.

4. *Les systèmes* $\mathfrak{S}$. — Considérons un système S_k d'équations aux dérivées partielles à une inconnue z, fonction des deux variables indépendantes x et y; k est l'ordre le plus élevé des équations qui le composent; les équations d'ordres inférieurs à k y sont au nombre de N, soit S_{k-1} leur ensemble; S_ρ désigne l'ensemble des équations d'ordre au plus égal à ρ; s_k désigne l'ensemble des équations d'ordre k au nombre de p :

$$(s_k) \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_p = 0.$$

Lorsque nous voudrons mettre les nombres N et p en évidence, nous emploierons la notation $S_{k,p}^{N}$.

Nous disons que nous avons mis le système S_k sous une *forme régulière* si les équations de tout ordre ρ de ce système sont indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre ρ, même moyennant les équations de S_k d'ordres inférieurs à ρ; c'est-à-dire s'il n'existe aucune équation d'ordre ρ' inférieur à ρ qui soit conséquence algébrique des équations S_ρ sans l'être des équations $S_{\rho'}$ (¹).

Dans ces conditions, si nous résolvons les équations de chaque ordre par rapport à certaines dérivées de cet ordre, qui deviennent les dérivées principales, en nombre égal à celui de ces équations, nous avons effectué une résolution régulière (²) du système donné; il se présente, en général, différentes façons d'effectuer la résolution régu-

(¹) *Cf.* Maurice Janet, *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, p. 118.

(²) Delassus, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XIII, p. 438.

lière du système correspondant aux divers groupes de solutions provenant de la résolution algébrique des équations; c'est ce que nous avons constaté sur le système (A).

Pour intégrer un des systèmes provenant de la résolution régulière de S_k, nous nous assurons d'abord s'il est complètement intégrable. S'il ne l'est pas, nous lui adjoignons les nouvelles équations obtenues en écrivant les conditions d'intégrabilité; nous formons ainsi un nouveau système sur lequel nous opérons comme sur S_k, en complétant la résolution régulière, et ainsi de suite. Le nombre des opérations est limité, soit que l'on arrive à une relation non identique entre les variables indépendantes, soit que l'on arrive à un système complètement intégrable. Nous pourrons obtenir ainsi les solutions de S_k, sauf, peut-être, certaines solutions singulières.

Les systèmes que nous étudierons seront, analytiquement, indécomposables; lorsqu'il s'en présentera qui ne le soient pas, nous nous occuperons séparément de chacun des systèmes provenant de la décomposition. Nous mènerons alors de front les opérations de réduction effectuées sur les divers modes de résolution régulière. Pour cela, nous mettrons le système donné sous forme régulière; nous écrirons les conditions immédiates d'intégrabilité : on peut les trouver sans avoir à résoudre les équations, comme on l'a fait dans le cas de deux équations; celles qui ne sont pas conséquences algébriques du système donné, nous les lui adjoignons de manière à former un nouveau système sur lequel nous opérons comme sur le précédent et ainsi de suite. Ainsi, lorsque la relation (3) n'est pas conséquence algébrique de (A), elle constitue une nouvelle équation que nous lui adjoignons. Pour l'intégration effective, on sera bien obligé de résoudre complètement les équations, mais pour la simplicité des calculs et de la discussion il vaut mieux le faire le plus tard possible.

On n'obtient ainsi que les solutions non singulières du système donné; les calculs par lesquels on effectue les éliminations et résolutions algébriques successives ne sont valables qu'à la condition que la fonction inconnue n'annule pas certaines expressions; par exemple, D pour le système (A); il peut se faire que le système donné admette des solutions singulières; on les obtiendra en intégrant les systèmes obtenus en adjoignant au système donné les équations provenant de l'annulation de ces expressions.

On est conduit ainsi à des calculs compliqués, surtout lorsque le système donné contient des paramètres arbitraires et que l'on doit, non seulement résoudre, mais discuter. Notre but est de fournir, au moins pour une classe importante de systèmes, un moyen d'ordonner les calculs qui est souvent avantageux.

Nous supposons que le système S_k jouisse des propriétés suivantes :

Aucune équation de s_k n'est conséquence algébrique d'autres équations de S_k, ce que nous exprimons aussi en disant que les équations s_k sont indépendantes par rapport à l'ensemble des arguments qui y figurent, même moyennant S_{k-1};

Toutes les équations obtenues en dérivant une fois les équations de S_{k-1} par rapport à x et à y sont conséquences algébriques de certaines équations de S_k;

Des $2p$ équations d'ordre $k+1$ dérivées des équations de s_k, $p-1$ sont conséquences algébriques des $p+1$ autres, que nous désignons par s_{k+1}, moyennant S_k; l'ensemble des équations S_k et s_{k+1} est représenté par S_{k+1}.

Ces propriétés subsistent, évidemment, après un changement linéaire quelconque de variables effectué sur x et y. Nous supposons, de plus, qu'au besoin, par un tel changement de variables, on peut s'arranger pour que le système s_{k+1} comprenne les équations

$$(7) \qquad \frac{da_1}{dx} = 0, \qquad \frac{da_2}{dx} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{da_p}{dx} = 0.$$

Admettons que a_p contienne la dérivée d'ordre k dont l'ordre de dérivation par rapport à y est au moins égal à celui de toute dérivée d'ordre k figurant dans s_k; $\frac{da_p}{dy}$ contient une dérivée d'ordre $k+1$, p_{k+1}, dont l'ordre de dérivation, par rapport à y, est supérieur à celui de toute dérivée d'ordre $k+1$ figurant dans (7), de sorte que nous pourrons prendre pour système s_{k+1} celui qui comprend les équations (7) et $\frac{da_p}{dy} = 0$.

Les équations $\frac{da_i}{dy} = 0$ $(i < p)$ sont donc conséquences algébriques de S_{k+1}.

Il résulte de là que les équations d'ordre $k+2$ dérivées de s_{k+1} sont conséquences algébriques, moyennant S_{k+1} des $p+2$ équations s_{k+2},

$$(s_{k+2}) \quad \frac{d^2a_1}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2a_2}{dx^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^2a_p}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2a_p}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2a_p}{dy^2} = 0,$$

car les équations $\dfrac{d^2 a_i}{dx\,dy} = 0$ $(i < p)$ sont conséquences algébriques de S_{k+1} et des équations dérivées une fois par rapport à x des équations de s_{k+1}, c'est-à-dire d'équations figurant dans s_{k+2}.

Nous représentons par S_{k+2} l'ensemble des équations S_{k+1} et s_{k+2}.

D'une façon générale, nous représentons par s_{k+h} le système des $p+h$ équations :

$$(s_{k+h})\quad \left\{\begin{array}{llll} & \dfrac{d^h a_1}{dx^h} = 0, & \dfrac{d^h a_2}{dx^h} = 0, & \ldots\ldots \\ \dfrac{d^h a_p}{dx^h} = 0, & \dfrac{d^h a_p}{dx^{h-1}\,dy} = 0, & \dfrac{d^h a_p}{dx^{h-2}\,dy^2} = 0, & \ldots\ldots \\ & \dfrac{d^h a_p}{dx\,dy^{h-1}} = 0, & \dfrac{d^h a_p}{dy^h} = 0, & \end{array}\right.$$

et par S_{k+h} l'ensemble des équations S_k, s_{k+1}, s_{k+2}, ..., s_{k+h}; les équations $\dfrac{d^h a_i}{dx^{h-1}\,dy} = 0$ $(i < p)$ sont conséquences algébriques de S_{k+h}.

Nous dirons d'un système qui possède les propriétés que nous venons d'énoncer, qu'il jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. Si cela se produit pour S_k, il en est de même quel que soit h pour S_{k+h}. Si le système se trouve, de plus, sous forme régulière, il est complètement intégrable, car nous démontrerons plus loin [1] que si les équations s_k sont indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k, les équations s_{k+1} le sont par rapport aux dérivées d'ordre $k+1$; ainsi en est-il de (A) lorsque la relation $[f, F] = 0$ en est conséquence algébrique, sans que $D = 0$ le soit; par contre, lorsque $D = 0$ est conséquence algébrique de (A), ce système n'est plus sous forme régulière; toutefois, si les équations d'ordre $m+M-1$ de ce système sont indépendantes par rapport à l'ensemble de leurs arguments, même moyennant (A_{m+M-2}), (A) jouit encore des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. Voici pourquoi : les équations obtenues en dérivant une fois les équations (A_{m+M-2}) sont conséquences algébriques d'équations de (A); celles que l'on obtient en dérivant une fois les $m+M$ équations d'ordre $m+M-1$, s'expriment au moyen des $m+M+2$ équations $(e_m)_M$, $(E_M)_m$; d'autre part, par suite de la propriété du crochet, il existe une relation linéaire entre les premiers membres de

(1) *Voir* à la fin du n° 6.

ces équations. Supposons que l'une des expressions $\frac{\partial f}{\partial p_{0,m}}$, $\frac{\partial F}{\partial p_{0,M}}$ soit différente de o, par exemple la première; toutes les équations d'ordre $m+M$ dérivées de (A) sont conséquences algébriques des équations $(e_m)_M$, $(E_M)_m^0$, $(E_M)_m^1$, ..., $(E_M)_m^{m-1}$, et c'est ici l'équation $(e_m)_{M-1}^{M-1}$ qui joue le rôle de $a_p = 0$. Lorsque $\frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} \neq 0$, il suffit de permuter le rôle de f et F; si l'on a à la fois $\frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} = 0$, il suffit de faire un changement linéaire de variables quelconque pour que cette circonstance ne se présente plus pour les nouvelles équations. Reste à examiner le cas où les équations $(e_m)_{M-1}$, $(E_M)_{m-1}$ ne sont pas indépendantes par rapport à l'ensemble de leurs arguments : certaines équations de $(E_M)_{m-1}$, dont je désigne le nombre par r, sont conséquences algébriques des autres équations de (A); d'après une remarque faite plus haut, ces équations se suivent dans la suite :

$$(E_M)_{m-1}^0, \quad (E_M)_{m-1}^1, \quad \ldots, \quad (E_M)_{m-1}^{m-1};$$

ce sont, par exemple,

$$(E_M)_{m-1}^{n+1} (E_M)_{m-1}^{n+2} \ldots (E_M)_{m-1}^{n+r} \qquad (n+r \leqq m-1).$$

Les $2r$ équations obtenues en les dérivant une fois par rapport à x et y s'expriment au moyen de $r+1$ seulement figurant dans $(E_M)_m$, savoir :

$$(E_M)_m^{n+1} (E_M)_m^{n+2} \ldots (E^M)_m^{n+r+1};$$

ces dernières sont donc conséquences algébriques de (A) et des $m+M+2-r-1$ autres équations d'ordre $m+M$ qui figurent dans $(e_m)_M$ et $(E_M)_m$, la condition $[f, F] = 0$ se trouve nécessairement réalisée; si $n+r < m-1$, ce qui est la même chose que de supposer $\frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} \neq 0$, le système formé avec A_{m+M-2} et les $m+M-r$ équations

$$(e_m)_{M-1}, \ (E_M)_{m-1}^0, \ (E_M)_{m-1}^1, \ \ldots, \ (E_M)_{m-1}^n, \ (E_M)_{m-1}^{n+r+1}, \ (E_M)_{m-1}^{n+r+2}, \ \ldots, \ (E_M)_{m-1}^{m-1}$$

jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$ où $k = m+M-1$, $p = m+M-r$; les $m+M-r+1$ équations d'ordre $m+M$ que l'on a à considérer sont

$$(e_m)_M, \ (E_M)_m^0, \ (E_M)_m^1, \ \ldots, \ (E_M)_m^n, \ (E_M)_m^{n+r+2}, \ (E_M)_m^{n+r+3}, \ \ldots, \ (E_M)_m^m,$$

et c'est encore l'équation $(e_m)_{M-1}^{M-1}$ qui joue le rôle de $a_p = 0$; lorsque $\frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} = 0$, mêmes observations que précédemment.

Lorsque $D = 0$, et que moins de $m + M - 1$ équations d'ordre $m + M - 1$ seulement sont indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre, (A_{m+M-2}) ne se trouve pas sous forme régulière.

5. Avant d'aller plus loin, nous allons présenter une observation; elle concerne le cas où $S_\rho (\rho < k)$ ne se trouve pas sous forme régulière, autrement dit, où entre certaines équations d'ordre ρ et d'autres équations de S_k d'ordre inférieur à ρ, on peut éliminer les dérivées d'ordre ρ de telle façon que le résultat de l'élimination soit une équation $(e)'$ d'ordre ρ' inférieur à ρ, qui n'est pas conséquence algébrique de $S_{\rho'}$; le système obtenu en remplaçant une des équations d'ordre $(\rho) : (e)$, par $(e)'$ est équivalent à S_k, sauf peut-être pour certaines solutions singulières, et jouit aussi des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. L'équation obtenue en dérivant (e') par rapport à x est conséquence algébrique des équations de S_ρ et de leurs dérivées par rapport à x, et l'on obtient un système équivalent au système considéré, en y remplaçant une équation d'ordre $\rho + 1$ par une équation d'ordre $\rho' + 1$; il n'est, du reste, pas exclu que cette nouvelle équation soit conséquence algébrique des équations du nouveau système, sans que (e') le soit. Si $\rho + 1 < k$, le nouveau système jouit encore des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$.

L'opération que nous venons d'indiquer sur (e), il est possible qu'elle se présente pour d'autres équations de S_{k-1}; lorsqu'il n'en est plus ainsi, le système S_{k-1} se trouve sous forme régulière.

Comme nous l'avons dit précédemment, un système se trouvant sous forme régulière, qui jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$, est complètement intégrable. Si $p < k + 1$, il est en involution d'ordre $k + 1 - p$, et sa solution la plus générale dépend de $k + 1 - p$ fonctions arbitraires d'une variable, et, éventuellement, de constantes arbitraires. Si $p = k + 1$, sa solution la plus générale dépend de $\frac{k(k+1)}{2} - N$ constantes arbitraires; elle ne dépend pas, alors, de fonctions arbitraires, nous dirons que son ordre d'involution est zéro. Lorsque le système S_k ne se trouve pas sous forme régulière, nous allons montrer que ses solutions non singulières sont solutions d'un système en involution d'ordre au moins égal à $k+1-p$, et nous indiquerons comment on peut profiter des hypothèses pour simplifier les calculs; il faut signaler le cas où l'on rencontrerait une relation ne contenant que x et y, où ce que nous venons de dire se trouve en défaut; mais, si cette relation ne se déduit pas immédiatement des équations du système donné, ce cas est exceptionnel.

6. Plaçons-nous donc dans le cas où S_k n'est pas sous forme régulière. En premier lieu, si les équations s_k sont indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k même moyennant S_{k-1}, il suffit d'opérer sur S_{k-1} et de mettre ce système sous forme régulière. Supposons maintenant que les équations s_k ne soient pas indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k, au besoin moyennant S_{k-1}; nous pouvons remplacer dans S_k, r des équations de s_k par les r équations, provenant de l'élimination des dérivées d'ordre k :

$$(8) \qquad b_1=0, \qquad b_2=0, \qquad \ldots, \qquad b_r=0$$

et qui sont de l'ordre $k-1$ au plus; soit s_k^1 les $p-r$ autres. Nous savons que *les équations s_{k+1} ne sont pas indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre $k+1$*; la proposition fondamentale qui nous servira par la suite, c'est qu'*il y en a parmi elles exactement $p+1-r$ qui le sont*, soit s_{k+1}^1. Pour le prouver, il suffit de montrer qu'il y a exactement r combinaisons linéaires, indépendantes, de ces équations, telles que le premier membre se réduise à une expression d'ordre inférieur à $k+1$, moyennant S_k. Tout d'abord, il existe r de ces combinaisons provenant des équations

$$(7) \qquad \frac{da_1}{dx}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{da_p}{dx}=0;$$

$b_i=0$ étant conséquence algébrique de S_k, $\dfrac{db_i}{dx}=0$ l'est de S_k et de (7). Il n'en existe pas d'autres : à cause de la façon dont a été choisie a_p, l'équation $\dfrac{da_p}{dy}=0$ ne peut entrer dans une telle combinaison, et, s'il en existait plus de r entre les équations (7), c'est que la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial p_{k,0}} & \dfrac{\partial a_1}{\partial p_{k-1,1}} & \cdots & \dfrac{\partial a_1}{\partial p_{0,k}} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial p_{k,0}} & \dfrac{\partial a_2}{\partial p_{k-1,1}} & \cdots & \dfrac{\partial a_2}{\partial p_{0,k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial a_p}{\partial p_{k,0}} & \dfrac{\partial a_p}{\partial p_{k-1,1}} & \cdots & \dfrac{\partial a_p}{\partial p_{0,k}} \end{matrix} \right\|$$

serait d'ordre inférieur à $p-r$; à moins que le système donné se décompose, ce qui est contraire aux hypothèses, il existerait moins de $p-r$ des équations s_k qui seraient indépendantes, moyennant S_{k-1}, par rapport aux dérivées d'ordre k, ce qui est également contraire aux hypothèses.

On déduit de là la conséquence suivante, relative aux équations $\dfrac{db_i}{dy}=0$; elles sont naturellement d'ordre au plus égal à k; $b_i=0$ étant conséquence algébrique de S_k, $\dfrac{db_i}{dy}=0$ l'est de S_{k+1}; chacune de ces équations doit l'être simplement de S_k et de l'ensemble des

$$\frac{db_1}{dx}=0, \quad \ldots, \quad \frac{db_r}{dx}=0, \tag{8'}$$

sinon il existerait une combinaison des équations s_{k+1} procurant une équation d'ordre inférieur à $k+1$ et distincte des r combinaisons dont nous venons d'établir l'existence.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le changement de variables, dont nous avons parlé dans l'énoncé des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$, était effectué, s'il était nécessaire; s'il en était ainsi, en revenant au système donné, on en conclut que des $2r$ équations $\dfrac{db_i}{dx}=0$, $\dfrac{db_i}{dy}=0$, il en existe r qui sont conséquences algébriques des r autres et de S_k; ce ne seront plus les r équations $\dfrac{db_i}{dy}=0$ qui seront dans ce cas, mais r équations prises parmi les $\dfrac{db_i}{dx}=0$ et les $\dfrac{db_i}{dy}=0$ que l'on choisira dans chaque cas particulier. Sauf avis contraire, nous supposerons dorénavant que le changement de variables a été effectué.

Observons encore que si les équations s_k sont indépendantes, même moyennant S_k, par rapport aux dérivées d'ordre k, les équations s_{k+1} le sont, même moyennant S_k par rapport aux dérivées d'ordre $k+1$.

7. Nous allons nous servir des résultats que nous venons d'établir pour décomposer l'opération de réduction du système S_k en un système complètement intégrable, en opérations partielles que nous définissons ainsi qu'il suit. Les r équations $b_i=0$ ne sont pas nécessairement, moyennant S_{k-1}, d'ordre $k-1$; autrement dit, si l'on met S_k sous forme régulière, les équations par quoi l'on remplace celles de s_k que l'on supprime, peuvent ne pas être d'ordre $k-1$; nous savons seulement, par hypothèse, qu'aucune n'est conséquence algébrique de s_k et des autres équations de S_k; mais si le système S_k contient effectivement des équations d'ordre inférieur à k, nous pouvons admettre que les équations $b_i=0$ sont d'ordre $k-1$, quittes plus tard à nous occuper de la forme régulière des systèmes. Les r équations $\frac{db_i}{dx}=0$ sont alors d'ordre k, mais elles ne seront pas nécessairement indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k; elles pourront même ne pas l'être par rapport à l'ensemble de leurs arguments, moyennant S_k; nous écartons pour l'instant cette dernière possibilité, que nous envisagerons plus loin.

Considérons le système S'_k composé de la manière suivante : les équations d'ordre inférieur à k, S'_{k-1}, comprennent les équations S_{k-1} et (8), et les équations d'ordre k, s'_k, comprennent s^1_k et (8'). S'_k admet toutes les solutions de S_k, sauf peut-être celles pour lesquelles les calculs d'élimination que l'on a dû effectuer seraient rendus illusoires. Si les équations s'_k sont indépendantes par rapport à l'*ensemble* de leurs arguments, même moyennant S'_{k-1}, S'_k jouit, comme nous l'allons montrer, des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$; en employant une notation dont nous avons expliqué le sens, nous pourrons le représenter aussi par $S'^{N'}_{k.p}$ ($N'>N$), les nombres k et p gardant la même valeur que pour le système donné :

Les équations s'_k sont bien au nombre de p, indépendantes; les équations obtenues en dérivant une fois les équations de S'_{k-1} sont conséquences algébriques de S'_k : cela est vrai par hypothèse pour les équations provenant de S_{k-1}, puisque toutes les équations de S_k sont conséquences algébriques d'équations figurant dans S'_k; quant aux équations (8), leurs dérivées par rapport à x (8'), figurent dans S'_k; leurs dérivées par rapport à y, d'après une remarque faite, sont conséquences algébriques de S_k et de (8), donc aussi de S'_k.

Les équations obtenues en dérivant une fois les équations s'_k par rapport à x et à y sont conséquences algébriques des dérivées par rapport à x de ces équations et de $\frac{d^2 a_p}{dy^2} = 0$ moyennant S'_k; désignons par s^1_{k+1} l'ensemble des équations dérivées par rapport à x des équations s^1_k et de $\frac{d^2 a_p}{dy^2} = 0$. Posons

$$(8'') \qquad \frac{d^2 b_1}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 b_2}{dx^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2 b_r}{dx^2} = 0,$$

désignons par s'_{k+1} l'ensemble des équations s^1_{k+1} et (8'') au nombre de $p+1$, dont sont conséquences toutes les équations dérivées de s'_k, moyennant S'_k; par S'_{k+1}, le système formé de S'_k et s'_{k+1}; il faut montrer que les équations dérivées de s'_k sont conséquences algébriques de S'_{k+1}; or, les équations dérivées de s^1_k sont conséquences de S_{k+1} par hypothèse, donc de S'_{k+1}; les équations dérivées par rapport à x de (8') figurent dans s'_{k+1}, il reste par conséquent à le montrer pour les équations $\frac{d^2 b_i}{dx\,dy} = 0$; or, les équations $\frac{db_i}{dy} = 0$ étant conséquences algébriques des S'_k, les équations $\frac{d^2 b_i}{dx\,dy} = 0$ le sont des équations S''_k et de celles obtenues en les dérivant par rapport à x, c'est-à-dire toutes équations figurant dans S'_{k+1}.

On définirait de la même manière le système S'_{k+h} au moyen des équations de S'_k, s^1_{k+1}, s^1_{k+2}, ..., s^1_{k+h}, (8''), (8'''), ..., $8^{(h+1)}$,

$$(8)^h \qquad \frac{d^h b_1}{dx^h} = 0, \qquad \frac{d^h b_2}{dx^h} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^h b_r}{dx^h} = 0.$$

Si maintenant les équations s'_k ne sont pas indépendantes par rapport à l'ensemble de leurs arguments, au besoin moyennant S'_{k-1}, c'est que les équations (8') ne le sont pas, au besoin moyennant les autres équations de S'_k; nous considérons alors le système $\overline{S'_k}$ comprenant toutes les équations de S'_k, sauf celles parmi les (8') qui sont conséquences algébriques des autres; c'est un système $S^{N'}_{k,p'}$, où $p' < p$, et il jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$; il suffit pour cela, après ce que nous venons de dire pour S'_k, de remarquer que si $p - p'$ des équations (8′) sont conséquences algébriques des autres équations de S'_k, les $p-p'$ dérivées par rapport à x de ces $p-p'$ équations, qui sont $p-p'$ équations de (8″), sont conséquences algébriques des autres équations de S'_{k+1}, que nous désignons par $\overline{S'_{k+1}}$. On définirait d'une façon évidente le système $\overline{S'_{k+h}}$.

En définitive, nous avons remplacé le système donné $S^{N}_{k,p}$ par un système $S^{N'}_{k,p'}$ ($N' > N$, $p' \leqq p$); nous remplacerons de même ce dernier par $S^{N''}_{k,p''}$ ($N'' > N'$, $p'' \leqq p'$), après avoir mis, si on le désire, les équations S'_{k-1} sous forme régulière et ainsi de suite, les différents systèmes que l'on obtient jouissant tous des propriétés d'un système $\mathcal{S}$. Supposons que chaque fois on mette les équations d'ordre au plus égal à $k-1$ sous forme régulière, si les équations d'ordre k d'un système auquel on est arrivé sont indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre, le système total est mis sous forme régulière, donc complètement intégrable.

8. *Remarques diverses.* — Ce que nous venons de dire ne s'applique plus lorsqu'il apparaît une relation non identique entre x et y, alors qu'on tente de mettre un des systèmes qui se présentent sous forme régulière. Dans ce cas, le système donné est impossible. Nous remarquons toutefois un résultat dont nous aurons à nous servir. Le raisonnement étant le même, quel que soit le rang, dans la série des systèmes successifs, du système duquel on déduit cette relation, nous supposons que c'est le système donné qui se trouve dans le cas signalé. Soit $b_i = 0$ la relation dont le premier membre ne contient que x et y; il résulte de ce qui précède que les deux relations en x et y: $\frac{db_i}{dx} = 0$, $\frac{db_i}{dy} = 0$ ne sont pas indépendantes, moyennant S_k; si $b_i = 0$ est la seule relation qui présente cette particularité, elles se réduisent donc à une seule. Si le fait se produit pour plusieurs relations $b_i = 0$, $b_j = 0$, ..., $b_l = 0$, les relations $\frac{db_i}{dy} = 0$, $\frac{db_j}{dy} = 0$, ..., $\frac{db_l}{dy} = 0$ sont chacune conséquence algébrique de $\frac{db_i}{dx} = 0$, $\frac{db_j}{dx} = 0$, ..., $\frac{db_l}{dx} = 0$ moyennant S_k.

Observons aussi que la marche que nous venons d'indiquer pour réduire le système donné à une forme complètement intégrable, peut être simplifiée en condensant plusieurs opérations successives, lorsque les relations (8) ne sont pas d'ordre $k-1$ moyennant S_{k-1}; supposons que les équations (8) se répartissent moyennant S_{k-1} en différents groupes d'équations

$$(8)^1 \quad \begin{cases} b_1^1 = 0; \quad b_2^1 = 0, \quad \ldots, \quad b_{r_1}^1 = 0, \quad b_{r_1+1}^2 = 0, \quad \ldots \\ \qquad b_{r_2+1} = 0, \quad \ldots, \quad b_{r_i+1}^{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad b_r^{i+1} = 0 \end{cases}$$

respectivement d'ordres $k_1 > k_2 > \ldots > k_{i+1}$.

Si $k_1 < k-1$, on adjoint au système S'_{k-1} les équations obtenues en dérivant les équations $(8)^1$, jusque $k-k_1-1$ fois par rapport à x, on met le système obtenu sous forme régulière, s'il ne l'est déjà; on est ainsi amené à remplacer certaines des équations $\dfrac{d^{k-k_1-1}b}{dx^{k-k_1-1}} = 0$ par d'autres d'ordres moindres que l'on répartit en groupes comme on l'a faitpour les équations (8); on dérive les équations de chacun de ces groupes par rapport à x un nombre de fois tel que les équations d'ordre le plus élevé que l'on obtient soient d'ordre $k-1$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un système d'ordre $k-1$ mis sous forme régulière; on considère alors les dérivées d'ordre k provenant d'une dérivation par rapport à x des équations d'ordre $k-1$ que l'on a obtenues en partant des $b_i = 0$, on les adjoint à s'_k, et sur le système obtenu on raisonne comme sur S_k. Il peut arriver que les équations que l'on adjoint ainsi à s'_k soient en nombre inférieur à r, ou que l'on soit arrêté en route par l'apparition d'une relation non identique entre x et y (¹).

Si $r=1$, et qu'il se présente une relation entre z, x et y seules, la fonction z de x et y définie par cette relation est solution de S_k: une réduction ultérieure n'est plus possible puisque les équations d'un ordre quelconque du nouveau système sont nécessairement indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre; ce cas ne peut se produire que si $p = k+1$.

Lorsqu'on aboutit à un système complètement intégrable $S_k^{K_1}$, il arrive que l'on n'ait pas besoin de s'occuper des équations de ce système jusqu'à l'ordre k et que le système $S_{k'}^{K_1}$, $k' < k$ soit lui-même complètement intégrable; du reste, en cours de route, il peut se présenter des systèmes d'ordres inférieurs à k qui jouissent des propriétés

(¹) Certaines des équations nouvelles que l'on introduit peuvent se décomposer; il faut alors considérer séparément tous les systèmes que l'on obtient en ne considérant qu'un facteur de la décomposition : chacun de ces systèmes jouit des mêmes propriétés que s'il ne provenait pas d'une décomposition.

d'un système S et qui sont formés des équations jusqu'à un ordre inférieur à k du système auquel on est arrivé : cela permet, naturellement, de simplifier les calculs en s'occupant seulement du système de l'ordre le moins élevé.

9. *Application.* — Revenons au système A; nous supposons que $[f, F] = 0$ en soit conséquence algébrique et qu'il en soit de même de $D = 0$. D'après ce qui précède, il existe en général un système, que nous désignons par la notation B, complètement intégrable et qui admet toutes les solutions non singulières de A.

Pour former le système B, nous distinguons les cas suivant le nombre de directions de caractéristiques communes aux équations (1); s'il y a r directions communes, nous obtiendrons un système B^r; comme différentes circonstances peuvent se présenter encore, nous emploierons la notation B^r_ρ pour désigner les différents systèmes auxquels on peut être conduit; plus ρ sera grand, plus la réduction sera compliquée.

Considérons d'abord le cas où l'équation (e) est du premier ordre : $m = 1$; le système donné est équivalent à celui qui est formé par l'équation (e) et une équation d'ordre $M' < M$, et ce nouveau système est complètement intégrable; il peut se faire que le système donné soit impossible parce que l'on déduit de (A) une relation ne contenant que x et y, comme aussi que l'équation du premier ordre soit intégrale intermédiaire de celle d'ordre M.

Pour donner une idée de la façon dont les choses se passent dans les cas les plus généraux, considérons une équation du troisième ordre et une du quatrième :

$$(A_6)\quad \left\{\begin{array}{lr}
f = 0; & \\
\dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & F = 0, \\
\dfrac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2f}{dx\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^2f}{dy^2} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0, \quad \dfrac{dF}{dy} = 0, \\
\dfrac{d^3f}{dx^3} = 0, \quad \dfrac{d^3f}{dx^2\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^3f}{dx\,dy^2} = 0, \quad \dfrac{d^3f}{dy^3} = 0; & \dfrac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2F}{dx\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^2F}{dy^2} = 0.
\end{array}\right.$$

Supposons d'abord que les deux équations admettent une direction commune de caractéristiques; le système (A_5) se trouve sous forme régulière et des équations d'ordre 6 de (A_6), on déduit une équation (ε) d'ordre inférieur à 6. Si (ε) est du cinquième ordre, il suffit de l'adjoindre à (A_5) et l'on obtient un système complètement intégrable (B_1^1). Supposons que (ε) soit du quatrième ordre, $\varphi_4 = 0$, nous formons le système (B_2^1) :

$$(B_2^1)\left\{\begin{array}{llll} f=0; & & & \\ \dfrac{df}{dx}=0, \quad \dfrac{df}{dy}=0; & & F=0; & \varphi_4=0; \\ \dfrac{d^2f}{dx^2}=0, \quad \dfrac{d^2f}{dx\,dy}=0, \quad \dfrac{d^2f}{dy^2}=0; & & \dfrac{dF}{dx}=0, \quad \dfrac{dF}{dy}=0; & \dfrac{d\varphi_4}{dx}=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & & \ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots; \end{array}\right.$$

la ligne pointillée pour les équations du sixième ordre.

Si ce système se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable; sinon $\frac{d\varphi_4}{dx} = 0$ est conséquence algébrique des autres équations de (B_2^1) et d'une autre d'ordre inférieur à 5; supposons, pour préciser, cette dernière du deuxième ordre $\psi_2 = 0$; nous formons le système

$$(B_4^1)\left\{\begin{array}{llll} & & & \psi_2=0; \\ f=0; & & & \dfrac{d\psi_2}{dx}=0; \\ \dfrac{df}{dx}=0, \quad \dfrac{df}{dy}=0; & F=0; & \varphi_4=0; & \dfrac{d^2\psi_2}{dx^2}=0; \\ \dfrac{d^2f}{dx^2}=0, \quad \dfrac{d^2f}{dx\,dy}=0, \quad \dfrac{d^2f}{dy^2}=0; & \dfrac{dF}{dx}=0, \quad \dfrac{dF}{dy}=0; & & \dfrac{d^3\psi_2}{dx^3}=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si ce système se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable; sinon, on continue la réduction suivant le même procédé.

Occupons-nous maintenant du cas où les deux équations admettent, par exemple, deux directions communes de caractéristiques : des équations d'ordre 6 de (A_6), on déduit deux équations d'ordre inférieur à 6; d'ailleurs, le système (A_5) ne se trouve pas sous forme régulière, ses équations d'ordre 5 ne sont plus indépendantes et l'on en déduit une équation, que nous supposons du troisième ordre, $\chi_3 = 0$. Le système (A_4) se trouve, par contre, sous forme régulière. Nous formons alors le système (B_2^2) :

$$
(B_2^2)\left\{
\begin{array}{llll}
f=0; & & \chi_3=0; & \\
\dfrac{df}{dx}=0,\quad \dfrac{df}{dy}=0; & F=0; & \dfrac{d\chi_3}{dx}=0, & \dfrac{d\chi_3}{dy}=0; \\
\dfrac{d^2f}{dx^2}=0,\quad \dfrac{d^2f}{dx\,dy}=0,\quad \dfrac{d^2f}{dy^2}=0; & \dfrac{dF}{dx}=0; & \dfrac{d^2\chi_3}{dx^2}=0, & \dfrac{d^2\chi_3}{dx\,dy}=0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Si ce système se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable et il suffit d'y considérer les équations jusqu'à l'ordre 4. Sinon, deux sortes de circonstances peuvent se produire, suivant que de ses équations d'ordre 4 on en peut déduire une ou deux d'ordre inférieur à 4 et, suivant le cas, on considérera des systèmes tels que les suivants :

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
f=0; & & \chi_3=0; & G_3=0; \\
\dfrac{df}{dx}=0,\quad \dfrac{df}{dy}=0; & F=0; & \dfrac{d\chi_3}{dy}=0; & \dfrac{dG}{dx}=0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots; & & \ldots\ldots; & \ldots\ldots;
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lllll}
 & & & & H_2=0; \\
f=0; & & \chi_3=0; & H_3=0, & \dfrac{dH_2}{dx}=0; \\
\dfrac{df}{dx}=0,\quad \dfrac{df}{dy}=0; & F=0; & & \dfrac{dH_3}{dx}=0, & \dfrac{d^2H_2}{dx^2}=0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots;
\end{array}
\right.
$$

dans ce dernier système, il suffit de considérer les équations jusqu'au troisième ordre; et ainsi de suite.

Il pourra se faire que l'on arrive à un système en involution d'ordre 1 ou 2, ou que l'on constate l'impossibilité du système donné par l'apparition d'une relation ne contenant que x et y.

Lorsque les deux équations (1) sont du même ordre et admettent les mêmes directions de caractéristiques, leur système est équivalent à celui qui est formé par l'une d'elles et une autre d'ordre moindre, sur lequel on poursuit la discussion comme on l'a indiqué précédemment. Un tel cas n'est jamais à envisager, si l'on opère sur des équations à coefficients numériques, parce que l'on peut former immédiatement la nouvelle équation dont il vient d'être question; mais il se présentera dans certaines discussions où la résolution algébrique des équations est impossible.

10. *Les systèmes* $\mathfrak{T}$. — Nous avons montré jusqu'ici que la relation

$$(3) \qquad [f, F] = 0$$

est la condition de complète intégrabilité du système (A) lorsque les deux équations n'admettent pas de direction commune de caractéristique, puis que, si cette relation est conséquence algébrique de (A), on déduit de (A) un système B_ρ'' complètement intégrable. La formation de B_ρ'' comporte une suite d'opérations qui n'exigent nullement que la condition relative au crochet soit satisfaite. Il est clair qu'en général, le système que l'on peut construire à partir de deux équations admettant des directions communes de caractéristiques n'est pas complètement intégrable; nous allons montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il le soit est que la relation (3) en soit conséquence algébrique. En vue d'une application ultérieure, nous nous proposons un problème un peu plus général, dont la solution d'ailleurs n'est pas plus compliquée.

Nous considérerons un système T_k constitué de la même façon que S_k; nous disons qu'il jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{T}$ lorsqu'il jouit de propriétés analogues à celles d'un système $\mathfrak{S}$, mais en tenant compte au besoin de relations qui n'y figurent pas :

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad U_l = 0;$$

nous en désignons l'ensemble par U; et par $U^{(K)}$ l'ensemble des U et de leurs dérivées prises *par rapport à x* jusqu'à l'ordre K.

Comme notations, le seul changement consiste à remplacer partout les lettres S, s par T, t, les indices gardant la même signification. Il importe toutefois de préciser que les relations $\frac{da_i}{dy} = 0$ $(i < p)$ sont conséquences algébriques de T_{k+1} et de U, les relations $\frac{d^2 a_i}{dx\,dy} = 0$ $(i < p)$ le sont de T_{k+2} et U', etc.

Lorsque le système T_k se trouve, même moyennant U, sous forme régulière, ces dernières relations en constituent les conditions de complète intégrabilité. Nous supposons que si les équations de quelque ordre ρ de T_k ne sont pas indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre ρ, c'est peut-être grâce à des équations figurant dans T_k, mais non à des équations figurant dans U; ce point est essentiel : on omettra peut-être ainsi certaines solutions singulières, que, dans certains cas simples, nous chercherons directement.

Le système (A) jouit évidemment des propriétés d'un système T moyennant (3).

Supposons que T_k ne se trouve pas sous forme régulière et effectuons la réduction comme nous l'avons faite pour S_k : les relations $\frac{db_i}{dy} = 0$ sont conséquences algébriques de T_{k+1} et de U, les $\frac{d^2 b_i}{dx\,dy}$ le sont de T_{k+2} et U′, etc.

Soit $T_k^{(K)}$ le système auquel on aboutit et qui se trouve sous forme régulière. Nous allons montrer que, *pour que* $T_k^{(K)}$ *soit complètement intégrable, il suffit* (¹) *que les* U, *supposées d'ordre au plus égal à* k, *en soient conséquences algébriques*.

En effet, les équations dérivées une fois par rapport à x et à y des équations $T_k^{(K)}$ qui sont d'ordre au plus égal à $k+1$, sont conséquences algébriques d'équations figurant dans $U^{(K)}$ et $T_{k+K}^{(K)}$, ou encore d'équations figurant toutes dans $T_{k+K}^{(K)}$, car les U étant conséquence de $T_k^{(K)}$, les $U^{(K)}$ le sont de $T_{k+K}^{(K)}$, système qui contient certainement $T_k^{(K)}$ et les dérivées de ses équations, jusqu'à l'ordre K, par rapport à x.

D'autre part, d'équations d'ordre quelconque ρ de $T_{k+K}^{(K)}$, on ne peut déduire d'équations d'ordre inférieur à ρ, même en tenant compte de $T_{\rho-1}^{(K)}$. Les équations déduites de $T_k^{(K)}$ par une dérivation et qui sont d'ordre $k+1$ au plus, ne peuvent être conséquences d'équations d'ordre supérieur à $k+1$ figurant dans $T_{k+K}^{(K)}$; elles ne le sont donc que d'équations figurant dans $T_{k+1}^{(K)}$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Si, parmi les relations U, il en est qui s'obtiennent au moyen d'autres prises parmi elles, soit $\overline{U}$ et de leurs dérivées par rapport à x seul, moyennant au besoin $T_k^{(K)}$, il suffit que les $\overline{U}$ soient conséquences algébriques de $T_k^{(K)}$ pour que ce système soit complètement intégrable; on le voit en considérant un $T_{k+K'}^{(K)}$ où $K' > k$.

De même si, parmi les U, il s'en trouve jusqu'à l'ordre $k' > k$, on constate qu'il suffit qu'elles soient conséquence de $T_{k'}^{(K)}$ pour que le système $T_k^{(K)}$ soit complètement intégrable.

11. *Applications : Une équation du premier ordre et une du deuxième ordre.* — Soient

$$(A)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, p, q) = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0. \end{cases} \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

(¹) Ces conditions sont, d'ailleurs, évidemment nécessaires.

Ici

$$D = F_r f_q^2 - F_s f_p f_q + F_t f_p^2.$$

Lorsque $D \neq 0$, le système (A) se trouve sous forme régulière; il est complètement intégrable si

$$[f, F] = f_p\left(\frac{dF}{dx}\right) + f_q\left(\frac{dF}{dy}\right) - F_r\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) - F_s\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) - F_t\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = 0$$

en est conséquence algébrique.

Si la relation $D = 0$ est vérifiée, soit identiquement, soit comme conséquence de (A), ce système est équivalent à celui que l'on obtient en y substituant, à $F = 0$, une équation d'ordre moindre $\varphi = 0$, et l'on est ramené à la résolution de deux équations du premier ordre. Formons le système (B′) :

$$(\mathrm{B}')\qquad \left\{\begin{array}{lll} f = 0; & & \varphi = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, & \dfrac{df}{dy} = 0; & \dfrac{d\varphi}{dx} = 0. \end{array}\right.$$

La relation $[f, F] = 0$ est équivalente à $[f, \varphi] = 0$, ou encore à $\dfrac{d\varphi}{dy} = 0$, en tenant compte naturellement des équations écrites, et constitue la condition de complète intégrabilité si $f = 0$ et $\varphi = 0$ permettent de calculer p et q; sinon l'on raisonne comme plus haut. Les dérivées de l'équation $\varphi = 0$ peuvent se calculer au moyen des relations

$$f_p\left(\frac{dF}{dx}\right) - F_r\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) - F_t\frac{f_p}{f_q}\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) = 0,$$

$$f_p\left(\frac{dF}{dy}\right) - F_r\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) - F_t\frac{f_p}{f_q}\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = 0,$$

en supposant comme toujours $f_q \neq 0$.

Deux équations du second ordre. — Soient

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{ll} f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0; & F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0, \quad \dfrac{dF}{dy} = 0 \end{array}\right.$$

et

$$D = \begin{vmatrix} f_r & f_s & f_t & 0 \\ 0 & f_r & f_s & f_t \\ F_r & F_s & F_t & 0 \\ 0 & F_r & F_s & F_t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}[f, F] = \quad & f_r\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + f_s\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right) + f_t\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) \\ & - F_r\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) - F_s\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right) - F_t\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right).\end{aligned}$$

Si $D \neq 0$, (A) est complètement intégrable si $[f, F] = 0$ en est conséquence algébrique.

Si $D = 0$, deux cas sont à distinguer, suivant qu'il y a une ou deux directions communes de caractéristiques.

1° Une direction commune : des équations du troisième ordre de (A) on déduit une équation d'ordre inférieur à 3 : $\varphi_i = 0$, $i = 2$, 1 ou 0.

Formons, suivant les cas, les systèmes (B_1^1), (B_2^1) ou (B_3^1) :

$$(B_i^1)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} & & & & & & \varphi_0 = 0; \\ & & & & \varphi_1 = 0 & & \dfrac{d\varphi_0}{dx} = 0; \\ f = 0; & & F = 0 & & \varphi_2 = 0 & \dfrac{d\varphi_1}{dx} = 0 & \dfrac{d^2\varphi_0}{dx^2} = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & & \dfrac{dF}{dx} = 0 & \text{avec} & \dfrac{d\varphi_2}{dx} = 0 \quad \text{ou} & \dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} & \dfrac{d^3\varphi_0}{dx^3} = 0. \end{array}\right.$$

Si $f = 0$, $F = 0$, $\varphi_2 = 0$ permettent de calculer r, s, t; le système (B_1^1) admet comme condition de complète intégrabilité $[f, F] = 0$, qui est équivalente à $\frac{d\varphi_2}{dx} = 0$; il suffit, pour l'intégrer, de s'occuper de ses équations du second ordre. Si le calcul de r, s, t est impossible, on doit considérer le système (B_2^1) avec $\varphi_1 = 0$; la condition $[f, F] = 0$ est équivalente à $\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$, et, si $f = 0$, $F = 0$, $\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$ permettent de calculer r, s, t, elle constitue la condition d'intégrabilité de (B_2^1), et il suffit de s'occuper de l'équation de premier ordre et de celles du second : soit (B_4^1) leur ensemble. Lorsque les trois équations du second ordre ne sont pas indépendantes, le système (B_4^1) jouit cependant des propriétés d'un système **T**, moyennant une relation du second ordre, et sa dérivée par rapport à x; on remplace $\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$ par une équation du premier ordre $\psi_1 = 0$,

$$(B_4^1) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} & & \varphi_1 = 0, & \psi_1 = 0; \\ f = 0, & F = 0, & & \frac{d\psi_1}{dx} = 0; \end{array} \right.$$

si les deux équations du premier ordre permettent de calculer p et q, la condition d'intégrabilité est fournie par la relation $\frac{d\varphi_1}{dy} = 0$; si le calcul de p et q est impossible, la fonction z, que l'on est conduit à calculer, est solution des équations données, sous la seule condition que $\frac{d\varphi_1}{dy} = 0$ soit conséquence de (B_4^1).

Plaçons-nous, maintenant, dans le cas où $\varphi_1 = 0$ ne contient ni p, ni q, c'est-à-dire où l'on doit considérer le système (B_3^1), φ_0 contenant x, y et z seulement. La fonction z, ainsi définie, serait solution du système donné si les deux relations $\frac{d\varphi_0}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi_0}{dy} = 0$ se réduisaient à une seule, ce qui est, évidemment, impossible; elle ne pourra l'être que si $\frac{d^2\varphi_0}{dx\,dy} = 0$ et $\frac{d^2\varphi_0}{dy^2} = 0$ sont vérifiées : ce que l'on pouvait écrire *a priori*.

Enfin, il peut arriver aussi que le système donné soit impossible, ou encore, en involution d'ordre 1.

2° Deux directions communes de caractéristiques : alors, les relations

$$\frac{f_r}{F_r} = \frac{f_s}{F_s} = \frac{f_t}{F_t} \qquad D^2$$

sont conséquences des équations données, qui forment un système équivalent à celui que l'on obtient en y remplaçant l'une d'entre elles : $F = 0$ par exemple, par une équation d'ordre moindre, et l'on est ramené à discuter un système formé d'une équation du premier et d'une du second :

$$(B_1^2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} & & \varphi = 0; & \\ & f = 0; & \frac{d\varphi}{dx} = 0, & \frac{d\varphi}{dy} = 0; \\ \frac{df}{dx} = 0, & \frac{df}{dy} = 0; & \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, & \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0; \end{array} \right.$$

la relation $[f, F] = 0$ est équivalente à $[f, \varphi] = 0$, c'est-à-dire à une relation du second ordre en z; les deux équations $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ le sont respectivement à

$$F_t\left(\frac{df}{dx}\right) - f_t\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \quad \text{et} \quad F_t\left(\frac{df}{dy}\right) - f_t\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

nous supposons, ainsi, que l'une des quantités f_t, F_t n'est pas nulle.

Deux équations d'ordre m. — Nous signalons uniquement le cas où les deux équations ont m directions communes de caractéristiques, c'est-à-dire où elles entraînent les relations

$$(\mathrm{D}^m) \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{m,0}}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_{m,0}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{m-1,0}}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_{m-1,0}}} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{0,m}}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_{0,m}}};$$

leur système est équivalent à celui que l'on obtient en y remplaçant une des équations par une autre d'ordre inférieur à m : $\varphi = 0$.

$$(\mathrm{B}_1^m) \left\{ \begin{array}{ll} & \varphi = 0; \\ f = 0; & \dfrac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \dfrac{d\varphi}{dy} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \dfrac{d^{m-2} f}{dx^{m-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{m-2} f}{dy^{m-2}} = 0; & \dfrac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}} = 0, \quad \dfrac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-2}\,dy} = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{m-1}\varphi}{dy^{m-1}} = 0; \\ \dfrac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} = 0, \quad \ldots \quad \dfrac{d^{m-1} f}{dy^{m-1}} = 0; & \dfrac{d^m\varphi}{dx^m} = 0, \quad \dfrac{d^m\varphi}{dx^{m-1}\,dy} = 0, \quad \ldots \quad \dfrac{d^m\varphi}{dx\,dy^{m-1}} = 0. \end{array} \right.$$

La relation $|f, F| = 0$ est équivalente à $|f, \varphi| = 0$ et les deux équations $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, respectivement à

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Remarque. — Pour former les différents systèmes (B) que nous avons considérés, nous avons supposé que nous pouvions effectuer les éliminations nécessaires; cela est indispensable pour l'intégration effective du système donné. Mais, dans les questions dont nous aurons à nous occuper, et qui se présentent comme des discussions de systèmes tels que (1), il sera impossible d'effectuer ces éliminations, et cela nous sera d'ailleurs inutile. Le cas s'est présenté déjà pour deux équations du premier ordre admettant même direction de caractéristique. En voici un autre :

Considérons deux équations du deuxième ordre admettant deux directions communes de caractéristique. Nous avons indiqué comment est formé le système (B_1^2); on peut aussi énoncer le résultat de la façon suivante : si les équations (C_1^2) :

$$(C_1^2) \quad f=0, \qquad F=0, \qquad F_t\left(\frac{df}{dx}\right)-f_t\left(\frac{dF}{dx}\right)=0, \qquad F_t\left(\frac{df}{dy}\right)-f_t\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$$

permettent d'exprimer r, s, t, et p ou q au moyen de x, y, z, et q ou p, et si les fonctions ainsi obtenues R, S, T, et P ou Q satisfont identiquement à la relation $[f, F]=0$ (qui, moyennant les équations considérées, se réduit au deuxième ordre), ces fonctions permettent de former un système complètement intégrable que l'on peut disposer suivant le schéma fourni par (B_1^2) : une équation du premier ordre, trois équations du second; par exemple :

$$p = P(x, y, z, q),$$
$$r = R, \qquad s = S, \qquad t = T.$$

Dans la suite, nous désignerons par C_k^i le système d'équations qui permet de former celles qui figurent dans B_k^i; ce sont les systèmes C qui interviendront, la plupart du temps, directement dans nos calculs; les systèmes B indiquant quel doit être le schéma de la résolution, quant aux nombres des équations de chaque ordre.

Nous avons pris un exemple simple; il suffira, sans doute, à donner une idée de la façon dont on opérera dans un cas plus compliqué.

Dans le cas où $r < m$, le premier système C_1^r, que l'on considère, se confond avec le premier système B_1^r; des équations $(e_m)_{M-r}$, $(E_M)_{m-r}$, on déduit une relation d'ordre $m+M-r$ exactement, des équations d'ordre $m+M-r+1$, deux d'ordre $m+M-r$, même moyennant $(e_m)_{M-r}$, $(E_M)_{m-r}$, ...

12. *Sur certaines solutions singulières des systèmes considérés.* — Les résultats que nous venons d'établir peuvent être appliqués avantageusement aux systèmes qui définissent les solutions singulières quand elles existent. Nous ne nous occuperons que des cas les plus simples.

Considérons d'abord deux équations, l'une du premier, l'autre du deuxième ordre, n'admettant pas de direction commune de caractéristiques :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{l} f(x, y, z, p, q) = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0, \end{array}\right. \qquad \mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Les solutions que nous avons déterminées dans ce cas n'annulent pas D : $\mathrm{D} = \mathrm{F}_r f_q^2 - \mathrm{F}_s f_p f_q + \mathrm{F}_t f_p^2$; celles qui annulent D sont des solutions singulières; supposons qu'il en existe telles que $f_q \neq 0$, et désignons-les par σ.

Rappelons que, si $\mathrm{D} = 0$ était conséquence de (A), nous aurions à former le système (B_1^1) :

$$(\mathrm{B}_1^1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & f = 0; & \varphi = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, & \dfrac{df}{dy} = 0; & \dfrac{d\varphi}{dx} = 0, \end{array}\right.$$

équivalent à celui que l'on déduit de (C_1^1) :

$$(\mathrm{C}_1^1)\qquad \left\{\begin{array}{l} f = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0, \qquad \mathrm{F} = 0, \\ \mathrm{H} = f_p\left(\dfrac{df}{dx}\right) - \mathrm{F}_r\left(\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right) - \mathrm{F}_t \dfrac{f_p}{f_q}\left(\dfrac{d^2 f}{dx\,dy}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Les solutions σ satisfont à $\mathrm{D} = 0$, $[f, \mathrm{F}] = 0$ et aux équations figurant dans (C_1^1). Elles satisfont, par conséquent, à une équation du premier ordre $\psi = 0$ déduite des équations du deuxième ordre de (C_1^1) : si $\mathrm{F} = 0$ est linéaire par rapport à r, s, t, $\psi = 0$ se déduit de $\dfrac{df}{dx} = 0$, $\dfrac{df}{dy} = 0$, $\mathrm{F} = 0$, comme $\psi = 0$; si F n'est pas linéaire en r, s, t, pour former cette équation $\psi = 0$, on peut, par exemple, tirer r, s, t de $\dfrac{df}{dy} = 0$, $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{H} = 0$, et porter dans $\dfrac{df}{dx} = 0$.

Dans tous les cas, les équations dérivées de $\psi = 0$ par rapport à x et à y sont équivalentes, moyennant $\mathrm{D} = 0$, et les relations figurant dans (C_1^1) à

$$H = 0, \qquad K = f_p\left(\frac{df}{dy}\right) - F_r\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) - F_t \frac{f_p}{f_q}\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = 0.$$

Formons, par exemple, le système

$$(9) \qquad \begin{cases} f = 0, & \psi = 0, \\ \dfrac{df}{dy} = 0, & F = 0, \quad H = 0. \end{cases}$$

Nous allons voir qu'il jouit des propriétés d'un système T moyennant $D = 0$, $[f, F] = 0$, et leurs dérivées par rapport à x. Nous n'insistons que sur les points suivants : la relation $\frac{d\psi}{dx} = 0$ est, moyennant $D = 0$, conséquence des équations (9); la relation $\frac{d\psi}{dy} = 0$ est, dans les mêmes conditions, conséquence des équations (9) et de $K = 0$; or, cette dernière relation, à cause de la façon même dont on calcule l'expression $[f, F]$ et des hypothèses faites, est conséquence des relations (9); donc $\frac{d\psi}{dy} = 0$ est, moyennant $D = 0$ et $[f, F] = 0$, conséquence de (9). Les équations du troisième ordre, déduites de (9), sont, moyennant $D = 0$, $[f, F] = 0$ et leurs dérivées par rapport à x, conséquences de

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, \qquad \frac{d^2 f}{dy^2} = 0, \qquad \frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dH}{dx} = 0,$$

puisque $\frac{d^2\psi}{dx\,dy} = 0$ peut être obtenue par dérivation de $\frac{d\psi}{dx} = 0$ par rapport à x.

Si $f = 0$ et $\psi = 0$ permettent de calculer p et q, si, de plus, $D = 0$ et $[f, F] = 0$ sont conséquences de (9) ou de C^1, on obtient des intégrales dépendant d'une constante arbitraire, qui sont solutions singulières des équations données. Si $f = 0$ et $\psi = 0$ ne permettent pas de calculer p et q, on poursuit la réduction comme il a été indiqué.

Considérons maintenant deux équations d'ordre m et M n'admettant pas de direction commune de caractéristique : on opérerait comme nous venons de le faire pour déterminer les solutions singulières annulant D, sans annuler tous ses mineurs du premier ordre.

Les solutions que l'on obtient ainsi sont engendrées par une famille de caractéristiques communes aux deux équations; il peut exister aussi des solutions singulières engendrées de plusieurs façons par des caractéristiques communes.

Soient, par exemple, deux équations du deuxième ordre :

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} f=0; & \mathrm{F}=0; \\ \dfrac{df}{dx}=0,\quad \dfrac{df}{dy}=0; & \dfrac{d\mathrm{F}}{dx}=0,\quad \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}=0. \end{cases}$$

Nous admettons que ces deux équations ne possèdent pas les mêmes directions de caractéristiques (elles peuvent, toutefois, posséder une seule direction commune). Dans ce cas, nous ne nous sommes occupés que de solutions qui n'annulent pas les relations (D^2) :

$$(\mathrm{D}^2)\qquad \frac{\mathrm{F}_r}{f_r}=\frac{\mathrm{F}_s}{f_s}=\frac{\mathrm{F}_t}{f_t}.$$

Si les (D^2) étaient conséquences de (A) nous aurions à former (B_1^2),

$$(\mathrm{B}_1^2)\qquad \begin{cases} & \varphi=0, \\ f=0; & \dfrac{d\varphi}{dx}=0,\quad \dfrac{d\varphi}{dy}=0, \\ \dfrac{df}{dx}=0,\quad \dfrac{df}{dy}=0; & \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}=0,\quad \dfrac{d^2\varphi}{dx\,dy}=0, \end{cases}$$

équivalent à celui que l'on déduit de

$$f=0;\qquad \mathrm{F}=0;\qquad \mathrm{H}=f_t\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}_t\left(\frac{df}{dx}\right)=0.$$

$$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}=0;\qquad [\mathrm{H}]_x=f_t\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right)-\mathrm{F}_t\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=0;$$

$$\mathrm{K}=f_t\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}_t\left(\frac{df}{dy}\right)=0;$$

$$[\mathrm{K}]_x=f_t\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\right)-\mathrm{F}_t\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)=0.$$

Proposons-nous de rechercher, si elles existent, les solutions σ qui satisfont aux D^2, mais telles que $f_t\neq 0$. Ces solutions satisfont à $\mathrm{H}=0$, $\mathrm{K}=0$, donc à une équation du premier ordre : $\psi=0$; si f et F sont linéaires en r, s, t, on peut former $\psi=0$ au moyen de $f=0$

et $F = 0$; si elles ne le sont pas, on pourra calculer r, s, t au moyen de $f = 0$, $H = 0$, $K = 0$ et porter dans $F = 0$.

Formons le système (10)

$$(10) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad \psi = 0, \\ f = 0, \qquad\qquad H = 0, \qquad K = 0. \end{cases}$$

Il jouit, moyennant $[f, F] = 0$ et D^2, et leurs dérivées par rapport à x, des propriétés d'un système $\mathbf{T}$: la relation $\frac{d\psi}{dx} = 0$ est conséquence, moyennant D^2, de $f = 0$, $\psi = 0$ et $H = 0$; de même $\frac{d\psi}{dy} = 0$ l'est de $f = 0$, $\psi = 0$, $K = 0$. Les relations $\frac{dH}{dx} = 0$, $\frac{dK}{dx} = 0$ le sont de (10) et (11), moyennant D^2 et les dérivées par rapport à x :

$$(11) \qquad \frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{df}{dy} = 0, \qquad [H]_x = 0, \qquad [K]_x = 0,$$

$\frac{dH}{dy} = 0$ est conséquence, à cause de l'hypothèse $f_t \neq 0$, des équations (10) et (11) et de $[f, F] = 0$, sinon, on en déduirait une relation entre $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 f}{dx\, dy}\right)$, $\left(\frac{d^2 F}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 F}{dx\, dy}\right)$ distincte de $[H]_x = 0$ et $[K]_x = 0$, ce qui est impossible; de même pour $\frac{dK}{dy} = 0$.

Si les équations (10), ou C^2, permettent de calculer l'une des dérivées premières et r, s, t, si D^2 et $[f, F] = 0$ sont conséquences de (10) et (11), ou de C^2, nous obtenons des solutions singulières des équations données qui dépendent de deux constantes arbitraires; sur chacune d'elles les caractéristiques des deux équations sont confondues.

Ceci s'étend au système formé par deux équations d'ordre m, pour les solutions singulières engendrées de m façons par des caractéristiques communes aux deux équations.

Les premières équations du système C^m sont

$$f = 0; \quad F = 0; \quad F_{p_{0,m}}\left(\frac{df}{dx}\right) - f_{p_{0,m}}\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \quad F_{p_{0,m}}\left(\frac{df}{dy}\right) - f_{p_{0,m}}\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

. . . .

Supposons que ces quatre équations permettent de calculer une dérivée d'ordre $m - 1$ et trois d'ordre m; on forme un système d'ordre $m + M - 1$ composé comme B_1^m; si les relations

$$\frac{F_{p_{m,0}}}{f_{p_{m,0}}} = \frac{F_{p_{m-1,1}}}{f_{p_{m-1,1}}} = \ldots = \frac{F_{p_{0,m}}}{f_{p_{0,m}}}$$

sont conséquences des quatre relations écrites, si, de plus, $[f, F] = 0$ l'est du système d'ordre $m + M - 1$, ce dernier est complètement intégrable et fournit des solutions singulières des deux équations données. Si le calcul indiqué est impossible, le système d'ordre $m + M - 1$ que l'on a considéré, ne se trouve pas sous forme régulière et l'on doit poursuivre sa réduction.

Exemple. — Considérons le système

$$f(s, t, q, z, x, y) = 0, \qquad F(s, t, q, z, x, y) = 0.$$

Les deux relations que nous adjoignons pour former C_1^2

$$f_t\left(\frac{dF}{dx}\right) - F_t\left(\frac{df}{dx}\right) = 0, \qquad f_t\left(\frac{dF}{dy}\right) - F_t\left(\frac{df}{dy}\right) = 0$$

contiennent seulement p en plus des arguments qui figurent dans f et F. Le système formé comme B_1^2 ne se trouve pas sous forme régulière, les trois équations du deuxième ordre n'y contenant pas r; des quatre relations écrites de C_1^2 nous tirons deux relations du premier ordre par quoi nous remplaçons deux des relations de C_1^2, puis nous adjoignons la dérivée de l'une d'elles par rapport à x, comme il résulte de la discussion de deux équations du premier et du deuxième ordre; c'est du moins le cas général, car il peut se faire qu'on obtienne une relation ne contenant que x, y et z. Comme condition d'intégrabilité, nous n'avons à considérer que $\frac{f_s}{F_s} = \frac{f_t}{F_t}$ et $[f, F] = 0$. La première ne peut être conséquence que des quatre relations écrites de C_1^2, puisqu'elle ne contient pas r.

Plus généralement, les conditions D^r qui expriment que les deux équations ont r directions communes de caractéristiques n'étant pas satisfaites comme conséquences de (A), nous nous sommes bornés jusqu'ici à rechercher les solutions n'annulant pas les D^r. Formons le système C^r dont il a été question; nous n'avons pas envisagé un seul système C^r, celui dont il s'agit est parfaitement déterminé par la constitution du système (A), ou, s'il y a discussion, suivant les diverses hypothèses que l'on peut faire : ce sera le même système que celui qu'on écrirait si tous les D^r étaient nuls comme conséquences de (A); C_ρ^r. Si maintenant les D^r, ainsi que $[f, F] = 0$, sont conséquences de C_ρ^r, en résolvant algébriquement ce système suivant le schéma fournit par B_ρ^r, nous obtenons un système complètement intégrable.

Les solutions que nous avons obtenues sont des solutions singulières du système (A); elles peuvent coexister avec d'autres solutions dépendant d'un nombre fini ou infini de constantes arbitraires. Elles sont engendrées par des caractéristiques communes à $f = 0$ et $F = 0$. Considérons deux équations ayant r directions communes de caractéristiques et telle que le système B^r correspondant soit complètement intégrable; effectuons une transformation de contact quelconque : nous obtenons deux nouvelles équations pour lesquelles les équations qui donnent les directions des caractéristiques n'ont pas en général de racines communes; elles admettent cependant des intégrales communes qui sont des solutions singulières; elles peuvent admettre d'autres intégrales communes, car les deux équations que nous avons d'abord considérées, si elles n'admettent pas d'autres surfaces intégrales communes (comme solutions non singulières) peuvent admettre des courbes comme intégrales communes.

13. De tout ce qui précède, nous déduisons la méthode de discussion suivante : soient les deux équations d'ordres m et M :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots, p_{0,m}) = 0, \\ F(x, y, z, \ldots, p_{0,M}) = 0. \end{cases}$$

Nous formons le système (A) et les relations

$$(3)\qquad [f, F] = 0; \qquad D^1; \qquad D = 0; \qquad D^2; \qquad D^3; \qquad \ldots; \qquad D^r.$$

1° D^1 n'est pas conséquence algébrique de (A); mais (3) l'est : (A) est complètement intégrable.

2° *a*. Formons le système $C_{\rho_1}^1$, ρ_1 dépendant de la forme de (A); si (3) et D^1 sont conséquences de $C_{\rho_1}^1$, le système $B_{\rho_1}^1$ est complètement intégrable.

a_1. Si (3) est déjà conséquence de (A) sans que D^1 le soit, (A) admet des solutions déjà indiquées (1°) et, en outre, celles de $B_{\rho_1}^1$ qui sont des solutions singulières.

a_2. Si D^1 est conséquence de (A), la seule condition d'intégrabilité de $B^1_{\rho_1}$ est (3) qui peut, du reste, être déjà conséquence de (A).

a_3. Le système $B^1_{\rho_1}$ peut admettre des solutions singulières.

b. Formons le système $C^2_{\rho_2}$, ρ_2 dépendant de la forme de (A); si (3) et D^2 sont conséquences de $C^2_{\rho_2}$, le système $B^2_{\rho_2}$ est complètement intégrable.

b_1. Si (3) est déjà conséquence de (A), sans que D^1 ou D^2 le soient, (A) admet les solutions (1°) et, en outre, celles de $B^2_{\rho_2}$ qui sont des solutions singulières.

b_2. Si (3) et D^1 sont conséquences algébriques de $C^1_{\rho_1}$, ce système fournit des solutions de (A) qui admet en outre celles de $C^2_{\rho_2}$.

b_3. Si D^2 sont conséquences algébriques de (A), la seule condition d'intégrabilité de $B^2_{\rho_2}$ est (3), qui peut être déjà conséquence algébrique de (A).

b_4. Le système $B^2_{\rho_2}$ peut en outre admettre des solutions singulières.

c. Formons le système $C^3_{\rho_3}$ et ainsi de suite jusque $C^m_{\rho_m}$.

3° Si D^1 n'est pas conséquence de (A), non plus que (3), on adjoint cette dernière équation à (A). On forme un système admettant deux conditions de complète intégrabilité que l'on discuterait suivant la méthode générale donnée.

Remarque. — Lorsque D^1 est conséquence algébrique de (A) et que les deux équations (1) n'ont qu'une direction commune de caractéristique, il peut être avantageux, comme nous le faisions tout naturellement avant de parler de solutions singulières, de grouper 1° et 2°, a_2.

Si les équations ont r directions communes de caractéristiques, on ne s'occupe que des systèmes C^r, C^{r+1}, ..., et l'on pourra ainsi grouper 1° avec un article convenable de la discussion de C^r.

Conclusion.

Observons d'abord que les systèmes successifs que nous avons à considérer dans la méthode de réduction que nous avons employée comprennent un nombre croissant d'équations, à moins que le nombre des équations de l'ordre maxima ne vienne à diminuer, auquel cas le système final, si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, admet des solutions dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

1° Lorsque la solution la plus générale du système (1) dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires, ce nombre est au plus égal à mM; si l'on sait *a priori* que le système (1) admet des solutions dépendant de plus de mM constantes arbitraires, il en admet qui dépendent d'une infinité de constantes arbitraires.

2° Si la solution la plus générale de (1) dépend de mM constantes arbitraires, les deux équations n'admettent pas de direction commune de caractéristique et leur crochet est nul, soit identiquement, soit comme conséquence de (A). Plus généralement, le système C^r que l'on déduit de (A) est déterminé d'après la forme des équations (1), soit C^r_ρ; on en déduit par des opérations purement algébriques un système B^r_ρ qui se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable si les D^r et $[f, F] = 0$ en sont conséquences algébriques. Le nombre des dérivées paramétriques de B^r_ρ est déterminé. Il arrive que l'on sache *a priori* que B^r_ρ est possible et admet des solutions dépendant d'un nombre connu de constantes arbitraires; si ce nombre est égal à celui des dérivées paramétriques de B^r_ρ, d'une part les conditions D^r sont satisfaites, soit identiquement, soit comme conséquences de B^r_ρ ou C^r_ρ, d'autre part le crochet des deux équations est nul dans les mêmes conditions.

3° Supposons que les deux équations dépendent de certaines arbitraires et que, certaines hypothèses étant faites sur ces arbitraires, on puisse construire un système B^r_ρ complètement intégrable. Si dans des hypothèses plus particulières, on obtient un système qui exige une réduction plus poussée, ce dernier système est complètement intégrable.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Systèmes de deux équations à deux inconnues.

1. Soient deux équations à deux inconnues z et z' des deux variations indépendantes x et y :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots, p_{0,m}; z', \ldots, p_{0,m'}) = 0, \\ F(x, y, z, \ldots, p_{0,M}; z', \ldots, p_{0,M'}) = 0. \end{cases}$$

Nous nous proposons, en nous appuyant sur les résultats du Chapitre précédent, de déterminer des cas où l'élimination de chacune des inconnues entre les relations (1) conduit à une seule équation pour l'autre.

Supposons pour l'instant z déterminé, quelconque d'ailleurs; nous obtenons deux équations $(\overline{1})$ en z', d'ordres m' et M'; formons le système (A') correspondant, d'ordre $m'+M'-1$, les relations $(\overline{2})$ et $(\overline{3})$

$$[f, F]_{z'}=0, \tag{2}$$

$$D'=0. \tag{3}$$

(2) est d'ordre $m'+M'-1$ en z' et, par rapport à z, son ordre est égal au plus grand des nombres $m'+M$, $m+M'$, car on n'est pas assuré que l'on a à la fois $m<M$, $m'<M'$.

Si (3) est conséquence algébrique de (A'), nous nous plaçons dans le cas où les conditions $D'^{r'}$ sont conséquences algébriques de (A') et les deux équations (1) en z' admettent toujours r' (¹) directions communes de caractéristique; on forme un système $B'^{r'}$, comme il a été expliqué, lorsque c'est possible, mais plus généralement un système $C'^{r'}$ tel que $\overline{C'^{r'}}$ admette $\overline{B'^{r'}}$ comme schéma; si entre les équations (A') et (2), ou $C'^{r'}$ et (2), suivant le cas, on peut éliminer z' et ses dérivées qui y figurent, on obtient une relation

$$U=0 \tag{4}$$

qui constitue une équation aux dérivées partielles en z, d'ordre au moins égal au plus grand des deux nombres $m+M'$, $m'+M$. A toute solution de cette équation, satisfaisant toutefois à certaines inéquations ($\overline{D}'\neq 0$, ou d'autres analogues), correspondent les solutions en z' d'un système $\overline{A'}$ ou $\overline{B'^{r'}}$ complètement intégrable. Les fonctions z' ainsi obtenues satisfont à un certain système d'équations aux dérivées partielles; pour l'obtenir, nous prolongeons le système A' ou $B'^{r'}$, et formons les dérivées successives de (4), puis éliminons, entre les équations obtenues, z et ses dérivées. Mais les équations que nous considérons ainsi sont les mêmes que celles qu'on obtient en opérant sur z comme nous l'avons fait sur z', pour trouver l'équation (4), et

---

(¹) r' est un nombre positif inférieur au plus petit des deux nombres m' et M'.

il sera plus simple de suivre ce dernier procédé. Supposons que l'on arrive également à une seule équation

$$(4') \qquad U' = 0;$$

les deux équations (4) et (4') se transforment l'une dans l'autre; à une solution de l'une correspondent, en général, des solutions de l'autre que l'on obtient par l'intégration d'un certain système complètement intégrable : $\overline{A'}$ ou $\overline{B'^{r'}}$, $\overline{\overline{A}}$ ou $\overline{\overline{B'}}$.

Il peut arriver que le système B' qui correspond à certaines solutions de (4), $B'^{r'}_{\rho'_1}$, soit moins général que $B'^{r'}_{\rho'}$ ($\rho'_1 > \rho'$); un tel système $B'^{r'}_{\rho'_1}$ est également complètement intégrable et ses solutions satisfont au système trouvé pour z', qui peut se réduire à une seule équation (4'). Comme cas plus particulier encore, le système B' correspondant à certaines solutions de (4) peut être impossible ou en involution.

2. Occupons-nous maintenant d'appliquer d'une façon générale les résultats de la deuxième partie du tableau de discussion. Formons un des systèmes $C'^{r'_i}_{\rho'_i}$ que l'on doit considérer : ρ'_i dépendant de r'_i et de la forme des équations (1); si les conditions $D'^{r'_i}$ ainsi que (2) s'expriment, grâce à $C'^{r'_i}_{\rho'_i}$, seulement au moyen de x, y, z et de ses dérivées, on en déduit un certain système en z; si ce système n'est pas impossible, à ses solutions correspondent certaines fonctions z' données par l'intégration de $\overline{C'^{r'_i}_{\rho'_i}}$. Ce système peut être équivalent à une seule équation et l'on cherche directement le système en z' correspondant, qui peut également se réduire à une équation. Cela ne suppose rien sur le résultat de la première partie de la discussion qui a pu procurer une équation (4) ou non. Dans le cas où cette équation (4) existe, elle peut avoir des solutions communes avec le système (ou l'équation) en z nouvellement obtenu; à ces solutions correspondent, outre les intégrales trouvées de $\overline{B'^{r'}_{\rho'}}$ [1], des intégrales singulières de ce système, données par l'intégration de $\overline{C'^{r'_i}_{\rho'_i}}$.

[1] Ou d'un système $\overline{B'}$ moins général.

Remarque. — Jusqu'ici, nous avons supposé qu'au cours de la formation du système $B'^{r'}$, il ne s'était présenté aucune équation indépendante (moyennant les autres relations déjà écrites) de z' et de ses dérivées. Supposons que nous en rencontrions une : $g'=0$; nous pouvons continuer la réduction, sur les équations qui restent, comme si cette relation était identiquement nulle; admettons qu'il ne s'en présente plus de cette sorte jusqu'à ce que nous obtenions un système $\beta'^{r'}$ qui se trouve sous forme régulière ou un système $\gamma'^{r'}$ dont le schéma le soit. Le système $\beta'^{r'}$ jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{T}$ moyennant (2), certaines de ses dérivées, $g'=0$ et certaines de ses dérivées; mais nous avons remarqué que les deux dérivées premières de $g'=0$ ne sont pas indépendantes [moyennant (2) et ses dérivées déjà considérées] et nous n'avons à conserver qu'une seule des dérivées de $g'=0$ de chaque ordre. Le système total des conditions obtenues, considéré comme système en z, jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$ et il peut se faire que ce système soit équivalent à une seule équation ([1]). Ce cas se produit si les deux équations (1) admettent, quel que soit z, plusieurs directions communes de caractéristiques et que les relations qu'on déduit de A' ne contiennent pas les lettres accentuées; on retrouve un résultat que l'on pouvait obtenir directement ([2]).

Les transformations dont nous venons de parler jouissent de propriétés que nous établirons un peu plus loin relativement à des transformations plus générales.

3. *Exemple.* — Une classe de ces transformations, qui a déjà été souvent utilisée, correspond au cas où l'une des équations (1) est de la forme

$$z'=\varphi(x, y, z, \ldots, p_{0,m}); \tag{5}$$

on peut toujours admettre que l'autre est simplement une équation

---

([1]) Le système $\overline{B'}$ correspondant à une solution quelconque de cette équation est d'un ordre d'involution non nul.

([2]) Pour obtenir cette équation, il suffit de considérer la relation du moindre ordre en z déduite de (A'), que l'on substitue à (2); nous appelons encore $U=0$ l'équation en z qu'elle représente; celle qu'on déduit de (2) est conséquence de celle-là et de certaines de ses dérivées par rapport à x et y.

en z,

$$\Phi(x, y, z, \ldots, p_{0,\mathrm{M}}) = 0; \tag{6}$$

pour que les relations (5) et (6) définissent une transformation, il suffit que l'élimination de z conduise à une seule équation en z'; cela ne se produira pas en général; on peut se proposer, en se donnant une forme simple de la fonction φ, de déterminer les équations (6) qui admettent la transformation définie par $z' = \varphi$.

Si l'on prend

$$z' = q, \tag{7}$$

il faut que (6) soit de la forme (1)

$$r\varphi_1(x) + p\varphi_2(x) + z\varphi_3(x) + \psi(x, y, q, s, t) = 0; \tag{8}$$

il lui correspond alors l'équation

$$r'\varphi_1(x) + p'\varphi_2(x) + z'\varphi_3(x) + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial q}q' + \frac{\partial\psi}{\partial s}s' + \frac{\partial\psi}{\partial t}t' = 0, \tag{8'}$$

où l'on remplace q par z', s par p', t par q'. A toute solution de (8) correspond une solution de (8'); à toute solution de (8') correspondent les solutions communes à (7) et à (8); différents cas sont à envisager suivant que

$$\varphi_1 \neq 0; \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 \neq 0; \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 \neq 0;$$
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0,$$

comme il résulte de la discussion de deux équations du premier et du deuxième ordres.

L'équation (8') n'admet pas, en général, la transformation

$$z'' = q'; \tag{9}$$

pour qu'elle l'admette, il faut que ψ soit linéaire en q et s; l'équation (8) admet alors la transformation

$$z'' = t. \tag{10}$$

---

(1) GOURSAT, II_2, p. 242.

Mais l'équation (8) peut fort bien admettre la transformation (10) sans être de la forme que nous venons d'indiquer. Ainsi, considérons l'équation

$$(11)\qquad \begin{aligned} g = s - \frac{p}{y+X_1} + t\,\varphi_1\left(q - \frac{z}{y+X_2}, x, y\right) \\ + q\frac{X_3}{y+X_1} + \varphi_2\left(q - \frac{z}{y+X_2}, x, y\right) = 0; \end{aligned}$$

(10) et (11) sont deux équations du deuxième ordre en z, formons le système

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{ \begin{array}{llll} & g = 0, & & t = z'', \\ \dfrac{dg}{dx} = 0, & \dfrac{dg}{dy} = 0, & \gamma = p'', & \delta = q''; \end{array} \right.$$

les deux équations admettent une direction commune de caractéristique; de $\dfrac{dg}{dy} = 0$ on déduit une équation d'ordre inférieur à 3 : elle est du premier ordre; supposons que, dans g, nous ayons fait $t = z''$,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy} = p'' - \frac{s}{y+X_1} + \frac{p}{(y+X_1)^2} + q''\varphi_1 \\ + z''\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y+X_2}\left(q - \frac{z}{y+X_2}\right)\right]\right\} + z''\frac{X_3}{y+X_1} \\ - q\frac{X_3}{(y+X_1)^2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y+X_2}\left(q - \frac{z}{y+X_2}\right)\right] = 0; \end{aligned}$$

en se servant de $g = 0$, il vient

$$\begin{aligned} p'' + z''\frac{\varphi_1}{y+X_1} + \frac{\varphi_2}{y+X_1} \\ + q''\varphi_1 + z''\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y+X_2}\left(q - \frac{z}{y+X_2}\right)\right]\right\} \\ + z''\frac{X_3}{y+X_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y+X_2}\left(q - \frac{z}{y+X_2}\right)\right], \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$k = q - \frac{z}{y+X_2} - h(x, y, z'', p'', q'') = 0.$$

D'autre part, le crochet des deux équations (10) et (11) est équivalent à $\frac{d^2 g}{dy^2} = 0$, c'est-à-dire à

$$(12) \qquad z'' - \frac{1}{y + X_2} h - \frac{dh}{dy} = 0;$$

(12) représente une équation du deuxième ordre en z'' correspondant à (11); formons le système complètement intégrable équivalent à $\overline{A}$ qui permet de déterminer les fonctions z correspondant à une solution z'' de (12).

(A) est équivalent à

$$(B_1^1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} & & k = 0, \\ g = 0, & t = z'', & \frac{dk}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Comme $\frac{dk}{dx} = 0$ ne contient pas r, on en déduit une équation du premier ordre : $l = 0$,

$$l = \frac{p}{y + X_1} - z'' \varphi_1 - q \frac{X_3}{y + X_1} + \frac{\varphi_2}{y + X_1} - \frac{p}{y + X_2} - \frac{z X_2'}{(y + X_2)^2} - \frac{dh}{dx} = 0.$$

(B_1^1) est équivalent à

$$(B_2^1) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} & & k = 0, & l = 0, \\ g = 0, & t = z'', & & \frac{dl}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Les deux équations $\overline{k} = 0$ et $l = 0$ sont en involution, et à une solution de (12) correspondent en général des solutions de (11) dépendant d'une constante arbitraire.

En réalité, à l'équation (11) correspond l'équation obtenue par l'élimination de $q - \frac{z}{y + X_2}$ entre $\frac{dg}{dy} = 0$ et $\frac{d^2 g}{dy^2} = 0$.

Il peut se faire qu'en tenant compte de (A), $\frac{dg}{dy} = 0$ ne contienne pas $q - \frac{z}{y + X_2}$. Le calcul est aisé; on trouve que φ_1 ne doit pas contenir cette expression et que φ_2 doit être de la forme

$$X_4 \frac{y + X_2}{y + X_1}\left(q - \frac{z}{y + X_2}\right) + \psi(x, y).$$

A l'équation en z correspond alors une équation du premier ordre en z'', à toute solution de laquelle correspondent les solutions du système en involution des deux équations du deuxième ordre $(\overline{11})$ et $(\overline{10})$.

Généralisation du problème de Bäcklund.

4. Nous nous proposons de déterminer deux surfaces (s) et (s') de telle sorte qu'il soit possible d'établir entre elles une correspondance ponctuelle satisfaisant à la condition qu'en deux points correspondants $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, les valeurs de x, y, x', y', z, z' et de certaines de leurs dérivées soient liées par quatre relations données

$$(13)\quad F_i(x, y, z, \ldots, p_{0,m_i}; x', y', z', \ldots, p'_{0,m'_i}) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \text{ et } 4).$$

A la surface (s) correspondent, quand elles existent, les intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles obtenues de la façon suivante : on remplace, dans les relations (13), z et ses dérivées par les expressions en x et y qui définissent la surface (s); d'une façon générale, nous indiquerons le résultat obtenu par une telle substitution en surlignant d'un trait le symbole représentant les expressions ou les relations où elle a été effectuée (¹); on élimine x et y entre les relations $(\overline{13})$, ce qui procure les deux équations annoncées : $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$, sous certaines conditions qui doivent être respectées par les relations que l'on introduit par la suite.

Nous ne pouvons former explicitement le système (A′) comme dans le cas des deux équations $(\overline{1})$, mais nous avons le moyen de le représenter implicitement. Supposons que pour éliminer x et y, nous les calculions au moyen de $\overline{F}_1 = 0$, $\overline{F}_2 = 0$, et que nous obtenions $\varphi' = 0$ par l'élimination de x et y entre les trois premières relations $(\overline{13})$, $\Phi' = 0$ par l'élimination de x et y entre les deux premières et la dernière.

Introduisons la notation $\|[U_A]\|_{U=\varphi,\chi,\psi}$, U_A représentant le résultat d'une certaine opération effectuée sur U,

$$\|[U_A]\|_{U=\varphi,\chi,\psi} = \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{dx} & \dfrac{d\varphi}{dy} & \varphi_A \\ \dfrac{d\chi}{dx} & \dfrac{d\chi}{dy} & \chi_A \\ \dfrac{d\psi}{dx} & \dfrac{d\psi}{dy} & \psi_A \end{vmatrix}.$$

(¹) Nous surlignerons de deux traits pour indiquer que l'opération analogue a été effectuée sur l'autre groupe de lettres.

Si φ, χ, ψ sont trois des fonctions F_i, par exemple F_1, F_2, F_3, nous écrirons $|[F_{ik}]|_{1,2,3}$.

Les différentielles des équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ par rapport aux arguments qui y figurent sont données par les relations $(\overline{14})$, où l'on remplacera x et y par les expressions calculées

$$(\overline{14}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left|\left[\frac{\partial F_i}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F_i}{\partial y'} dy' + \frac{\partial F_i}{\partial z'} dz' + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'_i}}\right]\right|_{1,2,3} = 0, \\ &\left|\left[\frac{\partial F_i}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F_i}{\partial y'} dy' + \frac{\partial F_i}{\partial z'} dz' + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'_i}}\right]\right|_{1,2,4} = 0; \end{aligned} \right.$$

cela nous donne le moyen de calculer la dérivée de φ' ou Φ', par rapport à l'un quelconque des arguments qui y figurent; les dérivées totales de $\varphi' = 0$ par rapport à x', y' se calculeront au moyen des suivantes :

$$[\varphi]_x = \left|\left[\frac{\partial F_i}{\partial x'} + \frac{\partial F_i}{\partial z'} p'_{10} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p'_{1,m'_i}} p'_{0,m'_i}\right]\right|_{1,2,3} = 0,$$

$$[\varphi]_y = \left|\left[\frac{\partial F_i}{\partial y'} + \frac{\partial F_i}{\partial z'} p'_{01} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}} p'_{0,m_i+1}\right]\right|_{1,2,3} = 0.$$

Les dérivées secondes de $\varphi' = 0$ se calculeront de même au moyen des relations

$$|[dU]|_{U=F_1,F_2,[\varphi]_x} = 0, \qquad |[dU]|_{U=F_1,F_2,[\varphi]_y} = 0,$$

et ainsi de suite. On opère de semblable façon pour $\Phi' = 0$ et nous pouvons écrire un système de relations Γ', qui permet d'exprimer toutes les équations qui figurent au système (A'), et puis deux relations $H' = 0$, $K' = 0$, qui donnent le moyen de calculer $D' = 0$, $[\varphi', \Phi'] = 0$. Supposons que $H' = 0$ ne soit pas conséquence algébrique de Γ'; si, des Γ' et $K' = 0$, on peut déduire une relation qui ne contienne aucune des lettres accentuées, on obtient une équation aux dérivées partielles en z, $U' = 0$. A toute solution de cette équation, pour laquelle $\overline{H}' = 0$ n'est pas conséquence de $\overline{\Gamma}'$, correspondent les solutions d'un système A' complètement intégrable; si $\overline{H}' = 0$ est conséquence de $\overline{\Gamma}'$, ce qui ne peut se produire que pour des intégrales particulières de $U = 0$, il faut opérer une réduction du système (A'), ce qui conduit généralement à un système complètement intégrable, comme il a été expliqué.

Supposons maintenant que H' soit conséquence algébrique de Γ'.

Désignons par $H'^{r'}$ l'ensemble des relations qui permettent de former les conditions $D'^{r'}$ exprimant que les deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ ont r' directions communes de caractéristiques. Nous admettons que les $H'^{r'}$ sont conséquences algébriques de Γ', mais que les $H'^{r'+1}$ ne le sont pas : on forme alors un système $\Gamma'^{r'}$, tel que $\overline{\Gamma}'^{r'}$ permette de calculer le système $\overline{C}'^{r'}$, de schéma $B'^{r'}$; si des $\overline{\Gamma}'^{r'}$ et $K' = 0$ on peut déduire une relation ne contenant aucune des lettres accentuées, on en tire des conséquences analogues à celles qui ont été exposées pour $U = 0$. On peut établir ainsi une discussion semblable à celle qui a été faite sur les équations (1); nous allons simplement donner des exemples. Toutefois, signalons un cas analogue à celui que nous avons trouvé lors de cette discussion ; il peut se faire que du système Γ' on déduise plusieurs relations ne contenant pas les lettres accentuées ; on est conduit à substituer à $K' = 0$ une relation $K'_1 = 0$ d'ordre moindre en z, d'où il peut se faire que l'on déduise une équation $U_1 = 0$ à une solution de laquelle correspondent en général des surfaces (s') dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

5. Exemples. — I. *Transformations de Bäcklund.* — Soient

$$F_i(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0 \tag{15}$$

les relations de définition.

Nous ne voulons pas refaire une discussion classique, mais simplement montrer que les transformations trouvées par Clairin correspondent au cas où le système des deux équations

$$\varphi' = 0, \qquad \Phi' = 0$$

admet une solution singulière, et établir certains calculs dont nous aurons à nous servir. Nous nous appuyons sur l'équivalence entre les deux relations

$$\begin{vmatrix} \|[F_{iA}]\|_{1,2,3} & \|[F_{iB}]\|_{1,2,3} \\ \|[F_{iA}]\|_{1,2,4} & \|[F_{iB}]\|_{1,2,4} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\left\| \frac{dF_i}{dx} \quad \frac{dF_i}{dy} \quad F_{iA} \quad F_{iB} \right\|_{1,2,3,4} = 0.$$

L'existence de la solution singulière pour le système $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$

correspondant à (s) exige la compatibilité des équations $(\overline{15})$ et $(\overline{16})$:

$$
(16)\qquad \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p'}\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|_{1,2,4}}
= \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\dfrac{\partial F_i}{\partial z'}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\dfrac{\partial F_i}{\partial z'}\right]\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\dfrac{\partial F_i}{\partial z'}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\dfrac{\partial F_i}{\partial z'}\right]\right\|_{1,2,4}}.
$$

On en déduit immédiatement la condition connue

$$
\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_i}{\partial z'} \quad \frac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_i}{\partial z'} \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'} \quad \frac{\partial F_i}{\partial q'} \right\|_{1,2,3,4} = 0.
$$

Si cette condition est satisfaite [soit identiquement, soit comme conséquence de (15)], les ∞^1 éléments de (e') qui correspondent à un élément déterminé de (e) forment un bandeau d'éléments unis. On peut dans ce cas remplacer le système (15) par l'une des formes suivantes obtenues en examinant successivement les cas où des relations (15) on peut déduire deux ou trois indépendantes de p' et q' :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
F(x', y', z'; x, y, z, p, q) = 0,\\[4pt]
\dfrac{dF}{dx'} = F_{x'} + p'F_{z'} = 0,\\[4pt]
\dfrac{dF}{dy'} = F_{y'} + q'F_{z'} = 0, \qquad V(x', y', \ldots, q', x, \ldots, q) = 0;
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
F_1(x', y', z'; x, y, z, p, q) = 0,\\[4pt]
F_2(x', y', z'; x, y, z, p, q) = 0,\\[4pt]
\dfrac{\dfrac{dF_1}{dx'}}{\dfrac{dF_1}{dy'}} = \dfrac{\dfrac{dF_2}{dx'}}{\dfrac{dF_2}{dy'}}, \qquad V = 0;
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
F_1(x', y', z'; x, y, z, p, q) = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,\\[4pt]
\qquad V(x', \ldots, q', x, \ldots, q) = 0.
\end{array}
\right.
$$

Les trois premières équations de chaque groupe, si l'on y suppose x, y, z, p, q constants, déterminent une M_2 (surface, courbe ou point).

II. Plaçons-nous maintenant dans le cas où les trois premières relations (13) ne contiennent que les coordonnées des éléments du premier ordre, la quatrième relation contenant les coordonnées des éléments du deuxième ordre :

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0,\\ F_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0,\\ F_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0.\end{array}\right.$$

$$(18)\qquad V(x, y, z, p, q, r, s, t; x', y', z', p', q', r', s', t') = 0.$$

L'équation $\varphi' = 0$ est du premier ordre, $\Phi' = 0$ est du deuxième ordre; le système Γ comprend (17), $[\varphi]_x = 0$, $[\varphi]_y = 0$, (18). La relation $H' = 0$ est ici

$$(19)\qquad \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\|^2_{i=1,2,3} \frac{\partial V}{\partial t'} - 2\left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\| \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\| \frac{\partial V}{\partial s'} + \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|^2 \frac{\partial V}{\partial r'} = 0;$$

la relation

$$K' = 0$$

est

$$(20)\qquad \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\|_{i=1,2,3} \left\|\left[\frac{dU}{dx'}\right]\right\|_{U=F_1,F_2,V} + \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|_{i=1,2,3} \left\|\left[\frac{dU}{dy'}\right]\right\|_{U=F_1,F_2,V} + L\frac{\partial V}{\partial r} + M\frac{\partial V}{\partial s} + N\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

L, M, N étant linéaires en α, β, γ, δ et ne contenant pas α', β', γ', δ'.

Supposons d'abord que (19) ne soit pas conséquence algébrique de (16), (17) et (18) et qu'en tenant compte de ces relations on puisse faire disparaître x', ... t' de (20); soit $U = 0$ la relation que l'on obtient; c'est une équation du troisième ordre en z; à toute intégrale (s) de cette équation, pour laquelle $\overline{(19)}$ n'est pas satisfaite, correspondent des surfaces (s') dépendant de deux constantes arbitraires; si $\overline{(19)}$ est vérifiée, au besoin en tenant compte de $\overline{(16)}$, $\overline{(17)}$, $\overline{(18)}$, à (s) correspondent en général des surfaces dépendant de moins de deux constantes arbitraires.

Lorsque (19) est conséquence algébrique de (17), (18), $[\varphi]_x = 0$, $[\varphi]_y = 0$, on forme un système Γ^1 permettant d'établir C^1 dont le schéma est B^1, en adjoignant par exemple l'équation $\Big\{$ en supposant $\left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|_{i=1,2,3} \neq 0$;

$$(21) \qquad \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\|_{i=1,2,3} \left\|\left[\frac{dU}{dx'}\right]\right\|_{U=F_1,F_2,V} + L\frac{\partial V}{\partial r'} - M\frac{\partial V}{\partial t'} \frac{\left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\|}{\left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|} = 0.$$

On pourra d'ailleurs substituer à l'équation (20) la suivante :

$$(22) \qquad \left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\| \left\|\left[\frac{dU}{dy'}\right]\right\| - N\frac{\partial V}{\partial t'} + M\frac{\partial V}{\partial r'} \frac{\left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right]\right\|}{\left\|\left[\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right]\right\|} = 0.$$

Si l'équation (20), ou l'équation (22), s'exprime grâce à (17), (18), (16) et (21) au moyen seulement de x, y, z et de ses dérivées, on obtient une équation $U_1 = 0$ du troisième ordre en z. A toute intégrale (s) de cette équation, pour laquelle le calcul de p' et q' est possible dans B' correspondent des surfaces (s') dépendant d'une constante arbitraire; si le calcul de p' et q' n'est pas possible, il lui correspond, en général, un nombre fini de surfaces.

La relation (19) constitue une équation aux dérivées partielles pour V si l'on suppose, par exemple, que F_1, F_2, F_3 sont donnés; son intégration est immédiate, en particulier, on peut supposer que p ne figure pas dans (17), ni r dans (18). On se trouve dans le cas où existe une équation $U = 0$, si x, y; y, z; x, z ne figurent pas dans les équations (17) et (18); on se trouve dans le cas où existe l'équation $U_1 = 0$ lorsque (19) étant satisfaite une des lettres x, y, z ne figure pas dans les quatre relations données.

Nous verrons plus loin que certaines particularités se présentent si les trois relations (17) satisfont à des conditions que nous établirons; en choisissant alors la relation (18) convenablement, nous poursuivrons la discussion plus avant.

III. Examinons maintenant ce qui se présente lorsque parmi les quatre relations (13) deux sont d'ordre m' en z', les deux autres d'ordre au plus égal à m'. Attachons-nous au cas particulier où les deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$, qui sont d'ordre m', ont toutes leurs directions de caractéristiques communes; les relations $(\overline{23})$ sont alors vérifiées :

$$(23)\qquad \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}}\right]\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m'-1,1}}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m'-1,1}}\right]\right\|_{1,2,4}} = \ldots = \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}}\right]\right\|_{1,2,4}};$$

elles sont, en général, équivalentes à celles que l'on déduit de $(\overline{24})$:

$$(24)\qquad \left\| \frac{dF_i}{dx} \quad \frac{dF_i}{dy} \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}} \quad \cdots \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}} \right\|_{i=1,2,3,4} = 0.$$

Les équations de $\Gamma'^{m'}$ qui permettent de former les quatre premières du système $C^{m'}$ correspondant à $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$, s'obtiennent en adjoignant à $(\overline{13})$ les relations $(\overline{25})$, par exemple,

$$(25)\qquad \frac{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}}\right]\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}}\right]\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left[\left(\dfrac{dF_i}{dx'}\right)\right]\right\|_{1,2,3}^{(1)}}{\left\|\left[\left(\dfrac{dF_i}{dx'}\right)\right]\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left[\left(\dfrac{dF_i}{dy'}\right)\right]\right\|_{1,2,3}^{(1)}}{\left\|\left[\left(\dfrac{dF_i}{dy'}\right)\right]\right\|_{1,2,4}}.$$

Elles s'écrivent

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left\| \frac{dF_i}{dx} \quad \frac{dF_i}{dy} \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}} \quad \left(\frac{dF_i}{dx'}\right)^{(1)} \right\|_{1,2,3,4} = 0,\\ &\left\| \frac{dF_i}{dx} \quad \frac{dF_i}{dy} \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}} \quad \left(\frac{dF_i}{dy'}\right) \right\|_{1,2,3,4} = 0. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte que les relations déduites de (27) sont vérifiées :

$$(27)\qquad \left\| \left(\frac{dF_i}{dx'}\right) \quad \left(\frac{dF_i}{dy'}\right) \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}} \quad \cdots \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m'}} \right\| = 0.$$

Pour qu'à toute solution de l'équation $U = 0$, à supposer qu'elle existe, correspondent deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ admettant m' directions communes de caractéristiques, il est donc nécessaire que les relations (27), qui ne contiennent pas de dérivées ne figurant pas dans (13), soient conséquence algébrique de ces dernières.

---

(1) Si la relation F_i est d'ordre inférieur à m' en z', il faut remplacer $\left(\dfrac{dF_i}{dx'}\right)$ par $\dfrac{dF_i}{dx'}$, $\left(\dfrac{dF_i}{dy'}\right)$ par $\dfrac{dF_i}{dy'}$.

Supposons, par exemple, $m' = 2$, les relations (13) doivent satisfaire à deux conditions; si cela se produit et si x', y' n'y figurent pas, les (13), (26) et les quatre relations du troisième ordre en z' qu'il faut y ajouter pour former Γ^2 permettent, en général, de calculer z', p', q', r', s', t', α', β', γ', δ', et, en portant dans $K' = 0$, on obtient une équation pour déterminer z; à une solution de cette équation correspondent, en général, des surfaces (s') dépendant de deux constantes arbitraires.

6. Il peut se faire que des relations (13) on déduise une seule équation pour déterminer z; les surfaces (s') qui correspondent aux solutions de cette équation sont intégrales d'un certain système que l'on peut obtenir dans certains cas en permutant le rôle des deux groupes de lettres. Il arrive que ce système ne comprenne qu'une seule équation $U' = 0$, les deux équations $U = 0$ et $U' = 0$ se transforment alors l'une dans l'autre, comme il résulte des calculs qui y ont conduit. Lorsqu'à une solution de chaque équation correspondent des solutions de l'autre dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires, on établit facilement, en calquant la démonstration sur celle qu'a donnée M. Goursat [1] dans le cas des transformations de Bäcklund, que les caractéristiques se correspondent sur (s) et (s'), et les deux équations sont de même ordre; il faut admettre, simplement, que les caractéristiques des deux équations sont simples [2]; la démonstration s'applique aux caractéristiques multiples qui jouissent de propriétés appartenant aux caractéristiques simples, ce qui n'arrive pas toujours [3].

Supposons, maintenant, qu'à (s) corresponde, pour déterminer (s'), un système d'ordre d'involution ρ', à (s') un système d'ordre ρ : on constate, en prenant quelques précautions supplémentaires, qu'en général, le nombre obtenu en ajoutant ρ' à l'ordre de $U = 0$ est égal à celui que l'on obtient en ajoutant ρ à celui de $U' = 0$, la correspondance existant entre les caractéristiques des deux équations qui ne le sont pas pour les systèmes en involution correspondant soit à (s), soit à (s').

---

(1) GOURSAT, II_2, p. 291.

(2) GOURSAT, II_2, p. 302.

(3) SANNIA, *Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino*, 2e série, t. XLIV, nos 2 et 13.

Nous allons, maintenant, signaler des cas importants où l'on peut prévoir l'existence de l'équation $U = 0$, par exemple. Supposons que les deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ déduites d'une surface (s) quelconque soient d'ordres m' et M', puis que le système (13) admette un groupe continu de transformations de contact de l'espace (e') d'ordre $m'M'$. D'après la théorie générale de l'existence des solutions d'un système différentiel, il existe (en dehors de cas exceptionnels) des surfaces (s) et (s'); le système (A'), déduit d'une telle surface (s), n'est donc pas impossible; or, s'il admet une solution, il en admet qui dépendent, au moins, de $m'M'$ constantes arbitraires, déduites de celle-là par les transformations du groupe considéré; donc, en général, la relation $\overline{K'} = 0$ est conséquence de $\overline{\Gamma'} = 0$, ce qui entraîne que l'on déduit de $K' = 0$, moyennant Γ', une équation $U = 0$.

Ceci suppose, naturellement, que $H' = 0$ n'est pas conséquence de Γ'; si les conditions $H'^{r'}$ sont conséquences de Γ' sans que les $H'^{r'+1}$ le soient, si les relations (13) admettent un groupe de l'espace (e') dont l'ordre soit égal au nombre des dérivées paramétriques du système $B'^{r'}$ déduit d'une surface (s) quelconque, on en déduit, de même qu'en général il existe une équation pour déterminer (s) (1).

Une circonstance particulièrement simple, où s'applique ce que nous venons de dire, se présente lorsque certaines des lettres $x', y', \ldots$ ne figurent pas dans (13); nous en avons déjà donné des exemples.

7. Revenons, maintenant, à l'étude des systèmes (13) satisfaisant aux conditions (27). Si $m' = 1$, d'après ce que nous avons remarqué au sujet des transformations de Bäcklund, le système (13) est équivalent à un système où trois relations, quand on y suppose x, y, z et ses dérivées constants, représentent ∞^2 éléments supportés par une surface, une courbe ou un point; nous reviendrons sur ce cas dans le Chapitre suivant.

Si $m' > 1$, on aperçoit immédiatement que des relations (13) on en déduit au moins une, indépendante des dérivées de z' d'ordre m'; nous n'avons pas à envisager le cas où l'on en déduit trois, qui nous

---

(1) Il est bien entendu que, par suite de décompositions des systèmes considérés, il est possible qu'il existe d'autres façons de déterminer (s) pour répondre au problème de Bäcklund.

sortirait de la question que nous nous sommes posée. Envisageons séparément les cas où l'on en déduit une, puis deux.

Soit

$$(28) \qquad F = 0$$

une relation donnée d'ordre $m' - 1$ en z'; pour satisfaire aux conditions (26) nous prenons, comme autres relations définissant le problème de Bäcklund posé,

$$(29) \qquad \frac{dF}{dx'} = 0, \qquad \frac{dF}{dy'} = 0,$$

les parenthèses ici n'ayant plus d'objet, puisqu'elles ne doivent servir qu'à écarter les dérivées d'ordre $m' + 1$ en z'; la quatrième relation sera prise arbitrairement, d'ordre m' en z',

$$(30) \qquad V = 0.$$

Pour trouver les équations $\varphi' = 0$ et $\Phi' = 0$, on calculera x, y au moyen de $(\overline{29})$; on déduit $\varphi' = 0$ de (28) et $\Phi' = 0$ de (30).

Les dérivées de $\varphi' = 0$ se calculent au moyen de (31),

$$(31) \qquad \frac{dF}{dx'} = 0, \qquad \frac{dF}{dy'} = 0.$$

Cela suppose que la relation $(\overline{32})$ n'est pas satisfaite,

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d^2F}{dx^2} & \frac{d^2F}{dx\,dy} \\ \frac{d^2F}{dx\,dy} & \frac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui a évidemment lieu, généralement. Nous allons, du reste, reprendre, dans un instant, l'étude de ce qui se passe lorsque (32) constitue la quatrième relation de définition et que (28) est du premier ordre en z et z'.

Auparavant, disons un mot du cas où deux relations données sont d'ordre $m' - 1$ en z',

$$(33) \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0.$$

On satisfait aux relations (26) en prenant, comme troisième relation,

$$(34)\qquad G = \begin{vmatrix} \dfrac{dF_1}{dx'} & \dfrac{dF_1}{dy'} \\ \dfrac{dF_2}{dx'} & \dfrac{dF_2}{dy'} \end{vmatrix} = 0;$$

la quatrième relation est prise, arbitrairement, d'ordre m' en z'. Les surfaces (s) et (s') correspondantes satisfont également à

$$\frac{\dfrac{dF_1}{dy'}}{\dfrac{dF_2}{dy'}} = \frac{\dfrac{dF_1}{dx}}{\dfrac{dF_2}{dx}} = \frac{\dfrac{dF_1}{dy}}{\dfrac{dF_2}{dy}}.$$

Cela suppose que $(\overline{35})$ n'est pas satisfaite,

$$(35)\qquad v = \begin{vmatrix} \dfrac{dF_1}{dx'} & \dfrac{dF_1}{dy'} \\ \dfrac{dG}{dx'} & \dfrac{dG}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème défini en prenant $v = 0$ comme quatrième relation est analogue à celui que nous allons traiter maintenant.

Application aux équations du troisième ordre.

8. Nous nous proposons de rechercher s'il est possible d'établir entre deux surfaces (s) et (s') de deux espaces (e) et (e'), à trois dimensions, une correspondance ponctuelle définie par les quatre relations

$$(36)\qquad \begin{cases} F(x', y', z', p', q';\, x, y, z, p, q) = 0; \\ \dfrac{dF}{dx'} = F_{x'} + p' F_{y'} + r' F_{p'} + s' F_{q'} = 0 \\ \dfrac{dF}{dy'} = F_{y'} + q' F_{z'} + s' F_{p'} + t' F_{q'} = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'^2} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2F}{dy'^2} \end{vmatrix} = 0.$$

La surface (s') étant donnée, la surface (s), si elle existe, sera une intégrale commune à deux équations du premier ordre, obtenues par l'élimination de x' et y' entre les relations $(\overline{\overline{36}})$; x' et y' seront calculés par la dernière de ces relations, et la deuxième ou la troisième. Les dérivées de ces équations du premier ordre par rapport à x et y s'obtiennent au moyen des relations (37) et (38) :

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{dF}{dy} = 0; \end{cases}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dy} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dy} = 0; \end{cases}$$

leur crochet par

$$(39)\qquad \frac{d^2F}{dx'\,dy'}\left[F, \frac{dF}{dx'}\right]_z - \frac{d^2F}{dx'^2}\left[F, \frac{dF}{dy'}\right]_z = 0,$$

la notation $\left[F, \dfrac{dF}{dx'}\right]_z$ indiquant que le crochet est calculé par rapport aux lettres non accentuées, les autres étant considérées comme représentant des constantes.

Les relations $\delta = 0$, $\delta' = 0$ et les équations (III_1) (¹) par :

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_p}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_q}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_q}{dy'} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} F_p & F_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_p}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_z}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_z}{dy'} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(42)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} F_p & F_x + pF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_p}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d(F_x+pF_z)}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d(F_x+pF_z)}{dy'} \end{vmatrix} = 0, \\[4mm] \begin{vmatrix} F_p & F_y + qF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_p}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d(F_y+qF_z)}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d(F_y+qF_z)}{dy'} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Ceci suppose, à la fois, que

$$\overline{\overline{\frac{d^2F}{dx'^2}}}\;\overline{\overline{\frac{d^2F}{dx'\,dy'}}} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\overline{F_p}}\left(\overline{\overline{\frac{d^2F}{dx'\,dy'}}}\;\overline{\overline{\frac{dF_p}{dx'}}} - \overline{\overline{\frac{d^2F}{dx'^2}}}\;\overline{\overline{\frac{dF_p}{dy'}}}\right) \neq 0.$$

(¹) Notations du début du Chapitre I.

Les différents cas que nous avons à considérer sont les suivants :

1° Les relations $(\overline{\overline{36}})$ et $(\overline{\overline{39}})$ sont compatibles;

a. Elles ne le sont pas avec $(\overline{\overline{40}})$: à (s') correspondent des surfaces (s) dépendant d'une constante arbitraire; elles peuvent admettre une enveloppe;

b. Elles le sont avec $(\overline{\overline{40}})$: à (s') correspond une surface (s).

2° Les relations $(\overline{\overline{36}})$, $(\overline{\overline{40}})$ et $(\overline{\overline{42}})$ sont compatibles entre elles, incompatibles avec $(\overline{\overline{41}})$;

a. $(\overline{\overline{39}})$ est incompatible avec $(\overline{\overline{36}})$: à (s') correspond une surface (s), il peut en correspondre une autre (3°);

b. $(\overline{\overline{39}})$ est compatible avec $(\overline{\overline{36}})$: une infinité de surfaces (s) dépendant d'une constante arbitraire, et qui admettent une enveloppe, correspondent à (s').

3° $(\overline{\overline{39}})$ étant incompatible avec $(\overline{\overline{36}})$, on l'adjoint à ces dernières relations, l'élimination de x' et y' entre $(\overline{\overline{36}})$ et $(\overline{\overline{39}})$ conduit à trois équations du premier ordre, dont les conditions de compatibilité se réduisent à deux, contenant des dérivées du quatrième ordre de z' par rapport à x' et y'.

De là, on déduit les conséquences suivantes :

En général, la surface (s') devra être choisie parmi les intégrales d'un système en involution de deux équations du quatrième ordre; réciproquement, à une solution de ce système on pourra faire correspondre une surface (s), du moins si les conditions restrictives que nous avons rencontrées sont satisfaites.

Supposons qu'entre les relations (36) et (39) on puisse éliminer x, y, z, p, q, on obtient une équation du troisième ordre $W'_1 = 0$; pour que le problème soit possible, (s') doit en être une intégrale; réciproquement, à toute solution de cette équation correspondent, en général, des surfaces (s) dépendant d'une constante arbitraire; à des solutions exceptionnelles (pour lesquelles $\delta = 0$, $\delta' \neq 0$) n'en correspond qu'une, et même pas du tout (comme cela peut se produire si $\delta' = 0$). Ce cas se présente s'il manque x, y ou z dans F.

Cherchons maintenant s'il peut se faire que, pour toute surface (s') à laquelle corresponde quelque surface (s), on se trouve dans le cas (1°, *b*). Il faut, pour cela, que les relations (36), (39) et (40) se réduisent à cinq relations distinctes seulement, et alors l'élimination de x, y, z, p, q entre les relations (36) et (37), ou bien (36), la première des (37) et (39) conduit à une équation du troisième ordre en z' : $W'_2 = 0$; à toute solution de cette équation correspond une surface (s'), du moins en général.

L'élimination de $\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}$ et $\dfrac{d^2F}{dx'^2}$ entre (36) et (39) conduit à la relation

$$(43)\quad \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \left[F, \dfrac{dF}{dy'}\right]_z \dfrac{dF_p}{dx'} - \left[F, \dfrac{dF}{dx'}\right]_z \dfrac{dF_p}{dy'} & \left[F, \dfrac{dF}{dy'}\right]_z \dfrac{dF_q}{dx'} - \left[F, \dfrac{dF}{dx'}\right]_z \dfrac{dF_q}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que la circonstance envisagée se présente, il faut donc que (43) soit conséquence des trois premières équations (36), et cela quels que soient r', s', t. On obtient donc deux relations aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire la fonction F; il suffit du reste que cela ait lieu en tenant compte de la première relation (36).

En particulier, considérons le cas où la relation (39) est conséquence des relations (36), il faut pour cela que les suivantes le soient des trois premières (36) :

$$\frac{\dfrac{dF_p}{dx'}}{\dfrac{dF_q}{dx'}} = \frac{\dfrac{dF_p}{dy'}}{\dfrac{dF_q}{dy'}} = \frac{F_p}{F_q}.$$

On en déduit, en remplaçant r' et t' en fonction de s',

$$\frac{F_p}{F_q} = \frac{F_{p'}F_{q'p} - F_{q'}F_{p'p}}{F_{p'}F_{q'q} - F_{q'}F_{p'q}} = \frac{(F_{x'p} + p'F_{z'p})F_{p'} - (F_{x'} + p'F_{z'})F_{p'p}}{(F_{x'q} + p'F_{z'q})F_{p'} + (F_{x'} + p'F_{z'})F_{p'q}}$$
$$= \frac{(F_{y'p} + q'F_{z'p})F_{q'} + (F_{y'} + q'F_{z'})F_{q'p}}{(F_{y'q} + q'F_{z'q})F_{q'} - (F_{y'} + q'F_{z'})F_{q'q}}.$$

Par conséquent, les rapports des expressions $F_{p'}$, $F_{q'}$, $F_{x'} + p'F_{z'}$, $F_{y'} + q'F_{z'}$ sont fonctions de $F, x', y', z', p', q', x, y, z$; des conditions d'involution des trois équations du premier ordre en F qui expriment cette propriété, on déduit qu'il en est de même des rapports mutuels des expressions $F_{p'}\,F_{q'}$, $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$, donc que F est de la forme

$$F = \Phi[x', y', z', p', q', x, y, z, \varphi(x, y, z, p, q)],$$

la vérification est immédiate. Comme cas particulier, on peut signaler celui où p ou q ne figure pas dans F.

Enfin, occupons-nous de trouver si pour toute surface (s') peuvent se présenter les circonstances qui se rencontrent dans la deuxième partie de la discussion. Il faut pour cela que les relations (36), (39) et (42) se réduisent à six relations distinctes, seulement.

L'élimination de $\frac{d^2 F}{dx'^2}$, $\frac{d^2 F}{dx'\,dy'}$ entre (39) et (42) conduit à deux relations obtenues en annulant les déterminants du troisième ordre de la matrice

$$\left\| U \quad \frac{dU}{dx'} \quad \frac{dU}{dy'} \right\|_{U = F_p,\, F_q,\, F_x + p F_z,\, F_y + q F_z} = 0.$$

L'élimination de r', s', t' entre ces deux relations et la deuxième et la troisième des (36) conduit à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en $F : K = 0$; si F y satisfait, en tenant compte au besoin de $F = 0$, les relations (36), (40), (42) se réduisent bien à six seulement. L'élimination de x, y, z, p, q entre ces six relations conduit à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre en z' : $W'_3 = 0$ à toute solution de laquelle (pour qui $\delta' \neq 0$) correspond une surface (s), par cinq de ces six relations; mais il peut en outre en correspondre soit une autre, soit une infinité d'autres.

Observons que pour former l'équation $K = 0$, à laquelle on arrive pour déterminer F, on peut procéder de la manière suivante : supposons que r', s', t' représentent les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions; les relations (40) et (42) expriment, après élimination du rapport $\frac{d^2 F}{dx'\,dy'} : \frac{d^2 F}{dx'^2}$, que la droite (37) se trouve sur la quadrique dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 F}{dx'\,dx} & \frac{d^2 F}{dy'\,dx} \\ \frac{d^2 F}{dx'\,dy} & \frac{d^2 F}{dy'\,dy} \end{vmatrix} = 0$$

et les calculs faits précédemment pour trouver $K = 0$ expriment que la même droite (37) est située sur la quadrique en tenant compte des deuxième et troisième relations (36); en exprimant cela directement, on est conduit par l'élimination de r', t', r, t à une relation bilinéaire en s' et s : $h_1 s s' + h_2 s' + k_1 s + k_2 = 0$, qui doit être satisfaite quel que soit s; le premier membre doit, par conséquent, se décomposer en un produit de deux binomes du premier degré, l'un en s, l'autre en s'; c'est-à-dire que

$$h_1 k_2 - k_1 k_2 = 0,$$

on obtient ainsi l'équation $K = 0$.

Ce que nous venons de dire peut se répéter en permutant les rôles des lettres accentuées et de celles qui ne le sont pas; l'élimination des lettres accentuées peut aussi conduire à une seule équation $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ ou $W_3 = 0$. Par suite de la symétrie par rapport aux deux groupes de lettres des calculs qui nous ont conduits à la condition $K = 0$, les équations $W_3 = 0$ et $W'_3 = 0$ existent en même temps, du moins en général et les intégrales de ces deux équations se correspondent, les coordonnées d'un élément du premier ordre d'une surface intégrale de l'une s'exprimant au moyen des coordonnées d'un élément du troisième ordre de l'autre. Lorsqu'il existe une équation $W'_1 = 0$ ou $W'_2 = 0$, il lui correspond généralement un système de deux équations du quatrième ordre en involution; s'il existe également une équation $W_1 = 0$ ou $W_2 = 0$, ses intégrales correspondent à celles $W'_1 = 0$ ou $W'_2 = 0$ suivant une correspondance (∞^1, ∞^1), $(\infty^1, 1)$, $(1, \infty^1)$, $(1, 1)$ suivant les cas. D'ailleurs, les équations $W'_3 = 0$ et $W_3 = 0$ ne donnent pas, quand elles existent, toutes les solutions du problème; il se produit alors une décomposition et les quatre relations (36) permettent d'établir en outre une correspondance entre les intégrales de deux systèmes du quatrième ordre en général, l'un de ces systèmes, ou les deux, pouvant être, dans certains cas, remplacé par une équation du troisième ordre.

Les équations du troisième ordre auxquelles on parvient ainsi ne sont pas des équations quelconques : $W_1 = 0$ et $W_2 = 0$ admettent un système de caractéristiques du second ordre; $W_3 = 0$ admet un système de caractéristiques du premier ordre : cela résulte immédiatement des formules qui établissent la correspondance entre $W_3 = 0$ et $W'_3 = 0$.

On forme aisément des exemples de transformations entre équations à indice 1 et 2 en partant d'une fonction F où manquent une des lettres de chaque groupe.

Voici un exemple de transformation entre équations à indice 3.

Remarquons d'abord que si la relation $F = 0$ est de la forme

$$p' + p + \Phi(x', y', z', q', x, y, z, q) = 0,$$

les calculs que nous avons faits doivent subir une légère modification, au lieu de (40) et (42) nous devons considérer

$$\frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}\,\frac{d\Phi_q}{dx'}-\frac{d^2\Phi}{dx'^2}\,\frac{d\Phi_q}{dy'}=0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}\,\frac{d(\Phi_x+p\,\Phi_z)}{dx'}-\frac{d^2\Phi}{dx'^2}\,\frac{d(\Phi_x+p\,\Phi_z)}{dx'}=0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}\,\frac{d(\Phi_y+q\,\Phi_z)}{dx'}-\frac{d^2\Phi}{dx'^2}\,\frac{d(\Phi_y+q\,\Phi_z)}{dy'}=0,$$

et la condition à laquelle doit satisfaire Φ s'obtient en éliminant s' et t' entre

$$\frac{\left(\frac{d\Phi_q}{dx'}\right)+s'\,\Phi_{qq'}}{\left(\frac{d\Phi_q}{dy'}\right)+t'\,\Phi_{qq'}}=\frac{\frac{d(\Phi_x+p\,\Phi_z)}{dx'}+s'(\Phi_{xq'}+p\,\Phi_{zq'})}{\frac{d(\Phi_x+p\,\Phi_z)}{dy'}+t'(\Phi_{xq'}+p\,\Phi_{zq'})}$$

$$=\frac{\frac{d(\Phi_y+q\,\Phi_z)}{dx'}+s'(\Phi_{yq'}+q\,\Phi_{zq'})}{\frac{d(\Phi_y+q\,\Phi_z)}{dy'}+t'(\Phi_{yq'}+q\,\Phi_{zq'})};$$

d'où, finalement,

$$\left\| \mathrm{U} \quad \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx'}\right) \quad \left(\frac{d\mathrm{U}}{dy'}\right) \right\|_{\mathrm{U}=\mathrm{F}_q,\,\mathrm{F}_x+p\,\mathrm{F}_z,\,\mathrm{F}_y+q\,\mathrm{F}_z}=0.$$

On vérifie immédiatement que cette relation est vérifiée si l'on prend

$$(44)\qquad p'+p'+\varphi_1(z,x',y',q')+\varphi_2(z',x,y,q)=0,$$

car le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} p\,\varphi_{1zx'}+p'\,\varphi_{2z'x} & p\,\varphi_{1zx'}+q'\,\varphi_{2z'x} & p \\ q\,\varphi_{1zx'}+p'\,\varphi_{2z'y} & q\,\varphi_{1zy'}+q'\,\varphi_{2z'y} & q \\ p' & q' & 0 \end{vmatrix}=0.$$

En général, la relation (44) définit donc une transformation entre deux équations $W_3=0$ et $W'_3=0$; en outre, elle en définit une entre deux systèmes du quatrième ordre. Mais bien des cas particuliers peuvent se présenter sur cet exemple. Si x seul ne figure pas dans φ_2, on ne peut former une équation $W'_3=0$; on obtient deux équations, en général incompatibles : aux surfaces intégrales de $W_3=0$ ne correspondent pas des surfaces de (e'); toutefois, il existe une équation

$W'_1 = 0$, à laquelle correspond un système du quatrième ordre; si q seul ne figure pas, alors on peut former $W'_3 = 0$, et en plus une équation $W'_2 = 0$; $W'_3 = 0$ correspond à $W_3 = 0$, $W_2 = 0$ à un système du quatrième ordre. En supposant en plus qu'une des lettres accentuées manque, on en tire des conséquences évidentes.

Sur cet exemple particulier on s'aperçoit de la multiplicité des cas qui peuvent se présenter. D'ailleurs, dans la discussion générale, nous ne nous sommes occupés que des circonstances les plus importantes; les relations (36) peuvent conduire à des équations du second ordre; le cas le plus intéressant sera examiné plus loin, c'est celui où p' et q', par exemple, ne figurent pas dans F.

Remarque. — En nous servant des calculs que nous venons de présenter pour les équations (36), on constate qu'une théorie analogue peut s'établir en partant d'une relation

$$F(x', y', z', p', q', x, y, z, q, s, t) = 0;$$

en particulier, si p' ne figure pas dans F et si F satisfait à une condition analogue à $K = 0$, la relation $F = 0$ définit une transformation entre deux équations du quatrième ordre.

CHAPITRE III.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE TRANSFORMATIONS.

1. Vers la fin du Chapitre précédent nous avons été conduits à considérer des systèmes de quatre relations dont trois

$$(1) \qquad F_i(x', y', z', p', q', x, y, \ldots, p_{0,n-1}) = 0$$

déterminent les ∞^2 éléments supportés par une surface, une courbe ou un point de l'espace (e') quand on y suppose que x, y, z et ses dérivées sont constants. Cela revient à supposer que les deux relations représentées par (2)

$$(2) \qquad \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_i}{\partial z'} \quad \frac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_i}{\partial z'} \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'} \quad \frac{\partial F_i}{\partial q_1} \right\| = 0$$

sont satisfaites, soit identiquement, soit comme conséquence de (1).

A une surface (s'), les relations (1) font correspondre les intégrales d'une équation aux dérivées partielles d'ordre $n-1$ en z : $\varphi_{n-1}=0$ obtenue par l'élimination de x', y' entre les relations $(\bar{\bar{1}})$, à condition que les relations $(\bar{\bar{3}})$

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{dF_1}{dx'}}{\dfrac{dF_1}{dy'}} = \frac{\dfrac{dF_2}{dx'}}{\dfrac{dF_2}{dy'}} = \frac{\dfrac{dF_3}{dx'}}{\dfrac{dF_3}{dy'}}$$

ne soient pas conséquences de $(\bar{\bar{1}})$; par exemple, x' et y' sont calculés par les relations $\bar{\bar{F}}_2=0$, $\bar{\bar{F}}_3=0$. Les dérivées de $\varphi_{n-1}=0$ par rapport à x et à y se calculent au moyen de (4) :

$$(4) \qquad \left\{\frac{dF_i}{dx}\right\}=0, \qquad \left\{\frac{dF_i}{dy}\right\}=0,$$

en représentant par $\left\{\dfrac{dF_i}{dx}\right\}$ le déterminant dont une colonne est formée de $\dfrac{dF_1}{dx}$, $\dfrac{dF_2}{dx}$, $\dfrac{dF_3}{dx}$, les deux autres colonnes appartenant à la matrice qui figure dans le premier membre de (2). Dans (4) ne figurent que x', y', z', p', q' et non les dérivées secondes de z'; les dérivées secondes de $\varphi_{n-1}=0$ s'obtiennent au moyen de

$$\left\| \frac{dU}{dx'} \quad \frac{dU}{dy'} \quad \frac{dU}{dx} \right\|_{U=F_2,F_3,\left\{\frac{dF_i}{dx}\right\}} = 0, \qquad \left\| \frac{dU}{dx'} \quad \frac{dU}{dy'} \quad \frac{dU}{dy} \right\|_{U=F_2,F_3,\left\{\frac{dF_i}{dx}\right\}} = 0;$$

$$\left\| \frac{dU}{dx'} \quad \frac{dU}{dy'} \quad \frac{dU}{dy} \right\|_{U=F_2,F_3,\left\{\frac{dF_i}{dy}\right\}} = 0,$$

où figurent les dérivées secondes de z' et les dérivées de z d'ordre $n+1$; on calcule de même les dérivées successives de $\varphi_{n-1}=0$: ses $h+1$ dérivées d'ordre h contiennent les $h+1$ dérivées de z' d'ordre h et les dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+h$.

Admettons que les relations (1) et (4) permettent de calculer x', y', z', p', q', on peut les exprimer alors par des fonctions de x, y, z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n qui vérifient la relation

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0,$$

si l'on suppose que x, y, z, $\ldots$, $p_{0,n}$ sont les coordonnées des ∞^2 éléments d'ordre n d'une surface quelconque (s); cela résulte des relations

$$\frac{d\mathrm{F}_i}{dx}dx+\frac{d\mathrm{F}_i}{dy}dy+\frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial y'}dy'+\frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial z'}dz'+\frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial p'}dp'+\frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial q'}dq'=0.$$

d'où l'on déduit, grâce à (2) et (4),

$$(dz'-p'\,dx'-q'\,dy')\left\| \frac{\partial\mathrm{F}_i}{dz'} \quad \frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial p'} \quad \frac{\partial\mathrm{F}_i}{\partial q'} \right\|_{1,2,3}=0.$$

Le déterminant est différent de zéro, en général, sans quoi des relations (1) on en déduirait une autre ne contenant que x, y, z, p, q, ce que nous excluons. D'ailleurs, à (s) correspond généralement une surface, ou alors une courbe ou un point. Lorsqu'il lui correspond une surface, les dérivées secondes r', s', t' se calculent par des relations (5) qui permettent d'exprimer, en général, r', s', t' au moyen de x, y, z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, et l'on prolonge les formules de la transformation de telle façon que les dérivées d'ordre h de z' s'expriment au moyen de x, y, z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+h$. A deux surfaces (s) ayant un contact d'ordre (n) correspondent deux surfaces (S) qui sont tangentes.

Revenons au système de quatre relations : la quatrième peut toujours être remplacée par une autre qui soit indépendante des lettres non accentuées et qui constitue une équation aux dérivées partielles en z : $\mathrm{V}=0$. Le problème revient à chercher ce qui correspond à cette équation par la transformation définie par les relations (1). L'application des résultats généraux que nous avons établis permet de trouver des cas où il lui correspond une seule équation ; la plupart des transformations connues peuvent se définir de cette manière ; nous donnerons sur un exemple un moyen facile d'en construire d'autres ; puis la considération des cas singuliers des transformations (1) nous conduira à de nouveaux résultats.

2. Nous allons d'abord exposer quelques propriétés générales des transformations (1). Bäcklund les a trouvées [1] en recherchant s'il est possible de faire correspondre à une surface quelconque (s) de (e) une surface (s') de (e'), de telle sorte qu'à deux surfaces de (e) ayant en commun un élément d'ordre n correspondent deux surfaces de (e')

---

[1] Bäcklund, *Math. Ann.*, t. IX, XI et XIII.

ayant en commun un élément du premier ordre. Cela conduit à trouver des fonctions x', y', z', p', q' de $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ satisfaisant à l'équation aux différentielles totales

$$(6)\quad \begin{aligned} & dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \lambda(dz - p_{10}\,dx - p_{01}\,dy) \\ & - \sum_{i=0,\ j=0}^{i=n-1,\ j=n-1} \lambda_{ij}(dp_{ij} - p_{i+1,j}\,dx - p_{i,j+1}\,dy) = 0. \end{aligned}$$

Par une méthode analogue à celle qu'on emploie pour déterminer les transformations de contact ([1]), on est amené à définir les transformations cherchées par des relations telles que (1). Nous ne nous occuperons par la suite que du cas où ces relations définissent une surface de (e') quand on y suppose $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ constants, c'est-à-dire des transformations définies par une seule équation directrice ([2]),

$$(7)\quad F(x', y', z', x, y, z, \ldots, p_{0,n-1}) = 0$$

à laquelle on associe les suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = F_x = p_{10}\,F_z + p_{20}\,F_{p_{10}} + \ldots + p_{n,0}\,F_{p_{n-1,0}} + \ldots + p_{1,n-1}\,F_{p_{0,n-1}} = 0, \\ \dfrac{dF}{dy} = F_y + p_{01}\,F_z + p_{11}\,F_{p_{10}} + \ldots + p_{n-1,1}\,F_{p_{n-1,0}} + \ldots + p_{0,n}\,F_{p_{0,n-1}} = 0\,; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx'} = F_{x'} + p'\,F_{z'} = 0, \\ \dfrac{dF}{dy'} = F_{y'} + q'\,F_{z'} = 0. \end{cases}$$

On tire x', y', z' de (7) et (8); cela est possible, à moins que l'équation (7), où l'on suppose x', y', z' constants, ne soit intégrale intermédiaire d'une équation d'ordre n, cas que nous écartons; on obtient ensuite p' et q' au moyen de (9). Les expressions ainsi calculées jouissent de propriétés remarquables que nous ne faisons que signaler ([3]).

La transformation ainsi définie s'interprète géométriquement de

---

([1]) *Voir*, par exemple, GOURSAT, t. I, p. 255.

([2]) Les résultats généraux que nous démontrerons s'appliquent aux transformations définies par deux ou trois équations directrices.

([3]) BÄCKLUND, *loc. cit.*

la façon suivante : à un élément d'ordre $n-1$ de (e), nous faisons correspondre par la relation (7) une surface (Σ) de (e'); pour trouver la surface (s') correspondant à une surface (s) de (e), nous prenons l'enveloppe des surfaces (Σ) correspondant aux ∞^2 éléments d'ordre $n-1$ de (s); on obtient bien en général une surface (s'), mais la théorie des enveloppes nous fait prévoir des exceptions; elles se produisent si la relation $(\overline{10})$,

$$(10) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx^2} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dx\,dy} & \dfrac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix} = 0,$$

est compatible avec $(\overline{7})$ et $(\overline{8})$. Par l'élimination de x', y', z' entre (7), (8) et (10), on obtient une équation (en général) d'ordre $n+1$ dont les intégrales se comportent d'une manière singulière dans la transformation. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Pour obtenir l'équation $\varphi_{n-1} = 0$ correspondant à une surface (s'), nous calculons x', y' par les relations $(\overline{\overline{9}})$, ce qui nous conduit à supposer que $\overline{\overline{\Delta}} \neq 0$ et par suite $\overline{\overline{\nabla}} \neq 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'^2} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2F}{dy'^2} \end{vmatrix},$$

$$\nabla = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'\,dx} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dy'\,dx} & \dfrac{d^2F}{dy'\,dy} \end{vmatrix},$$

les dérivées de cette équation s'expriment au moyen de (11). Le cas exceptionnel $\overline{\overline{\Delta}} = 0$ sera examiné en même temps que celui qui vient d'être signalé.

Exemples :

$$1^\circ \quad (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 - f(px' + qy' - z', x, y, z, p, q, \ldots) = 0.$$

A un élément d'ordre n, on fait correspondre une surface de révolution admettant pour axe la normale à l'élément. En deux points correspondants des surfaces (s) et (s'), les normales sont concourantes.

2° En particulier, supposons que f ne contienne pas $px'+qy'-z'$; les surfaces (Σ) sont des sphères; à un point m de (s) correspondent deux points de (s') sur la sphère (Σ) correspondant à m.

3° $$(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2=\mathrm{R}^2;$$

a, b, c, R étant fonctions de p, q, $x+pz$, $y+qz$: à toute droite de (e), on fait correspondre une sphère, et cette sphère, dans la transformation, correspond à chacun des éléments de la file déterminée par la droite. A une surface (s') correspond une équation du premier ordre qui admet comme transformation infinitésimale de contact la dilation. Si la correspondance entre droites et sphères est telle qu'à deux droites concourantes correspondent deux sphères tangentes, aux lignes de courbure de (s) correspondent les lignes principales de la congruence de sphères sur (s').

Calcul des dérivées secondes. — Les équations (9) et (8) donnent, par différentiation :

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}dx'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}dy'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}dx+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}dy=0,\\&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}dx'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2}dy'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}dx+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}dy=0;\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}dx'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}dy'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}dx+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}dy=0,\\&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}dx'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}dy'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}dx+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}dy=0.\end{aligned}\right.$$

En ne considérant que des transformations de surfaces, l'élimination de dx', dy' entre (11) et (12), puis de dx, dy entre les mêmes relations, conduit à deux groupes de trois formules, équivalentes puisque $\nabla\neq 0$:

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\Delta+\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}\right)^2\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2}-2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}+\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}\right)^2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}=0,\\&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\Delta+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2}\\&\qquad-\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}\right)\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}=0,\\&\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\Delta+\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}\right)^2\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2}-2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}+\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}\right)^2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}=0\end{aligned}\right.$$

et

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2F}{dx'^2}\,\delta = \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{d^2F}{dx'\,dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dx'\,dy} + \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{d^2F}{dx'\,dy}\right)^2,\\
&\frac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\delta = \frac{d^2F}{dy^2}\,\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dy'\,dx} - \frac{d^2F}{dx\,dy}\left(\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dx'\,dy} + \frac{d^2F}{dy'\,dx}\,\frac{d^2F}{dy'\,dy}\right)\\
&\qquad + \frac{d^2F}{dx^2}\,\frac{d^2F}{dx'\,dy}\,\frac{d^2F}{dy'\,dy},\\
&\frac{d^2F}{dy'^2}\,\delta = \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{d^2F}{dy'\,dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{d^2F}{dy'\,dx}\,\frac{d^2F}{dy'\,dy} + \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{d^2F}{dy'\,dy}\right)^2,
\end{aligned}\right.$$

où

$$\frac{d^2F}{dx'^2} = r'\,F_{z'} + \left(\frac{d^2F}{dx'^2}\right),\qquad \ldots.$$

Les relations (13) permettent d'exprimer les trois dérivées secondes de l'équation $\varphi_{n-1} = 0$. A ces résultats qui se trouvent dans Bäcklund ou s'en déduisent immédiatement, nous ajoutons les considérations suivantes.

3. En général, à deux surfaces (s_1), (s_2) de (e) ayant le long d'une courbe (c) un contact d'ordre n correspondent deux surfaces (s'_1), (s'_2) ayant le long d'une courbe (c') un contact du premier ordre; mais peut-il se faire que le contact des surfaces (s'_1), (s'_2) soit d'un ordre supérieur?

Cette question est liée à la suivante : si le long de la même courbe (c), la surface (s_1) a seulement un contact d'ordre $n-1$, avec une surface (s_3), on ne peut, en général, rien en conclure pour les surfaces (s'_1) et (s'_3); nous allons voir que si la courbe (c) est convenablement choisie, les deux surfaces (s'_1) et (s'_3) sont tangentes le long d'une courbe qui est la courbe (c') précédemment considérée, et qu'alors les deux surfaces (s'_1) et (s'_2) admettent le long de cette même courbe un contact du second ordre.

Étant donnée la surface s_1, la surface s'_1 correspondante permet d'y déterminer une famille de courbes, qui sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles $\varphi_{n-1} = 0$ à laquelle correspond s'_1 par la transformation; soient (γ) ces courbes; pour que la propriété énoncée soit satisfaite, il faut et il suffit que la courbe (c) soit une courbe (γ). Rappelons que les courbes (γ) sont définies par les équations suivantes $(\overline{\overline{15}})$ [1] :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} F = 0, \qquad dz = p_{10}\,dx + p_{0,1}\,dy, \qquad dy = \lambda\,dx, \\ dp_{ik} = p_{i+1,k}\,dx + p_{i,k+1}\,dy \qquad (i+k \leqq n-2), \\ G = 0, \qquad H = 0, \end{array}\right.$$

où

$$G = \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \Delta_{n-1}(\lambda)\,dp_{n-1,0} + \ldots + (-1)^{n-2}\Delta_1(\lambda)\,dp_{1,n-2},$$

$$H = \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \Delta_{n-1}(\lambda)\,dp_{n-2,1} + \ldots + (-1)^{n-2}\Delta_1(\lambda)\,dp_{0,n-1},$$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(\lambda) &= F_{pn-1,0}\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}F_{p0,n-1}, \\ \Delta_1(\lambda) &= F_{pn-1,0}\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}F_{p1,n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_{n-2}(\lambda) &= F_{pn-1,0}\lambda - F_{pn-2,1}, \\ \Delta_{n-1}(\lambda) &= F_{pn-1,0}. \end{aligned}$$

Ceci posé, considérons une courbe (c) quelconque sur (s); le long de cette courbe $x, y, z, \ldots, p_{0,n-1}$ sont certaines fonctions d'un paramètre ρ; on définit ainsi un bandeau d'ordre $n-1$; le long de (c), $p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}$ sont fonctions de ρ; il suffit de connaître $p_{0,n}$, soit $p^1_{0,n}$ pour en déduire $p^1_{n,0}, \ldots, p^1_{1,n-1}$; sur une surface (s_3) admettant avec (s_1), le long de (c), un contact d'ordre $n-1$ et non supérieur, le long de cette courbe $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ sont les mêmes fonctions de ρ que sur $s_1, \ldots, p_{0,n}$ est une fonction de ρ différente de $p^1_{0,n}$: $p^3_{0,n}$, de laquelle on déduit de la même façon $p^3_{n,0}, \ldots, p^3_{1,n-1}$. Sur (s'_1) il correspond à (c) une courbe (c'_1); le long de cette courbe, x', y', z' sont des fonctions de ρ obtenues par les relations (7) et (8) où l'on a substitué à $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ les fonctions de ρ dont nous venons de parler; p' et q' s'obtiennent ensuite par (9), les équations (8) donnent

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} G + p_{0,n}\left\{(-1)^n\,F_{p_{n-1,0}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \ldots + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 F_{p_{1,n-1}} - \frac{dy}{dx}F_{p_{0,n-1}}\right\}dx = 0, \\ H + p_{0,n}\left\{(-1)^{n-1}F_{p_{n-1,0}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + F_{p_{0,n-1}}\right\}dx = 0. \end{array}\right.$$

Ces deux relations se réduisent à une seule, car $dF = 0$. De même, sur (s'_3) correspond à (c) une courbe (c'_3) qu'on obtient d'une manière

---

(1) GOURSAT, *Équations du deuxième ordre*, t. II, p. 300.

analogue; il suffit de remplacer, dans les équations (16), $p^1_{0,n}$ par $p^3_{0,n}$ et il est bien clair que les deux courbes (c'_1) et (c'_3) ne peuvent coïncider, puisque $p^1_{0,n} \neq p^3_{0,n}$, que si l'expression entre $\{\ \}$ est nulle; les valeurs de p' et q' le long de cette courbe sont alors les mêmes. Le deuxième point se trouve ainsi démontré.

D'ailleurs, le long de (c'), les valeurs de r', s', t' seront, en général, différentes pour les deux surfaces s_1 et s_3; reportons-nous pour nous en assurer aux formules (14). Le second membre de ces relations dépend des dérivées de z d'ordre $n+1$; le long de (c), ces dérivées s'expriment au moyen de $p_{0,n+1}$ et de $dp_{n,0}$, ..., $dp_{0,n}$, c'est-à-dire de $dp_{0,n}$ et $d^2p_{n-1,0}$, ..., $d^2p_{0,n-1}$.

Le second membre de la première relation s'écrit

$$p_{0,n+1}\left\{ F_{p_{0,n-1}} + \ldots + (-1)^{n-1} F_{p_{n-1,0}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} \right\}$$
$$\times \left(\left(\frac{d^2F}{dx'dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dx'dx}\frac{d^2F}{dx'dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dx'dy}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) + K_1.$$

En général, K_1 dépend de $p_{0,n}$ et $dp_{0,n}$, cependant il peut se faire qu'il n'en dépende pas, de même que les expressions analogues construites avec les deux autres formules : on en a un exemple dans les transformations B_1.

Retournons maintenant à la première question posée : les deux surfaces (s_1) et (s_2) ont le long d'une courbe (c) un contact d'ordre n; en raisonnant comme nous venons de le faire, on constate que les deux surfaces (s'_1) et (s'_2) ont un contact du deuxième ordre si l'une des expressions qui multiplient $p_{0,n+1}$ est nulle, ainsi qu'une de celles que l'on déduit des autres formules. On obtient une solution si la courbe (c) est une courbe (γ). Pour qu'il y en eût une autre, il faudrait que les relations

$$\left(\frac{d^2F}{dx'dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dx'dx}\frac{d^2F}{dx'dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dx'dy}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx'dx}\frac{d^2F}{dy'dx} - \left(\frac{d^2F}{dx'dx}\frac{d^2F}{dy'dy} + \frac{d^2F}{dx'dy}\frac{d^2F}{dy'dx}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{d^2F}{dx'dy}\frac{d^2F}{dy'dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{dy'dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dy'dx}\frac{d^2F}{dy'dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dy'dy}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

fussent compatibles, ce qui entraînerait $\nabla = 0$; la surface (s_1) est quelconque, nous avons, pour le moment, exclu le cas où elle est intégrale de l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre en z que l'on déduit de $\nabla = 0$; les points de (s_1) pour lesquels les coordonnées de l'élément d'ordre n satisfont à cette équation sont sur une certaine courbe; si, de plus, le long de cette courbe, $\frac{dy}{dx}$ satisfait à l'une des relations précédentes, on obtient une nouvelle solution du problème. Mais c'est là un cas tout à fait exceptionnel et, de toutes façons, la surface (s_1) étant quelconque, il ne peut s'y trouver qu'une seule courbe répondant à la question, en dehors des courbes (γ). Nous verrons que ce résultat subsiste lorsque la surface (s_1) se comportant d'une manière singulière dans la transformation, il lui correspond cependant une surface.

On déduit de ce qui précède que lorsque deux surfaces (s_1) et (s_2) ont un contact d'ordre $n-1$ le long d'une courbe, si cette courbe est une courbe (γ) pour l'une des surfaces, elle l'est aussi pour l'autre. Nous définissons ainsi des bandeaux d'ordre $n-1$ de (e) qui se transforment en bandeaux du premier ordre de (e'), de même, nous avons trouvé des bandeaux d'ordre n qui se transforment en bandeaux du second ordre, tandis qu'en général, un bandeau d'ordre n se transforme en un bandeau du premier ordre ou un élément du premier ordre, un bandeau d'ordre $n-1$ en une surface de (e').

4. Considérons une équation aux dérivées partielles en z, d'ordre m,

$$f(x, y, z, \ldots, p_{0,m}) = 0 \qquad (\varepsilon). \tag{17}$$

Les intégrales de cette équation se transforment en des surfaces qui sont intégrales d'un certain système d'équations aux dérivées partielles en z'. Pour déterminer ce système nous avons deux méthodes : soit éliminer x, y, z et ses dérivées entre les formules de la transformation qui donnent x', y', z' et ses dérivées et l'équation (17) à laquelle on adjoint celles qu'on en déduit par dérivations; soit en recherchant à quelles conditions doit satisfaire une surface (s') de (e') pour que l'équation $\varphi_{n-1} = 0$ qui lui correspond soit compatible avec l'équation (17), ce qui est la méthode générale que nous avons indiquée. Nous nous proposons l'étude des cas où l'on ne trouve qu'une condition pour (s'), où cette surface est assujettie à être intégrale d'une seule équation aux dérivées partielles en (z') : (ε'). Cela se présente lorsque $[f, \varphi] = 0$ doit être conséquence algébrique du système A ou B déduit de (17) et $\varphi = 0$, ce que l'on peut prévoir quelquefois. Supposons qu'il en soit ainsi. L'équation (ε) est d'ordre m au plus : elle est de cet ordre si l'équation $\varphi_{n-1} = 0$ correspondant à une quelconque de ses intégrales admet avec (ε') des solutions communes dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires; elle sera d'ordre inférieur à m si ces deux équations admettent des solutions communes dépendant de fonctions arbitraires.

Considérons une famille de caractéristiques de (ε) qui, sur une surface intégrale quelconque, ne coïncident pas avec des courbes (γ); si l'ordre de ces caractéristiques est inférieur à $n+1$ et qu'il leur corresponde des caractéristiques de (ε'), celles-ci sont du premier ordre; si leur ordre m_1 est supérieur à n, il leur correspond des caractéristiques d'ordre $m_1 - n + 1$. Admettons maintenant que sur une surface intégrale quelconque de (ε) la famille considérée soit constituée par des courbes (γ) et qu'elle corresponde à des caractéristiques de (ε') : si l'ordre en est inférieur à n, les caractéristiques correspondantes de (ε') sont du premier ordre; sinon, ces dernières sont d'ordre $m_1 - n + 2$, en général.

Ces généralités exposées, il nous serait possible de donner de nombreux exemples de transformations d'équations aux dérivées partielles, mais cela nous entraînerait à de trop longs développements. Bornons-nous à signaler que les transformations que Clairin a définies (1), pour les équations du second ordre admettant un groupe fini de transformations de contact d'ordre au moins égal à 2, rentrent dans la catégorie que nous venons de définir et qu'elles peuvent être généralisées pour des équations d'ordre p admettant une famille de caractéristiques $(p-1)^{\text{uples}}$.

Nous allons simplement traiter rapidement un exemple qui donne des transformations nouvelles.

Considérons la transformation définie par la relation

$$F(x', y', z', z, q, s, t) = 0;$$

une équation $f(s, t, q, z) = 0$ est transformée en une équation du deuxième ordre, car l'équation $\varphi_2 = 0$ correspondant à une surface (s') transformée d'une intégrale quelconque (s) de $f = 0$ et l'équation $\varphi = 0$ admettent des solutions communes dépendant de deux constantes arbitraires [déduites de (1) par une translation quelconque

---

(1) Clairin, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 451.

parallèle au plan Oxy]. Le système B' déduit de $f=0$ et $\varphi_2=0$, qui admettent une direction commune de caractéristiques, est de la forme

$$(B_1^1)\quad \begin{cases} f=0, & \varphi_2=0, \quad \psi=0, \\ \dfrac{df}{dx}=0, \quad \dfrac{df}{dy}=0, & \dfrac{d\varphi_2}{dx}=0, \quad \dfrac{d\psi}{dx}=0. \end{cases}$$

Mais ψ ne contient pas r, (B_1^1) ne se trouve donc pas sous forme régulière, on en déduit

$$(B_2^1)\quad \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad \chi=0, \\ f=0, \quad \varphi_2=0, \quad \dfrac{d\chi}{dx}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

χ étant du premier ordre. Ce système est complètement intégrable et l'on en tire les conclusions habituelles. L'équation du deuxième ordre en z' admet une famille de caractéristiques du premier ordre, correspondant aux caractéristiques de $f=0$ qui ne sont pas les courbes $x=$ const. (courbes γ).

Ceci posé, une relation

$$G(x', y', z', p', q', z, q, s, t)=0$$

permet de former une équation du troisième ordre en z, en y substituant les expressions de x', y', z', p', q' qui définissent la transformation. La recherche des surfaces (s') qui correspondent aux intégrales de cette équation revient à la discussion de deux équations du deuxième ordre où figurent seulement z, q, s, t; si (s') correspond à une intégrale (s) quelconque de l'équation du troisième ordre, ces deux équations du deuxième ordre admettent des solutions communes dépendant de deux constantes arbitraires, et, en raisonnant comme nous venons de le faire, on constate que (s') doit être intégrale d'une seule équation qui se trouve être en général du troisième ordre. Cette équation admet généralement deux systèmes de caractéristiques du premier ordre et un du deuxième; mais une discussion serait nécessaire, que nous ne faisons pas.

Étude des singularités des transformations définies par une équation directrice.

5. *Remarques préliminaires sur la théorie des enveloppes de surfaces dépendant de deux paramètres.* — Soit

$$Z = f(X, Y, a, b) \tag{1}$$

l'équation des surfaces d'une telle famille que, pour la simplicité de l'écriture, nous supposons d'abord résolue par rapport à Z; on obtient l'enveloppe de ces surfaces, quand elle existe, en adjoignant à (1) les relations (2),

$$f_a = 0, \qquad f_b = 0, \tag{2}$$

l'élimination de a et b entre (1) et (2) donne une relation qui représente l'équation de la surface enveloppe. Pour que cette élimination soit possible, il faut qu'on puisse tirer a et b de (2), c'est-à-dire que la relation

$$f_{a^2} f_{b^2} - f_{ab}^2 = 0 \tag{3}$$

ne soit satisfaite ni identiquement ni comme conséquence de (2). Dans le premier cas, l'enveloppe se réduit évidemment à une courbe ou à un point. Plaçons-nous dans le deuxième; les équations (2) permettent de calculer X et Y en fonction de a et b,

$$X = \xi(a, b), \qquad Y = \eta(a, b),$$

à condition que

$$\begin{vmatrix} f_{aX} & f_{aY} \\ f_{bX} & f_{bY} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

ne soit satisfait ni identiquement ni comme conséquence de (2). Supposons d'abord qu'il en soit ainsi: les relations (2) donnent, après différentiation,

$$f_{a^2} f_{b^2} - f_{ab}^2 = (\xi_a \eta_b - \xi_b \eta_a)(f_{aX} f_{bY} - f_{aY} f_{bX}),$$

par conséquent, en raison de l'hypothèse faite sur (4),

$$\xi_a \eta_b - \xi_b \eta_a = 0,$$

il existe donc une relation au moins entre X et Y indépendante de a et b; puis il existe une relation entre X, Y, Z seuls, déduite de (1) à cause de (2). Dans ce cas, on peut donc dire que l'enveloppe se réduit à une courbe ou à un point.

Examinons maintenant l'hypothèse où la relation (4) est, comme (3), conséquence de (2). On s'en assure en calculant a et b au moyen de (4) et de la première (2), ce calcul étant supposé possible; la deuxième doit être satisfaite identiquement quand on y substitue à a et b les expressions qui viennent d'être calculées. De (1) on déduit une relation entre X, Y et Z qui est l'équation de la surface enveloppe (S); on obtient les coordonnées du point de S correspondant à la surface de paramètres a et b en calculant X et Y au moyen de (4) et de la première (2). Les expressions ainsi obtenues pour X et Y doivent satisfaire identiquement à la deuxième (2). Si ce calcul de X et Y était impossible, chaque surface enveloppée serait tangente à (S) le long d'une courbe. En chaque point de la surface (S), les coordonnées de l'élément du premier ordre sont les mêmes pour (S) et la surface enveloppée qui y passe, car $P = F_X$, $Q = F_Y$; de plus, on déduit par différentiation, comme conséquence de (4),

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} R - F_{X^2} & S - F_{XY} \\ S - F_{XY} & T - F_{Y^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que la surface (S) est osculatrice à l'enveloppée.

Observons que le calcul qui a été fait de a et b peut fournir des systèmes de solutions qui ne satisfont pas à la deuxième (2) et qu'il ne faudra pas considérer.

Si le calcul de a et b est impossible de la façon que nous avons indiquée, une nouvelle discussion s'impose : en général, il n'existe pas de surface tangente aux surfaces données.

Si l'équation des surfaces enveloppées n'est pas résolue par rapport à Z :

$$F(X, Y, Z, a, b) = 0,$$

la relation (3) garde la même forme

$$F_{a^2} F_{b^2} - F_{ab}^2 = 0,$$

mais il faut écrire à la place de (4), en posant $F_X + PF_Z = 0$, $F_Y + QF_Z = 0$,

$$(4)' \qquad \begin{vmatrix} F_{aX} + P F_{aZ} & F_{aY} + Q F_{aZ} \\ F_{bX} + P F_{bZ} & F_{bY} + Q F_{bZ} \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple. — Soient les sphères

$$(1)_1 \qquad (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-R^2=0,$$

dont le centre est sur une surface donnée, le rayon dépendant de la position du centre; les diverses relations que nous avons considérées sont ici

$$(2)_1 \qquad \begin{cases} X-x+p(Z-z)+RR_x=0, \\ Y-y+q(Z-z)+RR_y=0; \end{cases}$$

$$(3)_1 \qquad \begin{vmatrix} -1-p^2+r(Z-z)+RR_{x^2}+R_x^2 & -pq-s(Z-z)+RR_{xy}+R_xR_y \\ -pq+s(Z-z)+RR_{xy}+R_xR_y & -1-q^2-t(Z-z)+RR_{y^2}+R_y^2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(4)'_1 \qquad \begin{vmatrix} 1+pP & pQ \\ qP & 1+qQ \end{vmatrix}=1+P+qQ=0;$$

$$X-x+P(Z-z)=0,$$
$$Y-y+Q(Z-z)=0.$$

L'élimination de $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ entre $(1)_1$, $(2)_1$ et $(3)_1$ procure, la surface des centres étant connue, une équation du deuxième ordre en R qui détermine le rayon de telle façon que les sphères de la congruence soient tangentes à une courbe; le point caractéristique de la sphère enveloppe situé sur la courbe est donné par l'élimination indiquée; l'autre point engendre une surface. D'autre part, des équations $p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0$, (2_1) et $(4)'_1$, on déduit

$$(Z-z)(1+p^2+q^2)+R(pR_x+qR_y)=0,$$

puis

$$(X-x)(1+p^2+q^2)+R[R_x(1+p^2)-pqR_y]=0,$$
$$(Y-y)(1+p^2+q^2)-R[R_xpq+RR_y(1+p^2)]=0;$$

d'où, finalement, la relation connue

$$(1+q^2)R_x^2-2pqR_xR_y+(1+p^2)R_y^2-(1+p^2+q^2)=0$$

ou

$$\Delta R=1,$$

Δ représentant le paramètre différentiel du premier ordre pris sur la surface des centres. Elle détermine R pour que les sphères considérées constituent une famille de sphères de courbure d'une certaine surface, que nous avons d'ailleurs complètement déterminée.

Remarque. — L'enveloppe d'une famille de surfaces qui dépendent de deux paramètres (et qui comprend le lieu des points singuliers et des lignes singulières de ces surfaces) peut se décomposer en différents éléments correspondant aux divers cas signalés ; par exemple, l'enveloppe d'une famille de sphères peut se décomposer en une courbe et une surface, comme nous l'avons indiqué ; elle se décompose en deux courbes si R satisfait à un système de deux équations du second ordre qui expriment, par exemple, que les deux équations du second degré qui déterminent $Z - z$ ont leurs coefficients proportionnels.

6. Considérons la transformation [1] définie par la relation

$$F(x', y', z', x, y, z, \ldots, p_{0,n-1}) = 0. \tag{6}$$

Nous lui adjoignons les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} &= 0; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} F_{x'} + p' F_{z'} &= 0, \\ F_{y'} + q' F_{z'} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Le cas où, entre les équations (6) et (7), l'élimination de x', y', z' est possible a été écarté ; les relations $\delta = 0$, $\nabla = 0$ permettent, en général, chacune de déterminer une équation aux dérivées partielles en z par l'élimination de x', y', z' au moyen de (6) et (7), (σ_{n+1}) d'ordre $(n+1)$, (θ_n) d'ordre n. Nous observons immédiatement que (θ_n) est une intégrale intermédiaire de (σ_{n+1}) : les relations (7) donnent en effet par différentiation :

$$\frac{d^2F}{dx'\,dx}dx' + \frac{d^2F}{dx\,dy'}dy' + \frac{d^2F}{dx^2}\,dx + \frac{d^2F}{dx\,dy}dy = 0,$$
$$\frac{d^2F}{dx'\,dy}dx' + \frac{d^2F}{dy'\,dy}dy' + \frac{d^2F}{dx\,dy}dx + \frac{d^2F}{dy^2}\,dy = 0,$$

d'où l'on déduit que les dérivées de (θ_n) par rapport à x et y se cal-

---

(1) Pour la théorie analogue relative aux transformations de contact, *voir* Goursat, t. II_1, Chap. I ; Lie, *Math. Ann.*, t. LIV, p. 193 (art. posthume).

culent au moyen de

$$(10)\quad \frac{d^2F}{dx'\,dy}\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2F}{dx'\,dx}\frac{d^2F}{dx\,dy}=0,\qquad \frac{d^2F}{dx'\,dy}\frac{d^2F}{dx\,dy}-\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{d^2F}{dy^2}=0,$$

en supposant

$$\frac{d^2F}{dx'\,dx}\frac{d^2F}{dx'\,dy}\neq 0,$$

ce qui a lieu en général, et les intégrales de (θ_n) satisfont à l'équation que l'on déduit de $\delta=0$, c'est-à-dire (σ_{n+1}).

Ceci posé, si une surface (s) n'est pas intégrale de (σ_{n+1}), les ∞^2 surfaces Σ qui lui correspondent au moyen de (6) enveloppent une surface (S) que l'on obtient par les formules de la transformation et qui présente un contact du premier ordre avec chaque surface (Σ).

Supposons maintenant que (s) soit intégrale de (σ_{n+1}); si elle ne l'est pas de (θ_n), les $\infty^2\,\Sigma$ correspondantes sont tangentes à une courbe (c') de (e') ou bien ont un point commun; elles peuvent d'ailleurs être tangentes, en outre, à une certaine surface. Réciproquement, supposons que dans la relation (1), x', y', z' soient des constantes, nous obtenons une équation d'ordre $n-1$ qui est une intégrale intermédiaire de (σ_{n+1}), puisqu'elle satisfait à

$$\frac{d^2F}{dx^2}=0,\qquad \frac{d^2F}{dx\,dy}=0.\qquad \frac{d^2F}{dy^2}=0.$$

De même, si x', y', z' sont les coordonnées des points d'une courbe de (e'), c'est-à-dire s'ils dépendent d'un paramètre t, l'élimination de t entre (6) et

$$F_{x'}\frac{dx'}{dt}+F_{y'}\frac{dy'}{dt}+F_{z'}\frac{dz'}{dt}=0$$

procure une équation d'ordre $n-1$; les dérivées de cette équation s'obtiennent au moyen des relations (7), en y substituant à x', y', z' leurs expressions en t, puis à t la valeur que l'on vient de calculer; la différentiation des équations (7) donne des relations de la forme

$$A\,dt+\frac{d^2F}{dx^2}\,dx+\frac{d^2F}{dx\,dy}dy=0,$$
$$B\,dt+\frac{d^2F}{dx\,dy}dx+\frac{d^2F}{dy^2}\,dy=0,$$

d'où l'on en tire qui permettent de calculer les dérivées secondes de l'équation d'ordre $n-1$ considérée ; les solutions de cette équation satisfont donc à celles que l'on déduit de

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}-\mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}=0,\\
&\mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}-\mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}=0.
\end{aligned}$$

donc aussi à (σ_{n+1}) et l'équation d'ordre $n-1$ est intégrale intermédiaire de (σ_{n+1}) qui admet, par conséquent, une intégrale intermédiaire d'ordre $(n-1)$ dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable.

7. Les choses se passent d'une façon toute différente lorsque (s) est intégrale de (θ_n) : les ∞^2 surfaces (Σ) qui lui correspondent sont osculatrices à une surface (s') : nous déterminons x', y', z' au moyen de $(\overline{6})$, la première $(\overline{7})$ et $\overline{\nabla}=0$; puis p' et q' par $(\overline{8})$. Cherchons à déterminer les dérivées secondes. On déduit de (3) par différentiation :

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}dx'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}dy'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dx}dx+\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy}dy=0,\\
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}dx'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2}dy'+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dx}dx+\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'\,dy}dy=0,\\
&\qquad\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}=r'\mathrm{F}_{z'}+\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}\right),\qquad\ldots.
\end{aligned}\right.$$

Puisque $\overline{\nabla}=0$, nous en déduisons les relations $(\overline{12})$:

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2}\,\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy'}-\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}\,\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dx'}=0,\\
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'}\,\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy'}-\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2}\,\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dx'}=0,
\end{aligned}\right.$$

en admettant, ce qui est le cas général, que $\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy'}\cdot\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dx'}\neq 0$.

Le système $(\overline{11})$ est, par suite, équivalent à l'une de ses équations, la première par exemple, et à $(\overline{12})$. D'ailleurs, des deux premières relations (11) et (9), on tire

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dx\,dy'}=0,\\ &\frac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\frac{d^2F}{dx\,dy}-\frac{d^2F}{dx'\,dy}\,\frac{d^2F}{dx\,dy'}=0,\end{aligned}\right.$$

ces deux relations sont compatibles grâce à la première (10) et déterminent (s'). Tout se passe comme si les deux relations $(\overline{12})$ étaient les dérivées par rapport à x' et y' d'une certaine relation; on en déduit par différentiation trois relations où figurent les dérivées troisièmes de z', tandis que les relations $(\overline{13})$ seraient les dérivées par rapport à x et à y d'une autre relation et équivalentes à l'une d'entre elles, en tenant compte des relations déjà écrites; nous pouvons indifféremment considérer une relation comme fonction de x' et y', ou de x et y, puisque nous avons défini une transformation ponctuelle entre ces deux couples de variables indépendantes. Une différentiation opérée sur les relations $(\overline{13})$ ne donne qu'une relation nouvelle, où figure une dérivée troisième de z'; nous avons donc, en tout, quatre relations pour déterminer ces dérivées: trois d'ordre $n+1$, une d'ordre $n+2$, et ainsi de suite pour déterminer les dérivées successives de z'; pour déterminer les dérivées d'ordre p, on obtient p relations contenant les dérivées de z jusqu'à l'ordre $p+n-2$, une autre les contenant jusqu'à l'ordre $p+n-1$.

On peut se faire une idée du système auquel satisfont les surfaces qui correspondent aux intégrales de (θ_n). Formons toutes les équations qui contiennent des dérivées de z jusqu'à l'ordre p': il y a celles qui donnent x', y', z' et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, tel que $p'=p+n-2$, puis p qui contiennent les dérivées de z' d'ordre p; ensuite, il y a la relation $\nabla=0$ et celles qui permettent de calculer les dérivées de (θ_n) jusqu'à l'ordre p' en z; cela fait en tout

$$2+\frac{p(p+1)}{2}+p+\frac{(p'-n+1)(p'-n+2)}{2}$$
$$=2+p+\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}=p^2+p+2;$$

les arguments à éliminer x, y, z et ses dérivées jusqu'à l'ordre p

forment un total de

$$2+\frac{(p'+1)(p'+2)}{2}=2+\frac{(p+n-1)(p+n)}{2}.$$

Si $n=2$, pour $p=2$ on obtient un nombre de relations égal au nombre d'inconnues à éliminer; pour $p=3$, l'élimination de $x, y, z, \ldots$ donne deux relations du troisième ordre en z', $p=4$ donne trois nouvelles relations du quatrième ordre; l'équation (θ) est du deuxième ordre et il lui correspond un système de deux équations du troisième ordre en involution.

Si $n=3$, l'équation (θ) est du troisième ordre et l'on constate que le système correspondant comprend deux équations du 5ᵉ ordre, quatre du 6ᵉ, cinq du 7ᵉ, six du 8ᵉ, etc.

Si $n=4$, l'équation (θ) est du quatrième ordre, il lui correspond un système en involution comprenant une équation du 7ᵉ ordre, cinq équations du 8ᵉ, six du 9ᵉ, sept du 10ᵉ, etc.

Ce sont là du moins les circonstances générales; et à une solution d'un de ces systèmes correspond une seule intégrale de (θ) parfaitement déterminée.

Exemple. — Considérons la transformation définie par

$$(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2-R^2=0,$$

a, b, c, R étant fonctions de x, y, z et de certaines de ses dérivées.

L'équation (θ) est donnée par la relation

$$E\left(\frac{dR}{dy}\right)^2-2F\frac{dR}{dx}\frac{dR}{dy}+G\left(\frac{dR}{dx}\right)^2-(EG-F^2)=0,$$

où

$$E=\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{dc}{dx}\right)^2, \qquad \ldots.$$

A une surface (s) intégrale de (θ) correspondent ∞^2 sphères qui sont les sphères de courbure d'une surface (s'). Si a, b, c, R ne dépendent que de x, y, z, p, q, ces surfaces (s') sont en général intégrales d'un système de deux équations du troisième ordre en involution, à toute solution duquel correspond une solution de (θ).

8. On pourrait rechercher, par la méthode que nous venons de donner, les circonstances où le système correspondant à (θ) est plus simple que celui dont nous avons établi l'existence, et en particulier se réduit à une seule équation. Il sera plus simple de procéder suivant l'autre méthode, que nous avons exposée dans le cas général; la correspondance établie entre (θ) et le système en question est définie par les relations (6), (8) et (14) :

$$(14) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 F}{dx'^2} & \dfrac{d^2 F}{dx'\,dy'} \\ \dfrac{d^2 F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2 F}{dy'^2} \end{vmatrix} = 0;$$

nous allons chercher à quelles conditions doit satisfaire une surface (s') de (e') pour qu'il lui corresponde, par ces quatre relations, quelques surfaces (s); nous calculons x' et y' par l'une des relations $(\overline{\overline{8}})$ et $(\overline{\overline{14}})$, puis, au moyen de $(\overline{\overline{6}})$ et l'autre $(\overline{\overline{8}})$, nous obtenons deux équations aux dérivées partielles d'ordre $n-1$ en z : $\psi = 0$, $\chi = 0$; d'une façon générale, pour trouver la transformée d'une équation d'ordre n, l'ordre de (θ), par la transformation (6), on est conduit à discuter le système de deux équations d'ordres $n-1$ et n; dans le cas présent, on trouve donc une simplification. Elle s'explique aussi parce que (θ_n) admet, avec l'équation $\psi = 0$, $n-1$ directions communes de caractéristiques; cela résulte des relations (10); on en conclut que des quantités proportionnelles aux dérivées du premier membre de (θ_n), par rapport à $p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}$, se déduisent des expressions

$$\frac{d^2 F}{dy'\,dy} F_{p_{i,j}} - \frac{d^2 F}{dx'\,dx} F_{p_{i+1,j-1}} \qquad (i+j = n-1).$$

où l'on remplace x', y', z' par des expressions en $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$; les dérivées du premier membre de $\psi = 0$ sont, de même, proportionnelles à des quantités déduites des $F_{p_{i,j}}$, où l'on remplace x', y', z' par des fonctions de $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$, qui sont différentes des précédentes, mais qui prennent la même valeur en x et y lorsqu'on y suppose que z est la fonction de x et y qui définit une surface intégrale de (θ_n) : (s); les $(n-1)$ solutions en $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ de l'équation qui définit les caractéristiques de $\psi = 0$ sur (s) sont donc solution de l'équation analogue relative à (θ_n); soient (γ') les courbes ainsi définies.

A un bandeau d'ordre $(n-1)$ appartenant à (s) correspond en général une surface de (e'), à moins que le bandeau ne soit supporté par une courbe (γ'), auquel cas il lui correspond un bandeau du premier ordre ; la démonstration est la même que celle qui a été donnée dans le cas d'un bandeau appartenant à une surface quelconque supporté par une courbe (γ). De même à un bandeau d'ordre n situé sur une intégrale de (θ_n) correspond en général un bandeau du premier ordre, à moins que la valeur de s' déduite de (13) ne soit indépendante des dérivées de z d'ordre $n+1$, ce qui exige que le bandeau soit supporté par une courbe (γ'), et il lui correspond alors un bandeau du second ordre, en général.

Il résulte de là que le système correspondant à (θ_n) admet une famille de caractéristiques du premier ordre et $n-1$ du second ordre lorsque toutes les caractéristiques de (θ_n) sont du $n^{\text{ième}}$ ordre. Si une des familles supportées par des courbes (γ') est d'ordre inférieur à n, il lui correspond des caractéristiques du premier ordre.

Nous allons d'abord étudier le cas où $n=2$; il conduit à des propriétés générales des équations du second ordre, qui ne peuvent se généraliser au cas où $n>2$; nous donnerons ensuite une idée des différences qui se présentent en nous occupant du cas où $n=3$.

9. Soit la relation (15) qui définit une transformation

$$F(x', y', z', x, y, z, p, q) = 0. \tag{15}$$

L'équation (θ) est du second ordre et il lui correspond en général un système de deux équations du troisième ordre en involution; nous sommes d'ailleurs dans un cas particulier d'une question précédemment exposée. Pour étudier les diverses circonstances qui peuvent se présenter, nous avons à discuter le système des deux équations du premier ordre $\psi=0$, $\chi=0$; formons les équations qui nous permettent de calculer celles dont nous avons besoin pour cette discussion : $\chi_p\psi_q-\psi_q\chi_p=0$: $(\overline{\overline{16}})$; $[\psi,\chi]=0$: $(\overline{\overline{17}})$, et les deux relations (9) (Chap. I), $(\overline{\overline{18}})$:

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\dfrac{dF_p}{dx'}-\dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\dfrac{dF_q}{dx'}-\dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{dF_q}{dy'} \end{vmatrix}=0; \tag{16}$$

$$\frac{d^2F}{dx'\,dy'}\left[F,\frac{dF}{dx'}\right]_z-\frac{d^2F}{dx'^2}\left[F,\frac{dF}{dy'}\right]_z=0 \tag{17}$$

et

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} F_p & F_x + pF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'dy'}\dfrac{dF_p}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'dy'}\dfrac{d(F_x+pF_z)}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{d(F_x+pF_z)}{dy'} \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} F_p & F_y + qF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'dy'}\dfrac{dF_p}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{dF_p}{dy'} & \dfrac{d^2F}{dx'dy'}\dfrac{d(F_y+qF_z)}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dy'^2}\dfrac{d(F_y+qF_z)}{dy'} \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

Supposons d'abord que (16) ne soit pas conséquence algébrique des autres relations qui définissent la transformation de (θ) : (15), (7), (8), $\delta = 0$, $\nabla = 0$, $\Delta = 0$. Si, entre les cinq relations d'où l'on déduit $\psi = 0$ et $\chi = 0$: (15), (8), (14) et (17), on peut éliminer x, y, z, p, q de telle façon qu'on obtienne une relation ne contenant que x', y', z' et ses dérivées, cette relation constitue une équation aux dérivées partielles (Θ) à une solution de laquelle correspondent, en général, des solutions de (θ) dépendant d'une constante arbitraire.

Exemples. — Ce cas se présente si l'une des lettres x, y, z ne figure pas dans F; elle ne figure pas non plus dans l'équation de (θ); il se présente aussi lorsque x, y, z, p, q ne figurent dans F que par les quatre invariants d'un groupe de transformations de contact à un paramètre. Soit (s') une surface correspondant à une solution (s) de (θ); les deux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$, qu'elle permet de former, sont en involution puisqu'elles admettent comme solutions (s') et les surfaces qu'on en déduit par les transformations du groupe considéré. L'équation (θ) admet alors évidemment ce groupe de transformations, ce qui était à prévoir.

Ainsi, reprenons la transformation définie par

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2 = R^2,$$

en supposant a, b, c, R fonctions de $p, q, x+pz, y+qz$; nous savons former l'équation (θ) correspondante au moyen de $\Delta R = 1$; elle admet le groupe des dilatations; à cette équation correspond une équation du second ordre, et si la correspondance entre droites et sphères est telle qu'à deux droites qui se rencontrent correspondent deux sphères tangentes, sur deux surfaces intégrales correspondantes des deux équations les lignes de courbure se correspondent.

L'équation Θ, d'après la façon dont elle est formée, admet en général un système de caractéristiques du premier ordre; cela résulte aussi de la théorie générale, l'équation (θ) n'admettant, sauf exceptions, que des caractéristiques du second ordre.

Pour obtenir les conditions auxquelles doivent satisfaire la fonction F pour que l'élimination soit possible, remplaçons d'abord (14) par

$$\frac{d^2 F}{dx'\,dy'}\left[F, \frac{dF}{dy'}\right]_z - \frac{d^2 F}{dy'^2}\left[F, \frac{dF}{dx'}\right]_z = 0. \tag{19}$$

Il faut qu'on puisse éliminer x, y, z, p, q entre (14), (8), (17) et (19): le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport à x, y, z, p, q doit être nul en tenant compte de ces relations; cela donne une relation en s' qui paraît du deuxième degré, mais qui est seulement du premier; on y remplace p' et q' au moyen de (8) et la fonction F doit satisfaire à deux conditions seulement, moyennant $F = 0$.

Passons aux articles suivants du tableau de discussion de deux équations du premier ordre.

Pour que la relation (16) soit satisfaite, il faut d'abord que

$$\frac{F_p}{F_q} = \frac{\left(\dfrac{dF}{dx'}\right)_p}{\left(\dfrac{dF}{dy'}\right)_p} = \frac{F_{x'p} + p' F_{z'p}}{F_{x'q} + p' F_{z'q}} = \frac{F_{y'p} + q' F_{z'p}}{F_{y'q} + q' F_{z'q}}.$$

En y remplaçant p' et q' par leurs expressions tirées de (8), il vient

$$\frac{F_p}{F_q} = \frac{F_{x'p} F_{z'} + F_{z'p} F_{x'}}{F_{x'q} F_{z'} - F_{z'q} F_{x'}} = \frac{F_{y'p} F_{z'} - F_{z'p} F_{y'}}{F_{y'q} F_{z'} - F_{z'q} F_{y'}}.$$

Cela entraîne que le rapport $\frac{F_p}{F_q}$ soit fonction de x, y, z, c'est-à-dire que F satisfasse à une équation de la forme

$$\frac{F_p}{F_q} = \Phi(F, x, y, z)$$

ou, en définitive, que F soit fonction de p et q par l'intermédiaire d'une expression de la forme

$$l(x, y, z, p, q),$$

de telle sorte que l'équation de la transformation est

$$F_1[x', y', z', l(x, y, z, p, q), x, y, z] = 0,$$

la réciproque est évidente. Le cas se présente lorsque p ou q ne figure pas dans F.

Supposons alors que (16) soit satisfaite; les équations $\psi = 0$ et $\chi = 0$ admettent une seule solution commune, en général; elles peuvent ne pas en admettre du tout ou admettre toutes celles de l'une d'elles; l'élimination de x, y, z, p, q, entre les six relations (15), (8), (14), (18), conduit en général à une équation (Θ_1) du second ordre en z'; à toute solution de (Θ_1) correspond en général une seule solution de (θ); les deux équations (θ) et (Θ_1) se correspondent dans une transformation (B_1).

Recherchons enfin s'il est possible que les équations $\psi = 0$ et $\chi = 0$ admettent, pour toute intégrale de (θ), une solution singulière : (16) doit être conséquence de (14), (15), (8) et (18); s'il en est ainsi, l'élimination de x, y, z, p, q entre ces six relations donne une équation du second ordre en z' : (Θ_2); mais on s'aperçoit que les deux équations (θ) et (Θ_2) se correspondent dans une transformation de Bäcklund B_1 définie par les quatre relations (15), (8) et celle que l'on déduit de (18) par l'élimination du rapport $\frac{d^2 F}{dx'^2} : \frac{d^2 F}{dx'\,dy'}$, et nous n'insistons pas.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes bornés à envisager les circonstances générales qui peuvent se présenter, où certaines expressions ne sont pas nulles soit identiquement, soit comme conséquence des relations que l'on considère; l'examen des divers cas particuliers qui se présentent n'offre aucune difficulté et n'apprend d'ailleurs rien de bien important. Signalons toutefois que nous avons supposé que l'élimination de x, y, z, p, q est impossible entre (15), (8) et (14), et que cette hypothèse revient à admettre que F ne dépend pas de x, y, z, p, q par l'intermédiaire seulement de trois fonctions $\psi_1(x, y, z, p, q)$, ψ_2, ψ_3, comme on s'en aperçoit aisément en supposant pour un instant la relation (15) résolue par rapport à z'. La transformation $\xi = \psi_1$, $\eta = \psi_2$, $\zeta = \psi_3$ nous ramène à étudier les surfaces qui se comportent d'une façon singulière dans une transformation de contact.

10. Étant donnée une équation du second ordre

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{20}$$

peut-on l'obtenir en partant d'une transformation définie par une relation telle que (15) vis-à-vis de laquelle elle jouerait le rôle de l'équation (θ). La réponse est affirmative; on peut, sauf exceptions, déterminer de telles transformations; seulement, en général, elles ne font pas correspondre à (20) une seule équation, mais un système de deux équations du troisième ordre.

Pour le montrer, nous allons faire usage de la représentation géométrique habituelle où r, s, t sont considérés comme les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions (ε). Soit h la surface dont l'équation est (20). Observons que la surface doit alors pouvoir être obtenue comme la surface focale de la congruence des droites définies par les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{F}}{dx} = 0, \\ &\frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

x', y', z' étant les paramètres liés par la relation $\mathrm{F} = 0$. Les droites de cette congruence appartiennent au complexe des droites qui rencontrent la conique située à l'infini sur le cône $rt - s^2 = 0$. Inversement, connaissant la surface (h), cherchons à déterminer la congruence formée par ses tangentes qui sont parallèles aux génératrices de ce cône. Posons

$$\frac{\mathrm{F}_x + p\,\mathrm{F}_z}{\mathrm{F}_p} = u, \qquad \frac{\mathrm{F}_y + q\,\mathrm{F}_z}{\mathrm{F}_p} = v, \qquad \frac{\mathrm{F}_q}{\mathrm{F}_p} = w.$$

L'équation de la congruence s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} &u + r + sw = 0, \\ &v + s + tw = 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

u, v, w dépendant des deux paramètres. Considérons-les comme les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions ($\mathcal{E}'$); les coordonnées de ce point dépendent de deux paramètres, il décrit en général une surface (h') et les deux surfaces (h) et (h') se correspondent dans la transformation de contact définie par les deux relations (21). On obtient facilement l'équation de la surface (h'), soit

$$\varphi(u, v, w) = 0. \tag{22}$$

Pour obtenir les congruences cherchées, il suffira d'exprimer les coordonnées d'un point de (h') en fonction de deux paramètres. Revenons à la question posée; la relation (22) permet d'établir une relation homogène entre $F_x + pF_z$, $F_y + qF_z$, F_p, F_q; on obtient ainsi une équation aux dérivées partielles du premier ordre en F : il suffit de considérer une solution de cette équation dépendant de trois constantes arbitraires pour obtenir une fonction F répondant aux conditions demandées, et cela est toujours possible d'une infinité de façons. En particulier, si x ne figure pas dans f, nous pouvons chercher une fonction F qui ne contienne pas x : ce sera une intégrale complète de l'équation que nous avons appris à former, nous en déduisons le théorème suivant :

Étant donnée une équation du deuxième ordre admettant une transformation infinitésimale, il est toujours possible, par l'intégration d'équations différentielles, de la transformer en une équation du deuxième ordre admettant un système au moins de caractéristiques du premier ordre. On peut même trouver une infinité de ces transformations correspondant aux diverses intégrales complètes de l'équation du premier ordre qui détermine F : *les diverses équations du deuxième ordre qu'on obtient se déduisent de l'une d'entre elles par une transformation de contact quelconque, ainsi qu'il résulte d'une propriété connue des équations du premier ordre.*

Remarques. — I. La transformation F étant choisie, une famille de courbes (γ') se trouve déterminée sur les surfaces intégrales de (20); il est facile de reconnaître avec laquelle des deux familles de caractéristiques elle coïncide. Des formules de la transformation de contact on déduit en effet

$$wf_r - f_s = \frac{-f_t}{w},$$

d'où

$$f_r w^2 - wf_s + f_t = 0,$$

ou encore

$$f_r F_q^2 - f_s F_p F_q + f_t F_p^2 = 0;$$

une détermination étant choisie pour w, c'est la famille de caractéristiques correspondant à la même détermination qui coïncide avec les courbes (γ') et c'est l'autre famille qui correspond aux caractéristiques du premier ordre de (Θ).

II. Nous avons admis qu'à h correspond par la transformation de contact (21) une surface (h') : il peut lui correspondre une courbe; il faut pour cela que la fonction f (de r, s, t) soit intégrale d'une équation du second ordre, l'intégration de cette équation est évidente; l'équation (20) doit représenter une surface réglée dont les génératrices appartiennent au complexe précédemment indiqué : l'équation $f = 0$ admet donc au moins un système de caractéristiques du premier ordre et la transformation qui correspond à ce système est une transformation de Bäcklund. Si l'équation est de Monge-Ampère, les deux transformations sont de Bäcklund, en admettant naturellement qu'à l'équation (20) corresponde une équation.

L'équation du second ordre qui définit les équations admettant un système de caractéristiques du premier ordre admet une intégrale singulière du premier ordre dont les intégrales fournissent les équations admettant des caractéristiques doubles, car la surface (h) correspondante est une développable dont les génératrices appartiennent au complexe; mais ceci est un cas dont nous ne nous occupons pas ici.

Nous avons supposé que l'élimination de x', y', z' entre (15), (17) et $V = 0$ conduit à une seule relation entre x, y, z et ses dérivées, mais on voit par l'exemple d'une relation (15) linéaire en x', y', z' qu'il peut se faire qu'on soit conduit à deux relations. Il est facile de déterminer les fonctions F qui ne conduisent pas à une seule relation : par la transformation de contact (21), à une surface (h') quelconque de (ε') correspond une surface (h) de (ε), à moins que (h') ne soit intégrale d'une équation du second ordre, auquel cas il lui correspond une courbe ou un point; cette équation du second ordre admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dont les solutions correspondent aux développables que nous venons de signaler; on peut donc définir des transformations conduisant aux équations à caractéristiques doubles. Mais on remarque, comme dans le cas général, que la transformation ne fait pas correspondre nécessairement à (θ) une équation (Θ).

III. A diverses reprises, nous avons trouvé que les transformations que nous déterminions étaient des transformations de Bäcklund; on peut aisément former les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction F pour qu'il en soit ainsi; il nous suffit d'examiner le cas où ce n'est pas par une solution singulière des deux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$ que s'établit la correspondance; il faut alors que des relations (7) et $V = 0$, on en déduise une qui soit indépendante de r, s, t. La droite (7) rencontre la quadrique représentée par $\nabla = 0$ en un point dont la coordonnée s est donnée par une relation de la forme $Ks + K_1 = 0$; dans K et K_1 nous remplaçons p' et q' par les expressions tirées de (8); nous obtenons $Ls + L_1 = 0$; il faut que moyennant $F = 0$ les deux expressions L et L_1 aient un facteur commun; comme cas particulier on peut prendre une fonction F satisfaisant soit à $L = 0$, soit à $L_1 = 0$.

11. *Transformations du troisième ordre : $n = 3$.* — Soit

$$F(x', y', z', x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{23}$$

la relation directrice; l'équation (θ) est du troisième ordre, et nous avons vu qu'il lui correspond généralement un système en z' du troisième ordre d'involution, dont les équations de base comprennent deux équations du cinquième et une du sixième ordre; nous nous proposons de rechercher s'il est possible qu'à (θ) corresponde une seule équation.

La détermination des surfaces (s') correspondant à une intégrale quelconque (s) de (θ) revient à la discussion du système de deux équations du second ordre $\psi = 0$, $\chi = 0$, provenant de l'élimination de x' et y' entre les relations $(\overline{\overline{23}})$, $(\overline{\overline{24}})$, $(\overline{\overline{25}})$:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{dx'} &= 0, \\ \frac{dF}{dy'} &= 0; \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'^2} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2F}{dy'^2} \end{vmatrix} = 0; \tag{25}$$

les surfaces (s') sont déterminées comme solution d'une seule équation aux dérivées partielles (Θ), si de ces deux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$ on déduit un système (A) ou (B^r) ($r = 1$ ou 2) tel que $[\psi, \chi] = 0$ en soit conséquence algébrique.

Si les deux équations n'admettent pas en général de direction commune de caractéristiques, pour que cela se produise il faut qu'elles admettent des solutions communes dépendant de quatre constantes arbitraires; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque parmi les lettres non accentuées qui figurent dans F il manque z et trois autres parmi x, y, p, q, ou bien encore s, p, q, z.

Si les deux équations admettent en général une direction commune de caractéristiques, on en déduit un système (B') et différents cas peuvent se présenter : par exemple, on obtient une équation (Θ) si parmi les petites lettres ne figurent que s, t, p, q ou s, t, q, z, ou bien encore y, q, s, t ; mais, par la transformation $\zeta = q$, on est ramené dans ce dernier cas à une transformation déjà étudiée, l'équation (Θ) est seulement du deuxième ordre et à chacune de ces solutions correspondent des intégrales (Θ) données par l'intégration d'une équation du premier ordre. L'étude du cas où les deux équations admettent généralement des solutions singulières engendrées par une famille de caractéristiques communes est compliquée parce qu'elle fait intervenir des relations où figurent les dérivées troisièmes de z' ; nous la laissons de côté et arrivons au cas où les deux équations admettent généralement les deux directions de caractéristiques communes.

Le système (B^2) qu'on en déduit est équivalent à celui d'une équation du deuxième ordre et d'une équation du premier ordre ; donnons des exemples des différentes circonstances qui peuvent se présenter. La fonction F ne contient que s, p, q et une des trois lettres x, y, z ; le système (B_1^2) est complètement intégrable puisqu'il admet des solutions dépendant de deux constantes arbitraires ; la fonction F ne contient que s, q, z et une des lettres x, y ; le système (B_2^2) est complètement intégrable puisqu'il admet des solutions dépendant d'une constante arbitraire ; la fonction F ne contient que x, y, z, s ; le système (B_3^2) admet une solution parfaitement déterminée ; la fonction F contient x, y, q, s et l'équation (Θ) est du deuxième ordre. Enfin, le cas où les deux équations ont une direction de caractéristiques doubles communes se rattache à celui-là ; ainsi, lorsque la fonction F ne contient que x, y, z, q, t, elle définit une transformation entre deux équations du troisième ordre ayant une direction de caractéristiques doubles et telle qu'à une solution de chaque équation correspond une solution de l'autre.

Recherchons maintenant s'il peut se faire que le système des deux équations admette généralement des solutions singulières communes engendrées chacune par des caractéristiques des deux familles. Les mineurs de D procurent les relations

$$\frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\dfrac{dF_r}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{d^2F}{dy'}}{F_r} = \frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\dfrac{dF_s}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{dF_s}{dy'}}{F_s}$$

$$= \frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\dfrac{dF_t}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\dfrac{dF_t}{dy'}}{F_t}$$

et les deux premières relations qu'il faut adjoindre pour former le système (C^2) sont obtenues en égalant les deux rapports suivants à l'un de ceux qu'on vient d'écrire :

$$\frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{dx'}-\dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{dy'}}{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)},\qquad \frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dy}\right)}{dx'}-\dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dy}\right)}{dy'}}{\left(\dfrac{dF}{dy}\right)},$$

ce qui donne comme condition que trois relations se réduisent algébriquement à une seule. Ici encore les transformations qu'on obtient appartiennent à une classe déjà indiquée, définie par quatre relations du premier ordre par rapport aux lettres accentuées, du second par rapport aux autres et telles que les déterminants déduits de la matrice (27) (Chap. II) soient nuls comme conséquence de ces relations. Pour indiquer un exemple, supposons que F ne contienne que x, z, q, s, t; un seul des mineurs déduit de D procure une condition. Des deux relations que l'on adjoint pour former (C^2), une seule contient p, nous éliminons le rapport $\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} : \dfrac{d^2F}{dx'^2}$ entre l'autre et la condition dont nous venons de parler; nous obtenons ainsi une équation aux dérivées partielles pour déterminer la fonction F de x', y', z', y, z, q, s, t, de façon à ce qu'elle définisse une transformation entre deux équations du troisième ordre; à toute solution de (Θ) en correspondent de (θ) dépendant d'une constante arbitraire. — Les équations (Θ) que nous avons obtenues admettent des caractéristiques du premier ou du deuxième ordre, comme on s'en assure en appliquant les résultats généraux que nous avons établis.

12. Une propriété fondamentale distingue le cas où $n=3$ de celui où $n=2$.

Nous avons vu qu'une équation quelconque du deuxième ordre peut s'obtenir comme équation (θ) d'une infinité de transformations ; nous allons montrer qu'une équation du troisième ordre quelconque ne peut être obtenue de cette façon.

Employons une représentation géométrique analogue à celle qui a été employée pour les équations du second ordre; α, β, γ, δ représentent les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions (ε). Une équation du troisième ordre

$$f(\alpha,\beta,\gamma,\delta,r,s,t,p,q,z,x,y)=0 \tag{26}$$

peut donc s'interpréter comme étant l'équation d'une surface à trois dimensions de (ε), soit (h). Supposons que $f=0$ soit l'équation (θ) d'une transformation définie par $F=0$. Posons

$$\frac{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{F_r}=u,\qquad \frac{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{F_r}=v,\qquad \frac{F_s}{F_r}=w,\qquad \frac{F_t}{F_r}=\rho,$$

et admettons que u, v, w, ρ représentent les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions (ε'). Considérons la transformation de contact entre (ε) et (ε') définie par les deux relations

$$(29)\qquad \begin{cases} u+\alpha+\beta w+\gamma\rho=0, \\ v+\beta+\gamma w+\delta\rho=0. \end{cases}$$

La façon dont on suppose obtenue l'équation $f=0$ s'interprète ainsi: u, v, w, ρ dépendent de trois paramètres x', y', z' liés par la relation $F=0$, ils définissent donc une multiplicité à deux dimensions de (ε'); par la transformation de contact, il lui correspond une surface à trois dimensions de (ε): (h); mais réciproquement à (h) doit correspondre une multiplicité à deux dimensions de (ε'); or, en général, étant donnée une surface (h) quelconque, il lui correspond, par la transformation de contact, une surface de (ε) à trois dimensions. Pour qu'il lui corresponde une multiplicité à deux dimensions, il faut que (h) soit intégrale d'une équation du deuxième ordre, comme il résulte de la théorie des transformations de contact. Soient

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3, z;\, x'_1, x'_2, x'_3, z')=0,$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3, z;\, x'_1, x'_2, x'_3, z')=0,$$

les relations qui définissent la transformation entre deux espaces (x_1, x_2, x_3, z), (x'_1, x'_2, x'_3, z'); nous leur adjoignons:

$$\frac{\dfrac{d\Phi_1}{dx_1}}{\dfrac{d\Phi_2}{dx_1}}=\frac{\dfrac{d\Phi_1}{dx_2}}{\dfrac{d\Phi_2}{dx_2}}=\frac{\dfrac{d\Phi_1}{dx_3}}{\dfrac{d\Phi_2}{dx_3}}.$$

Formons la relation obtenue en égalant à zéro le déterminant fonctionnel par rapport à x'_1, x'_2, x'_3, z' des quatre relations obtenues; l'équation du deuxième ordre dont nous venons de parler, U, admet une intégrale intermédiaire V, qui s'obtient par l'élimination de x'_1,

x'_2, x'_1, z' entre les cinq relations formées. Si nous choisissons (h) parmi les intégrales de cette équation, U, qui ne sont pas intégrales de V, en général il lui correspond une multiplicité à deux dimensions de (ε') dont les équations sont

$$k_1(u, v, w, \rho) = 0, \qquad k_2(u, v, w, \rho) = 0,$$

d'où l'on déduit un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre pour déterminer F et il faut qu'il admette une solution dépendant de trois constantes arbitraires, ce qui n'a pas lieu en général. Il faut d'ailleurs remarquer que, lorsque cela se produit, l'équation du troisième ordre (26) se transforme en un système en z', à moins qu'elle ne satisfasse encore à d'autres conditions. On peut du reste indiquer aisément une classe d'équations du troisième ordre qui sont certainement équations (θ) d'une transformation $F = 0$; ce sont celles qui ont pour équation

$$f(x, y, z, p, q, s, t, \gamma, \delta) = 0,$$

et pour lesquelles on peut établir une théorie analogue à celle des équations du deuxième ordre en recherchant une fonction F où ne figure pas r.

Les équations d'ordre supérieur au troisième se comportent d'une manière analogue à celle dont se comportent les équations de cet ordre; mais pour fournir des exemples, au fur et à mesure que l'ordre s'élève, on doit se reporter à des articles de plus en plus éloignés du tableau de discussion.